OSNOVI MATEMATIČKE FIZIKE

Tatjana Vuković
Saša Dmitrović

Univerzitet u Beogradu
Fizički Fakultet

OSNOVI MATEMATIČKE FIZIKE
elektronsko izdanje

Autori: Prof. dr TatjanaVuković
Doc. dr Saša Dmitrović

Izdavač: Univerzitet u Beogradu,
Fizički fakultet
Studentski trg 16, Beograd
http://www.ff.bg.ac.rs

Recenzenti: Prof. dr Milan Damnjanović
Prof. dr Ivanka Milošević

ISBN 978-86-84539-15-3

Predgovor

Ovaj udžbenik je nastao na osnovu kurseva Osnovi matematičke fizike i Metode matematičke fizike, koje autori već duži niz godina drže na Fizičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Navedeni kursevi su namenjeni studentima smerova Opšta fizika (A smer), Primenjena i kompjuterska fizika (C smer), Metereologija (M smer) na Fizičkom Fakultetu kao i smeru Astrofizika na Matematičkom fakultetu.

Okosnica kursa je linearna algebra, na koju se odnose prve dve glave. U trećoj glavi su izloženi osnovni pojmovi vektorske analize. Imajući u vidu studijske smerove kojima je udžbenik namenjen, akcenat je stavljen na primene i konkretne primere, kao i njihovu vizualnu prezentaciju. Nivo strogosti izlaganja je standardan za fiziku i tehničke nauke.

Autori se zahvaljuju recenzentima na korisnim sugestijama, asistentkinji Aleksandri Dimić i studentima druge godine C smera školske 2016/2017. na ispravkama grešaka uočenih u preliminarnoj verziji teksta.

Sadržaj

Notacija

Oznaka	Značenje
$\mathbb{R}$	polje realnih brojeva
$\mathbb{C}$	polje kompleksnih brojeva
$\mathbb{F}$	proizvoljno polje
$\alpha, \beta, \ldots$	skalari (elementi polja)
α^*	kompleksna konjugacija skalara α
$\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$	vektori
$\vec{u}, \vec{v}, \ldots$	vektori iz $\mathbb{R}^n$; usmerene duži
$\\|\mathbf{v}\\|$	norma vektora $\mathbf{v}$
$(\mathbf{v}, \mathbf{u})$	skalarni proizvod vektora $\mathbf{v}$ i $\mathbf{u}$
$\mathbf{v}_{\parallel}$	projekcija vektora $\mathbf{v}$ na poznati pravac
$\mathbf{v}_{\perp}$	normala vektora $\mathbf{v}$ na poznati pravac
$\mathbb{C}^n$	vektorski prostor kompleksnih kolona dužine n
$\mathbb{R}^n$	vektorski prostor realnih kolona dužine n
$\mathbb{F}^{m\times n}$	vektorski prostor matrica tipa $m \times n$ nad poljem $\mathbb{F}$
$P_n(\mathbb{F})$	vektorski prostor polinoma nad poljem $\mathbb{F}$ stepena ne većeg od n
$C(\mathbb{R})$	vektorski prostor neprekidnih realnih funkcija
$C([a,b])$	vektorski prostor neprekidnih realnih funkcija definisanih na intervalu (a,b)
$L(S)$	lineal nad skupom S (skup svih linearnih kombinacija vektora iz S)
$\hat{L}(U,V)$	vektorski prostor svih linearnih operatora iz U u V
$\dim V$	dimenzija vektorskog prostora V
$N(A)$	nulpotprostor operatora A
$R(A)$	prostor likova operatora A
$A^\dagger$	adjungovani operator od A
$[\mathbf{x}]_B$	matrica kolona koja reprezentuje vektor $\mathbf{x}$ u bazisu B
$[A]_B$	matrica koja reprezentuje operator A u bazisu B
$\mathcal{A}$	matrica koja reprezentuje operator A u poznatom bazisu
$\hat{A}$	opservabla A u kvantnoj mehanici
$D_{\vec{n}}f$	izvod skalarnog polja f u pravcu orta $\vec{n}$
∇	nabla, tj. Hamiltonov operator
$\triangle$	Laplasov operator
$\dot{+}$	direktna suma
$\oplus$	ortogonalna suma
$:=$	jednako po definiciji
$Q.E.D.$	kraj dokaza (Quod Erat Demonstrandum)

Glava 1

Vektorski prostori

1.1 Uvod

Pre nego što definišemo šta su vektorski prostori podsetimo se nekoliko pojmova sa prethodnih kurseva matematike.

Neka je na skupu G definisana binarna operacija $\circ$ koja proizvoljni par elementa g_1 i g_2 skupa G preslikava u treći element iz G: $g_1 \circ g_2 \in G$ (ova osobina se naziva zatvorenost). Takođe, neka su ispunjene i sledeće osobine:

(i) operacija je *asocijativna*: $(\forall g_1, g_2, g_3 \in G)\ g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$;

(ii) u G postoji element, označićemo ga sa e, za koji važi: $(\forall g \in G)\ g \circ e = e \circ g = g$; e zovemo *neutralni element*;

(iii) za svaki element g iz G postoji tačno jedan element $h \in G$ tako da važi: $g \circ h = h \circ g = e$; Element h zovemo *inverzni* element od g za operaciju $\circ$, i označavamo ga sa g^{-1}.

Tada kažemo da je G *grupa* u odnosu na definisanu binarnu operaciju $\circ$, ili da je uređeni par $(G, \circ)$ algebarska struktura koja se naziva grupa.

Ako bismo na istom skupu definisali neku drugu binarnu operaciju koja ima sve navedene osobine dobili bi različitu grupu.

Primer 1.1.1. Skup celih brojeva $\mathbb{Z}$ je grupa u odnosu na operaciju sabiranja: tj. $(\mathbb{Z}, +)$ je grupa. Medjutim, ovaj skup nije grupa u odnosu na operaciju množenja. Zašto? Da li je moguće naći neki drugi podskup skupa realnih brojeva koji jeste grupa u odnosu na množenje?

Primer 1.1.2. Posmatrajmo skup vektora u ravni xOy, označićemo ga kao $\mathbb{R}^2$. Neka je binarna operacija upravo sabiranje vektora, iz njenih osobina jasno je da je ovaj skup vektora grupa u odnosu na sabiranje vektora.

Primer 1.1.3. Razmotrimo skup polinoma $p(t)$ stepena ne većeg od n, gde je t nezavisna promenljiva. Označićemo ga sa P_n. Zbir dva ovakva polinoma je sigurno polinom koji pripada ovom skupu, a lako se vidi i da su zadovoljene sve ostale osobine neophodne da P_n bude grupa u odnosu na sabiranje.

Primetimo da je kod svih navedenih primera grupa, redosled sabiraka nebitan. Ovo ne mora uvek da bude ispunjeno, ali ako jeste, tj. ako za grupu $(G, \circ)$ važi da je za $(\forall g_1, g_2 \in G) \quad g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$, kažemo da je G *komutativna grupa* (ili Abelova grupa).

Sledeća algebarska struktura koja nam je potrebna je polje.

Def. 1.1. *Skup $\mathbb{F}$ u kojem su definisane dve zatvorene binarne operacije naziva se polje, i označava sa kao trojka $(\mathbb{F}, +, \cdot)$, ako su ispunjene sledeće osobine:*

(i) par $(\mathbb{F}, +)$ je Abelova grupa čiji je neutralni element označen sa 0;

(ii) par $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa čiji je neutralni element označen sa 1;

(iii) važi zakon distribucije: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ za svako a, b, $c \in \mathbb{F}$.

U skupu realnih brojeva imamo definisane dve binarne operacije: sabiranje i množenje. Zbog osobina ovih operacija $\mathbb{R}$ je polje, isto kao i skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Naravno, u matematici postoje brojni primeri polja, npr. konačna polja $\mathbb{F}_p$, polja algebarskih brojeva itd., ali nas će interesovati samo polje realnih i kompleksnih brojeva: $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Polje ćemo označavati sa $\mathbb{F}$, njegove elemente ćemo zvati skalari i uglavnom ih označavati grčkim slovima.

1.1.1 Definicija vektorskog prostora

Vektori se na kursevima matematike u srednjoj školi definišu kao objekti sa pravcem, smerom i intenzitetom ili jednostavno kao familije usmerenih duži ("strelica"). Za njih je karakteristično to što imaju geometrijska svojstva (pravac, smer, dužina), a ujedno ih je moguće sabirati (nadovezivanjem ili pravilom paralelograma) i množiti realnim brojem (skaliranje duži), što je karakteristika algebarskih objekata (brojeva i izraza). Kombinovanjem obe operacije dobijamo linearnu kombinaciju, koja za k vektora glasi: $\alpha_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + \alpha_2 \vec{\mathbf{x}}_1 + \ldots \alpha_k \vec{\mathbf{x}}_k$. Na taj način je omogućeno da se geometrijske osobine figura definišu algebarskim jezikom, pomoću jednačina.

Na kursevima fizike, vektori spadaju u osnovne pojmove. Neke od osnovnih fizičkih veličina, poput brzine, ubrzanja i sile, su vektorske. To znači, na primer, da ako na neko telo deluje više sila, rezultujuća sila se dobija pravilom vektorskog sabiranja, a ne prostim sabiranjem intenziteta (kao npr. ukupna masa sistema).

Pojam vektora u linearnoj algebri se dobija *uopštenjem* ili apstrakcijom osobina usmerenih duži. [1] Vektor se definiše pomoću algebarskih pojmova, kao algebarska struktura. Prednost takvog pristupa je u tome što je mnoštvo različitih objekata, usmerene duži, uređene $n-$torke brojeva, polinome, funkcije, matrice itd. moguće proučavati pomoću iste teorije: jedna te ista teorema je primenljiva na sve njih. Ispostavlja se da je za formulisanje kvantne mehanike potreban upravo ovaj pristup.

Def. 1.2. *Neka su $\mathbb{F}$ i V dva skupa, od kojih je prvi polje a drugi Abelova grupa u odnosu na operaciju sabiranje. Elemente skupa $\mathbb{F}$ zovemo skalari, a elemente skupa V vektori. Na skupu $\mathbb{F} \times V$ definisano je preslikavanje: $\mathbb{F} \times V \mapsto V$ koje nazivamo množenje vektora skalarom. Ako ovo preslikavanje ima sledeće osobine:*

(i) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F})(\forall \mathbf{x} \in V)\ \alpha(\beta \mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ *(asocijativnost),*

(ii) $(\forall \alpha \in \mathbb{F})(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)\ \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ *(distributivnost u odnosu na sabiranje vektora),*

[1] Linearna algebra ne govori o tome šta su vektori, već šta je sa njima moguće raditi.

(iii) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F})(\forall \mathbf{x} \in V)$ $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ *(distributivnost u odnosu na sabiranje skalara),*

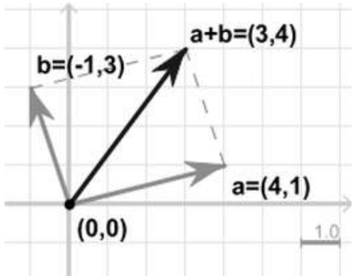
(iv) $(\forall \mathbf{x} \in V)$ $\quad 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, *gde je* 1 *neutralni element iz* $\mathbb{F}$ *u odnosu na množenje,*

kažemo da je V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *i označavamo ga sa* $V(\mathbb{F})$.

U vektorskom prostoru $V(\mathbb{F})$ imamo definisane dve operacije: sabiranje vektora i množenje vektora skalarom. Zbog zatvorenosti, svaka linearna kombinacija proizvoljnog broja vektora iz $V(\mathbb{F})$ je takođe vektor iz tog prostora. Pojam linearne kombinacija je bitna karakteristika vektorskog prostora: može se reći da je vektorski prostor svaki skup koji je zatvoren za linearne kombinacije, tj. koji sadrži svaku linearnu kombinaciju svojih elemenata.

Primer 1.1.4. Uređene $n-$torke realnih brojeva. Za svaki prirodan broj n, vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ je definisan kao skup svih realnih $n-$torki $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. One su uređene, pa je redosled brojeva α_i, koje nazivamo komponentama vektora, bitan. Dva vektora su jednaka ako su mu jednake odgovarajuće komponente: $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$, $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \cdots, \alpha_n = \beta_n$. Sabiranje vektora je definisano sa

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) := (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n),$$



Slika 1.1: Veza prostora usmerenih strelica u ravni i $\mathbb{R}^2$.

a množenje skalarom sa

$$\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) := (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \cdots, \gamma\alpha_n).$$

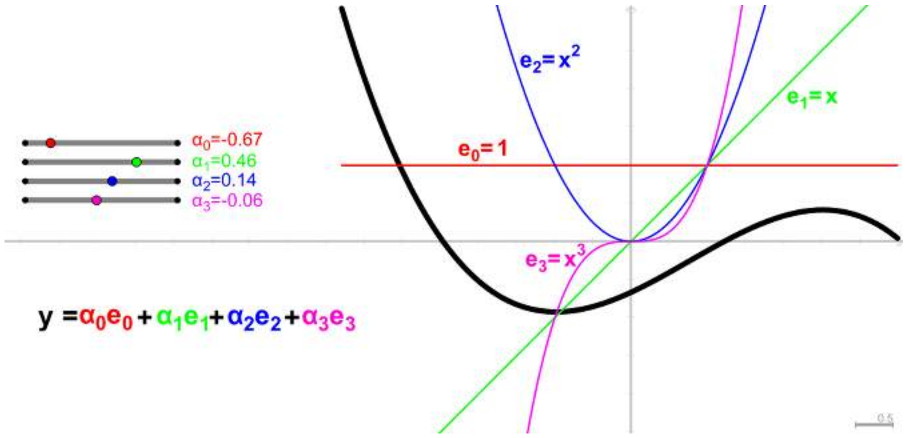
Nulti vektor je $(0, 0, \cdots, 0)$, a inverzni od $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ je $(-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots, -\alpha_n)$. Ovaj primer vektorskog prostora se obično javlja pri rešavanju sistema linearnih algebarskih ili diferencijalnih jednačina. Ako nepoznate veličine objedinimo u jednu $n-$torku, tada umesto sistema od n spregnutih jednačina dobijamo jednu vektorsku. Familija usmerenih duži (strelica) u trodimenzionalnom prostoru se izborom koordinatnog sistema i primenom konvencije da se svaka strelica prikazuje tako da joj je početak u koordinatnom početku, svodi na prostor $\mathbb{R}^3$: uređene trojke su onda koordinate vrhova strelica. Slično je i u $\mathbb{R}^2$ (slika 1.1): vektor u ravni zadat je parom koordinata.

Zadatak 1.1.1. Da li je skup svih usmerenih duži sa početkom u koordinatnom početku i krajem u prvom kvadrantu vektorski prostor?

Primer 1.1.5. Prostor uređenih $n-$torki kompleksnih brojeva, $\mathbb{C}^n$, definiše se analogno, samo su komponente vektora α_i kompleksni brojevi.

Primer 1.1.6. Prostor matrica $m \times n$. Za $m, n \geq 1$, skup svih $m \times n$ realnih (ili kompleksnih) matrica je vektorski prostor u odnosu na sabiranje matrica i množenje matrica realnim (kompleksnim) brojem i označava se sa $\mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$). On je potpuno analogan prostoru realnih (kompleksnih) $n-$ torki, samo su komponente, koje sada nazivamo matričnim elementima, umesto u jednu, raspoređene u nekoliko vrsta, pa otuda njihove slične oznake. Matrice se veoma često koriste, npr. kod rešavanja sistema linearnih jednačina, za reprezentovanje linearnih preslikavanja, ali i u računarskoj grafici.

Primer 1.1.7. Prostor polinoma stepena ne većeg od n. Sa $P_n(\mathbb{R})$, $n \geq 0$ označavamo vektorski prostor polinoma sa jednom realnom promenljivom, stepena koji nije veći od n. Neka je promenljiva označena sa x. Tada su elementi vektorskog prostora npr. $P_3(\mathbb{R})$ polinomi oblika $\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$, pri čemu su koeficijenti α_i realni brojevi. Sabiranje i množenje skalarom se svode na sabiranje polinoma i množenje polinoma brojem. Primer linearne kombinacije vektora iz $P_3(\mathbb{R})$ je prikazan na slici 1.2.



Slika 1.2: Grafik linearne kombinacije polinoma kao vektora iz prostora $P_3(\mathbb{R})$.

Zadatak 1.1.2. Da li je skup svih realnih polinoma stepena n vektorski prostor?

Zadatak 1.1.3. Da li je skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, vektorski prostor na poljem realnih brojeva u odnosu na sabiranje kompleksnih brojeva i množenje realnim brojem?

Zadatak 1.1.4. Položaj tačaka na Zemlji je moguće opisati sa dva broja, geografskom širinom i dužinom. Na primer, u Knez Mihailovoj ulici obeležene su koordinate Beograda: 44°49′14” SGŠ, 20°27′44” IGD. Da li je skup svih geografskih koordinata vektorski prostor?

Zadatak 1.1.5. Većina kolača se pravi od relativno malog broja namirnica, npr. šećer, brašno, maslac, jaja, mleko itd. Vrsta kolača zavisi od izbora i udela pojedinih namirnica, tj. može se predstaviti kao linearna kombinacija namirnica. Da li je, u tom smislu, skup svih kolača vektorski prostor?

Posmatrajmo neki podskup W vektorskog prostora $V(\mathbb{F})$. Pošto znamo da sabiramo i množimo skalarom vektore iz ovog skupa, i on sam je vektorski prostor nad istim poljem $\mathbb{F}$ ako je zatvoren u odnosu na te dve operacije.

Def. 1.3. *Neprazan podskup W vektorskog prostora $V(\mathbb{F})$ je potprostor, što se označava kao $W < V$, ako zajedno sa svakim svojim parom vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, sadrži i svaku njihovu linearnu kombinaciju $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}$, odnosno ako važi da:*

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}) \quad \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in W.$$

Primer 1.1.8. Prostor svih realnih polinoma: Videli smo da je skup $P_n(\mathbb{R})$, tj. svih polinoma maksimalnom stepena n sa realnim koeficijentima, vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Skup svih polinoma, bez obzira na stepen, $P(\mathbb{R}) = \cup_{n=0}^{\infty} P_n(\mathbb{R})$, je, takođe, vektorski prostor. Svaki od prostora $P_n(\mathbb{R})$ je jedna potprostor u $P(\mathbb{R})$.

Primer 1.1.9. Prostor neprekidnih funkcija: Ne postoji ništa što polinome čini pogodnijim kandidatima za vektorski prostor od ostalih neprekidnih funkcija. Zbir neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija, $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$, a isto važi i za neprekidnu funkciju pomnožena brojem: $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$. Sa $C(\mathbb{R})$ označavamo vektorki prostor svih neprekidnih funkcija realnog argumenta nad poljem $\mathbb{R}$.

Primer 1.1.10. Prostor neprekidnih funkcija na segmentu: Nije čak neophodno ni da posmatramo čitav domen funkcije tj. celu realnu osu, već je dovoljan i podskup, kao npr. segment $[0, 1]$. Sa $C([0, 1])$ označavamo prostor neprekidnih funkcija na segmentu $[0, 1]$. $C([0, 1])$ nije potprostor od $C(\mathbb{R})$ jer funkcije neprekidne na segmentu $[0, 1]$ ne moraju biti neprekidne na celoj realnoj osi. Takođe, dve neprekidne funkcije koje su različite na $\mathbb{R}$ mogu biti jednake na $[0, 1]$, na primer, funkcije $f(x) = x$ i $g(x) = |x|$ su jednake na $[0, 1]$.. Međutim ako u $C([0, 1])$ izdvojimo skup funkcija koje su neprekidne na celoj realnoj osi, dakle ne samo na segmentu, dobijamo potprostor u $C([0, 1])$.

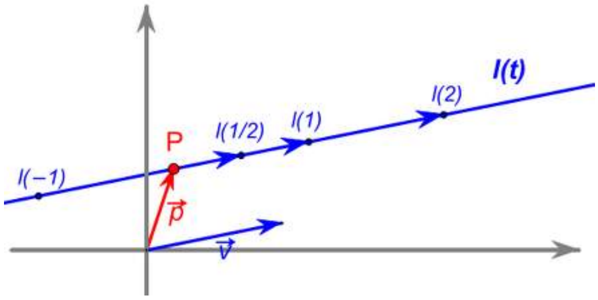
Zadatak 1.1.6. Za kvadratne matrice (matrice tipa $n \times n$) je definisana operacija *trag* kao zbir svih elemenata na dijagonali: $\text{tr}A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, gde je sa a_{ij} označen matrični element matrice. Da li je skup svih matrica nultog traga $S = \{A \mid A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \text{tr}A = 0\}$ potprostor u $\mathbb{R}^{n\times n}$?

Neka je $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ neki neprazan podskup od $V(\mathbb{F})$. Proširimo ovaj skup tako što ćemo dodati sve linearne kombinacije ovih vektora. Dobijeni skup naziva se lineal nad skupom S i označava kao $L(S)$. Jasno je da je $L(S)$ potprostor u $V(\mathbb{F})$: konstruisan je tako da je zatvoren u odnosu na linearne kombinacije.

Primer 1.1.11. Posmatrajmo skup koji sadrži sve umnoške nekog fiksiranog vektora $\mathbf{x}$ iz $\mathbb{R}^3$, tj. $S = \{\alpha\mathbf{x} \mid \forall\alpha \in \mathbb{R}\}$. Ovaj skup je očigledno vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ jer je zatvoren u odnosu na linearne kombinacije. Zato je umesto gore date definicije skupa dovoljno reći da je S lineal nad skupom koji je u našem primeru jednočlan $\{\mathbf{x}\}$: $S = L(\{\mathbf{x}\})$.

Zadatak 1.1.7. Da li je moguće da su lineali nad dva različita skupa isti?

Primer 1.1.12. Parametarska jednačina prave: Neka je u trodimenzionom prostoru data tačka P, čiji je radijus vektor $\vec{p}$, i vektor $\vec{v}$, koji ćemo nazvati vektorom pravca (vidi sliku 1.3). Postoji beskonačno mnogo pravih koje prolaze kroz tačku P, ali je samo jedna od njih paralelna sa vektorom $\vec{v}$. Označimo je sa l. Radijus vektor proizvoljne tačke na pravoj l se može predstaviti kao $\vec{p} + t\vec{v}$ gde je t tačno jedan realan broj. Dakle, proizvoljna tačka na pravoj l je definisana realnom parametrom t, pa je parametarska jednačina prave l :



Slika 1.3: Parametarska jednačina prave.

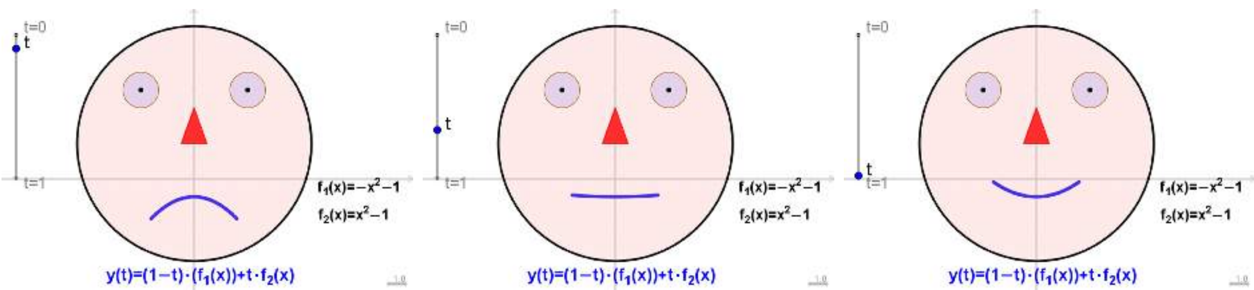
$$\vec{r}_l(t) = \vec{p} + t\vec{v}.$$

Ako nam je potrebna jednačina prave l koja prolazi kroz dve tačke, npr. P i Q čiji su radijus vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ respektivno, tada je $\vec{v}$ vektor koji spaja P i Q, pa je

$$\vec{r}_l(t) = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}) = (1-t)\vec{p} + t\vec{q}.$$

Ako parametar t interpretiramo kao vreme, tada je prava l putanja objekta koji se u trenutku $t = 0$ nalazi u tački P, a u trenutku $t = 1$ u tački Q. Inače, u matematici, linearne kombinacije dva vektora $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$, kod kojih je $\alpha = 1 - \beta$ nazivamo *konveksnim kombinacijama*.

Na analogan način je moguće napisati i jednačinu ravni. Ravan u $\mathbb{R}^3$ je definisana sa dva linearno nezavisna vektora pravca $\vec{v}$, $\vec{u}$ i jednom tačkom P koja pripada ravni. Njena parametarska jednačina, tj. jednačina koja daje radijus vektor proizvoljne tačke u ravni, sadrži dva realna parametara t i s, i glasi: $\vec{r}(t,s) = \vec{p} + t\vec{v} + s\vec{u}$. Konačno, jasno je da sve ostaje isto i ako smo u $\mathbb{R}^n$: samo su svi vektori sad iz tog prostora, a ne iz $\mathbb{R}^3$.



Slika 1.4: Izrazi lica dobijeni parametrizacijom familije parabola.

Primer 1.1.13. Ideju formiranja konveksnih kombinacija je moguće primeniti i na vektore iz drugih vektorskih prostora, npr. na polinome. Na slici 1.4, osmeh je animiran pomoću konveksnih kombinacija. Naime, oblik usta je prikazan kao grafik polinoma. "Najtužniji" izraz lica odgovara grafiku funkcije $f_2(x) = -x^2 - 1$, a "najradosniji"grafiku funkcije $f_1(x) = x^2 - 1$. Ostali simetrični izrazi lica se dobijaju konveksnim kombinacijama ekstremnih, pa njihova parametrizovana forma glasi:

$$y(t, x) = (1 - t) \cdot f_1(x) + t \cdot f_2(x).$$

1.1.2 Linearna nezavisnost vektora i bazis

Očigledno, vektorski prostor nad realnim ili kompleksnim poljem, sadrži beskonačno mnogo vektora. Koristeći opearacije definisane u vektorskom prostoru vidimo da svaki podskup S generiše jedan širi skup: $L(S)$. U posebnim slučajevima podskup generiše ceo prostor, te se proučavanje prostora može svesti na proučavanje takvog podskupa.

Postavlja se pitanje da li je moguće odrediti neki minimalan podskup vektora $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ (n je prirodan broj) tako da se bilo koji vektor iz $V(\mathbb{F})$ može napisati kao njihova linearna kombinacija, tj. da:

$$(\forall \mathbf{x} \in V(\mathbb{F}))(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_2 \in \mathbb{F}) \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i. \tag{1.1}$$

Ako skup X zadovoljava gornji uslov (1.1), kažemo da je on *obrazujući*.

Jasno je da to ustvari znači da je $L(X) = V(\mathbb{F})$. Ako proširimo skup X tako što mu dodamo bilo koji vektor koji je i sam linearna kombinacija vektora iz X očigledno ćemo opet dobiti da je novi skup X' takođe obrazujući. Zato tražimo da je X minimalan skup vektora za koje je ispunjen uslov (1.1): nijedan vektor iz X ne sme biti linearna kombinacija ostalih jer je on onda suvišan. Tako dolazimo da pojma linearne zavisnosti/nezavisnosti vektora.

Def. 1.4. *Skup vektora $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$, gde je $k \in \mathbb{N}$, je linearno zavisan ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, takvi da je bar jedan od njih različit od nule, i za koje važi da je:*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i = 0. \tag{1.2}$$

U suprotnom, tj. ako je jedino rešenje gornje jednakosti da su svi skalari jednaki nuli, kažemo da je skup S linearno nezavisan.

Iz definicije je jasno da ako je S linearno zavisan, neki od vektora iz tog skupa se može napisati kao linearna kombinacija ostalih: kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ linearno zavisni. Obrnuto, ako nijedan od njih ne možemo da predstavimo kao linearnu kombinaciju ostalih, vektori su linearno nezavisni.

Zadatak 1.1.8. U $\mathbb{R}^3$, vektori $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ i $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix}7 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ su linearno zavisni jer je $\mathbf{x}_2 = 7\,\mathbf{x}_1$, ali $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$ i $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^T$ nisu. Nađite bar još jedan vektor $\mathbf{y}_3$ iz $\mathbb{R}^3$ tako da skup vektora $Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ bude linearno nezavisan.

Primer 1.1.14. Pokažimo da je u prostoru $P_3(\mathbb{R})$ skup vektora $M = \{u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2, u_4 = x^3\}$ (tj. skup monoma) linearno nezavisan. Vektori iz skupa M su linearno nezavisni ako ne postoji nenulti skalari α_i, $i = 1, \cdots, 4$ takvi da je zadovoljena jednakost $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i \mathbf{u}_i = 0$. To je u našem primeru funkcionalna jednakost, tj. jednakost kod koje su na levoj i desnoj strani funkcije: $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i x^{i-1} = 0$.. Funkcionalna jednakost je zadovoljena ako su leva i desna strana jednake za sve vrednosti argumenta, tj. u ovom slučaju za svako $x \in \mathbb{R}$. Međutim, imamo svega četiri nepoznate $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, pa je dovoljno proveriti ispunjenost jednakosti za četiri različite vrednosti argumenta. Uzmimo na primer da je $x = -1, 0, 1, 2.$, funkcionalna jednačina se tada svodi na sistem od četiri algebarske linearne jednačine:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 &= 0, \\
\alpha_1 &= 0, \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0, \\
\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 8\alpha_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

Ovaj sistem jednačina ima jedinstveno rešenje: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Konačno, pokazali smo da je skup vektora M linearno nezavisan.

Zadatak 1.1.9. Pokazati da je u prostoru $C(\mathbb{R})$ skup vektora $T = \{u_1 = 1, u_2 = \sin x, u_3 = \cos x\}$ linearno nezavisan.

Def. 1.5. *Skup vektora $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ iz $V(\mathbb{F})$ je bazis ako je obrazujući i linearno nezavisan.*

Jasno je da bazis nije jednoznačno određen, tj. ima ih beskonačno mnogo, ali broj vektora u bazisu mora biti uvek isti i predstavlja dimenziju vektorskog prostora koju označavamo sa $\dim V(\mathbb{F})$. Ako je broj vektora u bazisu konačan onda kažemo da je vektroski prostor $V(\mathbb{F})$ konačnodimenzionalan. Obično, ako želimo da naglasimo ovu činjenicu dimenziju prostora $n = \dim V(\mathbb{F})$ dopišemo u indeksu: $V_n(\mathbb{F})$. U specijalnom slučaju kada je vektorski prostor trivijalan, tj. $V = \{\mathbf{0}\}$, njegova dimezija je jednaka nuli.

Da naglasimo, ako znamo koja je dimenzija prostora, znamo koliko vektora mora da sadrži bazis. Vektorski prostor $V_n(\mathbb{F})$ je jednak linealu nad proizvoljnim bazisnim skupom sa koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$. Zato, ako smo našli tačno $n = \dim V(\mathbb{F})$ linearno nezavisnih vektora, nije potrebno da proveravamo da li je taj skup obrazujući.

Primer 1.1.15. U prostoru $\mathbb{F}^3$, skup vektora

$$
\left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
$$

čini jedan bazis. Ovaj bazis se naziva *apsolutni bazis*. Kako izgleda apsolutni bazis u prostoru $\mathbb{F}^n$?

Primer 1.1.16. U prostoru $\mathbb{F}^{nn}$ apsolutni bazis čine matrice E_{ij}, tj. $B = \{E_{ij} | i, j = 1, \ldots, n\}$, koje su definisane tako da su im svi matrični elementi jednaki nuli, osim matričnog elementa na mestu ij: on je jednak 1. Ovo se može napisati i na sledeći način: $(E_{ij})_{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$.

Zadatak 1.1.10. Pokazati da je skup monoma $M = \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, v_4 = x^3\}$ jedan bazis u prostoru $P_3(\mathbb{R})$.

Postoje i vektorski prostori koji nisu konačnodimenzionalni [2]. Bazis u takvom prostoru sadrži beksonačno mnogo vektora (nije nužno ni da je prebrojiv). Na primer, u prostoru realnih polinoma $P(\mathbb{R})$, skup monoma proizvoljnog stepena čini jedan prebrojiv bazis: $M = \{x^n |\ n \in \mathbb{N}_0\}$.

Primer 1.1.17. Skup svih neprekidnih funkcija koje su periodične sa periodom $T = 2\pi$, u kojem je definisano množenje realnim skalarom α i sabiranje funkcija, očigledno takođe ima strukturu vektorskog prostora. Skup $X = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$, gde $n \in \mathbb{N}$, je jedan bazis u ovom prostoru.

Značaj pojma bazisa se ogleda u mogućnosti da se ceo vektorski prostor zada samo bazisom, pa da se ostali vektori dobiju kao linearne kombinacije bazisnih.

Def. 1.6. *Neka je $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ bazis u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru $V_n(\mathbb{F})$ i neka je vektor $\mathbf{x} \in V(\mathbb{F})$ linearna kombinacija bazisnih vektora: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i$. Za skalare α_i, $(i = 1, \ldots, n)$ se kaže da su koordinate (ili koeficijenti) vektora $\mathbf{x}$ u bazisu $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$.*

Postavlja se pitanje da li su ove koordinate jedinstvene. Odgovor daje sledeća teorema.

Teorema 1.1. *Svaki vektor iz prostora $V_n(\mathbb{F})$ ima jedinstvene koordinate u datom fiksiranom bazisu.*

Dokaz: Neka je $B = \{\mathbf{x}_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$ bazis u $V_n(\mathbb{F})$. Onda se svaki vektor $\mathbf{x} \in V_n$ može napisati kao linearna kombinacija bazisnih vektora: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i$. Pretpostavimo da se $\mathbf{x}$ može izraziti i kao neka druga linearna kombinacija istih bazisnih vektora: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{x}_i$. Sledi da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{x}_i$, ondosno da je: $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\mathbf{x}_i = 0$. Kako su bazisni vektor linearno nezavisni, znamo da je jedino rešenje ove jednačine: $\alpha_i - \beta_i = 0$ za $i = 1, \ldots, n$. Sledi da su koordinate vektora $\mathbf{x}$ u datom bazisu jednoznačne. Q.E.D.

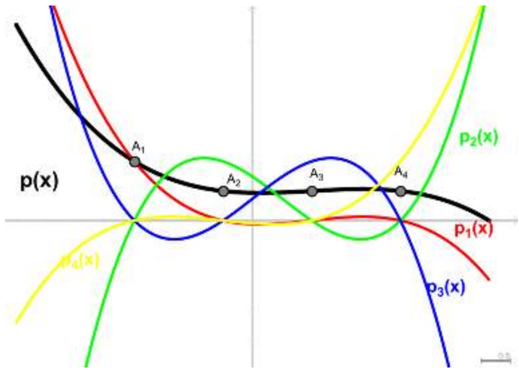
Jasno je da oko promenimo bazis, na primer umesto bazisa $B = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ uzmeno novi bazis $B' = \{\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_n\}$, koordinate vektora $\mathbf{x}$ ne moraju ostati iste. Ono što je sigurno je da ako je $B' \neq B$ sigurno postoje vektori čije su se koordinate promenile. Jedini vektor koji uvek ima iste koordinate, bez obzira koji smo bazis uzabrali, je nulti vektor.

Primer 1.1.18. Dimenziona analiza: Razmotrimo fizičke veličine koje se koriste u mehanici: dužina l, masa m, vreme t, brzina v, ubrzanje a, sila F, itd. Od svih tih veličina, samo prve tri $\{l, m, t\}$ su *osnovne*, a ostale nazivamo *izvedenim* jer se mogu izraziti preko osnovnih. Osnovne veličine se obično obeležavaju velikim slovima, tj. $\{L, M, T\}$, a proizvoljna izvedena veličina se može zapisati u formi: $[x] = L^{d_1} M^{d_2} T^{d_3}$, pri čemu navedeni tip izraza nazivamo *dimenzijom fizičke veličine.* Primer dimenzija mehaničkih veličina su: $[v] = LT^{-1}$, $[V] = L^3$, $[a] = LT^{-2}$, $[F] = MLT^{-2}$... Na taj način je svakoj fizičkoj veličini pridružen vektor (d_1, d_2, d_3) koji nazivamo *dimenzionim vektorom* u bazisu $\{L, M, T\}$. Množenje fizičkih veličina se svodi na sabiranje dimenzionih vektora. Ukoliko jedinice osnovnih veličina, dužine, mase i vremena, zamenimo sa novim, skaliranim $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ puta, tada se brojna vrednost izvedene veličine x, promeni ${\alpha_1}^{-d_1} {\alpha_2}^{-d_2} {\alpha_3}^{-d_3}$ puta.

[2] Beskonačnodimenionalni vektorski prostori izlaze iz okvira ovog kursa.

Skup veličina koju su uzete za osnovne je stvar konvencije (tj. dogovora). Umesto skupa $\{L, M, T\}$ može se izabrati bilo koji skup od tri nezavisne veličine i proglasiti za osnovni. Sve ostale veličine je opet moguće izraziti preko njih. Veličine kojima odgovara nulti dimenzioni vektor se nazivaju bezdimenzionim. Osnovna teorema, tzv. Bakingemova Π teorema [3], na kojoj se zasniva primena dimenzione analize, daje efikasan metod za određivanje skupa bezdimenzionih veličina.

Primer 1.1.19. Lagranžev interpolacioni polinom:Iako je bazis monoma u prostoru polinoma najočigledniji, često se koriste i drugi bazisi, a njihov izbor zavisi od problema koji treba rešiti. Razmotrimo sledeći problem u prostoru $P_3(\mathbb{R})$: da li postoji polinom $p \in P_3(\mathbb{R})$ čiji grafik sadrži (ili prolazi kroz) proizvoljne četiri tačke u ravni $\mathbb{R}^2$: $A_1 = (x_1, y_1), \cdots, A_4 = (x_4, y_4)$ i ako postoji odrediti koji je to polinom? Takav polinom nazivamo *Lagranžev interpolacioni polinom.* Ako bi odredili četiri polinoma $p_i(x) \in P_3(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3, 4$ za koje važi da je $p_i(x_j) = \delta_{ij}$, tada se traženi polinom očigledno može napisati kao njihova linearna kombinacija:



Slika 1.5: Interpolacioni polinom za tačke A_1, A_2, A_3, A_4.

$$p(x) = y_1 p_1(x) + y_2 p_2(x) + y_3 p_3(x) + y_4 p_4(x).$$

Takodje, lako se pokazuje da su ovi polinomi linearno nezavisni, a kako ih ima četiri (tj. bašonoliko kolinaka je dimenzija prosrora $P_3(\mathbb{R})$) oni čine jedan bazis. Same polinome $p_i(x)$ je lako odrediti. Na primer, polinom p_1 mora biti proporcionalan sa $(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ jer su x_2, x_3 i x_4 nule ovog polinoma. Iz uslova $p_1(x_1) = 1$, određujemo i konstantu proporcionalnosti, pa sledi da je

$$p_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}.$$

Analogno dobijamo i ostale elemente bazisa, koji se obično naziva *Lagranžev bazis:*

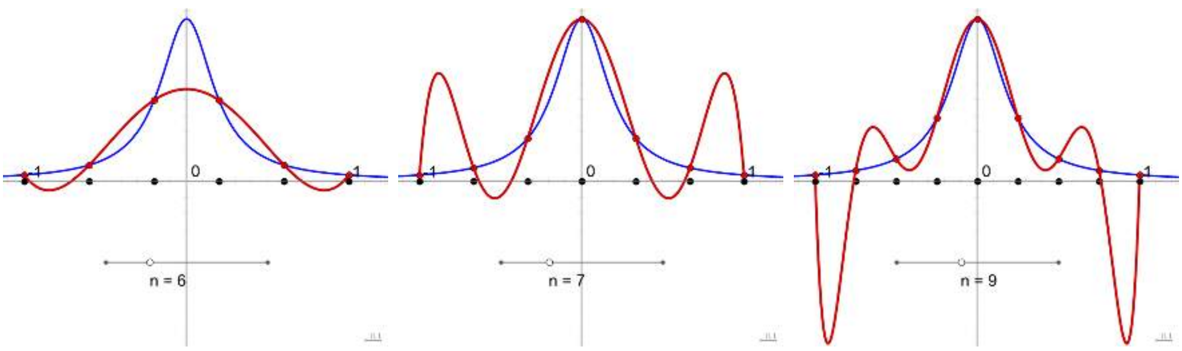
$$p_i(x) = \prod_{1 \le j \le 4 : j \ne i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Primer je ilustrovan na slici 1.5. Dobijeni interpolacioni polinom trećeg stepena je jednoznačno određen.

Primer 1.1.20. U računarskoj grafici je jedan od osnovnih zadataka opis proizvoljnih krivih i površi parametarskim formulama. Obično se glatke krive aproksimiraju polinomima. Ovaj problem je moguće svesti na interpolacioni na sledeći način. Neka je kriva opisana funkcijom $f(x)$ u oblasti $a \le x \le b$. Izdelimo interval $[a, b]$ na n jednakih delova pomoću $n + 1$ ekvidistantnih tačka

[3] Bakingemova teorema je ekvivalentna stavu o jednakosti ranga vrsta i ranga kolona proizvoljne matrice.

$\{x_1 = a, \cdots, x_{n+1} = b\}$. Vrednosti funkcije f u tim tačkama su $\{y_1 = f(x_1), \cdots, y_{n+1} = f(x_{n+1})\}$. Na taj način dobijamo $n+1$ tačaka u ravni sa koordinatama (x_i, y_i). Lagranževom interpolacijom možemo jednoznačno odrediti polinom n stepena koji prolazi kroz te tačke. Međutim, ovakav način interpolacije ne daje uvek dobre rezultate, tj. dobijeni polinom ne aproksimira dobro datu krivu. Kao primer, za funkciju $f(x) = 1/(1+25x^2)$, na slici 1.6 su dati rezultati dobijeni Lagranževom interpolacijom u oblasti $-1 \leq x \leq 1$ za različite vrednosti n. Vidimo da iako se interval deli na sitnije delove, tj. povećanjem stepena intepolacionog polinomom, aproksimacija postaje čak i lošija. Sa povećanjem stepena polinoma, njegov grafik pri krajevima intervala postaje sve oscilatorniji i ta pojava se naziva Rungeov fenomen. Interpolacija je nepodesna kod aproksimacije zbog toga što mala promena položaja samo jedne od interpolacionih tačaka dovodi do znatne promene oblika celog grafika. Za efikasnu aproksimaciju je potrebno da promena položaja jedne od intepolacionih tačaka jako malo utiče na oblik grafika polinoma na celom intervalu (a, b). Zato je primena Lagranževe interpolacije veoma ograničena.



Slika 1.6: Grafik funkcije $f(x) = 1/(1+25x^2)$ (plavo) i grafici interpolacionih polinoma (crveno) stepena 5 (levo), 6 (u sredini) i 8 (desno).

Primer 1.1.21. Bazis Ermitovih kubičnih splajn polinoma: Za aproksimaciju zadate funkcije najčešće se koriste *splajn* funkcije. Neka je interval $[c, d]$, na kome je zadata funkcija $f(x)$, podeljen na n podintervala tačkama $\{x_1 = c \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n+1} = d\}$. Unutar svakog $[x_i, x_{i+1}]$ intervala funkciju aproksimiramo polinomon, ali tako da je ukupna kriva koja se sastoji iz tih polinomialnih delova neprekidno diferencijabilna, tj. klase C_1, i da su njeni izvodi u tačkama x_i jednaki izvodima funkcije f. Tako dobijena kriva naziva se polinomialna splajn funkcija. Razmotrimo slučaj kada su polinomijalni delovi takvi da su to polinomi trećeg stepena. Ermitova teorema tvrdi da za neprekidnu funkciju $f(x)$ na intervalu $[a, b]$, postoji jedinstveni polinom trećeg stepena $p(x)$, tako da važi

$$p(a) = f(a) \equiv y_a, \; p(b) = f(b) \equiv y_b,$$
$$p'(a) = f'(a) \equiv v_a, \; p'(b) = f'(b) \equiv v_b.$$

Ako u $P_3(\mathbb{R})$ uzmeno takozvani Ermitov kubični bazis

$$X = \{h_1(x) = (1-x^2)(1+2x), h_2(x) = x^2(3-2x), h_3(x) = x(1-x^2), h_4(x) = -x^2(1-x)\},$$

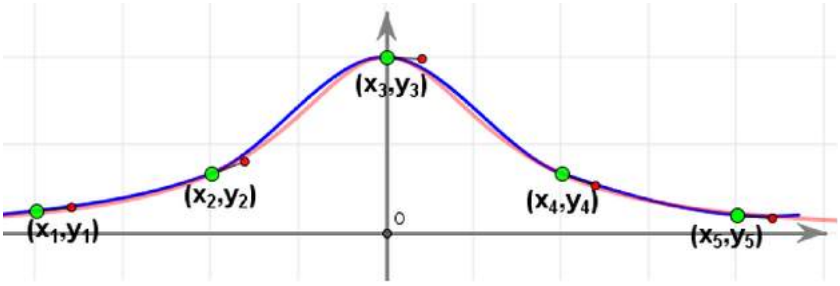
traženi polinom $p(x)$ je oblika:

$$p(x) = h_1(x-a)y_a + h_2(x-a)y_b + h_3(x-a)(b-a)v_a + h_4(x-a)(b-a)v_b,$$

Konačno, na ovaj način dobijena polinomijalna splajn funkcija (ona se naziva Ermitov kubični splajn) je na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ jednaka polinomu:

$$p_i(x) = h_1(x - x_i) \cdot y_i + h_2(x - x_i) \cdot y_{i+1} + h_3(x - x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \cdot v_i + h_4(x - x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \cdot v_{i+1}.$$

Primer aproksimacije zadate funkcije Ermitovim kubičnim splajnom prikazan na slici 1.7.



Slika 1.7: Aproksimacije funkcije $f(x) = 1/(1 + x^2)$ Ermitovim kubičnim splajnom.

1.1.3 Izomorfizam vektorskih prostora

Kao što je već rečeno, u datom bazisu $\{\mathbf{v}_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$ vektorskog prostora $V_n(\mathbb{F})$, svakom vektoru $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \in V_n(\mathbb{F})$ jednoznačno se pridružuje skup skalara iz $\mathbb{F}$, tj. koordinate $\alpha_i \in \mathbb{F}$; $i = 1, \ldots, n$:

$$\mathbf{v} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ovo pridruživanje omogućava da se svaki vektorski prostor dimenzije n nad poljem $\mathbb{F}$ identifikuje sa prostorom brojnih kolona $\mathbb{F}^n$.

Posmatrajmo sad dva vektorska prostora $V(\mathbb{F})$ i $V'(\mathbb{F}')$. Neka je f preslikavanje koje vektore iz $V(\mathbb{F})$ slika u vektore iz $V'(\mathbb{F}')$. Sam V predstavlja domen ovog preslikavanja, tj. f deluje na svaki vektor iz V. Međutim, kodomen nije nužno ceo skup V' već je to njegov podskup

$$f(V) = \{\mathbf{v}' \in V' | (\exists \mathbf{v} \in V)\, f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'\}.$$

Nas interesuje preslikavanje koje održava strukturu vektroskog prostora, odnosno ono koje linearnu kombinaciju vektora slika u linearnu kombinaciju likova tih vektora:

$$f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{v}_i)$$

Ako je ispunjen ovaj uslov, f nazivamo *linearnim preslikavanjem* (ili *homomorfizmom*). Naravno, da bi ovo bilo moguće skalari α_i moraju biti iz $\mathbb{F}'$, odnosno mora biti ispunjen uslov da je $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ (tj. da je $\mathbb{F}$ potpolje od $\mathbb{F}'$).

Primer 1.1.22. Posmatrajmo vektroski prostor koji čine realne diferencijabilne funkcije jedne realne promenljive definisane na $\mathbb{R}$. Diferenciranje, označimo ga sa D, očigledno predstavlja linearno preslikavanje koje svaku funkciju iz ovog prostora preslikava u neku funkciju koja takođe pripada istom prostoru.

Ako je linearno preslikavanje $f : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ takođe i bijekcija, naziva se *izomorfizam*. Dakle, izomorfizam različite vektore iz V preslikava u različite vektore u V'. Takođe, za svaki vektor $\mathbf{v}' \in V'$ postoji vektor $\mathbf{v} \in V$ čiji je on lik: $\mathbf{v}' = f(\mathbf{v})$. Jasno je da ovakvo preslikavanje postoji samo ako su prostori V i V' nad istim poljem $\mathbb{F}$.

Def. 1.7. *Kaže se da je vektorski prostor $V(\mathbb{F})$ izomorfan sa vektorskim prostorom $V'(\mathbb{F})$, što se označava sa $V \cong V'$, ako postoji bijekcija $f : V \mapsto V'$ koja je i linearno preslikavanje, tj.*

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)\,(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}) \quad f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}).$$

Izomorfizam vektorskih prostora je relacija ekvivalencije, pa ako posmatramo skup svih mogućih vektroskih prostora on se može podeliti na klase (podskupove) koji sadrže izomorfne vektorske prostore. Sledeća teorema, pokazuje da u svakoj klasi izomorfnih konačnodimenzionalnih vektorskih prostora postoji tačno jedan prostor kolona $\mathbb{F}^n$.

Teorema 1.2. *Svaki n-dimenzioni vektorski prostor V nad poljem $\mathbb{F}$ je izomorfan prostoru $\mathbb{F}^n$:*

$$V_n(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^n.$$

Dokaz: Neka je $X = \{\mathbf{x}_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$ jedan bazis u prostoru $V_n(\mathbb{F})$. Svaki vektor $\mathbf{x} \in V_n(\mathbb{F})$ se može izraziti kao linearna kombinacija bazisnih vektora: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i$, pri čemu su koordinate α_i $(i = 1, \ldots, n)$ jednoznačno određene (Teorem 1.1). Dakle, preslikavanje $f : V_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^n$, koje preslikava svaki vektor $\mathbf{x}$ u kolonu njegovih koordinata u izabranom bazisu $f(\mathbf{v})$, je bijekcija:

$$\mathbf{x} \leftrightarrow f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Potrebno je još pokazati da je preslikavanje f linearno. Neka je $\mathbf{y}$ proizvoljan vektor iz $V_n(\mathbb{F})$ čiji su koeficijenti u datom bazisu β_i: $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{x}_i$. Kako je $\gamma\mathbf{x} + \delta\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} (\gamma\alpha_i + \delta\beta_i)\mathbf{x}_i$, gde us γ i δ proizvoljna dva skalara iz $\mathbb{F}$, sledi da je: $f(\gamma\mathbf{x} + \delta\mathbf{y}) = \gamma f(\mathbf{x}) + \delta f(\mathbf{y})$. Time smo pokazali da je f zapravo izomorfizam. Q.E.D.

Bitno je uočiti da je izomorfizam f koji je korišćen u dokazu definisan za dati fiksirani bazis X. Zato je zgodno umesto oznake $f(\mathbf{x})$ za kolonu u koju se slika vektora $\mathbf{x}$ koristiti oznaku $[\mathbf{x}]_X$: srednje zagrade označavaju da je to kolona iz $\mathbb{F}$ a u indeksu je oznaka bazisa. Promena bazisa dovodi do promene koeficijenata koje su pridružene vektorima iz $V_n(\mathbb{F})$, tj. vektoru $\mathbf{x}$ u nekom drugom bazisu $X' = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \ldots \mathbf{x}'_n\}$ odgovara kolona $[\mathbf{x}]_{X'}$ sa koeficijentima datim sa $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \mathbf{x}'_i$. Naravno, kao što je već naglašeno, može se desiti da neki vektori i u novom bazisu imaju iste koeficijente, ali ako je u pitanju netrivijalan vektorski prostor, to sigurno ne važi za sve vektore.

Da zaključimo, ako posmatramo konačnodimenzionalne prostore nad poljem $\mathbb{F}$, svi prostori iste dimezije nalaze se u istoj klasi izomorfizama. Sledi da je cela klasa izomorfnih konačnodimenzionalnih prostora određena dimenzijom i poljem. Značaj gornjeg teorema je u tome što bez obzira koji je prostor $V_n(\mathbb{F})$ u pitanju, mi možemo da koristimo izomorfizam i račun sprovodimo sa kolonoma iz $\mathbb{F}^n$.

Ipak, u daljem tekstu, osnovne osobine vektorskih prostora ćemo razmatrati na nivou apstraktnih prostora. Na ovaj način se izbegava dokazivanje nezavisnosti tih osobina od konkretnog izbora bazisa.

Primer 1.1.23. Matrice za koje važi $M = -M^T$ nazivamo antisimetričnim matricama. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^{33}$, skup svih antisimetričnih matrica obrazuje potprostor W(proveriti). Iz uslova antisimetričnosti sledi da dijagonalni elementi matrice moraju biti jednake nuli. Elementi ispod dijagonale su jednaki elementima iznad dijagonale sa suprotnim znakom, pa je opšti oblik realne antisimetrične 3×3 matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Očigledno, sledeće matrice čine jedna bazis u potprostoru W:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle, potprostor antisimetričnih matrica je zapravo jednak realnom linealu nad ovim bazisom. Kako je W trodimenzionalan, sledi da je on izomorfam realnom trodimenzionalnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$.

Primer 1.1.24. Realni lineal nad monomima $\{1, x, x^2\}$ je vektorski prostor polinoma $P_2(\mathbb{R})$. Ako pomnožimo bazisne vektore sa $1/q(x)$, gde je $q(x)$ polinom trećeg stepena, tada je lineal

$$L\left\{\frac{1}{q(x)}, \frac{x}{q(x)}, \frac{x^2}{q(x)}\right\} = R_2(\mathbb{R})$$

vektorski prostor racionalnih funkcija oblika $p(x)/q(x)$ (gde je $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$). Ovaj prostor je očigledno izomorfan sa $P_2(\mathbb{R})$. Neka su x_1, x_2 i x_3 nule polinoma $q(x)$, tj. neka je $q(x) = c(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ gde je c realna konstanta. Kako je:

$$\frac{1}{(x-x_1)} = c\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{q(x)}, \; \frac{1}{(x-x_2)} = c\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{q(x)}, \; \frac{1}{(x-x_3)} = c\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{q(x)},$$

vidimo da i funkcije $\{1/(x-x_1), 1/(x-x_2), 1/(x-x_3)\}$ pripadaju prostoru $R_2(\mathbb{R})$. One su takođe i linearno nezavisne (proveriti), a kako ih ima tri, čine jedan bazis od $R_2(\mathbb{R})$. To znači da svaku funkciju iz prostora $R_2(\mathbb{R})$ moguće predstaviti kao linearnu kombinaciju po novom bazisu, tj.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \frac{C}{(x-x_3)},$$

pri čemu su za svaki polinom $p(x)$ koeficijenti A, B i C jednoznačno određeni. Ovaj razvoj nazivamo razvojem na parcijalne razlomke i obično se koristi kod integracije racionalnih funkcija.

Zadatak 1.1.11. Odrediti razvoj na parcijalne razlomke funkcije $f(x) = \frac{3x^2-3x-1}{x^3-2x^2-5x+6}$, a zatim izračunati integral $\int f(x)\,dx$. Nule polinoma $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ su 1, 3 i -2.

1.2 Skalarni proizvod

U vektorskom prostoru usmerenih duži definisan je i skalarni proizvod. Neka su data dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dužina $\|\vec{a}\|$ i $\|\vec{b}\|$ respektivno. Njihov skalarni proizvod je:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi) \tag{1.3}$$

gde je φ ugao koji zaklapaju ta dva vektora. Ovako definisan skalarni proizvod omogućio je definisanje pojma rastojanja između vektora kao $\|\vec{a}-\vec{b}\|$. Ovaj, dobro poznati, vektorski prostor sa gore definisanim standardnim proizvodom nazivamo označavamo sa E^3.

U vektroskim prostorima $V(\mathbb{F})$ takodje se definiše skalarni proizvod koji predstavlja neku vrstu uopštenja već poznate definicije:

Def. 1.8. Skalarni proizvod *u prostoru $V(\mathbb{F})$ je preslikavanje $(\ ,\ ) : V \times V \mapsto \mathbb{F}$ koje svakom uređenom paru vektora $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in V$ pridružuje skalar iz $\mathbb{F}$ označen sa $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, i ima sledeće osobine:*

(*i*) $(\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V(\mathbb{F}))\, (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)^*$ (ermitska simetrija)*;*

(*ii*) $(\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in V)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F})\, (\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \alpha^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \beta^*(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ (antilinearnost po prvom faktoru)*;*

(*iii*) $(\forall \mathbf{x} \in V)\, (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$*, pri čemu je* $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ *akko je* $\mathbf{x} = 0$ (stroga pozitivnost *ili* pozitivna definitnost)*.*

Vektorski prostor sa definisanim skalarnim proizvodom naziva se *unitarni prostor* ukoliko je nad kompleksnim poljem, dok je za $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ naziv *euklidski prostor*.

Napomenimo da se iz prve i druge osobine lako može pokazati da sledi da je ovako definisan skalarni proizvod linearan po drugom faktoru, tj.

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V(\mathbb{F}))(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F})\, (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

U literaturi, pre svega matematičkoj, nailazi se i na nešto drugačiju definiciju, u kojoj se zahteva antilinearnost skalarnog proizvoda po drugom faktoru, a linearnost po prvom. Međutim, gore navedena definicija je standardna u kvantnoj mehanici.

Iz osobine ermiske simetrije sledi da je skalarni proizvod vektora sa samim sobom uvek realan broj. Treća osobina obezbeđuje dobru definisanost pojma dužine vektora, naravno kako vektori mogu biti različiti entiteti umesto dužine koristi se pojam *norma vektora*, u oznaci $||\mathbf{v}||$ za vektor $\mathbf{v}$ i definisana relacijom:

$$||\mathbf{v}||^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Pojam rastojanja je takodje dobro definisan zahvaljujući ovoj osobini. U opštem slučaju nije moguće definisati ugao između vektora po analogiji sa (1.3). Ovo je moguće uraditi samo ako je polje nad kojim je vektroski prostor definisan realno, tj. ako je u pitanju euklidski prostor. Ugao između vektora $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ definisan je izrazom

$$\cos\theta := \frac{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{||\mathbf{v}_1|| \cdot ||\mathbf{v}_2||}.$$

Treba uočiti da se u istom vektorskom prostoru $V(\mathbb{F})$ mogu definisati različiti skalarni proizvodi i tako dobiti različiti unitarni (ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), odnosno euklidski prostori (ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$).

Iz osobine anti-linearnosti po prvom faktoru, odnosno linearnosti po drugom, sledi da je skalarni proizvod definisan u čitavom vektorskom prostoru $V(\mathbb{F})$ ako je je definisan na bazisnim vektorima. Naime, ako je $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ jedan bazis u vektorskom prostoru sa skalarnim proizvodom, onda za proizvoljna dva vektora $\mathbf{x} = \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i$ i $\mathbf{y} = \sum_i \beta_i \mathbf{v}_i$ dobijamo da je

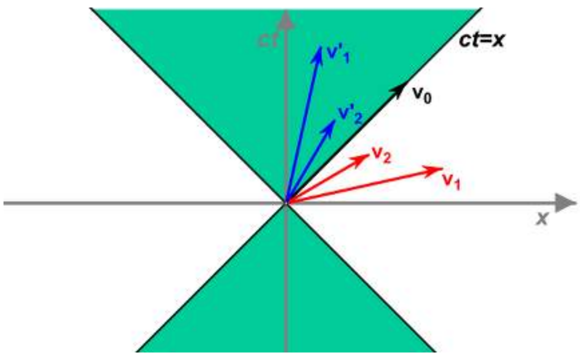
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} \alpha_i^* \beta_j (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j).$$

Definišimo matricu M tako da su njeni matrični elementi dati sa $m_{ij} = (v_i, v_j)$. Skalarni proizvod dva vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ možemo zapisati pomoću matričnog množenja ove matrice i kolona $[\mathbf{x}]_B$ i $[\mathbf{y}]_B$ u koje izomorfizam f iz Teorema 1.2 slika date vektore:

$$(x, y) = [\mathbf{x}]^\dagger M [\mathbf{y}].$$

Matrica M, određena skalarnim proizvodom i zadatim bazisu u $V(\mathbb{F})$, naziva se *metrika* ili *metrički tenzor*. Iz osobine skalarnog prizvoda sledi da je $m_{ij} = m_{ji}^*$, tj. $M = M^\dagger$, kao i da su svi dijagonalni elementi pozitivni: $m_{ii} > 0$ sa svako $i = 1, \ldots n$[4]. Dakle, M je pozitivna i ermitska matrica.

U fizici se ponekad moraju razmatrati i nešto opštiji skalarni proizvodi, kod kojih se ne zahteva osobina stroge pozitivnosti, odnosno metrika nije pozitivna matrica. Ovo uopštenje nosi naziv *indefinitna metrika*. Ipak, i u takvim situacijama se najčešće ispostavlja da je potrebna metrika nesingularna, tj. da je $\det M \neq 0$.



Slika 1.8: Dvodimenzionalni prostor Minkovskog. Unutrašnjost svetlosnog konusa, kojoj pripadaju vektori vremenskog tipa je obojena zeleno. Vektori svetlosnog tipa su prikazani crnom bojom, vremenskog tipa plavom, a prostornog, crvenom. Za prikazane vektore važi: $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1') = 0$, $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2') = 0$, $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) = 0$.

Primer ovakvog vektorskog prostora sa definisanim skalarnim proizvodom preko metrike je prostor Minkovskog. To je četvorodimenzionalan vektorski prostor $\mathbb{R}^4$: vektori su oblika $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} ct & x & y & z \end{pmatrix}^T$ gde su x, y, x Dekartove koordinate, t je vreme, a c brzina svetlosti. "Skalarni proizvod"je zadat metrikom $M = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = [\mathbf{v}_1]^T M [\mathbf{v}_2] = ct_1 ct_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2.$$

Očigledno, postoje vektori $\mathbf{v}$ za koje je skalarni proizvod $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ (na primer svi vektori za koje je $x = y = z = 0$) i njih nazivamo vektorima vremenskog tipa. Međutim, postoje i vektori za koje je $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$ (na primer svi vektori za koje je $t = 0$) i njih nazivamo vektorima prostornog tipa. Takođe, postoje vektori koji nisu nulti, ali im je norma jednaka nuli, tj. ortogonalni su sami na sebe. Ovi vektori, koje nazivamo vektorima svetlosnog tipa, su takvi da je $(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Ovo je jednačina konusa u $\mathbb{R}^4$, tj. vektori $\mathbf{v}$ norme nula obrazuju takozvani svetlosni konus. Svi vektori za koje važi da je $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ nalaze se sa jedne, a oni za koje je $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$ sa druge strane svetlosnog konusa (vidi sliku 1.8).

[4] Matrica za koju je ispunjen ovaj uslov naziva se pozitivnom.

Primer 1.2.1. Razmotrimo prostor polinoma nad realnim poljem npr. $P_3(\mathbb{R})$. Primer skalarnog proizvoda u prostoru polinoma je

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Na osnovu definicije lako je izračunati npr.

$$(x,x^2) = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\,|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Međutim, skalarni proizvod je moguće definisati i na ovaj način:

$$(f,g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx,$$

i u tom slučaju je

$$(x,x^2) = \int_{-1}^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\,|_{-1}^1 = 0.$$

Zapravo, ne postoji nikakav "standardni" skalarni proizvod u prostoru polinoma, pa je u radu sa polinomima uvek potrebno pažljivo definisati skalarni proizvod. Pored granica integracije, moguće je varirati i tzv. težinsku funkciju $h(x)$, pa je opšti primer skalarnog proizvoda u prostoru polinoma

$$(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)h(x)\,dx.$$

Primer 1.2.2. U prostoru realnih neprekidnih funkcija $C([a,b],\mathbb{R})$, definisanih na intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$, standardni skalarni proizvod je definisan sa

$$(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

a u prostoru kompleksnih funkcija $C([a,b],\mathbb{C})$ sa

$$(f,g) := \int_a^b f^*(x)g(x)\,dx.$$

Primer 1.2.3. U prostoru kompleksnih matrica $\mathbb{C}^{m\times n}$ skalarni proizvod je definisan sa

$$(A,B) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^* b_{ij},$$

gde su sa a_{ij} i b_{ij} označeni matrični elementi matrica A i B.

Zadatak 1.2.1. Pokazati da se definicija skalarnog proizvoda u prostoru $\mathbb{C}^{m\times n}$ iz prethodnog primera, svodi na

$$(A,B) := \mathrm{Tr}(A^\dagger B),$$

gde je sa $A^\dagger = (A^T)^* = (A^*)^T$, označena adjugovana matrica A (tj. transponovano-konjugovana matrica A).

Na kraju, napomenimo da ako znamo da su dva vektorska prostora $V(\mathbb{F})$ i $V'(\mathbb{F})$ sa skalarnim proizvodima $(\ ,\ )$ i $(\ ,\ )'$ respektivno izomorfna, tada preslikavanje f, pored uslova izomorfizma iz definicije 1.7, mora ispuniti i uslove za *izometrijsko preslikavanje*: za svako $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ iz $V(\mathbb{F})$ važi da je $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))'$.

1.2.1 Ortonogonalnost vektora

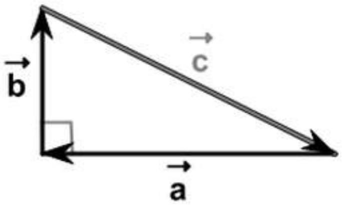
Kako je u euklidskom prostoru moguće definisati ugao između vektora, jasno je da pojam ortogonalnosti vektora ima isti smisao kao i u E^3: ugao između vektora je prav, tj. skalarni proizvod ta dva vektora je jednak nuli. Videli smo da kod prostora nad kompleksnim polje nije moguće iskoristiti skalarni proizvod za definisanje ugla između vektora. Međutim, moguće je definisati ortogonalnost vektora koristeći skalarni proizvod:

Def. 1.9. *Vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ iz vektorskog prostora $V(\mathbb{F})$, u kojem je definisan skalarni proizvod, su međusobno ortogonalni ako važi da je*

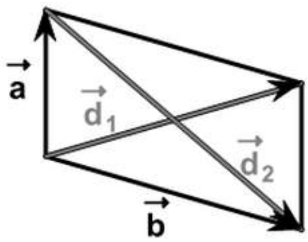
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Zadatak 1.2.2. Pokazati važenje Pitagorine teoreme, tj. da iz $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ sledi da je $\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$, pre čemu je $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Zadatak 1.2.3. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori koji odgovaraju stranicama paralelograma, a $\vec{d_1}$ i $\vec{d_2}$ vektori dijagonala. Pokazati da važi jednakost paralelograma: $2(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2) = \|\vec{d_1}\|^2 + \|\vec{d_2}\|^2$.



Pitagorina teorema



Jednakost paralelograma

Nulti vektor je jedini vektor koji je ortogonalan na sve vektore iz $V(\mathbb{F})$: kako je $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{0}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{0})$ sledi da je $(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$ za proizvoljan vektor x. On je i jedini vektor koji je ortogonalan na samog sebe.

Zbog prednosti u računu posebno su pogodni vektori jedinične dužine, tj. jedinične norme. Ako imamo vektor $\mathbf{v}$ čija je norma $\|\mathbf{v}\| \neq 1$, od njega možemo napraviti *normirani vektor* $\mathbf{e_v}$ koji se dobija tako što $\mathbf{v}$ podelimo sa njegovom normom:

$$\mathbf{e_v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Skup vektora $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ je *ortogonalan* ako je $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$ za svako $i, j = 1, \ldots k$ pri čemu je $i \neq j$. Skup X je *normiran* ako za svako $i = 1, \ldots, k$ važi da je $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 1$.

Def. 1.10. *Skup $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ iz vektorskog prostora $V(\mathbb{F})$, u kojem je definisan skalarni proizvod,je ortonormiran ako je ortogonalan i normiran, tj. ako važi da je:*

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \delta_{ij}, \ \ (i, j = 1, \dots, k).$$

Elementi ortonormiranog skupa zovu se *ortovi*. Dakle, ortonormirani skup čine uzajamno ortogonalni ortovi (tj. uzajamno ortogonalni vektori jedinične norme).

Odnos ortonormiranosti i linearne nezavisnosti opisuje naredna Teorema:

Teorema 1.3. *Svaki ortonormirani skup vektora je linearno nezavisan.*

Dokaz: Neka je $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ ortonormiran skup. Treba pokazati da je jedino rešenje jednakosti $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ upravo: $\alpha_i = 0$ za svako i. Ako ovu jednakost pomnožimo skalarno s leva proizvoljnim vektorom iz skupa X, npr. sa $\mathbf{x}_j$, dobijamo:

$$(\mathbf{x}_j, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i) = 0.$$

Koristeći osobine skalarnog proizvoda, sledi da je: $(\mathbf{x}_j, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i) = \sum_i \alpha_i (\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) = \sum_i \alpha_i \delta_{ji} = \alpha_j$. Kako je vektor $\mathbf{x}_j$ bio proizvoljan, svi koeficijenti α_j, za $j = 1, \dots, k$, su jednaki nuli. Q.E.D.

Da zaključimo, ortonormiranost povlači linearnu nezavisnost, pa je svaki ortonormirani skup vektora koji je i obrazujući jedan bazis, tzv. *ortonormirani bazis* prostora sa skalarnim proizvodom.

Primer 1.2.4. Skup ortova koordinantnih osa $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ je jedan ortonormirani bazis u E^3.

Primer 1.2.5. Razmotrimo vektorski prostor $\mathbb{R}^2$. Vektori $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ čine ortonormirani bazis. U $\mathbb{R}^2$ postoji familija ortonormiranih bazisa definisanih parametrom ϕ : $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \right\}$. Da li postoji dvočlani ortonormirani skup vektora iz $\mathbb{R}^2$ koji ne pripada navedenoj familiji?

Primer 1.2.6. U prostoru $P_4(\mathbb{R})$, skup monoma $\{x^k \,|\, 0 \leq k \leq 4\}$ nije ortogonalan u odnosu na skalarni proizvod $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$. Međutim, skup polinoma

$$\{p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x\ ,\ p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}\ ,\ p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}\,x,\ p_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}\,x^2 + \frac{3}{35}\}$$

jeste. Navedeni polinomi se nazivaju Ležandrovim polinomima i u prostoru svih polinoma $P(\mathbb{R})$ su definisani rekurentnom relacijom:

$$p_{k+1}(x) = \frac{(2k+1)x p_k(x) - k p_{k-1}(x)}{k+1}.$$

Zadatak 1.2.4. Da li Ležandrovi polinomi čine ortonormirani skup u prostoru $P(\mathbb{R})$ u odnosu na skalarni proizvod $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$. Ako je odgovor ne, normirati ih.

Zadatak 1.2.5. Čebiševljevi $T_k(x)$ polinomi, $k \in \mathbb{N}_0$, su definisani rekurentno sa

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x),$$

gde je $T_0(x) = 1$ i $T_1(x) = x$. Generisati skup od prva četiri Čebiševljeva polinoma i proveriti da li su ortogonalni i normirani u odnosu na skalarni proizvod $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx$.

Primer 1.2.7. U prostoru funkcija $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ skup funkcija $\{1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots\}$, je ortogonalan, ali ne i normiran u odnosu na standardni skalarni proizvod $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)g(x)\, dx$:

$$\begin{aligned}
&(1, 1) = 2\pi, \\
&(\cos mx, \cos nx) = \pi\delta_{mn}, \\
&(\sin mx, \sin nx) = \pi\delta_{mn}, \\
&(\cos mx, \sin nx) = 0.
\end{aligned}$$

Napomenimo da je gornje integrale najlakše izračunati koristeći Ojlerove formule:

$$\cos(mx) = \frac{e^{\imath mx} + e^{-\imath mx}}{2}, \ \sin(mx) = \frac{e^{\imath mx} - e^{-\imath mx}}{2\imath}.$$

Normiranjem funkcija iz navedenog skupa dobijamo jedan ortonormirani skup u ovom prostoru:

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots\}$$

Posmatrajmo neki jednodimenioni potprostor u vektorskom prostoru $V(\mathbb{F})$ sa definisanim skalarnim proizvodom. Svaki takav potprostor zvaćem pravcem, po anologija sa E^3. Dakle, pravac je skup svih linearnih kombinacija nad jednim vektorom koji nazivamo vektor pravca. Za vektor pravca je pogodno izabrati normirani vektor $\mathbf{e}$.

Def. 1.11. *Neka su dati vektor* $\mathbf{v}$ *i pravac* $L_\mathbf{e}$ *u vektorskom prostoru* $V(\mathbb{F})$ *sa skalarnim proizvodom Tada je projekcija vektora* $\mathbf{v}$ *na pravac* L_e *definisana sa:*

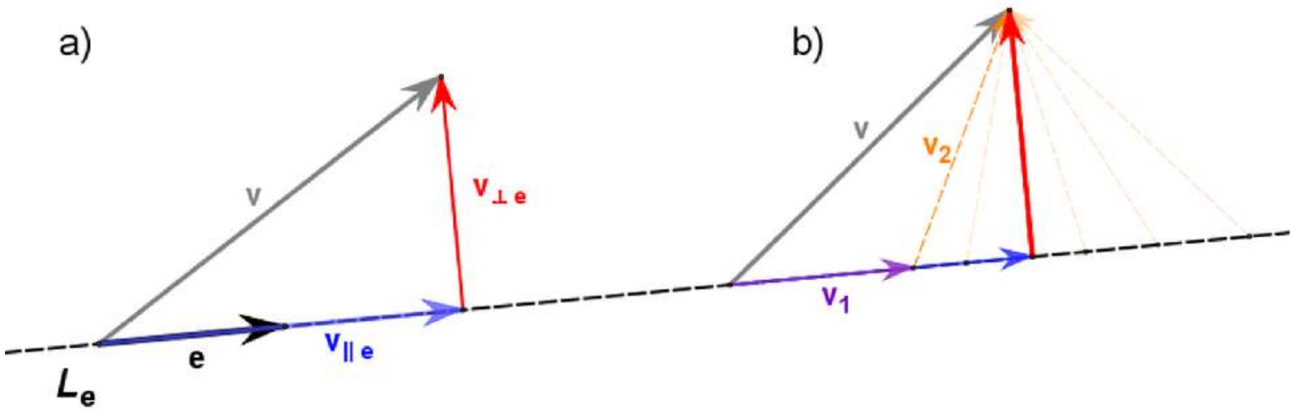
$$\mathbf{v}_\parallel := (\mathbf{e}, \mathbf{v})\mathbf{e},$$

dok je normala vektora $\mathbf{v}$ *na dati pravac definisana kao razlika:*

$$\mathbf{v}_\perp := \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel.$$

Dakle, za dati pravac $L_\mathbf{e}$, svaki vektor $\mathbf{v} \in V(\mathbb{F})$ možemo predstaviti kao zbir njegove projekcije i normale na dati pravac: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$. Pritom je projekcija $\mathbf{v}_\parallel$ vektor iz $L_\mathbf{e}$, a normala $\mathbf{v}_\perp$ vektor koji je ortogonalan na sve vektore iz $L_\mathbf{e}$:

$$(\mathbf{e}, \mathbf{v}_\perp) = (\mathbf{e}, \mathbf{v} - (\mathbf{e}, \mathbf{v})\mathbf{e}) = (\mathbf{e}, \mathbf{v}) - (\mathbf{e}, \mathbf{v})(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (\mathbf{e}, \mathbf{v}) - (\mathbf{e}, \mathbf{v}) = 0.$$



Slika 1.9: a) Projekcija i normala vektora $\mathbf{v}$ na pravac $L_{\mathbf{e}}$. b) Slika uz Primer 1.2.8.

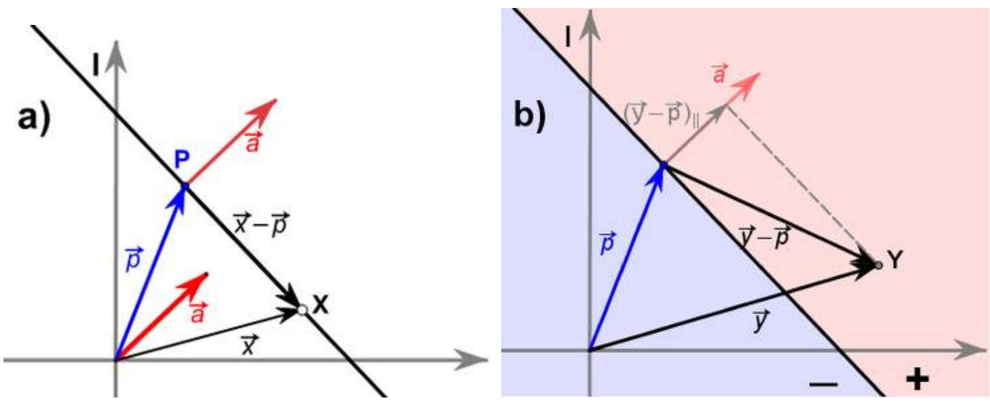
Primer 1.2.8. Pokažimo da je u euklidskom vektorskom prostoru projekcija vektora $\mathbf{v}$ na pravac $L_{\mathbf{e}}$ jednaka onom vektoru $\mathbf{x} \in L_{\mathbf{e}}$ za koji je rastojanje između vektora $\mathbf{v}$ i $\mathbf{x}$, tj. $\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|$, minimalno (vidi sliku 1.9 pod b)). Proizvoljni vektor sa datog pravca možemo napisati kao $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}$ gde je α realan broj. Kako je:

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{v}-\mathbf{x}, \mathbf{v}-\mathbf{x}) = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{v}\|^2 + \alpha^2\|\mathbf{e}\|^2 + 2\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{e}) = \|\mathbf{v}\|^2 + \alpha^2 - 2\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{e}),$$

vidimo da je kvadrat rastojanja između vektora $\mathbf{v}$ i $\mathbf{x}$ kvadratna funkcija po α. Ako nađemo njen izvod po α, sledi da se minimum dobija za $\alpha = (\mathbf{v}, \mathbf{e})$ (koeficijent uz α^2 je pozitivan, pa je ekstremum funkcije ustvari minimum). Dakle, traženi vektor $\mathbf{x}$ je jednak projekciji vektora na pravac $\mathbf{v}_{\|}$.

Zadatak 1.2.6. Dokazati da zaključak iz gornjeg primera važi i u unitarnim prostorima.

Zbog osobine da je projekcija $\mathbf{v}_{\|}$ ustvari vektor pravca za koji je rastojanje između njega i vektora $\mathbf{v}$ minimalno, $\mathbf{v}_{\|}$ se često naziva i *najboljom aproksimacijom vektora $\mathbf{v}$ na pravcu $L_{\mathbf{e}}$*.



Slika 1.10: a) Definicija prave preko vektora normale. b) Rastojanje od tačke Y do prave l.

Primer 1.2.9. U primeru 1.1.12 je navedena parametarska jednačina prave u trodimenionalnom prostoru. Ona opisuje pravu koja prolazi kroz datu tačku P, čiji je radijus vektor $\vec{p}$, i paralelna je datom vektoru $\vec{v}$. U dvodimenzionom prostoru moguće je pravu definisati i na drugi način: tako da prolazi kroz tačku P i ortogonalna je na normirani vektor $\vec{a}$, koji nazivamo vektorom)normale. Sa slike 1.10 a) je očigledno da za radijus vektor proizvoljne tačke na pravoj $\vec{x}$, važi

$$\vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0.$$

Ista jednačina, izražena preko koordinata vektora u Dekartovom bazisu $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ glasi:

$$ax_1 + bx_2 + c = 0, \tag{1.4}$$

gde su $a = a_1$, $b = a_2$ i $c = -a_1p_1 - a_2p_2$ i važi da je $a^2 + b^2 = 1$ jer je $\|\vec{a}\| = 1$. Jednačina (1.4) naziva se *implicitnom jednačinom prave.* Ovaj oblik jednačine prave ima jednu prednost u odnosu na parametarski: omogućava direktno izračunavanje rastojanja od proizvoljne tačke do prave l. Neka je data tačka Y, radijus vektora $\vec{y}$, van prave l. Sa slike 1.10 b), postaje očigledno da je rastojanje d od tačke Y do prave l je jednako dužini projekcije vektora $\vec{y} - \vec{p}$ na pravac definisan normiranim vektorom $\vec{a}$: $d = \|(\vec{a} \cdot (\vec{y} - \vec{p}))\vec{a}\| = \vec{a} \cdot (\vec{y} - \vec{p})$. Kako je koeficijent c u implicitnoj jednačini prave ustvari jednak $-\vec{a} \cdot \vec{p}$, sledi da se rastojanje d rastojanje do tačke $Y = (y_1, y_2)$ dobija prostom zamenom njenih koordinata u izraz sa leve strane jednačine (1.4): $d = ay_1 + by_2 + c$. I na kraju napomenimo da prava l deli ravan (to je ustvari naš dvodimenzioni prostor) na dve poluravni: ako se tačka Y nalazi u poluravni ka kojoj je usmerena normala $\vec{a}$, rastojanje d je pozitivno, a ako je u naspramnoj poluravni, negativno. Poluravni su na slici 1.10 b) označene različitom bojom.

1.2.2 Beselova i Švarcova nejednakost

Teorema 1.4. *Neka je $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ neki konačan ortonormiran skup vektora u vektorskom prostoru $U(\mathbb{F})$ sa skalarnim proizvodom. Za proizvoljan vektor $\mathbf{x}$ iz prostora U važi:*

(*i*) *Vektor $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x})\mathbf{x}_i$ je ortogonalan na svaki vektor iz skupa X.*

(*ii*) *Beselova nejednakost:*

$$\sum_{i=1}^{k} |(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2;$$

Dokaz: (*i*) Koristeći osobine skalarnog proizvoda, za proizvoljan vektor $\mathbf{x}_j$ iz skupa X dobijamo:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_j, \mathbf{x}') &= (\mathbf{x}_j, \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x})\mathbf{x}_i) = (\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) - (\mathbf{x}_j, \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x})\mathbf{x}_i) \\ &= (\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x})(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) = (\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x})\delta_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da je $\mathbf{x}'$ ortogonalan na sve vektore iz skupa X.
(*ii*) Izračunajmo $(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$, koristeći gore pokazanu ortogonalnost vektora $\mathbf{x}'$ na vektore skupa X:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}', \mathbf{x}') &= (\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x})\mathbf{x}_i, \mathbf{x}') = (\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \sum_{j=1}^{k} (\mathbf{x}_j, \mathbf{x})^* (\mathbf{x}_j, \mathbf{x}') = (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\
&= (\mathbf{x}, \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x})\mathbf{x}_i) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x})(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i).
\end{aligned}$$

Kako je zbog pozitivnosti skalarnog proizvoda $(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \geq 0$, sledi da je: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x})(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \geq 0$, odnosno: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)^* (\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$. Q.E.D.

Zadatak 1.2.7. Neka je u prostoru $V(\mathbb{F})$ sa definisanim skalarnim proizvodom dat dvodimenzionalni potprostor W i neka je $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ jedan ortonormirani bazis od W. Za vektor $\mathbf{u} \in V$ koji ne pripada potprostoru W vektor $(x_1, u)x_1 + (x_2, u)x_2$ je očigledno iz W: jednak je zbiru projekcija vektora u na ortove bazisa u W. Ovaj vektor obično označavamo sa u_W. Da li je vektor $u - (x_1, u)x_1 - (x_2, u)x_2$ ortogonalan na sve vektore iz W ako $\{x_1, x_2\}$ nije ortonormirani bazis?

Na osnovu prethodnog teorema lako se izvodi poznata nejednakost:

Teorema 1.5. *Za proizvoljne vektore* $\mathbf{x}$ *i* $\mathbf{y}$ *iz vektorskog prostora* $U(\mathbb{F})$ *sa skalarnim proizvodom važi Švarcova nejednakost*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|.$$

Dokaz: Gornja nejednakost je očigledno ispunjena za $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Za $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, Beselova nejednakost za skup X koji sadrži samo normirani vektor dobijen iz $\mathbf{x}$, tj. $X = \{\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|\}$, i vektor $\mathbf{y}$ daje:

$$\left| \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \mathbf{y} \right) \right|^2 \leq \|\mathbf{y}\|^2.$$

Ako obe strane pomnožimo sa $\|\mathbf{x}\|^2$, i zatim korenujemo tako dobijenu nejednakost [5], dobijamo da je $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ Q.E.D.

Direktna posledica Švarcove nejednakosti je *nejednakost trougla*, tj. za proizvoljna dva vektora važi da je:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Ona se lako proverava: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + 2\mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$; sa druge strane, kako je $\mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq |\mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$, sledi da je $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$.

Takođe, ako posmatramo unitarni prostor $\mathbb{C}^n$, za bilo koja dva vektora $\mathbf{x} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^T$ i $(\eta_1, \ldots, \eta_n)^T$ (odnosno dva niza kompleksnih brojeva) važi *Košijeva nejednakost*:

$$|\sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \eta_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2.$$

U unitarnom prostoru polinoma P definisanim na intervalu $[a, b]$ važi sledeća relacija:

$$\left| \int_a^b x^*(t) y(t) \, \mathrm{d}t \right|^2 \leq \int_a^b |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t \int_a^b |y(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

[5] To smemo da uradimo jer izrazi sa leve i desne strane nejednakosti nikad nisu negativni.

Znamo da je skup ortonormiranih vektora linearno nezavisan, ali on ne mora biti i bazis tog vektorskog prostora. Da bi bio mora biti i obrazujući. Sledeća Lema je zgodna za kraće dokazivanje nekih narednih teorema:

Lema 1.1. *Ortonormirani skup vektora $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ u prostoru U_n sa skalarnim proizvodom je bazis akko je jedino nulti vektor ortogonalan na sve vektore skupa X.*

Dokaz: Neka je X ortonormiran bazis u U_n i $\mathbf{y} = \sum_i \eta_i \mathbf{x}_i$ neki vektor koji je ortogonalan na sve vektore skupa X: $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) = 0$ za svako $j = 1, \ldots, n$. Kako je $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) = \sum_i \eta_i (\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) = \sum_i \eta_i \delta_{ji} = \eta_j$, dobijamo da su svi koeficijenti η_j jednaki nuli, tj. da je $\mathbf{y} = 0$. Obrnuto, pretpostavimo suprotno: ortonormirani skup X nije obrazujući, tj. postoji vektor $\mathbf{x}$ koji ne možemo da napišemo kao linearnu kombinaciju vektora iz X. Tada je vektor $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \mathbf{x}_i$ nenulti vektor. Međutim, već smo pokazali da je ovako definisan vektor ortogonalan na sve vektore iz skupa X (vidi Teoremu (1.4)), što povlači da vektor $\mathbf{x}'$ mora biti jednak nultom vektoru. Q.E.D.

Pogledajmo šta se događa kada je X ortonormirani bazis.

Teorema 1.6. *Neka je $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ ortonormirani skup vektora u prostoru sa skalarnim proizvodom. X je baziz u ovom prostoru akko za svaki vektor x prostora važi* Furijeov razvoj*:*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \mathbf{x}_i. \tag{1.5}$$

Dokaz: Ako je X bazis onda se svaki vektor može napisati kao linearna kombinacija vektora iz tog skupa: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mathbf{x}_i$. Da bismo odredili koeficijent, recimo ε_j, izračunajmo $(\mathbf{x}_j, \mathbf{x})$. Kako je skup X ortonormiran, lako se dobija da je $(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \delta_{ji} = \varepsilon_j$. Dakle, dobili smo da se koeficijent ε_j može zapisati kao dužina projekcije vektora na ort $\mathbf{x}_j$, tj. $\varepsilon_j = (\mathbf{x}_j, \mathbf{x})$ za svako $j = 1, \ldots, n$ čime smo pokazali Furijeov razvoj. Obrnuto, jasno je da ako svaki vektor možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora iz skupa X onda je on obrazujući, a kako je i ortonormiran, sledi daje X bazis u posmatranom prostoru. Q.E.D.

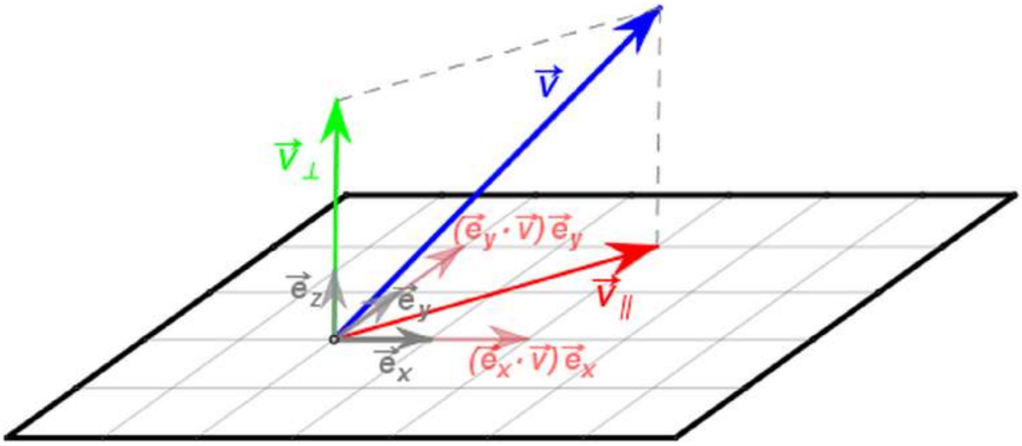
Koeficijenti koji se javljaju u Furijeovom razvoju (1.5) zovu se *Furijeovi koeficijenti*. Da zaključimo, ova teorema pokazuje da su u ortonormiranom bazisu koordinate vektora date preko skalarnog proizvoda $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$: koeficijent u razvoja vektora $\mathbf{x}$ u bazisu X koji stoji uz ort $\mathbf{x}_i$ je $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$. Geometrijski, vektor $\mathbf{x}$ je dat kao suma projekcija tog vektora, tj. vektora $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})\mathbf{x}_i$, na svaki od ortova bazisa X. Sam koeficijent uz ort $\mathbf{x}_i$ je ustvari dužina projekcije vektora $\mathbf{x}$ na taj ort.

Teorema 1.7. *Neka je $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ ortonormirani skup vektora u prostoru sa skalarnim proizvodom. X je bazis u ovom prostoru akko za svaka dva vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ važi Parsevalova jednakost:*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}).$$

Dokaz: Ako je X ortonormiran bazis, koristeći Furijeov razvoj za vektore $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ dobijamo:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \mathbf{x}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x})^* (\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x})^* (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}).$$



Slika 1.11: Projekcija vektora $\vec{v}$ na ravan obrazovanu sa $\{\vec{e}_x,\ \vec{e}_y\}$.

Konačno iz osobine ermitske simetrije skalarnog proizvoda dobijamo: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_i, \mathbf{y})$. Obrnuto, pretpostavimo da postoji neki vektor $\mathbf{y}$ koji ne može da se napiše kao linearna kombinacija vektora iz X. Tada je $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y})\mathbf{x}_i$ nenulti i $(\mathbf{y}', \mathbf{y}') = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i)$. Međutim, Parsevalova jednakost za $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ daje: $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i)$. Sledi da je $\mathbf{y}' = \mathbf{0}$, tj. $\mathbf{y}$ se može napisati kao linearna kombinacija vektora iz X. Q.E.D.

Direktna posledica ove Teoreme, koja se dobija za $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, je Beselova jednakost:

$$(\forall \mathbf{x} \in U)\ \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})|^2.$$

Zapazimo da Parsevalova jednakost pokazuju da u ortonormiranom bazisu u prostoru $U_n(\mathbb{F})$ svaki skalarni proizvod izgleda kao standardni skalarni proizvod prostora u $\mathbb{F}^n$:

$$\mathbf{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{y})$$

1.2.3 Gram-Šmitov postupak

Očigledno, lakše je računati sa ortonormiranim bazisima nego sa onima koji to nisu. Postavlja se pitanje kako polazeći od nekog proizvoljnog bazisa dobiti ortonormiram bazis vektora. Naravno, postupak se može sprovesti na više načina, a rezultujući ortonormiran bazis neće biti isti. Ovde ćemo opisati Gram-Šmitov postupak ortonormalizacije.

Neka je $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ neki zadati bazis u prostoru $U_n(\mathbb{F})$ sa skalarnim proizvodom. Zadatak nam je da nađemo n vektora $\mathbf{y}_i$ koji čine ortonornirani bazis $Y = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$. Kako je X bazis, svi vektori x_i su nenulti. Pođimo od prvog vektora $\mathbf{x}_1$ i normirajmo ga. Tako dobijeni vektor ćemo označiti kao $\mathbf{y}_1$, tj. prvi vektor u Y. Da bi dobili drugi vektor $\mathbf{y}_2$, prvo ćemo odrediti vektor $\mathbf{z}$ koji se dobija kao razlika drugog vektora $\mathbf{x}_2$ iz X i njegove projekcije na dobijeni vektor $\mathbf{y}_1$: $\mathbf{z} = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{y}_1$. Iz Teoreme 1.4 znamo da je $\mathbf{z}$ ortogonalan na ort $\mathbf{y}_1$. Normiranjem vektora $\mathbf{z}$ dobijamo sledeći vektor bazisa Y: $\mathbf{y}_2 = \mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|$. Zatim vektor $\mathbf{y}_3$, dobijamo normiranjem vektora $\mathbf{z} = \mathbf{x}_3 - (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3)\mathbf{y}_1 - (\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3)\mathbf{y}_2$.

Očigledno, postupak je sledeći: ako smo odredili prvih k ortova iz Y, tj. vektore $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$, sledeći ort $\mathbf{y}_{k+1}$ dobijamo normiranjem vektor $z = \mathbf{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_{k+1})\mathbf{y}_i$. Znači od vektora $\mathbf{x}_{k+1}$ oduzimamo projekcije na već dobijene ortove $\mathbf{y}_i$. Na taj način dobijamo vektor z koji je ortogonalan na sve $\mathbf{y}_i$ gde je $\imath = 1, \ldots, k$.

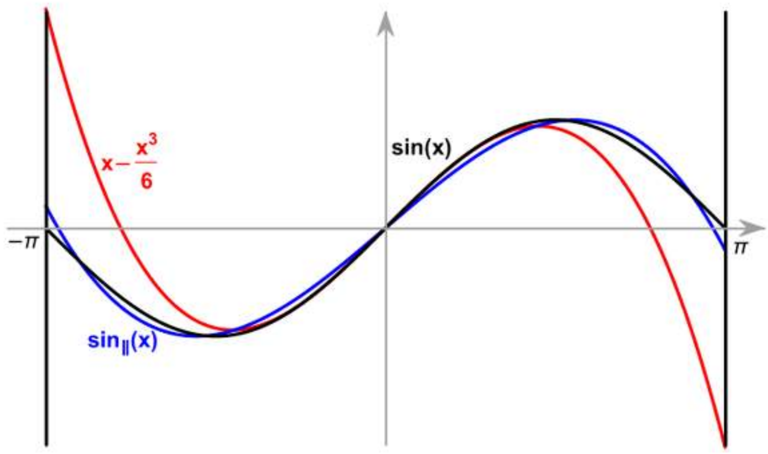
Geometrijski gledano, novi ort bazisa $\mathbf{y}_{k+1}$ tražimo tako što od vektora $\mathbf{x}_{k+1}$ oduzimamo projekciju ovog vektora na potprostor $W = L(\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k\})$, a zatim dobijeni vektor jednostavno normiramo.

Napomenimo na kraju da ovaj postupak daje $\mathbf{y}_k$ kao linearnu kombinaciju prvih k vektora iz X. Jasno je da bi dobijeni bazis Y bio drugačiji ako bi na samom početku promenili redosled vektora u bazisu X. Ovo je nekad zgodno uraditi jer se na taj način može dosta skratiti račun.

Zadatak 1.2.8. Gram-Šmitovim postupkom odrediti ortonormirani bazis u $\mathbb{C}^3$ polazeći od bazisa $X = \{\begin{pmatrix} 1 & 2\imath & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \imath \end{pmatrix}^T\}$. Uraditi to isto ali tako što zamenite mesta prvog i trećeg vektora.

Zadatak 1.2.9. Odrediti jedan bazis u prostoru realnih simetričnih matrica 2×2, a zatim ga ortonormitati koristeći Gram-Šmitov postupak.

Zadatak 1.2.10. Gram-Šmitovim postupkom odrediti ortonormirani bazis u prostoru polinoma $P_4(\mathbb{R})$, sa skalarnim proizvodom $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$, polazeći od bazisa monoma $X = \{1, x, x^2, x^3\}$.



Slika 1.12: Grafici funkcija $\sin(x)$, $\sin_{\|}(x)$ i $y = x - x^3/6$.

Primer 1.2.10. Odredimo projekciju, tj. najbolju aproksimaciju, neprekidne funkcije $\sin(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$, na potprostor polinomom stepena $n = 3$ ako je skalarni proizvod definisan sa: $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$,. Primenom Gram-Šmitove procedure za skup monoma $\{1, x, x^2, x^3\}$ koji je jedan bazis u prostoru polinoma $P_3([-\pi, \pi])$ dobijamo ortonormirani skup

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}x}{\pi^{3/2}}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\pi^2 - 3x^2\right)}{2\pi^{5/2}}, \frac{5\sqrt{\frac{7}{2}}\left(x^3 - \frac{3\pi^2 x}{5}\right)}{2\pi^{7/2}} \right\}.$$

Projekcije funkcije $\sin x$ na pojedinačne vektore ovog ortonormiranog skupa su:

$$\left\{0,\ \frac{3x}{\pi^2},\ 0,\ \frac{35\left(\pi^2-15\right)\left(x^3-\frac{3\pi^2 x}{5}\right)}{2\pi^6}\right\},$$

pa je

$$\sin_{\parallel}(x)=\frac{3x}{\pi^2}+\frac{35\left(\pi^2-15\right)\left(x^3-\frac{3\pi^2 x}{5}\right)}{2\pi^6}.$$

Uporedimo dobijeni rezultat sa aproksimacja sinusne funkcije primenom Tejlorovog reda zaključno sa trećim stepenom:

$$\sin(x)\approx x-\frac{x^3}{6}.$$

Na slici 1.12 je prikazan grafik sinusne funkcije uporedo sa obe aproksimacije. Ako posmatramo ceo interval $[-\pi,\pi]$, aproksimacija dobijena projekcijom je očigledno znatno bolja. Sa druge strane, Tejlorov razvoj daje bolju aproksimaciju $\sin(x)$ u okolini $x=0$.

Zadatak 1.2.11. Odrediti najbolju aproksimaciju funkcije $\cos(x)$ na intervalu $[-\pi,\pi]$, polinomom stepena $n=4$. Uporediti dobijenu aproksimaciju sa onom dobijenom sumiranjem članova Tejlorovog reda stepena manjeg od pet.

1.3 Sume potprostora

Neka su W_1 i W_2 dva proizvoljna potprostora vektorskog prostora $V(\mathbb{F})$. Lako se vidi da je njihov presek $W_1\cap W_2$ takođe vektorski potprostor. Naime, svaka linearna kombinacija vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ koji pripadaju preseku daje vektor koji je istovremeno iz W_1 (jer je on potprostor, tj. zatvoren je u odnosu na pravljenje linearnih kombinacija) i iz W_2.

Sa druge strane, unija ova dva potprostora nije nužno potprostor: kao linearna kombinacija dva vektora $\mathbf{x}\in W_1$ i $\mathbf{y}\in W_2$ možemo dobiti vektor koji nije ni iz jednog od ta dva potprostora.

Primer 1.3.1. Posmatrajmo dva potprostora u $\mathbb{R}^3$: $W_1=L(\{\mathbf{e}_x\})$ i $W_2=L(\{\mathbf{e}_y\})$. Unija ova dva skupa su dakle svi vektori koji leže na $x-osi$ i svi vektori koji leže na $y-osi$. Kao linearnu kombinaciju vektora sa ove dve ose dobijaju se vektori u ravni ${}_xO_y$, dakle skup koji je unija samih potprostora nije potprostor u $\mathbb{R}^3$.

Primer 1.3.2. Neka su dva potprostora u $\mathbb{R}^3$: $W_1=L(\{\mathbf{e}_x\})$ i $W_2=L(\{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y\})$. Sada je W_2 ustvari skup svih vektora koji leže u ravni ${}_xO_y$. Skup W_1 je očigledno podskup u W_2, pa je njihova unija potprostor jer je $W_1\cap W_2=W_2$.

Da bismo dobili vektorski potprostor, skup koji je unija dva potprostora moramo da zatvorimo u odnosu na pravljenje linearni kombinacija: na taj način dobijamo $L(W_1\cup W_2)$.

Def. 1.12. *Suma potprostora W_1 i W_2 vektorskog prostora $V(\mathbb{F})$ je potprostor koji predstavlja lineal nad skupom koji je unija ova dva potprostora i označavamo ga sa $W_1 + W_2$:*

$$W_1 + W_2 := L(W_1 \cup W_2).$$

Jasno je da se svaki vektor iz $W_1 + W_2$ može napisati kao zbir jednog vektora iz W_1 i jednog iz W_2:

$$(\forall \mathbf{x} \in W_1 + W_2)(\exists \mathbf{x}_1 \in W_1)(\exists \mathbf{x}_2 \in W_2) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2. \tag{1.6}$$

Pojam sume dva potprostora se lako generalizuje za slučaj kada imamo više potprostora $W_1, \ldots, W_m$: njihova suma je potprostor $W_1 + \cdots + W_m = L(W_1 \cup \cdots \cup W_m)$, a skaki vektor $\mathbf{x}$ se može napisati kao suma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_m$ gde je svaki od vektor $\mathbf{x}_m$ iz odgovarajućeg potprostora W_m.

Iako se svaki vektor iz potprostora $W_1 + W_2$ može napisati kao zbir dva vektora $\mathbf{x}_1 \in W_1$ i $\mathbf{x}_2 \in W_2$, to ne znači da su vektori $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ jednoznačno određeni, tj. pored njih mogu da postoje i neki drugi vektori $\mathbf{x}_1' \in W_1$ i $\mathbf{x}_2' \in W_2$ čiji zbir takođe daje vektor $\mathbf{x}$. Može se pokazati da su vektori $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ jednoznačni akko $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

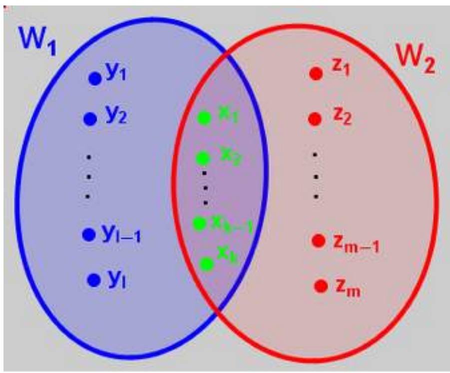
Def. 1.13. *Suma dva potprostora W_1 i W_2, čiji presek sadrži samo nulti vektor, naziva se direktnom sumom potprostora i označava sa $W_1 \dot{+} W_2$.*

Sledeća teorema daje vezu između dimenzije potprostora i njihove sume.

Teorema 1.8. *Grasmanova teorema: Neka su W_1 i W_2 dva potprostora vektorskog prostora $V(\mathbb{F})$. Tada je:*

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap \ W_2). \tag{1.7}$$

Dokaz: Neka je $B_\cap = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ jedan bazis u potprostoru $W_1 \cap W_2$. U svakom od potprostora W_i ćemo formirati bazis tako što ćemo $B_\cap$ dopuniti vektorima iz tih potrostora tako da dobijemo bazise: $B_1 = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l\}$ je bazis u W_1, a $B_2 = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\}$ je bazis u W_2 pri čemu je $\dim W_1 = k + l$ i $\dim W_2 = k + m$. Pokažimo da je skup $B = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\}$ bazis u $W_1 + W_2$. Za njega je ožigledno da je obrazujući, pa ostaje da dokažemo da je linearno nezavisan. Neka je:



$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k + \beta_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \beta_l \mathbf{y}_l + \gamma_1 \mathbf{z}_1 + \cdots + \gamma_m \mathbf{z}_m = \mathbf{0}.$$

Cilj je da dokažemo da je jedino reženje ove jednačine trivijalno, tj. da su svi koeficijenti nula: $\alpha_1, \ldots \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l, \gamma_1, \ldots \gamma_m = 0$. Ako na desnoj strani ove jednakosti ostavimo samo čanove koji sadrže vektore $\mathbf{y}_i$:

$$\beta_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \beta_l \mathbf{y}_l = -\alpha_1 \mathbf{x}_1 - \cdots - \alpha_k \mathbf{x}_k - \gamma_1 \mathbf{z}_1 - \cdots + \gamma_m \mathbf{z}_m,$$

dobijamo da se vektor $\beta_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \beta_l \mathbf{y}_l$ koji je iz W_1 može napisati kao vektor iz W_2. To znači da ovaj vektor pripada preseku $W_1 \cap W_2$, te su svi koeficijenti $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ jednaki nuli. Slično, iz:

$$\gamma_1 \mathbf{z}_1 + \cdots + \gamma_m \mathbf{z}_m = -\alpha_1 \mathbf{x}_1 - \cdots - \alpha_k \mathbf{x}_k - \beta_1 \mathbf{y}_1 - \cdots - \beta_l \mathbf{y}_l$$

dobijamo da je vektor $\gamma_1\mathbf{z}_1 + \cdots + \gamma_m\mathbf{z}_m$ takođe iz preseka $W_1 \cap W_2$. Dakle, i svi $\beta_1, \ldots, \beta_l$ su jednaki nuli. Ako dobijena rešenja za koeficijente unesemo u početnu jednakost ona se svodi na $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Kako vektori $\mathbf{x}_i$ obrazuju bazis $B_\cap$, oni su linearno nezavisni, te dobijamo: $\alpha_1, \ldots, \alpha_k = 0$. Time smo pokazali da je B bazis u $W_1 + W_2$, a njegova dimenzija je $k + l + m$, tj. upravo $\dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$. Q.E.D.

1.4 Projekciona teorema

Posmatrajmo nekakav podskup S vektorskog prostora $V(\mathbb{F})$ u kome je definisan skalarni proizvod. Ortokomplement ovog podskupa, u oznaci $S^\perp$, je skup svih vektora iz $V(\mathbb{F})$ koji su ortogonalni na svaki vektor iz S, tj:

$$S^\perp := \{\mathbf{x} \in V(\mathbb{F}) | (\forall \mathbf{y} \in S)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}. \tag{1.8}$$

Lako se proverava da za bilo koja dva vektora $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^\perp$ njihova proizvoljna linearna kombinacija takodje pripada $S^\perp$. Dakle, $S^\perp$ je jedan potprostor u $V(\mathbb{F})$. Posmatrajmo sada ortokomplement od $S^\perp$, tj. skup:

$$S^{\perp\perp} = \{\mathbf{x} \in V(\mathbb{F}) | (\forall \mathbf{y} \in S^\perp)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}. \tag{1.9}$$

Jasno je da $S \subseteq S^{\perp\perp}$, a zbog osobina skalarnog proizvoda sledi da je $L(S) \subseteq S^{\perp\perp}$.

Ako imamo dva potprostora W_1, W_2 u $V(\mathbb{F})$ za koje važi da je

$$(\forall \mathbf{x} \in W_1)(\forall \mathbf{y} \in W_2)\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \tag{1.10}$$

onda kažemo da su ova dva prostora ortogonalna: $W_1 \perp W_2$. Lako se proverava da je u ovom slučaju presek ova dva potprostora trivijalan: $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, tj. sadrži samo nulti vektor.

Def. 1.14. *Neka su W_1 i W_2 dva ortogonalna potprostora vektorskog prostora $V(\mathbb{F})$ u kome je definisan skalarni proizvod. Tada se suma ova dva prostora naziva ortogonalnom sumom i označava kao $W_1 \oplus W_2$.*

Ako imamo jedan potprostor W, pitanje je da li postoji neki drugi potprostor W' tako da se ceo prostor V može zapisati kao njihova ortogonalna suma: $V = W \oplus W'$. Ako je to moguće, sledi da svaki vektor iz V možemo napisati kao jedinstven zbir dva vektora: jedan iz W a drugi iz W'. Odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 1.9. *Konačnodimenzioni prostor $V_n(\mathbb{F})$ u kojem je definisan skalarni proizvod može se zapisati kao orotogonalna suma proizvoljnog potprostor W i njegovog ortokomplementa $W^\perp$:*

$$V(\mathbb{F}) = W \oplus W^\perp.$$

Dokaz: Neka je skup $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ proizvoljan ortonormirani bazis u W. Za svaki vektor $\mathbf{z} \in V_n(\mathbb{F})$ možemo naći njegovu projekciju na W koju ćemo označiti sa $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{x}_i, \mathbf{z})\mathbf{x}_i.$$

Lako se pokazuje da je vektor $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ ortogonalan na svaki od bazisnih vektora: $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = 0$ za svako $\mathbf{x}_i \in X$. Dakle, $\mathbf{y}$ je ortogonalan na proizvoljan vektor iz W, što znači da pripada $W^\perp$. Ustvari, dobili smo da se proizvoljan vektor $\mathbf{z}$ može napisati kao zbir dva medjusobno ortogonalna vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ koji su iz W i $W^{\perp}$ respektivno:

$$(\forall \mathbf{z} \in V_n(\mathbb{F}))(\exists! \mathbf{x} \in W)(\exists! \mathbf{y} \in W^{\perp})\ \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

tj. da je $V(\mathbb{F}) = W \oplus W^{\perp}$. Q.E.D.

Koristeći gornji teorem lako se pokazuje da za svaki vektor: $\mathbf{z} \in V_n$ važi da je

$$(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Direktna posledica je sledeća jednakost:

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2, \tag{1.11}$$

tj. dobro poznata *Pitagorina teorema*.

Sa druge strane, ako je $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ vektor iz $W^{\perp\perp}$, sledi da je $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 0$ jer je $\mathbf{y} \in W^{\perp}$. Kako je $(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{y}\|^2$, sledi da je komponenta vektora iz $W^{\perp}$ nulta: $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Dakle, zaključili samo da ako $\mathbf{z}$ pripada $W^{\perp\perp}$ sledi da on pripada W. Kako za proizvoljni potprostor $W < V_n(\mathbb{F})$ znamo da je $W \subseteq W^{\perp\perp}$, sledi da su ustvari ova dva skupa jednaka:

$$W^{\perp\perp} = W. \tag{1.12}$$

Primer 1.4.1. U primeru 1.2.9 je izvedena implicitna jednačinu prave. Polazni izraz je, zapravo, jednačina ortokomplementa na pravac vektora $\vec{a}$ i svodi se na pravu samo u dvodimenzionalnom prostoru. U trodimenzionalnom prostoru to je ravan, pa je $\vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$, jednačina prave, ako je $\vec{a}, \vec{x}, \vec{p} \in \mathbb{R}^2$, odnosno jednačina ravni za $\vec{a}, \vec{x}, \vec{p} \in \mathbb{R}^3$.

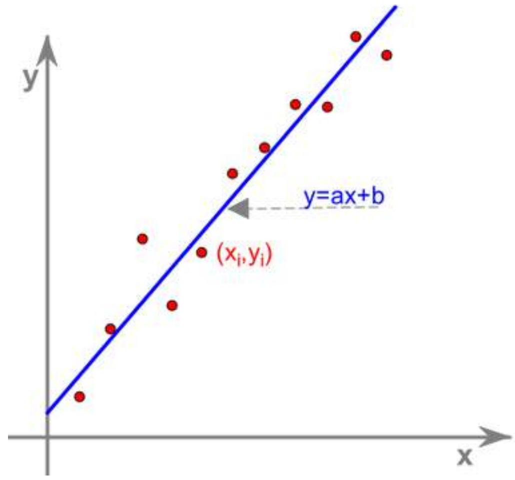
1.4.1 Linearni metod najmanjih kvadrata

Neka je stanje fizičkog sistema opisano sa $k + 2$ fizičke veličine koje su međusobno zavisne, a koje ćemo označiti sa $x, y, p_1, p_2, \ldots, p_k$. Dakle, znamo da neki fizički zakon daje vezu ovih veličina: recimo $y = f(x, p_1, p_2, \cdots, p_k)$. Ako želimo da eksperimentalno proverimo zavisnost veličine y od x ostale veličine p_i (nazovimo ih parametrima) održavamo konstantnim. Pri fiksiranim vrednostima parametara, menjamo veličinu x i merimo veličinu y i nakon n merenja dobijamo n parova vrednosti (x_i, y_i). Međutim, zbog grešaka, sistematskih i slučajnih, koje su prisutne u svakom eksperimentu, rezultati merenja, tj. tačke (x_i, y_i) ne leže na grafiku funkcije $f(x, p_1, p_2, \cdots, p_k)$, već izgledaju kao da su razbacane oko samog grafika. Prema tome, zadatak je odrediti "najbolju krivu" $f(x, p_1, p_2, \cdots, p_k)$, koja prolazi kroz date tačke (x_i, y_i). To se postiže procedurom koja se naziva podešavanje parametara funkcije *metodom najmanjih kvadrata* ili skraćeno *MNK*. Ukoliko je funkcija f linearna po svim parametrima p_i, tj.

$$f(x, p_1, p_2, \cdots, p_k) = \sum_{i=1}^{k} p_i z_i(x),$$

gde su z_i proizvoljne funkcije nezavisne varijable x, tada se metod naziva *linearni MNK*. Obično su funkcije $z_i(x)$ monomi x^{i-1} i tada je reč o polinomijalnom fitu. Ako je funkcija f poznata, onda se merenja koristi ili za proveru date zavisnosti y od x ili za određivanje parametara parametara p_i u datom eksperimentu.

Razmotrimo najčešći slučaj zavisnosti y od x, tj. fizički zakon oblika $y = ax + b$. Dakle, podatke dobijene iz merenja fitujemo pravom linijom: potrebno je kroz datih n tačaka "provući najbolju pravu liniju". Situacija je prikazana na slici 1.13.



Slika 1.13: Grafički prikaz merenih veličina i fit prave linije.

Prvo ćemo precizno definišimo šta se podrazumeva pod "najboljom" pravom linijom. Kada ne bi postojale eksperimentalne greške, tačke (x_i, y_i) bi ležale na pravoj $y = ax + b$, odnosno jednakost $y_i = ax_i + b$ bi bila tačna za svako $i = 1, \ldots, n$. U tom slučaju imamo sistem od n linearnih jednačina sa dve nepoznate a i b

$$
\begin{aligned}
y_1 &= ax_1 + b, \\
y_2 &= ax_2 + b, \\
&\vdots \\
y_n &= ax_n + b.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Zapišimo ga u vektorskom obliku, tj. kao jednu vektorsku jednačinu. Ako definišemo vektore, koji pripadaju prostoru $\mathbb{R}^n$,

$$
\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},
$$

tada je sistem jednačina 1.13 ekvivalentan vektorskoj jednačini

$$
\mathbf{y} = a\mathbf{x} + b\mathbf{1}. \tag{1.14}
$$

Dakle, ako sve tačke (x_i, y_i) pripadaju pravoj $y = ax+b$, vektorska jednačina (1.14) ima jedinstveno rešenje (dovoljne su samo dve tačke da bi se odredile konstante a i b). Ako neka od tačaka ne leži na pravoj, jednačina nema rešenje. Naravno, zbog eksperimentalnih grešaka mi uvek imamo baš ovaj slučaj: sistem (1.13) je protivurečan i nema rešenja!

Vratimo se na vektorsku jednačinu (1.14): ona izražava vektor $\mathbf{y}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{1}$. Označimo potprostor obrazovan tim vektorima sa $S = L(\{\mathbf{x}, \mathbf{1}\}) < \mathbb{R}^n$. Ako je sistem (1.13) saglasan (ima rešenje), tada $\mathbf{y} \in S$, ako $\mathbf{y} \notin S$ sistem je protivurečan. Moguće je odrediti najbolju aproksimaciju vektora $\mathbf{y}$ vektorom iz potprostora S, a to je projekcija vektora $\mathbf{y}$ na potprostor S: $\mathbf{y}_S$. Dakle, ako tražimo pravu koja najbolje aproksimira problem fita, ustvari tražimo koeficijente prave a_M i b_M tako da su rešenje vektorske jednačine:

$$
\mathbf{y}_{\parallel S} = a_M\mathbf{x} + b_M\mathbf{1}. \tag{1.15}
$$

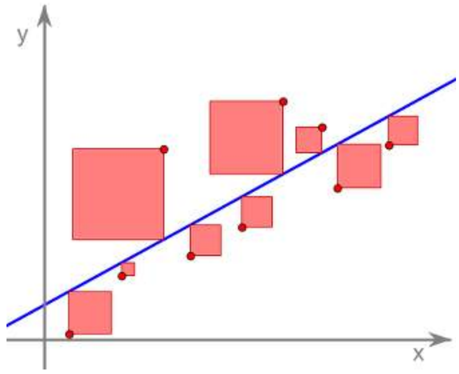
Parametre a_M i b_M je moguće odrediti jer su oni ustvari koeficijenti vektora $\mathbf{y}_S$ u bazisu $\mathbf{x}, \mathbf{1}$. To takođe znači da je najbolja prava ona za koju je rastojanje vektora $\mathbf{y}$ od potprostora S minimalno, tj. $\|\mathbf{y}_{S^\perp}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_S\|$ je minimalna. Kako je:

$$
\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_S\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a_M x_i + b_M))^2,
$$

najbolja prava je ona za koju je zbir kvadrata odstupanja $(\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a_Mx_i+b_M))^2)$ najmanji, otuda i ime samog metoda. Zbir kvadrata odstupanja je prikazan na slici 1.14 kao ukupna površina crvenih kvadrata.

Konačno, procedura određivanja koeficijenata najbolje prave je sledeća:

- Gram-Šmitovom procedurom ortonormiramo skup vektora $\{\mathbf{x}, \mathbf{1}\}$ i tako dobijamo ortonormirani bazis $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_1$;
- odredimo projekciju $\mathbf{y}_S = (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{y})\mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y})\mathbf{e}_1$;
- vektor $\mathbf{y}_S$ predstavimo u početnom bazisu: $\mathbf{y}_S = a_M\mathbf{x} + b_M\mathbf{1}$ i tako dobijamo konstante a_M i b_M



Slika 1.14: Interpretacija MNK preko minimiziranog zbira površina.

U slučaju polinomijalnog fita višeg, recimo drugog stepena, procedura je potpuno analogna. U tom slučaju fizički zakon je oblika $y = ax^2 + bx + c$, kojem odgovara vektorska jednačina:

$$\mathbf{y} = a\mathbf{z} + b\mathbf{x} + c\mathbf{1}, \quad \text{gde je} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Sada je potrebno odrediti projekciju vektora $\mathbf{y}$ na potprostor $L\{\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{1}\}$.

Zadatak 1.4.1. Odrediti pravu koja najbolje prolazi kroz tačke dobijene iz sledećih rezultata merenja:

x	0	1	2	3
y	1	0	1	2

.

Rešenje. $a = 0.4$, $b = 0.4$.

Zadatak 1.4.2. Odrediti parabolu koja najbolje prolazi kroz tačke dobijene iz sledećih rezultata merenja:

x	-3.5	-2.5	-1	0	1	1.5
y	4	2	-2	-1	2	5

.

Glava 2

Linearni operatori

Def. 2.1. *Preslikavanje $A : U(\mathbb{F}) \mapsto V(\mathbb{F})$ naziva se linearni operator ako je:*

$$(\forall x, y \in V(\mathbb{F}))(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F})\ A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y}.$$

U žargonu se obično kaže da "operator A prolazi kroz linearnu kombinaciju". Osobina linearnosti zapravo, podrazumeva istovremenu ispunjenost multiplikativnosti, $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A(\mathbf{x})$, i aditivnosti $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$, za svako $\alpha \in \mathbb{F}$ i svaka dva vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U(\mathbb{F})$. Linearni operator održava strukturu vektorskog prostora, pa je on ujedno i homomorfizam vektorskih prostora. Skup svih linearnih operatora koji preslikavaju vektore iz $U(\mathbb{F})$ u $V(\mathbb{F})$ obeležava se sa $\hat{L}(U(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ ili kraće kao $\hat{L}(U, V)$ pri čemu treba voditi računa nad kojim poljem su definisani. Takođe, umesto $A(\mathbf{x})$ obične se zagrade ne pišu već samo $A\mathbf{x}$ i kažemo da operator A deluje na $\mathbf{x}$. Razmotrimo dva operatora A i B iz $\hat{L}(U, V)$. Ako važi da je:

$$(\forall x \in U(\mathbb{F}))\ A\mathbf{x} = B\mathbf{x},$$

onda su ta dva operatora jednaka, $A = B$. Takođe, možemo definisati sabiranje operatora, tj. operator $A + B$, kao i množenje operatora skalarom iz $\mathbb{F}$:

$$(A + B)\mathbf{x} := A\mathbf{x} + B\mathbf{x}, \quad (\alpha A)\mathbf{x} := \alpha(A\mathbf{x}).$$

Dakle, možemo praviti linearne kombinacije linearnih operatora iz $\hat{L}(U, V)$, odnosno, da i sam $\hat{L}(U, V)$ ima strukturu vektorskog prostora nad poljem $\mathbb{F}$, što je jednostavno proveriti. Ako su prostori U i V konačnodimenzionalni, može se pokazati da je i prostor $\hat{L}(U, V)$ konačnodimenzionalan pri čemu je:

$$\dim \hat{L}(U, V) = \dim U \dim V.$$

Ako je $A \in \hat{L}(U, V)$ i $B \in \hat{L}(V, W)$ gde su U, V i W tri vektorska prostora nad poljem $\mathbb{F}$, može se definisati linearni operator BA koji vektore iz U slika u vektore iz W pri čemu je:

$$(BA)x := B(Ax).$$

Očigledno da operator AB možemo definisati samo ako je $U = W$.

Razmotrimo sada linearne operatore koji preslikavaju $U(\mathbb{F})$ u $U(\mathbb{F})$. Operator za koji važi da svaki vektor $\mathbf{x} \in U$ slika u samog sebe, naziva se jedinični operator i obeležava sa I. Takođe je definisan i proizvod proizvoljih operatora. Treba naglasiti da operator AB koji se dobija kao proizvod dva operatora A i B u opštem slučaju nije jednak operatoru BA. Ako je to ipak ispunjeno, kažemo da ta dva operatora komutiraju. *Komutator* dva operatora A i B se označava sa $[A, B]$ i definiše se na sledeći način:

$$[A, B] := AB - BA. \tag{2.1}$$

Ako operatori komutiraju jasno je da je $[A, B] = 0$ (tj. jednako nultom operatoru [1]).

2.1 Reprezentovanje operatora

Posmatrajmo dva konačnodimenzionalna prostora nad istim poljem, U_n i V_m, u kojima smo izabrali sledeće bazise: $B_U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ i $B_V = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$. Da bi znali da izračunamo dejstvo linearnog operatora na proizvoljni vektor $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i$ iz U_n, dovoljno je da znamo kako A deluje na vektore bazisa B_U :

$$A\mathbf{u} = A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\mathbf{u}_i. \tag{2.2}$$

Lik vektora $\mathbf{u}_i$ pod dejstvom operatora A je neki vektor iz V_m, pa se on može napisati kao linearna kombinacija vektora iz bazisa B_V:

$$A\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{v}_j. \tag{2.3}$$

Koeficijente u razvoju smo označili kao a_{ji}, to su skalari iz polja $\mathbb{F}$ i ima ih ukupno $m \times n$. Dakle, na osnovu (2.2) i (2.3), dejstvo operatora na proizvoljni vektor $\mathbf{u} \in U_n$ je dato sledećim izrazom:

$$A\mathbf{u} = A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \alpha_i \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{v}_j = \mathbf{v}. \tag{2.4}$$

Odavde zaključujemo da je

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \alpha_i,$$

što je moguće zapisati u matričnom obliku kao:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Već znamo da je svaki n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ izomorfan prostoru $\mathbb{F}_n$, tj. izborom bazisa u tom prostoru uspostavlja se bijekcija (izomorfizam) f koja vektore iz tog prostora slika u kolone dužine n. Dakle, vektor $\mathbf{u} \in U_n$ se slika u kolonu $f_U(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}]_{B_U} = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)^T$, dok operator A slika $\mathbf{u}$ u $\mathbf{v}$, tj. $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{v}$, bijekcija f_V slika u kolonu $f_V(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{B_V} = (\beta_1 \ldots \beta_n)^T$. Prema tome, dejstvom preslikavanja f_V sa leva na jednakosti $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$, dobijamo

$$f_V(\mathbf{v}) = f_V(A\mathbf{u}) = f_V A f_U^{-1}(f_U(\mathbf{u})),$$

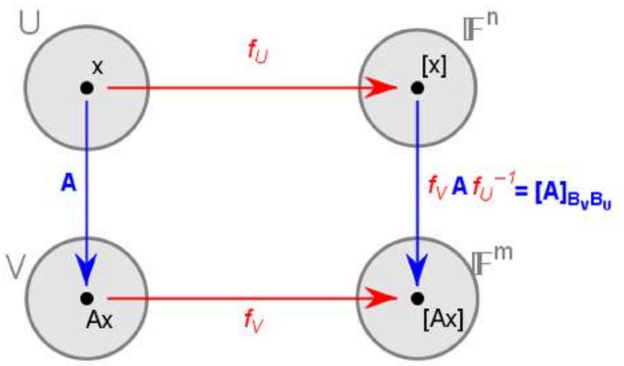
[1]Operator iz $\hat{L}(U, V)$ koji sve vektore iz U slika u nulti vektor iz V naziva se nulti operatora i označava sa O. Često se u jednačinama umesto O prosto piše broj nula, naravno na osnovu same jednačine jasno je da li je u pitanju operator ili prosto broj.

koja je samo formalni zapis matrične jednakosti 2.5, i lako ju je zapamtiti koristeći dijagram prikazan na slici 2.1. Pri tome je $f_V A f_U^{-1} := [A]_{B_V,B_U} \equiv \mathcal{A}$, matrica operatora A određena bazisima B_V i B_U, koju označavamo sa $[A]_{B_V,B_U}$ ili kraće sa $\mathcal{A}$ ukoliko je iz konteksta jasno u kojim je bazisima definisana. Jednakost 2.3 daje nam pravilo za određivanje matričnih elemenata od $[A]_{B_V,B_U}$: delujemo sa operatorom A na $i-$ti bazisni vektor iz B_U, zatim, na taj način dobijeni vektor predstavimo kao linearnu kombinaciju bazisnih vektora iz B_V : koeficijente linearne kombinacije čine $i-$tu kolonu matrice $[A]_{B_V,B_U}$.

Specijalno, za operatore iz $\hat{L}(U_n, U_n)$, izborom bazisa u U_n dobijamo:

$$A\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{u}_j. \tag{2.6}$$

Ova jednačina se obično naziva *osnovna formula reprezentovanja*, a iz nje je očigledno da se operatoru pridužuje kvadratna matrica $\mathcal{A}$. Lako se vidi da proizvodu dva operatora AB, u datom fiksiranom bazisu, odgovara matrica $\mathcal{AB}$. Ako operatori komutiraju tada i matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ komutiraju. Ako promenimo bazis, na primer izaberemo neki novi bazis $B' = \{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$, i sami vektori $\mathbf{u} \in U_n$ će, u principu, biti reprezentovani nekim drugim kolonama $f'(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}]_{B'}$ (f' je izomorfizam koji je određen novim bazisom), a operator A matricom $\mathcal{A}'$ koja nije nužno jednaka $\mathcal{A}$. Očigledno, bez obzira koji smo bazis izabrali u U_n, nultom operatoru O je pridružena nulta matrica, a jediničnom operatoru I, jedinična matrica. Kako se tačno menja reprezentovanje vektora i operatora pri promeni bazisa biće tema poglavlju 2.2.3.



Slika 2.1: Dijagram dejstva izomorfizma f na vektore prostora U_n i V_m.

Primer 2.1.1. Neka je operator $A \in \hat{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ definisan na sledeći način: proizvoljan vektor $\mathbf{v} = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^T$ preslikava u vektor $\mathbf{v}' = A\mathbf{v} = (\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_1)^T$. Proverimo da li je A linearan operator:

- važi osobina multiplikativnosti: za $\lambda \in \mathbb{R}^3$ važi da je $A(\lambda\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_2 \\ \lambda\alpha_3 \\ \lambda\alpha_1 \end{pmatrix} = \lambda A\mathbf{v}$;
- i aditivnosti: $A(\mathbf{v}+\mathbf{u}) = A\begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \alpha_3+\beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2+\beta_2 \\ \alpha_3+\beta_3 \\ \alpha_1+\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = A\mathbf{v} + A\mathbf{u}$.

Dake, operator A jeste linearan. U bazisu $\{\mathbf{x}_1 = (1\ 0\ 0)^T, \mathbf{x}_2 = (0\ 1\ 0)^T, \mathbf{x}_3 = (0\ 0\ 1)^T\}$ operator A je reprezentovan sledećom matricu koja se dobija delovanjem na bazisne vektore:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 2.1.1. Odrediti koji od sledećih operatora su linearni iz $\hat{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (u svakom od primera n i m uzima konkretne vrednosti):

1. $A : (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^T \mapsto (3\alpha_1\ \sqrt{2}\alpha_3 - 2\alpha_2\ 3\alpha_3 - \alpha_2)^T$,
2. $A : (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^T \mapsto (\alpha_1 + 5\ \alpha_2 + \alpha_3\ \alpha_3)^T$,
3. $A : (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^T \mapsto (\alpha_1\ \alpha_2)^T$,
4. $A : (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^T \mapsto (|\alpha_1|\ 2\alpha_2\ |2\alpha_3|)^T$,
5. $A : (\alpha_1\ \alpha_2)^T \mapsto (\alpha_1 + 5\ \alpha_2 + \alpha_3\ \alpha_3)^T$,
6. $A : (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^T \mapsto ({\alpha_1}^2\ \alpha_2\ \sin\alpha_3)^T$,
7. $A : (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^T \mapsto (1\ \alpha_3\ \alpha_2)^T$.

Zadatak 2.1.2. Pokazati da svaki linearni operator nulti vektor preslikava u nulti vektor.

Primer 2.1.2. Operator diferenciranja u prostoru polinoma $P_3(\mathbb{R})$, je definisan tako da svakom $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$, pridružuje njegov prvi izvod $p'(x) : Dp(x) = p'(x)$. Linearnost operatora je posledica linearnosti izvoda. U bazisu monoma $\{1, x, x^2, x^3\}$, D je reprezentovan matricom:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 2.1.3. Da li je operator $S : P_3(\mathbb{R}) \mapsto P_4(\mathbb{R})$ definisan sa $Sp(x) = \int p(x)\,dx$ linearan? Ako jeste, odrediti mu matricu u bazisu monoma.

Primer 2.1.3. Linearni operatori imaju niz važnih geometrijskih svojstava, a najvažnije je to da prave linije preslikava u prave linije. Razmotrimo vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ i u njemu parametarski definisanu pravu l određenu vektorom $\vec{v}$ (vidi primer 1.1.12):

$$\vec{r}_l(t) = \vec{p} + t\vec{v}.$$

Skup svih vektora koji pripadaju pravoj $l_{\mathbf{v}}$ je $\{\vec{p} + t\vec{v} | \, t \in \mathbb{R}\}$. Ako na vektore tog skupa delujemo linearnim operatorom A, dobijamo skup

$$\{A(\vec{p} + t\vec{v}) | \, t \in \mathbb{R}\} = \{A\vec{p} + tA\vec{v} | \, t \in \mathbb{R}\} = \{\vec{p}\,' + t\vec{v}\,' | \, t \in \mathbb{R}\},$$

a on, takođe definiše pravu koja prolazi kroz tačku sa radijus vektorom $\vec{p}\,'$ i ima pravac vektora $\vec{v}\,'$.

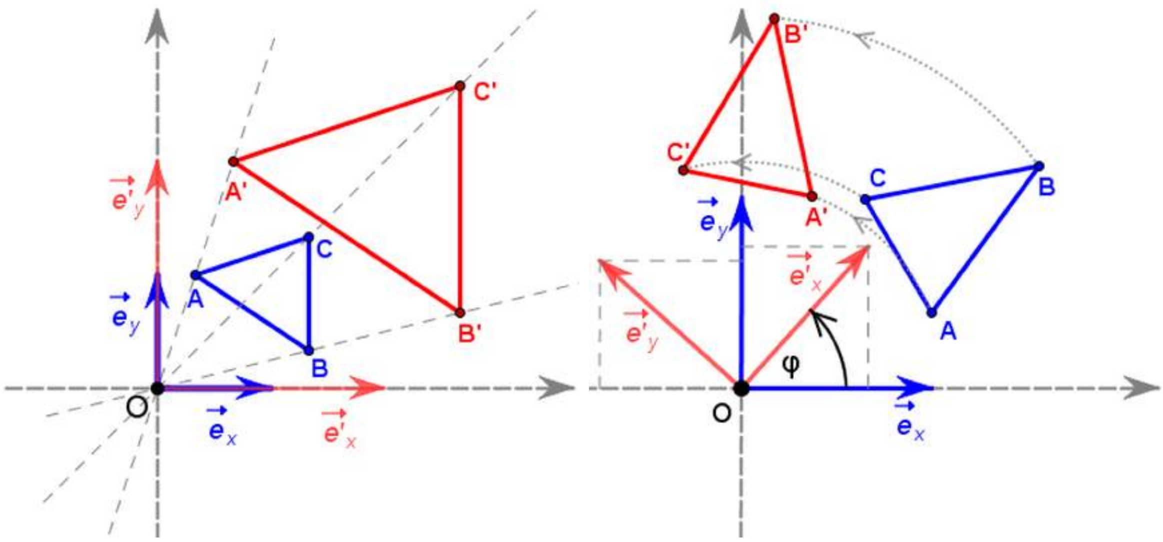
Zadatak 2.1.4. Da li svaki linearni operator preslikava ravan u ravan?

Sledi nekoliko primera linearnih operatora važnih u geometriji.

Primer 2.1.4. U E_3, homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ sa centrom O i koeficijentom k je linearno preslikavanje koje proizvoljnu tačku X preslikava u X' tako da je: $\overrightarrow{OX} = k\,\overrightarrow{OX'}$. Homotetiju zovemo pozitivnom ako je $k > 0$ i negativnom ako je $k < 0$. Sa slike 2.2 je lako odrediti matricu homotetije u bazisu $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k\mathcal{I}_2,$$

gde je sa $\mathcal{I}_2$ označena jedinična matrica 2×2. S'obzirom da je reprezentovana skalarnom matricom[2], ona ima isti oblik u proizvoljnom bazisu. Homotetija preslikava figure u njima slične figure, tj. održava veličine uglova, ali ne održava rastojanja, jer važi: $||\overrightarrow{OX'}|| = k||\overrightarrow{OX}||$. Primetimo da je determinanta $\det \mathcal{H} = k^2$, pa za $k \neq \pm 1$, homotetija skalira površinu sa k^2. Generalno, u $n-$dimenzionalnom euklidskom prostoru, matrica homotetije je $k\mathcal{I}_n$.



Slika 2.2: Levo: homotetija sa centrom u O i koeficijentom $k = 2$. Desno: rotacija oko O za ugao φ.

Primer 2.1.5. Neka je tačka O koordinantni početak, a rotacija $\mathcal{R}_\varphi$ za ugao φ oko tačke O koja preslikava proizvoljnu tačku X u X' tako da je $\|\overrightarrow{OX}\| = \|\overrightarrow{OX'}\|$ i $\angle(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX'}) = \varphi$. Rotacija je izometrija jer održava rastojanja i uglove. Na slici 2.2 je prikazano dejstvo rotacije u bazisu $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$, odakle je lako odrediti matricu rotacije (oko tačke O, za ugao φ):

$$\mathcal{R}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

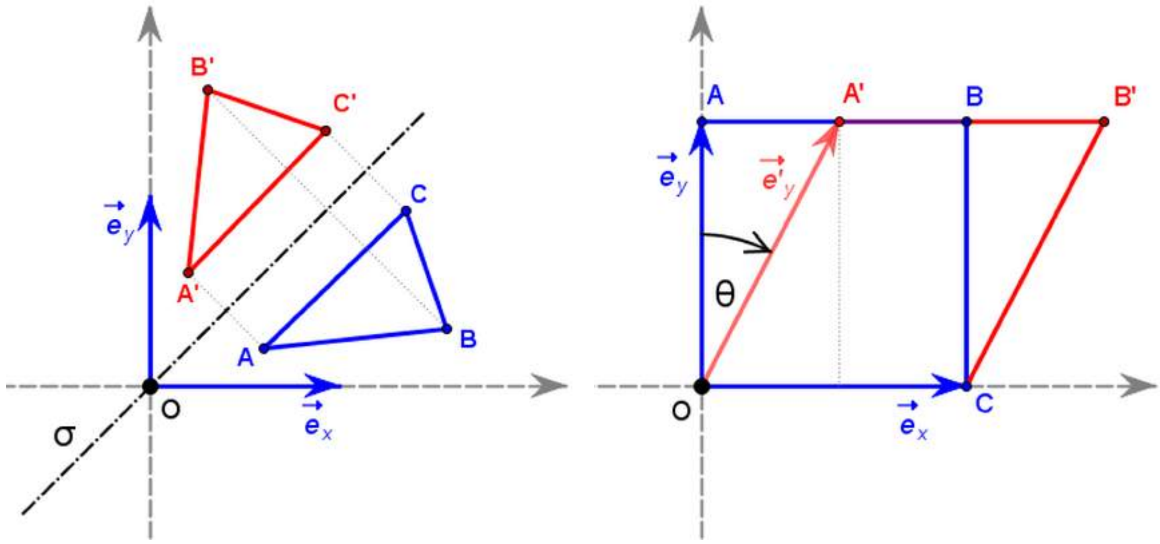
Determinanta matrice je jednaka jedinici, jer naravno, rotacija ne menja površinu figure. U trodimenzionalnom prostoru je, pored ugla, potrebno definisati i pravac oko kojeg se vrši rotacija. Ako

[2] Matrice tipa $k\mathcal{I}_n$ nazivamo skalarnim matricama.

izaberemo koordinatni sistem u kojem se z-osa podudara sa osom rotacije, matrica rotacije za ugao φ u bazisu $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ glasi

$$\mathcal{R}_{\varphi\vec{e}_z} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 2.1.5. Kako glasi matrica rotacije oko x-ose za ugao φ? Koja se matrica dobija kompozicijom rotacija $\mathcal{R}_{\varphi_1\vec{e}_z}$ i $\mathcal{R}_{\varphi_2\vec{e}_z}$?



Slika 2.3: Levo: refleksija u odnosu na pravu $y = x$. Desno: horizontalno smicanje za ugao θ.

Primer 2.1.6. U E_3 refleksija u odnosu na ravan σ je preslikavanje koje svakoj tački X pridružuje tačku X', tako da je rastojanje od X do σ jednako rastojanju od X' do σ i duž XX' je ortogonalna na ravan σ. U dve dimenzije, takvo preslikavanje σ je prava, i u tom slučaju se σ naziva osnom simetrijom. Dejstvo osne simetrije, zadate pravom čiji je vektor pravca $\vec{e}$, definisano je izrazom: $\sigma_e(\vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot \vec{e})\vec{e} - \vec{v}$ gde je $\vec{v}$ proizvoljan vektor u ravni. Na slici 2.3 je prikazana osna simetrija u odnosu na pravu σ, definisanu jednačinom $y = x$. U bazisu $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$, njena matrica glasi:

$$\sigma_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Njena determinanta je jednaka -1, a to znači da refleksija menja orjentaciju figure. [3]

Zadatak 2.1.6. Odrediti matricu refleksije u odnosu na y osu, tj. pravu $x = 0$.

[3] Površina trougla orjentisanog u pozitivnom smeru rotacija je pozitivna, dok je kod negativno orjentisanog negativna.

Zadatak 2.1.7. U E_3 odrediti matricu refleksije u odnosu na xOy ravan.

Primer 2.1.7. U E_3 smicanje, ili transvekcija, u odnosu na pravu l sa koeficijentom λ je transformacija koja svaku tačku X preslikava u X' koja je translirana u odnosu na X za vektor $\lambda d\vec{e}$. Vektor $\vec{e}$ je normirani vektor pravca prave l, a d je rastojanje tačke X do prave l. Na slici 2.3 je prikazano dejstvo smicanja u odnosu na x osu. U bazisu $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$, matrica smicanja je

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ugao smicanja θ, tj. ugao između normale na pravu l i slike te iste normale pri dejstvu smicanja, dat je sa $\tan\theta = \lambda$. Determinanta matrice smicanja je jedinična, pa smicanje održava površine figura, iako ne održava ni uglove ni rastojanja.

2.1.1 Geometrija linearnih operatora iz $\hat{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Linearni operator je potpuno definisan dejstvom na bazisne vektore. Ta informacija je pohranjena u matričnim elementima operatora i dovoljna je za računanje. Međutim, često je poželjno imati i geometrijsku sliku dejstva linearnog operatora. To je moguće kada operator deluje u vektorskom prostoru nad realnim poljem dimenzije 2 ili 3. Ovde ćemo ilustrovati slučaj operatora iz $\hat{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Pod geometrijom linearnog operatora podrazumevamo sliku jedinične kružnice. Vrhovi svih vektora jedinične dužine čine jediničnu kružnicu $S^1 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{v}\| = 1\}$. Jednačina ove kružnice je:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1. \tag{2.7}$$

Neka je linearni operator A u apsolutnom bazisu reprezentovan matricom $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Delovanjem na jedinični vektor $\mathbf{v} = (x_1\, x_2)^T$ dobijamo vektor $\mathbf{u} = (y_1\, y_2)^T$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Pitanje je u koju krivu linearni operator A preslikava jediničnu kružnicu. Odgovor daje sledeća teorema.

Teorema 2.1. *Ako vrh vektora* $\mathbf{v}$ *leži na jediničnoj kružnici, onda vrh vektora* $\mathbf{u}$ *leži na elipsi.*

Dokaz: Najpre razmotrimo slučaj kada je A nesingularan. Tada postoji A^{-1}, pa je

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

S'obzirom da vektor $\mathbf{v}$ leži na jediničnoj kružnici, njegove koordinate zadovoljavaju jednačinu kružnice, koja u matričnom obliku glasi:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Zamenom (2.8) u prethodnu jednačinu, dobijamo jednačinu koju zadovoljavaju koordinate vektora $\mathbf{u}$:

$$1 = (A^{-1}\mathbf{u})^T A^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T (A^{-1})^T A^{-1}\mathbf{u}. \tag{2.9}$$

Operator $(A^{-1})^T A^{-1}$ je simetričan, pa prethodna jednačina opisuje konusni presek (vidi uokvireni tekst ispod dokaza), a kako je vrednost determinante $\det (A^{-1})^T A^{-1} = \det (A^{-1})^T \det A^{-1} = (\det A^{-1})^2 > 0$, u pitanju je elipsa.

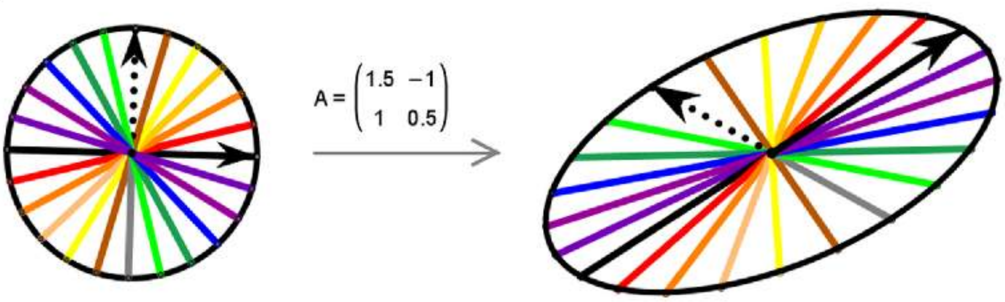
U slučaju kada je A singularan operator, tada se oba bazisna vektora preslikavaju u linearno zavisne vektore, tj. u vektore koji leže na istom pravcu, pa se i svi ostali vektori sa jedinične kružnice preslikavaju u vektore na istom pravcu. Naravno, kako operator A preslikava vektore jedinične norme u vektore konačne norme, pa među njima postoji vektor sa maksimalnom normom. To znači da se jedinična kružnica pod dejstvom A preslikava u duž, a nju možemo smatrati za degenerisani slučaj elipse kod koje je dužina manje poluose jednaka nuli. Q.E.D.

Konusnim presecima nazivamo krive u ravni koje je moguće opisati polinomijalnim jednačinama drugog stepena. To su elipsa, hiperbola, parabola i tzv. degenerisani konusni preseci: par presecajućih pravih (npr. $xy = 0$), par paralelnih pravih (npr. $y^2 - 1 = 0$) i prava (npr. $x^2 + 2xy + y^2 = 0$). Proizvoljna elipsa ili hiperbola sa centrom u koordinatnom početku može se predstaviti jednačinom

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Simetričnu matricu $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ nazivamo matricom kvadratne forme. Tip konusnog preseka zavisi od znaka diskriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$: ako je $\Delta < 0$, dobija se elipsa, a za $\Delta > 0$, hiperbola. U slučaju $\Delta = 0$, dobija se degenerisani konusni presek. Diskriminantu je moguće izraziti preko determinante matrice kvadratne forme $\Delta = -4\det \mathcal{F}$. Dakle, ako je $\det \mathcal{F} > 0$, u pitanju je elipsa, a $\det \mathcal{F} < 0$, hiperbola.

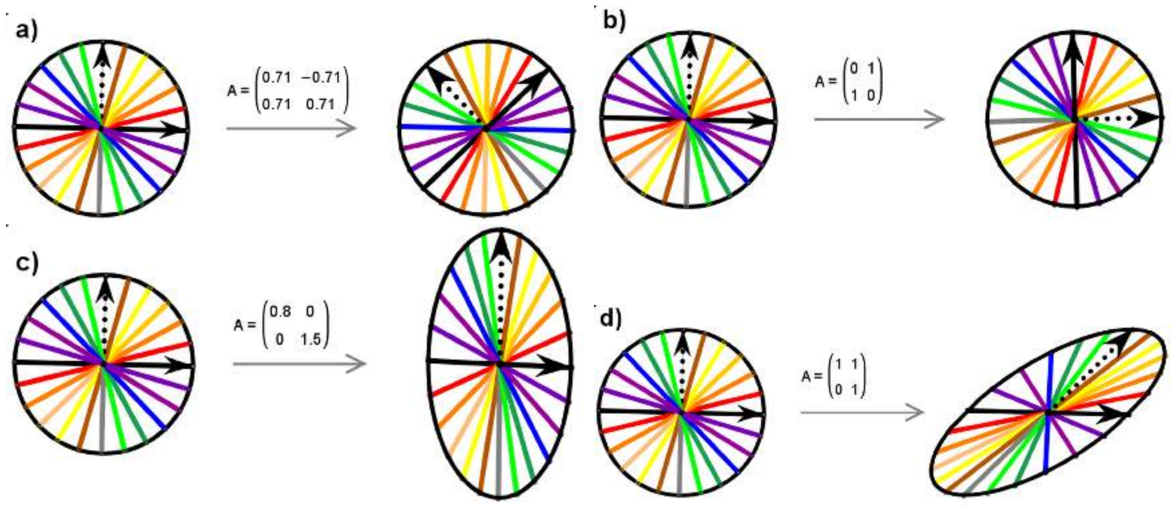
Primer elipse operatora je prikazan na slici 2.4. Na osnovu geometrijskih svojstava elipse $\mathcal{E}_A$



Slika 2.4: Elipsa linearnog operatora: preslikavanje jedinične kružnice u elipsu. Crnim strelicama su prikazani vektori apsolutnog bazisa, a ostali jedinični vektori su prikazani kao obojene duži. Elipsa je orjentisana: od crvene, preko žute, zelene i plave, do ljubičaste.

je moguće odrediti osobine odgovarajućeg linearnog operatora A. Zapazimo da je geometrija elipse operatora određena sa 4 realna parametra: velikom (k_1) i malom poluosom elipse (k_2), uglom između velike poluose elipse u odnosu na horizontalu (θ) i uglom slike jednog bazisnog vektora (puna crna strelica) u odnosu na na veliku poluosu elipse (ϕ). To odgovara broju matričnih elemenata matrice operatora.

Primer 2.1.8. Ilustrujmo elipsom operatora dejstvo rotacije za ugao $\phi = 45°$, refleksije u odnosu na osu $y = x$, skaliranja [4] sa koeficijentima $k_1 = 0.8$ i $k_2 = 1.5$, i smicanja sa koeficijentom $\lambda = 1$. Napomenimo da je kod operatora sa jediničnom determinantom površina elipse jedinična, a kod operatora sa negativnom determinantom je orjentacija elipse suprotna u odnosu na jediničnu kružnicu.



Slika 2.5: Elipse operatora a) rotacije, b) refleksije, c) skaliranja i d) smicanja.

2.1.2 Operatori u prostorima sa definisanim skalarnim proizvodom

Razmotrimo slučaj kada je $A \in \hat{L}(V_n, V_n)$, gde je V_n n-dimenzionalni vektorski prostor sa definisanim skalarnim proizvodom. U proizvoljnom bazisu znamo da se operator A reprezentuje matricom $\mathcal{A}$ koja se nalazi iz osnove formule reprezentovanja (2.6). Izaberimo u V_n bazis $B = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ koji je ortonormiran. Koristeći formulu (2.6) i osobine skalarnog proizvoda, za vektor $\mathbf{x}_k$ ovog bazisa dobijamo da je:

$$(\mathbf{x}_k, A\mathbf{x}_i) = (\mathbf{x}_k, \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{x}_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\delta_{kj} = a_{kj}.$$

Dakle, u ortonormiranom bazisu operator A je reprezentovan matricom $\mathcal{A}$ čiji se matrični elementi mogu izračunati na osnovu izraza:

$$a_{ij} = (\mathbf{x}_i, A\mathbf{x}_j). \tag{2.10}$$

Kako je operator potpuno određen bazisom i matricom kojom je reprezentovan, jasno je da se osobine operatora u odnosu na skalarni proizvod mogu iskoristiti za identifikovanje samih operatora. U tu svrhu dokažimo naredne dve leme.

[4] Operator skaliranja prvi bazisni vektor pomnoži (skalira) sa k_1, a drugi sa k_2. Jasno je da je homotetija specijalan slučaj skaliranja kada je $k_1 = k_2$.

Lema 2.1. *U prostoru $V(\mathbb{F})$ sa skalarnim proizvodom važi da je $A = 0$ akko je za svaki par vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ispunjeno da je $(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = 0$.*

Dokaz: Operator A je nulti operator akko je u proizvoljnom bazisu od V reprezentovan nultom matricom. Dakle, za proizvoljna dva bazisna vektora važi da je $(\mathbf{x}_i, A\mathbf{x}_j) = 0$. Kako se svaki vektor može napisati kao linearna kombinacija vektora bazisa, sledi da je: $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)$ $(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = 0$. Takodje, u obrnutom smeru, ako važi da je $(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = 0$ za proizvoljna dva vektora iz V, ispunjena je i za vektore bazisa, tj. ovo su dva ekvivaletna iskaza. Q.E.D.

Lema 2.2. *U unitarnom prostoru U, $A = 0$ ako i samo ako za svako $x \in U$ važi da je $(x, Ax) = 0$.*

Dokaz: Pošto za svaki vektor $\mathbf{x} \in U$ važi da je $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = 0$, za dva proizvoljna vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ imamo: $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, A(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = 0$. Kako je $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, A\mathbf{x} + A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, A\mathbf{y}) + (\mathbf{y}, A\mathbf{x}) + (\mathbf{y}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y}) + (\mathbf{y}, A\mathbf{x})$, dobijamo sledeću jednakost:

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) + (\mathbf{y}, A\mathbf{x}) = 0 \tag{2.11}$$

Operator je definisan u unitarnom prostoru, pa vektor $\imath\mathbf{y}$ takodje pripada U. Zamenom u dobijenoj jednakosti $\mathbf{y}$ sa $\imath\mathbf{y}$, dobijamo:

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) - (\mathbf{y}, A\mathbf{x}) = 0. \tag{2.12}$$

Konačno ako saberemo ove dve jednakosti dobijamo da je za proizvoljana dva vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ ispunjeno da je $(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = 0$, pa na osnovu predhodno dokazane Leme sledi da je $A = 0$. Q.E.D.

Zapazite da je uslov koji je potreban i dovoljan da A bude jednak nultom operatoru slabiji kod unitarnih prostora. Leme govore o jednakosti operatora A sa nultim operatorom, ali iz njih direktno slede uslovi za jednakost dva operatora:

Posledica 1. Za dva linearna operatora $A, B \in \hat{L}(V(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ važi da je:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V) \quad (\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, B\mathbf{y}). \tag{2.13}$$

Posledica 2. Specijalno, u unitarnom prostoru U, za dva operatora $A, B \in \hat{L}(U, U)$ važi da je:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall \mathbf{x} \in V) \quad (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, B\mathbf{x}). \tag{2.14}$$

2.2 Defekt i rang operatora

Jedno od osnovnih pitanja koje se postavlja kod svakog preslikavanja je da li postoji inverzno preslikavanje. Odgovor je dobro poznat: ako je preslikavanje bijektivno (tj. injektivno i surjektivno), onda postoji inverzno preslikavanje. Kod linearnih operatora bijektivnost je usko vezana sa osobina dva potprostora određena samim operatorom.

Neka je $A \in \hat{L}(U, V)$ gde su U i V prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. *Prostor likova* operatora je skup svih vektora koji su slike vektora iz U i označavamo ga kao $R(A)$. Dakle, to je sledeći skup:

$$R(A) := \{\mathbf{v} \in V | (\exists \mathbf{u} \in U) \ A\mathbf{u} = \mathbf{v}\}. \tag{2.15}$$

Lako se pokazuje da je $R(A)$ potprostor u V. Dovoljno je proveriti da je proizvoljna linearna kombinacije vektora iz prostora likova $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ takođe iz $R(A)$. Zamenom $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{u}_2$ dobija se:

$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = \alpha A\mathbf{u}_1 + \beta A\mathbf{u}_2 = A(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2).$$

Dakle, vektor $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ je slika vektora $\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2$, što povlači da je i on iz $R(A)$.

Svaki linearni operator slika nulti vektor iz prostora U u nulti vektor u prostoru V. Naravno, mogu da postoje i neki drugi vektori iz U koji se takođe slikaju u nulti vektor iz V. Skup svih vektora iz U za koje je ovo ispinjeno naziva se *nulpotprostor* operatora A (ili jezgro operatora) i označava sa $N(A)$. Dakle, to je podstup iz U definisan kao:

$$N(A) := \{\mathbf{u} \in U | \, A\mathbf{u} = \mathbf{0}\} \,. \tag{2.16}$$

Kao što se vidi iz samog naziva i $N(A)$ je potprostor, ali naravno u prostoru U. Dokaz je sličan prethodnom. Ako napravimo proizvoljnu linearnu kombinaciju dva vektora $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ iz $N(A)$ dobijamo da je njena slika:

$$A(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2) = \alpha A\mathbf{u}_1 + \beta A\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$

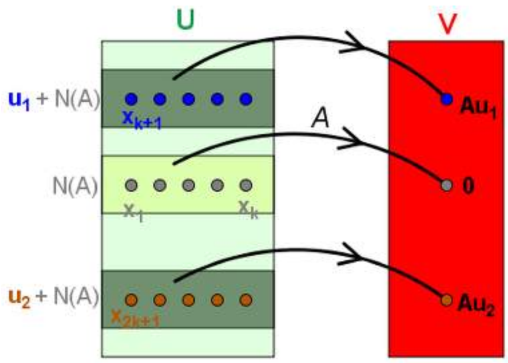
Def. 2.2. *Dimenzija prostora likova $R(A)$ naziva se rang operatora, a dimenzija nul-potprostora $N(A)$ defekt opearatora A.*

Sledeća teorema daje vezu između defekta i ranga linearnog operatora A:

Teorema 2.2. *(Sylvesterov zakon defekta) Neka su U i V dva vektorska prostora, pri čemu je U konačnodimenzionalan. Za svaki linearni operator $A \in \hat{L}(U, V)$ važi:*

$$\dim N(A) + \dim R(A) = \dim U. \tag{2.17}$$

Dokaz: Neka je $B_N = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ jedan bazis u $N(A)$ gde je $k = \dim N(A)$. Dopunimo ovaj skup sa $n-k$ vektora iz $U \setminus N(A)$, gde je $n = \dim U$, tako da dobijemo bazis u U: $B_U = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n\}$. Ako delujemo operatorom A na vektore iz B_U, dobijamo skup vektora iz V od kojih su prvih k nulti vektori dok su ostali sigurno nenulti. Skup ovih $n-k$ nenultih vektora $S = \{A\mathbf{x}_{k+1}, \dots, A\mathbf{x}_n\}$ je podskup od $R(A)$. Da bi jednakost (2.17) bila tačna, potrebno je da pokažemo da je S ustvari jedan bazis u $R(A)$. Za svaki vektor $\mathbf{v}$ iz $R(A)$ postoji $\mathbf{u} \in U$ tako da je $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$. Neka je u datom bazisu B_U vektor $\mathbf{u}$ definisan sa: $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mathbf{x}_i$. Koristeći linearnost operatora A, sledi da je $\mathbf{v} = A(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i A\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i A\mathbf{x}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon_i A\mathbf{x}_i = \sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon_i A\mathbf{x}_i$. Dakle, pokazali smo da se svaki vektor iz $R(A)$ može napisati kao linearna kombinacija vektora iz S, tj. ovaj skup je obrazujući. Ostaje nam da dokažemo da je i linearno nezavisan. Tražimo rešenje jednačine $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i A\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ sa nepoznatim skalarima α_i za $i = k+1, \dots, n$. Iz linearnosti operatora sledi da je ova jednakost ekvivalentna činjenici da vektor $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i$ pripada nulpotprostoru $N(A)$. Dakle, njega možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora bazisa B_N pri čemu ćemo koordinate označiti sa β_i: $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{x}_i$. Sledi da je $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, gde su koeficijenti γ_i definisani sa: $\gamma_i = \begin{cases} -\beta_i, & \text{za } i = 1, \dots, k, \\ \alpha_i, & \text{za } i = k+1, \dots, n. \end{cases}$ Kako smo dobili sumu u kojoj se javljaju svi vektori bazisa u



Slika 2.6:

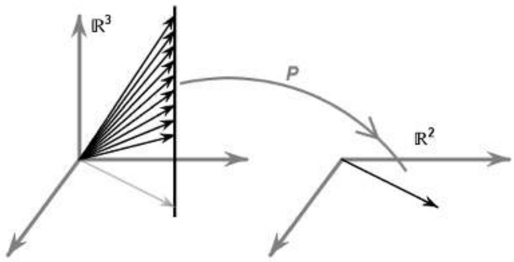
B_U, iz njegove linearne nezavisnosti sledi da su svi koeficjenti $\gamma_i = 0$. Dakle, svi α_i su jednaki nuli, tj. skup S je linearno nezavisan. Q.E.D.

Dejstvom operatora A na bazis $B_U = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ prostora U, dobijamo skup $\{A\mathbf{x}_i | i = 1, \cdots, n\}$ koji je linearno nezavisan samo ako je nulpotprostor $N(A)$ trivijalan, ali je uvek obrazujući za $R(A)$. Na osnovu definicije ranga operatora i formule reprezentovanja, sledi da je rang operatora jednak rangu matrice kojom je reprezentovan jer je skup $\{A\mathbf{x}_i | i = 1, \cdots, n\}$ je izomorfan prostoru kolona matrice operatora $\mathcal{A}$.

Razmotrimo šta se događa kada je $U = V$ tj. kada $A \in \hat{L}(U, U)$. Tada su i $N(A)$ i $R(A)$ potprostori u U. Silvesterova teorema kaže da je zbir njihovih dimenzija jednak dimenziji od U, a to je moguće jedino ako je u preseku ova dva potprostora samo nulti vektor. Sledi da je u ovom slučaju $U = N(A) \dot{+} R(A)$. Naravno, ako je U prostor sa definisanim skalarnim proizvodom, za neke operatore može se desiti da je u pitanju ortogonalna suma ovih potprostora.

Primer 2.2.1. Razmotrimo operator $P : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definisan sa

$$\mathcal{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Ovo preslikavanje očigledno nije $1-1$ jer mu je nulpotprostor jednak:

$$N(P) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\},$$

tj. defekt je jednak jedinici. Rang operatora je $R(P) = 2$, pa je u skladu sa zakonom defekta

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \underbrace{\dim(N(P))}_{=1} + \underbrace{\dim(R(P))}_{=2}.$$

Naravno, ovo je samo specijalan slučaj opšteg principa: ne postoji bijektivni linearni operator, tj. izomorfizam između vektorskih prostora različitih dimenzija [5].

2.2.1 Invarijantni potprostori

Posmatrajmo potprostor W vektorskog prostora U. Ako za operator $A \in \hat{L}(U, U)$ važi da svaki vektor iz W slika u neki vektor iz tog istog potprostora, tj. ako važi da je $(\forall \mathbf{x} \in W)\ A\mathbf{x} \in W$, kažemo da je W *invarijantan potprostor* pod dejstvom operatora A. Kako je skup vektora $AW = \{A\mathbf{u} | \ \mathbf{u} \in W\}$ i sam jedan potprostor u U, invarijantnost W znači da je on potprostor i u W. Zato obično invarijantnost potprostora W kraće zapisujemo kao: $AW < W$.

Sam prostor likova $R(A)$ je invarijantan pod dejstvom operatora A: kako je $R(A) \subseteq U$ jasno je da su likovi vektora iz $R(A)$ takođe iz $R(A)$. Naravno, isto važi i za $N(A)$: to je skup svih vektora koji operator A preslikava u nulti vektor $\mathbf{0}$, a on uvek pripada $N(A)$.

Primer 2.2.2. Operator rotacije oko $z - ose$: invarijantni potprostori $L(\{\mathbf{e}_z\})$ i $L(\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\})$.

[5] Potsetnik: polje i dimenzija definišu vektorski prostor do na izomorfizam

Zadatak 2.2.1. Odrediti sve netrivijalne invarijante potprostore u $\mathbb{R}^3$ za operator prostorne inverzije $J = -I$ i za operator horizontalnog smicanja

Zadatak 2.2.2. Odrediti sve netrivijalne invarijante potprostore u $\mathbb{R}^2$ za operator horizontalnog smicanja S.

2.2.2 Nesingularni i invertibilni operatori

Def. 2.3. *Linearni operator $A \in \hat{L}(U(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ je nesingularan ako je A injektivno preslikavanje. U suprotnom, kažemo da je operator singularan.*

Ako je operatora A injektivno preslikavanje, tj. dva različita vektora ne mogu da imaju isti lik, sledi da je $N(A) = \{\mathbf{0}\}$. Neka se dva vektora $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ takva da su im likovi isti: $A\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ i $A\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}$. Kako je $A\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}_2$, iz lineranost operatora dobijamo da je $A(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$. Ako je $N(A) = \{\mathbf{0}\}$, sledi da je $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, tj. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ pa je A injektivno preslikavanje.

Dakle, pokazali smo da je linearni operatora A nesingularan akko mu je nulpotprostor trivijalan, odnosno $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

Značaj nesingularnih operatora postaje očigledan iz sledeće teoreme:

Teorema 2.3. *Operator $A \in \hat{L}(U(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ je nesingularan akko linearno nezavisan skup vektora iz U prevodi u linearno nezavisan skup vektora iz V.*

Dokaz: Ako je operator nesingularan tada je $N(A) = \{\mathbf{0}\}$, tj. defekt mu je jednak nuli. Iz Silvesterovog zakona defekta sledi da je $\dim U = \dim R(A)$, a to je moguće samo ako operator održava linearnu nezavisnot: bazis iz U slika u bazis u $R(A)$. Naravno osobina ostaje da važi iako uzmemo skup linearno nezavisnih vektora koji nisu bazis u U. Obrnuto, ako operator A održava linearnu nezavisnot sledi da bazis iz U slika u bazis iz $R(A)$, tj. dimenzije ovih prostora su jednaka, pa sledi da je $\dim N(A) = 0$. Dakle, nulpotprostor je trivijalan, pa je operator nesingularan. Q.E.D.

Specijalno, za operatore iz $\hat{L}(U(\mathbb{F}), U(\mathbb{F}))$ vidimo da su upravo nesingularni operatori oni koji slikaju jedan bazis u U u neki drugi bazis u istom prostoru. Dakle, ako hoćemo da menjano bazis, uvek postoji nesingularni operator koji će zadati bazis prevesti u željeni. Pre nego što razmotrimo kako promena bazisa utiče na reprezentovanje vektora i operatora, razmotrimo šta se dobija ako je operator A bijekcija.

Def. 2.4. *Ako je operator $A \in \hat{L}(U(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ bijekcija, tj. nesingularan je i $R(A) = V$, onda kažemo da je A invertibilan operator, tj. postoji inverzni operator $A^{-1} : V \mapsto U$ takav da je:*

$$AA^{-1} = I_V, \quad \text{i} \quad A^{-1}A = I_U,$$

gde su I_U i I_V jedinični operatori u prostorima U i V.

Lako se vidi da je A^{-1} takođe linearan operator, naravno i nesingularan: inverzni operator za A^{-1} je jednak A. Ustvari ako je A invertibilan operator, prostori U i V su izomorfni: A je bijekcija koja slika U u V. Specijalno, ako su prostori konačnodimenzionalni i $U = V$, pojmovi nesingularnosti i invertibilnosti postaju ekvivalentni:

Teorema 2.4. *Operator $A \in \hat{L}(U_n, U_n)$ je invertibilan akko je nesingularan.*

Dokaz: Znamo da je invertibilni operator po definiciji nesingularan. Obrnuto, ako je A nesingularan njegov nulpotprostor je trivijalan pa je $\dim N(A) = 0$. Kako je $n = \dim N(A) + \dim R(A)$, sledi da je $\dim R(A) = n$ odnosno $R(A) = U_n$, pa je A invertibilan. Q.E.D.

Zadatak 2.2.3. Odrediti nulpotprostor i prostor likova operatora $A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ koji je dat matricom:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 2.2.4. U euklidskom prostoru E_3 odrediti inverzne operatore za:

a) operator rotacije za ugao φ oko $z-$ose;

b) operator refleksije u odnosu na xOy ravan.

2.2.3 Promena bazisa i reprezentovanje vektora i operatora

Videli smo da se izborom bazisa $B = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ u $V(\mathbb{F})$ uspostavlja izomorfizam između prostora $V(\mathbb{F})$ i $\mathbb{F}^n$: svakom vektoru $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k$ iz V pridružuje kolonu $[\mathbf{v}]_B = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)^T$. Takođe, u datom bazisu svaki linearni operator $A \in \hat{L}(V(\mathbb{F})), V(\mathbb{F}))$ se reprezentuje matricom $\mathcal{A}$. Ako promenimo basis, jasno je da ćemo u opštem slučaju vektor reprezentovati drugom kolonom, a operator drugom matricom. Znamo da ako delujemo na vektore bazisa B nekim nesingularnim operatorom $T \in \hat{L}(V(\mathbb{F})), V(\mathbb{F}))$ dobijamo skup koji je takođe bazis $B' = TB = \{\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ gde je $\mathbf{x}'_i = T\mathbf{x}_i$. Nazovimo T operatorom prelaska iz bazisa B u bazis B'. Operator T je u bazisu B reprezentovan matricom $\mathcal{T}$:

$$T\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n} t_{ji}\mathbf{x}_j = \mathbf{x}'_i, \tag{2.18}$$

koju nazivamo matricom prelaska iz B u B'. Na osnovu formule (2.18), vidimo da je $i-$ta kolona matrice $\mathcal{T}$ zapravo $[\mathbf{x}'_i]_B$, pa se često zapisuje na sledeći način:

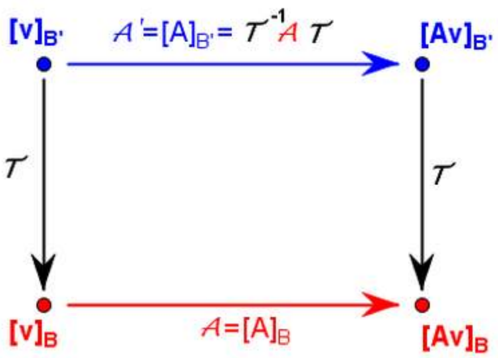
$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} [\mathbf{x}'_1]_B & [\mathbf{x}'_2]_B & \cdots & [\mathbf{x}'_n]_B \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Postavlja se pitanje kako će se pri ovakvoj promeni bazisa promeniti reprezentovanje vektora $\mathbf{v}$, a kako operatora A. Neka je u novom bazisu B' vektor $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha' \mathbf{x}'_i$, dakle on je reprezentovan kolonom $[\mathbf{v}]_{B'} = (\alpha'_1 \dots \alpha'_n)^T$. Kako je:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \mathbf{x}'_i &= \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i T\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha'_i t_{ji} \mathbf{x}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ji} \alpha'_i \right) \mathbf{x}_j, \end{aligned}$$

poređenjem sa koordinatama u starom bazisu B, dobijamo da je koeficijent uz $\mathbf{x}_j$ jednak α_j, odnosno:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$



Slika 2.7: Dijagram promene bazisa.

Dakle dobili smo da je veza između kolona kojim je reprezentovan vektor $\mathbf{v}$ sledeća:

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \mathcal{T}^{-1}[\mathbf{v}]_B. \tag{2.21}$$

Neka je operator A reprezentovan matricom $\mathcal{A}'$ u novom bazisu, gde su matrični elementi dati sa:

$$A\mathbf{x}'_i = \sum_{i=1}^{n} a'_{ji} \mathbf{x}'_j. \tag{2.22}$$

Transformišimo prvo levu stranu ove jednakosti:

$$A\mathbf{x}'_i = A(T\mathbf{x}_i) = A(\sum_{j=1}^{n} t_{ji}\mathbf{x}_j) = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} A\mathbf{x}_j = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ji} a_{kj} \right) \mathbf{x}_k.$$

Slično, desna strana jednakosti (2.22) postaje:

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ji}\mathbf{x}'_j = \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} T\mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a'_{ji} t_{kj} \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{kj} a'_{ji} \right) \mathbf{x}_k.$$

Poređenjem koeficijanata uz vektor $\mathbf{x}_k$ dobijamo da je $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} t_{ji} = \sum_{j=1}^{n} t_{kj} a'_{ji}$, odnosno $(\mathcal{A}\mathcal{T})_{ki} = (\mathcal{T}\mathcal{A}')_{ki}$. Konačno, veza između dve matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$, kojima je reprezentovan operator A u bazisima B i B' respektivno, je sledeća:

$$\mathcal{A}' = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}. \tag{2.23}$$

Dejstvo operatora prelaska na vektore i operatore reprezentovane pri promeni bazisa $B \mapsto B'$ je prikazana dijagramom na slici 2.7.

Zadatak 2.2.5. Kojom matricom je reprezentovan skalarni operator $A = \lambda I$ gde je λ proizvoljan nenulti skalar iz polja $\mathbb{F}$ nad kojim je vektorski prostor V. Kako se menja ova matrica ako se promeni bazis.

2.2.4 Transformacija sličnosti

Za matrice $\mathcal{A}'$ i $\mathcal{A}$ kažemo da su *slične* ako postoji invertibilna matrica $\mathcal{M}$, tako da važi: $\mathcal{A}' = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{M}$. Transformaciju $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{M}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{M}$ nazivamo *transformacijom sličnosti.* Na osnovu prethodnog poglavlja možemo da tvrdimo da dve slične matrice reprezentuju isti operator u dva različita bazisa povezana matricom prelaska $\mathcal{M}$. Termin "sličnost"nije slučajan: slične matrice imaju čitav niz zajedničkih osobina.

Teorema 2.5. *Determinante sličnih matrica su jednake.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}' = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{M}$. Izračunavanjem determinante leve i desne strane dobijamo:

$$\det(\mathcal{A}') = \det(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{M}) = \det(\mathcal{M}^{-1})\det(\mathcal{A})\det(\mathcal{M}) = \det(\mathcal{A}),$$

jer je $\det(\mathcal{M}^{-1}) = \det(\mathcal{M})^{-1}$. Q.E.D.

Teorema 2.6. *Tragovi sličnih matrica su jednaki.*

Dokaz: Najpre dokažimo da za dve proizvoljne matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ važi $\mathrm{Tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{B}\mathcal{A})$. Trag je definisan kao zbir dijagonalnih matričnih elemenata: $\mathrm{Tr}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, pa je

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \mathrm{Tr}(\mathcal{B}\mathcal{A}).$$

Prema tome, iz $\mathcal{A}' = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{M}$, sledi

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{A}') = \mathrm{Tr}(\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{M})) = \mathrm{Tr}((\mathcal{A}\mathcal{M})\mathcal{M}^{-1}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{A}).$$

Q.E.D.

Dakle, trag i determinanta matrice se ne menjaju pri transformacji sličnosti, pa možemo reći da su to karakteristike samog operatora. Ako postoji bazis u kojem je operator A reprezentovan dijagonalnom matricom, $\mathcal{A} = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$, pa je $\mathrm{Tr}(\mathcal{A}) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, a $\det(\mathcal{A}) = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$. I u svakom drugom bazisu ostaje da je trag matrice isti, kao i njena determinanta. Videćemo kasnije da je ova osobina zgodna za test koji nam može ukazati na eventualnu grešku u računu pri rešavanju nekih problema.

Primer 2.2.3. Neka su date dve kompleksne kvadratne matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, od kojih je bar jedna invertibilna. Matrično množenje nije komutativno, pa u opštem sučaju $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$. Međutim, matrice $\mathcal{A}\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}\mathcal{A}$ su slične: ako je matrica $\mathcal{A}$ invertibilna, postoji $\mathcal{A}^{-1}$, pa je moguće izvršiti sledeću transformaciju sličnosti: $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

2.3 Adjungovani operator

Neka je A linearni operator na prostoru konačne dimenzije $V_n(\mathbb{F})$ sa definisanim skalarnim proizvodom. Može se pokazati [6] da postoji tačno jedan operator koji označavamo kao $A^\dagger$, definisan tako da je za svaka dva vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_n(\mathbb{F})$ zadovoljena sledeća jednakost:

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (A^\dagger\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{2.24}$$

[6] Da bi se ovo pokazalo koristi se Ris-Frešeov teorem.

Operator $A^\dagger$ nazivamo *adjungovani operator*. Lako se pokazuje da je i on sam linearan operator. Naime, za proizvoljne vektore $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ važi da je:

$$\begin{aligned}(A^\dagger(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}), \mathbf{z}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, A\mathbf{z}) = \alpha^*(\mathbf{x}, A\mathbf{z}) + \beta^*(\mathbf{y}, A\mathbf{z}) = \alpha^*(A^\dagger\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta^*(A^\dagger\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &= (\alpha A^\dagger\mathbf{x} + \beta A^\dagger\mathbf{y}, \mathbf{z}).\end{aligned}$$

Kako je gornja jednakost ispunjena za svako $\mathbf{z} \in V$, sledi jednakost prvih faktora u skalarnom proizvodu, tj. $A^\dagger(\alpha x + \beta y) = \alpha A^\dagger x + \beta A^\dagger y$.

Operacija adjungovanja vezana je za skalarni proizvod u prostoru u kome operator deluje. Dakle, istom operatoru pri izboru drugog skalarnog proizvoda odgovara drugi adjungovani operator. U slučaju beskonačnodimenzionalnih vektorskih prostora, adjungovani operator je moguće definisati samo kod posebne vrste operatora. Stoga ćemo ubuduće podrazumevati da je prostor u kome se vrši adjungovanje operatora konačnodimenzionalan.

Neka je u nekom ortonormiranom bazisu $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ u $V_n(\mathbb{F})$, operator A reprezentovan matricom $\mathcal{A}$, a operator $A^\dagger$ matricom $\mathcal{B}$. Zanima nas u kakvoj su vezi ove dve matrice. Polazeći od (2.10), koristeći osobine skalarnog proizvoda i definiciju (2.24), dobijamo:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (\mathbf{x}_i, A^\dagger\mathbf{x}_j) = (A^\dagger\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i)^* \\ &= (\mathbf{x}_j, A\mathbf{x}_i)^* = a^*_{ji}, \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da je $\mathcal{B} = \mathcal{A}^\dagger$, odnosno da je u ortonormiranom bazisu adjungovani operator $A^\dagger$ reprezentovan konjugovano-transponovanom, tj. adjungovanom matricom $\mathcal{A}^\dagger$. Ako je operator A definisan u vektorskom prostoru nad realnim poljem, tada je matrica $\mathcal{A}^\dagger$ jednaka transponovanoj matrici od $\mathcal{A}$.

Treba naglasiti da veza između matrica kojima su u nekom neortonormiranom bazisu reprezentovani operatori A i $A^\dagger$ nije tako jednostavna, i u opštem slučaju adjungovani operator se ne reprezentuje adjungovanom matricom.

Polazeći od same definicije adjungovanog operatora lako se pokazuju sledeće osobine:

- $(A^\dagger)^\dagger = A$, tj. operacija adjungovanja je *involutivna*;
- $(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger$ i $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$, tj. operacija adjungovanja je antilinearna;
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

Zadatak 2.3.1. Dokazati gore navedene osobine.

Teorema 2.7. *Za operator $A \in \hat{L}(V, V)$ i njegov adjungovani operator $A^\dagger$ važi da je:*

(i) $N(A^\dagger) = R(A)^\perp$;

(ii) $\dim R(A^\dagger) = \dim R(A)$, *kao i da je* $\dim N(A^\dagger) = \dim N(A)$;

(iii) iz $AW < W$ sledi $A^\dagger W^\perp < W^\perp$, tj. ako je potprostor W invarijantan za A, onda je njegov ortokomplement $W^\perp$ invarijantan za $A^\dagger$.

Dokaz: (i) Neka je $\mathbf{u} \in V$. Tada važi:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \in N(A^\dagger) &\Leftrightarrow A^\dagger \mathbf{u} = 0\\ &\Leftrightarrow (\mathbf{v}, A^\dagger \mathbf{u}) = 0, \text{ za } (\forall \mathbf{v} \in V)\\ &\Leftrightarrow (A\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0, \text{ za } (\forall \mathbf{v} \in V)\\ &\Leftrightarrow \mathbf{u} \in R(A)^\perp.\end{aligned}$$

Kako ova ekvivalencija važi za svaki vektor iz $R(A)^\perp$, zaključujemo da je $N(A^\dagger) = R(A)^\perp$.
(ii) Kako je $V = N(A) \oplus N(A)^\perp$, sledi da je $\dim V = \dim N(A) + \dim(N(A)^\perp)$. Iz prethodno dokazanog stava (deo (i)) znamo da je $\dim(N(A)^\perp) = \dim R(A^\dagger)$. Silvesterov zakon defekta tvrdi da je $\dim V = \dim N(A) + \dim R(A)$, pa sledi da je $\dim R(A) = \dim R(A^\dagger))$.
(iii) Za proizvoljna dva vektora $\mathbf{x} \in W$ i $\mathbf{y} \in W^\perp$ važi da je $(\mathbf{y}, A\mathbf{x}) = 0$, jer je W invarijantan pod dejstvom operatora A. Kako je $(\mathbf{y}, A\mathbf{x}) = (A^\dagger \mathbf{y}, \mathbf{x})$, sledi da je $(A^\dagger \mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$, odnosno da $A^\dagger \mathbf{y} \in W^\perp$.
Q.E.D.

Iz $A = (A^\dagger)^\dagger$ i teoreme pod (i), dobijamo da je:

$$N(A) = R(A^\dagger)^\perp \quad \text{i} \quad N(A)^\perp = R(A^\dagger).$$

Takođe, kako je $\dim R(A^\dagger) = \dim R(A)$, sledi da je u proizvoljnom ortonormiranom bazisu rang matrice $\mathcal{A}$ jednak rangu matrice $A^\dagger$, tj. da je rang vrsta jednak rangu kolona.

Primer 2.3.1. Metod najmanjih kvadrata (vidi poglavlje 1.4.1) se svodi na rešavanje protivurečnog sistema (1.13), a njega je moguće zapisati u matričnom obliku na sledeći način:

$$\mathcal{X}\vec{a} = \vec{y}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Matrica $\mathcal{X}$ je matrica u kojoj su u prvoj koloni date vrednosti nezavisne promenljive, vektor $\vec{a}$ je vektor nepoznatih koeficijenata, a $\vec{y}$ je vektor sa vrednostima zavisne promenljive. Tu jednačinu nije moguće rešiti ako vektor $\vec{y}$ ne pripada potprostoru likova matrice $\mathcal{X}$. Međutim, njega je moguće razložiti na zbir projekcije i normale na potprostor likova: $\vec{y} = \vec{y}_{\|} + \vec{y}_\perp$, $\vec{y}_{\|} \in R(\mathcal{X})$, $\vec{y}_\perp \in R(\mathcal{X})^\perp$. Dakle, jednačinu $\mathcal{X}\vec{a} = \vec{y}$ nije moguće rešiti, ali $\mathcal{X}\vec{a} = \vec{y}_{\|}$ jeste. Na osnovu teoreme 2.7, $R(\mathcal{X})^\perp = N(\mathcal{X}^\dagger)$, pa je

$$\mathcal{X}^\dagger \vec{y} = \mathcal{X}^\dagger(\vec{y}_{\|} + \vec{y}_\perp) = \mathcal{X}^\dagger(\vec{y}_{\|}).$$

Ako hoćemo da izbegnemo direktno računanje $\vec{y}_{\|}$ (što je urađeno u poglavlju 1.4.1), možemo to elegantno izbeći na sledeći način. Pomnožimo $\mathcal{X}\vec{a} = \vec{y}$ s'leva sa $\mathcal{X}^\dagger$, tako dobijamo jednačinu:

$$\mathcal{X}^\dagger \mathcal{X}\vec{a} = \mathcal{X}^\dagger \vec{y} = \mathcal{X}^\dagger \vec{y}_{\|}.$$

Rešenja jednačine $\mathcal{X}\vec{a} = \vec{y}_{\|}$ su rešenja gornje jednačine. Prema tome, metod najmanjih kvadrata se sastoji u tome, što se umesto protivurečne jednačine $\mathcal{X}\vec{a} = \vec{y}$, rešava jednačina:

$$\mathcal{X}^\dagger \mathcal{X}\vec{a} = \mathcal{X}^\dagger \vec{y}.$$

Naravno, u fizici merene veličine su realni brojevi, pa su vektori i matrice nad poljem realnih brojeva. U tom slučaju se adjungovanje svodi na transponovanje, pa jednačina koju treba rešiti zapravo glasi:

$$\mathcal{X}^T \mathcal{X}\vec{a} = \mathcal{X}^T \vec{y}.$$

2.3.1 Normalni operatori

Za fiziku su značajni operatori čija je zajednička osobina da komutiraju sa svojim adjungovanim operatorom.

Def. 2.5. *Linearni operator $A \in \hat{L}(V_n, V_n)$, u prostoru V_n sa skalarnim proizvodom, naziva se normalni operator ako je $[A, A^\dagger] = 0$.*

Operatori rotacije oko neke ose $\vec{u}$ za ugao φ, kao i operatori refleksije u odnosu na zadatu ravan su primeri normalni operatori. Osnovna osobina normalnih operatora je da za svaki vektor $x \in V_n$, važi :$\|Ax\| = \|A^\dagger x\|$. To je direktna posledica definicije normalnih operatora:

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^\dagger Ax, x) = (AA^\dagger x, x) = (A^\dagger x, A^\dagger x) = \|A^\dagger x\|.$$

Neka je $x \in N(A)$, tada iz $\|Ax\| = 0$ sledi da je i $\|A^\dagger x\| = 0$, tj. $x \in N(A^\dagger)$. Potpuno simetrično, iz $x \in N(A^\dagger)$ sledi da je i $x \in N(A)$, pa zaključujemo da za normalne operatore naži da je $N(A) = N(A^\dagger)$.

Dalja podela normalnih operatora uvodi se na osnovu dodatnih odnosa operatora A i njemu adjungovanog $A^\dagger$. Navodimo nekoliko klasa operatora, od kojih ćemo neke kasnije detaljnije proučiti.

Def. 2.6. *Linearni operator $A \in \hat{L}(V_n, V_n)$, u prostoru V_n sa skalarnim proizvodom, se naziva:*

(*i*) *ermitski operator ako je jednak svom adjungovanom, tj. $A = A^\dagger$, a specijalno, za realne vektorske prostore koriste se naziv simetričan operator: $A = A^T$;*

(*ii*) *kosoermitski operator, ako je jednak negativnom adjungovanom: $A = -A^\dagger$, odnosno antisimetričan operator kod realnih vektorskih prostora: $A = -A^T$;*

(*iii*) *pozitivan ako je ermitski i ako je: $(\forall \mathbf{x} \in V)$ $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \geq 0$, specijalno ako je $(\forall \mathbf{x} \in V)$ $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) > 0$ kažemo da je operator A strogo pozitivan (ili pozitivno definitan);*

(*iv*) *statistički, ako je pozitivan i ako ima jedinični trag $\mathrm{Tr}\, A = 1$;*

(*v*) *projektor, ako je idempotentan, tj. $A^2 = A$, i ermitski;*

(*vi*) *unitaran, ako je $AA^\dagger = A^\dagger A = I$, a u slučaju realnih prostora, koristi se naziv ortogonalan operator ($AA^T = A^T A = I$).*

Važno je napomenuti da su sve gore navedene vrste operatora određene njihovim osobinama u odnosu na zadati skalarni proizvod, tj. nisu u pitanju osobine inherentne samim operatorima. Tako, normalan operator A ne mora ostati takav pri promeni skalarnog proizvoda definisanom u $V(\mathbb{F})$.

2.3.2 Ermitski operatori

Posmatrajmo skup svih ermitskih operatora iz $\hat{L}(V(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$. Nulti operator je ermitski. Takođe, zbir dva ermitska operatora je i sam ermitski operator. Ako se ermitski operator A pomnoži nekim skalarom $\alpha \in \mathbb{F}$, ovako dobijeni operator αA je ermitski operator samo ako je $\alpha \in \mathbb{R}$. Dakle, ermitski operatori obrazuju vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

Zbog osobine $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, proizvod dva ermitska operatora u opštem slučaju nije ermitski operator. Da bi proizvod AB bio ermitski operator, potreban i dovoljan uslov je da oni komutiraju, tj. da je $[A, B] = 0$.

U euklidskom prostoru $V(\mathbb{R})$, za proizvoljna dva vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ znamo da je $(\mathbf{x}, A\mathbf{y})$ iz $\mathbb{R}$. Ali u unitarnom prostoru U ovo ne mora biti zadovoljeno. Sledeća teorema pokazuje da je realnost skalarnog proizvoda $(\mathbf{x}, A\mathbf{x})$ ekvivaletntna zahtevu da je $A = A^\dagger$:

Teorema 2.8. *Operator $A \in \hat{L}(U_n, U_n)$, gde je U_n konačnodimenzionalan unitarni prostor, je ermitski ako i samo ako je $(\mathbf{x}, A\mathbf{x})$ realan broj za svako x iz U_n.*

Dokaz: Ako je A ermitski, onda je za svako $\mathbf{x} \in U_n$: $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (A^\dagger\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Koristeći ermitsku simetriju skalarnog proizvoda, znamo da je: $(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x})^*$. Sledi da je $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x})^*$, što je ispunjeno samo ako je $(\mathbf{x}, A\mathbf{x})$ realan broj. Obratno, ako je $(\forall \mathbf{x} \in U_n)$ $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, onda je $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x})^*$. Iz osobine ermitske simetrije skalarnog proizvoda i definicije adjungovanog operatora, dobijamo da je $(\mathbf{x}, A\mathbf{x})^* = (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A^\dagger\mathbf{x})$. Konačno, koristeći posledice (2.14), iz $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A^\dagger\mathbf{x})$, sledi da je $A = A^\dagger$. Q.E.D.

U kvantnoj mehanici fizičke veličine, kao na primer koordinata, impuls i moment impulsa, su definisane kao ermitski operatori. Same oznake za veličine ostaju iste, a da bi se znalo da su u pitanju operatori dodaju im se kapice. Tako imamo operatore: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z, \hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$. Skalarni proizvod $(\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{x})$, gde je x normirani vektor, naziva se *očekivana vrednost operatora $\hat{A}$ u stanju* $\mathbf{x}$ [7]. Za sistem koji je u stanju $\mathbf{x}$, rezultat merenja fizičke veličine opisane operatorom $\hat{A}$ je upravo vrednost $(\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{x})$.

Ermitski operator je u ortonormiranom bazisu reprezentovan ermitskom matricom: to je matrica koja je jednaka svojoj adjungovanoj matrici. U vektorskom prostoru nad realnim poljem, reprezentovan je simetričnom matricom. U oba slučaja je jednostavno na prvi pogled prepoznati da li se radi o ermitskoj (simetričnoj) matrici.

2.3.3 Projektori

Projektori su idempotentni ermitski operatori i obično se obeležavaju slovom P. Napomenimo da je idempotentnost svojstvo samog operatora, dok je uslov da je operator ermitski vezana za definisani skalarni proizvod [8].

Teorema 2.9. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ sa definisanaim skalarnim proizvodom. Operator $P \in \hat{L}(V, V)$ je projektor akko je $V = N(P) \oplus R(P)$ i za svaki vektor $\mathbf{v} \in R(P)$ važi da je $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$.*

Dokaz: Kako je $N(P)^\perp = R(P^\dagger)$, a P je projektor, iz $P = P^\dagger$ sledi da je $N(P)^\perp = R(P)$. Pošto je $N(P)$ potprostor u V, znamo da je ceo prostor možemo napisati kao $V = N(P) \oplus N(P)^\perp$, tj. $V(\mathbb{F}) = N(P) \oplus R(P)$. Takođe, ako je $\mathbf{v} \in R(P)$, postoji vektor $\mathbf{u} \in V$ čiji je lik upravo $\mathbf{v}$: $\mathbf{v} = P\mathbf{u}$. Sledi da je $P\mathbf{v} = P(P\mathbf{u}) = P^2\mathbf{u} = P\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Obrnuto, za operator P važi da je $V = N(P) \oplus R(P)$, pa sledi da se svaki vektor $\mathbf{x} \in V$ može jednoznačno napisati kao zbir dva vektora $\mathbf{x} = \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_R$, gde je $\mathbf{x}_N \in N(P)$, $\mathbf{x}_R \in R(P)$ i $P\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_R$. Očigledno je da za svako $\mathbf{x} \in V$, dobijamo da je $P^2\mathbf{x} = P\mathbf{x}$, tj.

[7] Često se koristi i pojam srednja vrednost operatora $\hat{A}$ u stanju $\mathbf{x}$.

[8] U literaturi se često naziv projektor koristi za idempotentne operatore, dok se idempotentni ermitski operatori nazivaju ortogonalni projektori.

operator P je idempotentan. I konačno, lako se proverava da je za svako $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x},P\mathbf{y}) &= (\mathbf{x}_N+\mathbf{x}_R,P\mathbf{y}_N+P\mathbf{y}_R)=(\mathbf{x}_R,\mathbf{y}_R)\\ (\mathbf{x},P^\dagger\mathbf{y}) &= (P\mathbf{x},\mathbf{y})=(P\mathbf{x}_N+P\mathbf{x}_R,\mathbf{y}_N+\mathbf{y}_R)=(\mathbf{x}_R,\mathbf{y}_R)\end{aligned}$$

pa je dakle $P=P^\dagger$, odnosno P je projektor. Q.E.D.

Jasno je da ako projektor reprezentujemo matricom $\mathcal{P}$ u nekom ortonormiranom bazisu B u $V_n(F)$, za dobijenu matricu važi da je:

$$\mathcal{P}^\dagger=\mathcal{P}\quad \text{i}\quad \mathcal{P}^2=\mathcal{P}.$$

Izaberimo ortonormirani bazis koji je adaptiran na dekompoziciju $V(\mathbb{F})=N(P)\oplus R(P)$. Neka je prvih k vektora ovog bazisa zapravo bazis u $R(P)$, a ostatak bazis u $N(P)$. Očigledno, u ovakvom bazisu operator P je reprezentovan dijagonalnom matricom:

$$\mathcal{P}=\mathrm{diag}(1,\ldots,1,0,\ldots) \tag{2.26}$$

koja na dijagonali ima tačno k jedinica, a sva ostala mesta su jednaka nuli. Jasno je da trag ove matrice jednak k, tj. dimenziji prostora likova, a kako je trag invarijantan pri promeni bazisa, tj. to je karakteristika samog operatora dobijamo da je:

$$\dim R(P)=Tr(P). \tag{2.27}$$

Ovo je korisno zapamtiti jer se u zadacima lako može proveriti da li je trag izračunatog projektora stvarno jednak dimenziji njegovog potprostora.

Posmatrajmo sad netrivijalni potprostor W u $V_n(\mathbb{F})$. Cilj nam je da definišemo projektor P_W, tako da je njegov prostor likova upravo jednak W, tj. $W=R(P)$. Iz gornje Teoreme 2.9, sledi da je $W^\perp=N(P)$. Dakle, traženi projektor je takav da $\forall\mathbf{x}\in W$ važi da je $P_W\mathbf{x}=\mathbf{x}$ i $\forall\mathbf{y}\in W^\perp$: $P_W\mathbf{y}=0$. Odavde postaje očigledno da je projektor jednoznačno određen zadavanjem njegovog prostora likova. Takođe, vidimo da geometrijska slika omogućava da projektor definišemo kao operator koji prosto odseca komponentu vektora koja je iz $W^\perp$: tj. može se reći da je rezultat dejstva na vektor $\mathbf{z}$ njegova projekcija na W (tj. komponenta vektora $\mathbf{z}_W$).

Razmotrimo prvo prostor kolona $\mathbb{F}^n$ u kome je dat standardni skalarni proizvod, tj. $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^\dagger\mathbf{y}$. Neka je W jednodimenzioni potprostor u $\mathbb{F}^n$, tj. $W=L(\{\mathbf{x}\})$ gde je $\mathbf{x}$ vektor jedinične norme. Operator, tj. matrica $n\times n$, $\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger$ je ermitska i idempotentna: $(\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger)^\dagger=(\mathbf{x}^\dagger)^\dagger\mathbf{x}^\dagger=\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger$ i $\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger=\mathbf{x}(\mathbf{x},\mathbf{x})\mathbf{x}^\dagger=\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger$. Ovaj operator je dakle projektor i to upravo P_W, jer je $P_W\mathbf{x}=(\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger)\mathbf{x}=(\mathbf{x},\mathbf{x})\mathbf{x}=\mathbf{x}$. Napomenimo da $\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger$ nije idempotentan ako $\mathbf{x}$ nije jedinične norme, pa ne može biti projektor. Za proizvoljan vektor $\mathbf{v}\in V$, važi da je $P_W\mathbf{v}=\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger\mathbf{v}=(\mathbf{x},\mathbf{v})\mathbf{x}$, tj. dejstvo operatora $\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger$ na vektor $\mathbf{v}$ daje projekciju tog vektora na ort $\mathbf{x}$. Ako pak uzmemo da je W dvodimenzionalan potprostor u $\mathbb{F}^n$, tj. $W=L(\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\})$ gde je $B_W=\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}$ ortonormirani bazis u W, može se pokazati da je $P_W=\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^\dagger+\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^\dagger$. Lako je izvesti generalizaciju: ako je W k-dimenzioni potprostor u $\mathbb{F}^n$, a skup $\{x_1,\ldots,x_k\}$ jedan ortonormirani bazis u W, onda je projektor P_W dat sa:

$$P_W=\sum_{i=1}^{k}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^\dagger. \tag{2.28}$$

Takođe, za proizvoljan vektor $\mathbf{y}\in\mathbb{F}^n$ važi da je: $P_W\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})\mathbf{x}_i$. Dakle, na vektor $\mathbf{y}$ on deluje tako što daje projekciju ovog vektora na W: suma svih projekcija na vektore bazisa, tj. otseca parče koje je iz ortokomplementa $W^\perp$, odnosno nulpotprostora P_W.

Teorema 2.10. *Projektor P koji deluje u vektorskom prostoru $V_n(\mathbb{F})$ sa definisanim skalarnim proizvodom ima sledeće osobine:*

(i) $(\forall x \in U)\ (x, Px) \geq 0$

(ii) $(\forall x, y \in U)\ (x, Py) = (Px, y) = (Px, Py)$

(iii) $(\forall x \in U)\ ||Px|| \leq ||x||$

Dokaz: (i) Kako je $(\mathbf{x}, P\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, P^2\mathbf{x}) = (P^\dagger\mathbf{x}, P\mathbf{x}) = (P\mathbf{x}, P\mathbf{x})$, iz stroge pozitivnosti skalarnog proizvoda sledi da je $(\mathbf{x}, P\mathbf{x}) \geq 0$ za svako $\mathbf{x} \in V$.
(ii) Kako je $P = P^\dagger$, za proizvoljna dva vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ imamo da je $(\mathbf{x}, P\mathbf{y}) = (P^\dagger\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (P\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Sa druge strane, koristeći da je $P^2 = P$, dobijamo: $(\mathbf{x}, P\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, P^2\mathbf{y}) = (P^\dagger\mathbf{x}, P\mathbf{y}) = (P\mathbf{x}, P\mathbf{y})$.
(iii) Kako je $V = N(P) \oplus R(P)$, svaki vektor možemo jednoznačno napisati kao zbir dva vektora $\mathbf{x} = \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_R$, gde je $\mathbf{x}_N \in N(P)$ i $\mathbf{x}_R \in R(P)$. Sledi da je $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_N + \mathbf{x}_R, \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_R) = (\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) + (\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_R)$. Pošto je $(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) \geq 0$, sledi: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq (\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_R)$. Konačno, zamenom $\mathbf{x}_R = P\mathbf{x}_R$, dobijamo: $\|\mathbf{x}\|^2 \geq \|Px\|^2$. Q.E.D.

Teorema 2.11. *$P \in \hat{L}(V_n(\mathbb{F}), V_n(\mathbb{F}))$ je projektor akko je $I - P$ projektor.*

Dokaz: Dokaz ove teoreme je trivijalan i dovoljno je dokazati samo jedan smer: na primer, ako znamo da je P projektor, sledi da je $(I-P)^\dagger = I - P^\dagger = I - P$ i

$$(I-P)^2 = (I-P)(I-P) = I - P - P + P^2 = I - 2P + P = I - P,$$

tj. $I - P$ je projektor. Q.E.D.

Napomenimo da je nulpotprostor projektora P, ustvari prostor likova projektora $I - P$. Odnosno, ako P projektuje na $W = R(P)$, onda $I - P$ projektuje na $W^\perp = N(P)$.

Posmatrajmo sad dva projektora P_1 i P_2. Njihov zbir $P_1 + P_2$ je takodje ermitski operator, ali je $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2$. Dakle, operator $P_1 + P_2$ je projektor ako je

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 0. \tag{2.29}$$

Pomnožimo ovu jednakost sa leva (rezultat je prva jednačina), odnosno sa desna sa P_1 (druga jednačina):

$$\begin{aligned} (P_1)^2P_2 + P_1P_2P_1 &= 0 \\ P_1P_2P_1 + P_2(P_1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ako ih oduzmemo i iskoristimo idempotentnost projektora, dobijamo:

$$P_1P_2 - P_2P_1 = 0. \tag{2.30}$$

Konačno, iz (2.29) i (2.30) sledi da je uslov za idempotentnost zbira projektora ekvivalentan zahtevu da je: $P_1P_2 = 0$.

Razmotrimo u kakvom su onda odnosu njihovi prostori likova. Neka je $\mathbf{x} \in R(P_1)$ i $\mathbf{y} \in R(P_2)$. Izračunajmo $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (P_1\mathbf{x}, P_2\mathbf{y}) = (P_2^\dagger P_1\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= (P_2P_1\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{0}, \mathbf{y}) = 0. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Dakle, svi vektori iz $R(P_1)$ ortogonalni na vektore iz $R(P_2)$, tj. ova dva potprostora su ortogonalna: $R(P_1) \perp R(P_2)$.

Def. 2.7. *Kažemo da su projektori P_1 i P_2 ortogonalni ako su im međusbno ortogonalni podprostori likova, tj. $R(P_1) \perp R(P_2)$.*

Lema 2.3. *Projektori P_1 i P_2 su ortogonalni akko je $P_1P_2 = 0$.*

Dokaz: U gornjem tekstu već pokazano da iz $P_1P_2 = 0$ sledi da je $R(P_1) \perp R(P_2)$, tj. da su projektori ortogonalni. Ostaje da pokažemo da iz ortogonanosti projektora, tj. njihovih prostora likova sledi da je $P_1P_2 = 0$. Kako za proizvoljna dva vektora $\mathbf{x} \in R(P_1)$ i $\mathbf{y} \in R(P_2)$ važi da je $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, $P_1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ i $P_2\mathbf{y} = \mathbf{y}$, sledi: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (P_1\mathbf{x}, P_2\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, P_1P_2\mathbf{y})$. Dakle, dobili smo da je $(\mathbf{x}, P_1P_2\mathbf{y}) = 0$, pa na osnovu Leme 2.1, zaključjemo da je proizvod ovih projektora nulti operator, tj. $P_1P_2 = 0$. Q.E.D.

Ostalo je da vidimo da li je proizvod dva projektora P_1P_2 i sam projektor. Znamo od ranije da je proizvod dva ermitska operatora i sam ermitski akko ti operatori komutiraju. Dakle, operator P_1P_2 je ermitski akko $[P_1, P_2] = 0$, a to je takođe i dovoljan uslov da P_1P_2 bude idempotentan operator, jer je $(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2$, dok je sa druge strane $P_1P_2 = (P_1)^2(P_2)^2 = P_1P_1P_2P_2$.

Teorema 2.12. *Operator P_1P_2 je projektor akko P_1 i P_2 komutiraju i tada je:*

$$R(P_1P_2) = R(P_1) \cap R(P_2).$$

Dokaz: Već smo pokazali da je proizvod dva projektora P_1 i P_2 takođe projektor akko oni komutiraju. Svi vektori iz $R(P_1P_2)$ su invarijantni pod dejstvom projektora P_1P_2: $R(P_1P_2) = \{\mathbf{v} \in U | P_1P_2\mathbf{v} = \mathbf{v}\}$. Ako delujemo sa P_1 na obe strane jednakosti $\mathbf{v} = P_1P_2\mathbf{v}$ dobijamo $P_1\mathbf{v} = (P_1)^2P_2\mathbf{v}$, tj. da je $P_1\mathbf{v} = P_1P_2\mathbf{v}$. Sledi da vektor $\mathbf{v}$ pripada prostoru likova projektora $R(P_1)$. Slično:

$$P_2\mathbf{v} = P_2P_1P_2\mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; P_2\mathbf{v} = P_1(P_2)^2\mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; P_2\mathbf{v} = P_1P_2\mathbf{v},$$

tj. $\mathbf{v}$ pripada prostoru likova projektora $R(P_1)$. Da zaključimo: svi vektori iz $R(P_1P_2)$ istovremeno moraju biti i iz $R(P_1)$ i $R(P_2)$, a to znači da je $R(P_1P_2) = R(P_1) \cap R(P_2)$. Q.E.D.

Zadatak 2.3.2. U euklidskom prostoru E_3 odrediti projektor P čiji je prostor likova prava čiji je vektor pravca $\vec{a} = (1, 1, 1)^T$.

Zadatak 2.3.3. U euklidskom prostoru E_3 odrediti projektor P čiji je prostor likova ravan koja je određena vektorima $\vec{a} = \vec{e}_x + \vec{e}_y$ i $\vec{e}_x$.

2.3.4 Unitarni operatori

Da se podsetimo, unitarni operatori A je definisan kao operator za koji važi da je $AA^\dagger = A^\dagger A = I$. Očigledno, svaki unitarni operator je invertibilan i $A^{-1} = A^\dagger$. Ovo se može koristiti kao alternativna definicija za unitarni operator.

U fizici su ovi operatori značajni jer svaka operacija koja predstavlja simetriju sistema, čije je stanje opisano nekim vektorom iz prostora $V(\mathbb{F})$ sa definisanim skalarnim proizvodom, odgovara unitarnom operatoru iz $\hat{L}(V(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$. To je posledica sledeće osobine unitarnih operatora:

Teorema 2.13. *Operator $A \in \hat{L}(V(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ je unitaran akko održava skalarni proizvod, tj. akko za svaki par vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V(\mathbb{F})$ važi da je $(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.*

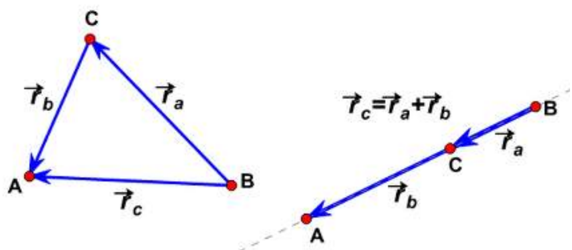
Dokaz: Ako je operator A unitaran, sledi da je $(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (A^\dagger A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, Obrnuto, iz jednakosti $(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, koja je ispuljena za svaka dva vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V(\mathbb{F})$, sledi da je $(A^\dagger A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Konačno koristeći posledicu (2.13), sledi da je $A^\dagger A = I$. Q.E.D.

Specijalno, svaki unitarni operator preslikava ortonormirani bazis u V u neki drugi ortonormirani bazis. Ako je u ortonormiranom bazisu B_V operator A reprezentovan matricom $\mathcal{A}$, tada kolone ove matrice takođe čine ortonormirani bazis, tj. bazis B'_V u koji se pod dejstvom operatora A preslikava bazis B_V.

Zadatak 2.3.4. Koja od sledećih matrica reprezentuje unitarni operator u ortonormiranom bazisu:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}?$$

Primer 2.3.2. U primeru 2.1.3 je pokazano da linearni operatori preslikavaju prave linije u prave linije. Sa druge strane, sva preslikavanja koja održavaju rastojanja i veličine uglova, nazivamo izometrijama. Možemo pokazati da izometrija mora biti linearno preslikavanje. Neka su date tri tačke A, B i C (slika 2.8). Za vektore koji spajaju te tačke važi nejednakost trougla



Slika 2.8:

$$||\vec{r}_a|| + ||\vec{r}_b|| \leq ||\vec{r}_c||,$$

pri čemu jednakost važi samo u slučaju kada su tačke kolinearne. Ako je preslikavanje f izometrija, i ako su tačke A, B, C kolinearne, tj.

$$||\vec{r}_a|| + ||\vec{r}_b|| = ||\vec{r}_c||,$$

tada je i

$$||f(\vec{r}_a)|| + ||f(\vec{r}_b)|| = ||f(\vec{r}_c)||,$$

pa sledi da preslikavanje f preslikava prave linije u prave linije, tj. da je linearno. Dakle, izometrija je linearno preslikavanje koje održava rastojanja i uglove, a to znači da je linearni operator koji održava skalarni proizvod, tj. da je u pitanju unitarni operator. S'obzirom da se u geometriji koristi vektorski prostor nad realnim poljem, unitarni operator je definisan sa $AA^T = I$ i naziva se otrogonalni operator.

2.4 Svojstveni problem linearnog operatora

Videli smo da promena bazisa dovodi do promene matrice kojom je operator A reprezentovan. Najjednostavnije je računati sa dijagonalnim matricama, te se postavlja pitanje da li je moguće naći bazis u V u kom je matrica $\mathcal{A}$ dijagonalna. Ukoliko je to moguće, operator A na vektore tog bazisa deluje na sledeći način:

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

gde su $\lambda_i \in \mathbb{F}$. Dakle, da bi neki vektor $\mathbf{v} \in V(\mathbb{F})$ pripadao tom bazisu potrebno je da zadovoljava jednačinu $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, tj. da na njega operator A deluje tako što ga prosto množi nekim brojem.

Def. 2.8. *Neka je $A \in \hat{L}(V(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$, $\mathbf{x}$ nenulti vektor iz $V(\mathbb{F})$ i λ skalar iz $\mathbb{F}$ tako da važi da je:*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{2.32}$$

Skalar λ naziva se svojstvena vrednost operatora A a vektor $\mathbf{x}$ svojstveni vektor operatora A za svojstvenu vrednost λ.

Obratite pažnju da gornja jednakost istovremeno definiše svojstvenu vrednost i njoj odgovarajući svojstveni vektor. Ako $\mathbf{x}$ zadovoljava (2.32), očigledno je ona tačna i za svaki vektor $\alpha\,\mathbf{x}$ gde je α proizvoljni skalar iz $\mathbb{F}$. Dakle, svi nenulti vektori iz potprostora $L(\{\mathbf{x}\})$ su takođe svojstveni vektori operatora A za istu svojstvenu vrednost λ. Takođe, pošto operator na svojstvene vektore deluje tako što ih prosto pomnoži brojem λ, očigledno ceo potprostor $L(\{\mathbf{x}\})$ je invarijantan pod dejstvom A, tj. $AL(\{\mathbf{x}\}) < L(\{\mathbf{x}\})$. Ako postoji nenulti vektor $\mathbf{y}$ koji je linearno nezavisan za $\mathbf{x}$ i za koji takođe važi da je $A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$, sledi da je i vektor koji se dobija kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ takođe svojstveni vektor za istu svojstvenu vrednost λ. Naravno, i $L(\{\mathbf{y}\})$ je invarijantan pod dejstvom operatora A, pa možemo da proširimo potprostor $L(\{\mathbf{x}\})$ i na taj način dobijamo potprostor $L(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = L(\{\mathbf{x}\}) \dot{+} L(\{\mathbf{y}\})$. Ovaj postupak nastavljamo sve dok ne iscrpimo sva rešenja jednačine (2.32) i dobijemo potprostor u $V(\mathbb{F})$ čiji su svi nenulti vektori svojstveni za svojstvenu vrednost λ.

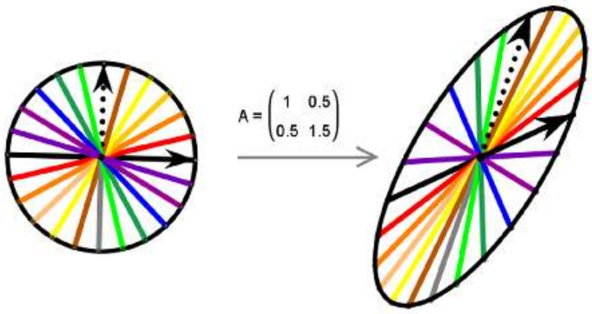
Def. 2.9. *Skup svih svojstvenih vektora operatora A za fiksiranu svojstvena vrednost λ zajedno sa nultim vektorom čini jedan potprostor u $V(\mathbb{F})$ koji se naziva svojstveni potprostor operatora A za svojstvenu vrednost λ i označava kao V_λ.*

Jednakost (2.32) se može zapisati i u obliku $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ gde je I jedinični operator. Očigledno je da svi svojstveni vektori za fiksnu svojstvenu vrednost λ pripadaju nulpotprostoru operatora $A - \lambda I$, pa se svojstveni potprostor za svojstvenu vrednost λ može definisati i kao:

$$V_\lambda = N(A - \lambda I). \tag{2.33}$$

Dimenzija svojstvenog potprostora $\dim V_\lambda$ je sigurno nenulta i naziva se *geometrijski multiplicitet svojstvene vrednosti λ*. Ako je $\dim V_\lambda = 1$ kažemo da je svojstvena vrednost λ *nedegenerisana*, u suprotnom je *degenerisana* a degeneracija joj je upravo jednaka broju $\dim V_\lambda$ (na primer dvostruko degenerisana, trostruko degenerisana itd.).

Primer 2.4.1. Razmotrimo operator A iz $\hat{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Videli smo da je dejstvo A na vektore iz $\mathbb{R}^2$ moguće prikazati elipsom operatora (pogljavlje 2.1.1). Primer simetričnog operatora dat je na slici 2.9. Nekoliko vektora jedinične dužine je prikazano različitim bojama, ali tako da su vektori na istom pravcu, tj. $\mathbf{v}$ i $-\mathbf{v}$ prikazani istom bojom. Da bi neki vektor bio svojstveni za A, potrebno je da mu se ne promeni pravac prilikom delovanja operatora, tj. da na elipsi operatora bude paralelan vektoru iste boje na jediničnoj kružnici. Probajte da uočite koji su vektori na slici svojstveni (tj. koje su boje). U kakvom su odnosu ovi vektori sa poosama elepse? Odgovor na ovo pitanje je dat na slici 2.10.



Slika 2.9: Elipsa simetričnog operatora.

Primer 2.4.2. Razmotrimo operator rotacije oko z ose iz $\hat{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Očigledno, z osa je invarijantna pri ovim rotacijama, pa je vektor $\mathbf{e}_z$ svojstveni za svojstvenu vrednost $\lambda = 1$, a sama z osa, tj. vektori koji leže na njoj, je svojstveni potprostor $V_{\lambda=1} = L(\{\mathbf{e}_z\})$.

Primer 2.4.3. Za operator refleksije u odnosu na xOz, čitava ravan je svojstveni potprostor za svojstvenu vrednost $\lambda = 1$. Dimenzija svojstvenog potprostora je 2, pa je svojstvena vrednost $\lambda = 1$ dvostruko degenerisana.

Primer 2.4.4. Razmotrimo operator diferenciranja D u prostoru realnih diferencijabilnih funkcija. Eksponencijalne funkcije $c\exp(kx)$, gde su $c, k \in \mathbb{R}$, su svojstveni vektori za D za svojstvenu vrednost $\lambda = k$. Dobijeni su rešavanjem jednačine $Df(x) = \lambda f(x)$, koja je ekvivalentna diferencijalnoj jednačini $y'(x) = ky(x)$.

Zadatak 2.4.1. Odrediti svojstvene vektore operatora drugog izvoda D^2 u prostoru realnih diferencijabilnih funkcija.

Teorema 2.14. *Svaki operator* $A \in \hat{L}(V(\mathbb{C}), V(\mathbb{C}))$ *ima bar jedan svojstveni vektor, tj. bar jedan jednozimenzioni invarijantni potprostor.*

Dokaz: Neka je $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ jedan bazis u $V(\mathbb{C})$. Kako operator u tom bazisu reprezentujemo matricom $\mathcal{A}$, a prizvoljni vektor $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mathbf{v}_i$, kolonom $(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)^T$, vektorska jednačina (2.32) je ekvivalentna sistemu od n jednačina po nepoznatim $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$:

$$\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + \cdots + a_{1n}\varepsilon_n &= 0 \\
a_{21}\varepsilon_1 + (a_{22}-\lambda)\varepsilon_2 + \cdots + a_{2n}\varepsilon_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1}\varepsilon_1 + a_{n2}\varepsilon_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)\varepsilon_n &= 0.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Ovo je homogen sistem jednačina, pa sledi da netrivijalno rešenje postoji akko je:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0. \tag{2.35}$$

Ako izračinamo gornju determinantu, dobijamo polinom n-tog stepena po λ. Dakle, uslov (2.35) se svodi na traženje nula ovog polinoma. Dobijena jednačina sigurno ima bar jedno rešenje u polju kompleksnih brojeva, označimo ga sa λ_1. Zamenom ove vrednosti u sistem (2.34) dobija se bar jedno nenulto rešenje za koordinate vektora $\mathbf{x}$. Q.E.D.

Napomenimo da se algebarska jednačina (2.35) naziva *svojstvena ili karakteristična jednačina* operatora A, dok se polinom n-tog stepena po λ, tj. $p_A(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$, zove se *svojstveni ili karakteristični polinom*. Kako determinanta operatora ostaje ista bez obzira u kom je bazisu reprezentovan, jasno je da koeficijenti koji se javljaju u svojstvenom polinomu ne smeju da zavise od izbora bazisa. Zgodno je zapamtiti [9] da je koeficijent koji stoji uz λ^{n-1} jednak $(-1)^n \mathrm{Tr}\, A$, dok je slobodan član $\det A$.

Višestrukost svojstvene vrednosti λ kao korena karakterističnog polinoma naziva se *algebarski multiplicitet* svojstvene vrednosti λ.

Teorema 2.15. *Geometrijski multiplicitet svojstvene vrednosti λ operatora A je manji ili jednak algebarskom multiplicitetu.*

Dokaz: Pretpostavimo da je geometrijski multiplicitet za svojstvenu vrednost α jednak k, tj. neka je ona svojstvena za linearno nezavisne vektore $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Ako taj skup vektora dopunimo do bazisa i u njemu reprezentujemo operator A, dobijamo matricu oblika

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha\mathcal{I}_k & \mathcal{B} \\ 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix}.$$

Svojstveni polinom matrice $\mathcal{A}$ je jednak $p_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^k p_C(\lambda)$, pa višestrukost nule α ne može biti manja od k. Q.E.D.

Razmotrimo šta možemo da zaključimo o svojstvenim vektorima različitih svojstvenih verdnosti.

Teorema 2.16. *Ako su λ_1 i λ_2 dve različite svojstvene vrednosti operatora A, tada su njima odgovarajući vektori $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ linearno nezavisni.*

Dokaz: Neka su λ_1 i λ_2 dve različite svojstvene vrednosti operatora A, a $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ njima odgovarajući svojstveni vektori:

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1 \quad \text{i} \quad A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2.$$

[9] Pogotovo ako grešite u računu!

Da bi smo utvrdili da li su vektor $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ linearno nezavisni ili zavisni, tražimo rešenje jednačine:

$$\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \tag{2.36}$$

po koeficijentima α i β. Ako delujemo na levu i desnu stranu ove jednačine sa operatorom A dobijamo: $\alpha A\mathbf{x}_1 + \beta A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, pa sledi da je $\alpha\lambda_1\mathbf{x}_1 + \beta\lambda_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Zamenimo u dobijenu jednakost $\beta\mathbf{x}_2 = -\alpha\mathbf{x}_1$ (ovde smo iskoristili jednačine (2.36)), pa dobijamo: $\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Kako je svojstvneni vektor nenulti i znamo da je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, jedino rešenje je $\alpha = 0$ iz čega takođe sledi da je $\beta = 0$. Dakle, ovi vektori su linearno nezavisni i očigledno važi da je $L(\{\mathbf{x}_1\}) \cap L(\{\mathbf{x}_2\}) = \{\mathbf{0}\}$. Q.E.D.

Da zaključimo, vektori koji su svojstveni za različite svojstvene vrednosti operatora A su linearno nezavisni, a presek njihovih svojstvenih potprostora sadrži samo nulti vektor:

$$V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_i} = \{\mathbf{0}\}, \quad \text{za} \quad \lambda_i \neq \lambda_j. \tag{2.37}$$

Ako je za operator A moguće naći n svojstvenih vektora $\{\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n\}$ koji su linearno nezavisni, onda oni obrazuju jedan bazis u $V(\mathbb{F})$. Ovaj bazis zovemo *svojstveni bazis* operatora A, a za operator A kažemo da je *dijagonalizabilan*, jer je u svojstvenom bazisu reprezentovan dijagonalnom matricom:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \tag{2.38}$$

Ako operator deluje u $n-$dimenzionalnom vektorskom prostoru nad kompleksnim poljem $V_n(\mathbb{C})$, tada svojstvena jednačina ima n kompleksnih rešenje, tj. svojstvenih vrednosti. *Svojstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne moraju biti različite, ali ako jesu, tada je operator A dijagonalizabilan.* To je posledica činjenice da su svojstveni vektori za različite svojstvene vrednosti linearno nezavisni. Ako ih ima n različitih, tada svojstveni vektori čine bazis prostora $V_n(\mathbb{C})$. Ako svojstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nisu različite, tada su moguća dva slučaja:

1. Geometrijski multiplicitet svake svojstvene vrednosti je jednak algebarskom multiplicitetu. U tom slučaju operator je takođe dijagonalizabilan i ima degenerisane svojstvene vrednosti.

2. Postoji svojstvena vrednost za koju je geometrijski multiplicitet manji od algebarskog multipliciteta. Tada operator nije dijagonalizabilan [10].

U daljem tekstu razmatraćemo operatore koji jesu dijagonalizabilni.

Primer 2.4.5. Iako svaki linearni operator nad kompleksnim vektorskim prostorom nije dijagonalizabilan, za svaki postoji bazis u kojem je reprezentovan gornje-trougaonom matricom, tj. matricom oblika

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dakle, postoji bazis u $V(\mathbb{C})$ tako da operator A na vektore bazisa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ deluje na sledeći način:

$$A\mathbf{v}_j \in L(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_j\}), \text{ za svaki } j = 1, \ldots, n.$$

[10] Situacija u kojoj "nedostaju" svojstveni vektori

Dokažimo to koristeći metod matematičke indukcije. Za jednodimenzionalni vektorski prostor to očigledno važi. Ako pretpostavimo da važi za vektorske prostore dimenzije manje ili jednake od n, tada preostaje da pokažemo da je iskaz tačan i za $V_{n+1}(\mathbb{C})$. Kako je prostor nad kompleksnim poljem znamo da postoji bar jedna svojstvna vrednost λ i bar jedan svojstveni vektor. Neka je $U = R(A-\lambda I)$, tada za $\mathbf{u} \in U$ važi da je:

$$A\mathbf{u} = (A - \lambda I)\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u},$$

tj. potprostor U vektorskog prostora V_{n+1} je invarijantan za A. Kako je svostveni potprostor za λ bar jednodmenzionalan, sledi da je $\dim U < \dim V$. Dakle, moguće je redukovati operator A na potprostor U. Na osnovu indukcione hipoteze, u nekom bazisu $B_U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ redukovani opeartor A_U je reprezentovan gornje-trougaonom matricom. Ako ovaj bazis dopunimo do bazisa u V_{n+1}, tj. $B_V = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, tada je za $k > m$ vektor $A\mathbf{u}_k$ linearna kombinacija vektora iz B_U i vektora $\mathbf{u}_k$, tj.

$$A\mathbf{u}_k = (A - \lambda I)\mathbf{u}_k + \lambda\mathbf{u}_k \in L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_k\})$$

jer je, po definiciji, $(A - \lambda I)\mathbf{u}_k \in U$. Dakle, i u prostoru V_{n+1} operator A možemo reprezentovti gornje-trougaonom matricom.

Skup svih različtih svojstvenih vrednosti operatora A naziva se *spektar operatora* i označava se kao $\sigma(A)$: $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ gde je $m \leq n$. Konačno, kako znamo da je presek proizvoljna dva svojstvena potprostora V_{λ_i} i V_{λ_j} trivijalan, tj. važi (2.37), ceo prostor možemo napisati kao direktnu sumu svojstvenih potprostora dijagonalizabilnog operatora A:

$$V = V_{\lambda_1} \dot{+} V_{\lambda_2} \dot{+} \ldots \dot{+} V_{\lambda_m}. \tag{2.39}$$

2.4.1 Svojstveni problem komutirajućih operatora

Neka su $A, B \in \hat{L}(V(\mathbb{C}), V(\mathbb{C}))$ dva operatora koja komutiraju. Na osnovu Teoreme 2.14, znamo da svaki od ovih operatora ima bar jednu svojstvenu vrednost i bar jedan svojstveni vektor jer je prostor nad kompleksnim poljem. Razmotrimo šta još mozemo da zaključimo za ta dva komutirajuća operatora.

Teorema 2.17. *Ako dva operatora $A, B \in \hat{L}(V(\mathbb{C}), V(\mathbb{C}))$ komutiraju, svaki svojstveni potprostor jednog je invarijantan potprostor drugog operatora.*

Dokaz: Neka je $\mathbf{x}$ svojsvteni vektor operatora A za svojstvenu vrednost α, tj. $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$. Svojstveni potprostor V_α je dakle bar jednodimenzionalan, i znamo da je invarijantan pod dejstvom operatora A. Kako je $AB = BA$, za svaki nenulti vektor $\mathbf{y} \in V_\alpha$ imamo da je $A(B\mathbf{y}) = B(A\mathbf{y}) = B(\alpha\mathbf{y}) = \alpha B\mathbf{y}$. Dakle, dobili smo da je vektor $B\mathbf{y}$ takođe svojstveni vektor operatora A za svojstvenu vrednost α, ondnosno ceo svojstveni potprostor V_α je invarijantan pod dejstvom operatora B. Q.E.D.

Direktna posledica ove teoreme je sledeća:

Lema 2.4. *Dva operatora $A, B \in \hat{L}(V(\mathbb{C}), V(\mathbb{C}))$ koja komutiraju imaju barem jedan zajednički svojstveni vektor.*

Dokaz: Dokaz sledi iz prethodne teoreme: kako je V_α iz prethodnog dokaza, invarijantan pod dejstvom operatora B, možemo da suzimo domen operatora B na ovaj potprostor. Za $B \in \hat{L}(V_\alpha(\mathbb{C}), V_\alpha(\mathbb{C}))$

znamo da postoji bar jedna svojstvena vrednost, recimo β, i bar jedan svojstveni vektor za tu svojstvenu vrednost. Kako je taj vektor iz V_α on je svojstveni za operator A, ali naravno za svojstvenu vrednost α. Q.E.D.

Primer 2.4.6. Operator rotacije $R_{\varphi\vec{e}_z}$ za ugao φ oko $z-$ose komutira sa operatorom refleksije u odnosu na xOy ravan σ_{xy}. Ako posmatramo njihovo dejstvo u $\mathbb{R}^3$ oni nemaju zajedniči svojstveni vektor, medjutim u $\mathbb{C}^3$, pošto je cela ravan xOy invarijantna pod dejstvom operatora σ_{xy}, ova dva operatora imaju dva zajednička svojstvena vektora: $\mathbf{x}_1 = (1\ \imath\ 0)^T$ (svojstvena vrednost za $R_{\varphi\vec{e}_z}$ je $\alpha = \mathrm{e}^{-\imath\varphi}$, dok je za σ_{xy} svojstvena vrednost $\beta = 1$) i $\mathbf{x}_2 = (1\ \ -\imath\ 0)^T$ (svojstvena vrednost za $R_{\varphi\vec{e}_z}$ je $\alpha = \mathrm{e}^{\imath\varphi}$, dok je za σ_{xy} svojstvena vrednost opet $\beta = 1$).

U vektorskim prostorima nad kompleksnim poljem, ako A ima svojstveni bazis i komutira sa B sledi da je moguće izbarati bazis koji je istovremeno svojstven za oba operatora, tj. zajednički svojstveni bazis.

Lema 2.5. *Ako dva operatora $A, B \in \hat{L}(V(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ imaju zajedniči svojstveni bazis onda oni komutiraju.*

Dokaz: Neka je $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ zajedniči svojstveni bazis za A i B. tj. za sve vektore iz ovog skupa važi da je: $A\mathbf{x}_i = \alpha_i\mathbf{x}_i$ i $B\mathbf{x}_i = \beta_i\mathbf{x}_i$. Za proizvoljan vektor bazisa $\mathbf{x}_i$: $AB\mathbf{x}_i = A(\beta_i\mathbf{x}_i) = \beta_i A\mathbf{x}_i = \beta_i\alpha_i\mathbf{x}_i$ i $BA\mathbf{x}_i = B(\alpha_i\mathbf{x}_i) = \alpha_i B\mathbf{x}_i = \alpha_i\beta_i\mathbf{x}_i$. Sledi da je $AB\mathbf{x}_i = BA\mathbf{x}_i$ za svako $\mathbf{x}_i \in X$, što znači da je operator AB je jednak operatoru BA. Q.E.D.

2.5 Svojstveni problem operatora u unitarnom prostoru

Razmotrimo linearne operatore koji deluju u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru. Znamo da svaki operator $A \in \hat{L}(U_n, U_n)$ ima bar jednu svojstvenu verdnost i bar jedan svojstveni vektor, ali nas interesuje za koju vrstu operatora postoji ortonormirani svojstveni bazis.

Pogledajmo prvo u kakvom su odnosu svojstvene vrednosti operatora A i njemu adjungovanom $A^\dagger$. Ako za A možemo da nađemo ortonormirani svojstveni bazis $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, gde je $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$, onda je u tom bazisu $A^\dagger$ takođe reprezentovan dijagonalnom matricom: $\mathcal{A}^\dagger = \mathrm{diag}(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$. Dakle, vektor $\mathbf{x}_i$ je takođe svojstveni vektor adjungovanog operatora ali za svojstvenu vrednost λ^*. Dijagonalne matrice komutiraju, pa sledi da je $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$. Ovo će važiti i u proizvoljnom bazisu u U_n, tj. pokazali smo da je A normalan operator.

Obrnuto, neka je A normalan operator, tada znamo da su nulpotprostori A i $A^\dagger$ isti. Može se pokazati da je i operator $A - \lambda I$ takođe normalan:

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda I)(A-\lambda I)^\dagger &= (A-\lambda I)(A^\dagger - \lambda^* I) = AA^\dagger - \lambda^* A - \lambda A^\dagger - |\lambda|^2 I \\
&= A^\dagger A - \lambda^* A - \lambda A^\dagger - |\lambda|^2 I = (A^\dagger - \lambda^* I)(A - \lambda I) \\
&= (A-\lambda I)^\dagger (A - \lambda I).
\end{aligned}
$$

Sada za operator $A - \lambda I$ i njemu adjungovan znamo da je $N(A - \lambda I) = N(A^\dagger - \lambda^* I)$. Kako je $N(A - \lambda I)$ svojstveni potprostor operatora A za svojstvenu vrednost λ, vidimo da je ovo takođe svojstveni potprostor za $A^\dagger$ ali za svojstvenu vrednost λ^*. Znamo da su preseci svojstvenih potprostora operatora A za različite svojstvene vrednosti disjunktni, sledća teorem pokazuje da su i ortogonalni ako je A normalan operator.

Teorema 2.18. *Svojstveni vektori* $\mathbf{x}_1$ *i* $\mathbf{x}_2$*, normalnog operatora* A*, za različite svojstvene vrednosti* $\lambda_1 \neq \lambda_2$*, su ortogonalni.*

Dokaz: Neka su $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dve različite svojstvene vrednosti za A, za svojstvene vektore $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$. Tada važi:

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= (\lambda_1^* \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1, \lambda_2 \mathbf{x}_2) = (A^\dagger \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2) \\ &= (\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2) = 0,\end{aligned}$$

a kako je $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, sledi da je $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$. Q.E.D.

Da rezimiramo, pokazali smo da za dijagonalizabilan operator A postoji ortonormitani svojstveni bazis akko je A normalan operator. Međutim važi i nešto jači iskaz:

Teorema 2.19. *Za linearni operatora* A *koji deluje u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru* U_n *postoji ortonormirani svojstveni bazis akko je* A *normalni operator.*

Dokaz: Već smo pokazali da ako postoji ortonornirani svojstveni bazis onda sledi da je A normalan operator, tj. $AA^\dagger = A^\dagger A$. Obrnuto, kako A i $A^\dagger$ komutiraju, na osnovu Leme 2.4 znamo da ova dva operatora imaju bar jedan zajednički svojstveni vektor $\mathbf{v}_1$. Potprostor $L(\{\mathbf{v}_1\})$ je invarijantan pod dejstvom oba operatora. Na osnovu teoreme 2.7, sledi da je i njegov ortokomplement $L(\{\mathbf{v}_1\})^\perp$ takođe invarijantan za $A^\dagger$ kao i za A. Ako suzimo domen za oba operatora na $L(\{\mathbf{v}_1\})^\perp$, sad u ovom unitarnom prostoru opet znamo da postoji bar jedan zajedniči svojstveni vektor, označimo ga sa $\mathbf{v}_2$. Sada su potprostori $L(\{\mathbf{v}_2\})$ i $L(\{\mathbf{v}_2\})^\perp$ u $L(\{\mathbf{v}_1\})^\perp$ invarijantni pod dejstvom oba operatora, pa ponovo možemo da suzimo domen na $L(\{\mathbf{v}_2\})^\perp < L(\{\mathbf{v}_1\})^\perp$. Postupak se ponavlja sve dok ne iscrpimo ceo prostor (dakle ukupno $n-1$ puta). Na ovaj način dobija se zajednički svojstveni bazis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Q.E.D.

Dakle, normalni operatori su najšira klasa operatora za koje je moguće naći ortonormirani svojstveni bazis. Kako su sada svojstveni potprostori ovakvog operatora ortogonalni, razlaganje prostora (2.39) postaje ortogonalna suma svojstvenih potprostora normalnog operatora A:

$$U_n = \sum_{\lambda_i \in \sigma(A)}^{\oplus} V_{\lambda_i} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_m}. \tag{2.40}$$

Pošto imamo definisan skalarni proizvod, za svaki od svojstvenih potprostora V_{λ_i} možemo definisati projektor P_{λ_i} tako da je njegov prostor likova $R(P_{\lambda_i})$ upravo V_{λ_i}. Iz (2.37) sledi da su projektori na svojstvene potprostore međusobno ortogonalni. Odnosno, koristeći leme 2.3 i činjenicu da su projektori idempotentni operatori, dobijamo da važi:

$$P_{\lambda_i} P_{\lambda_j} = \delta_{ij} P_{\lambda_i}. \tag{2.41}$$

Takođe, iz (2.40) sledi da je zbir svih svojstvenih projektora jednak jediničnom operatoru:

$$I = \sum_{\lambda_i \in \sigma(A)} P_{\lambda_i}. \tag{2.42}$$

Konačno, kako svaki vektor $\mathbf{x} \in U_n$ možemo jednoznačno napisati kao zbir projekcija $P_{\lambda_i}\mathbf{x}$ ovog vektora na potprostore V_{λ_i}, sledi da je $A\mathbf{x} = A(\sum_{\lambda_i \in \sigma(A)} P_{\lambda_i}\mathbf{x}) = \sum_{\lambda_i \in \sigma(A)} \lambda_i P_{\lambda_i}\mathbf{x}$, odnosno sam operator se može zapisati u obliku:

$$A = \sum_{\lambda_i \in \sigma(A)} \lambda_i P_{\lambda_i}. \tag{2.43}$$

Jednakost (2.42) se naziva *svojstvena dekompozicija jedinice*, a jednakost (2.43) *spektralna forma operatora A*.

Primer 2.5.1. Alternativni dokaz teoreme 2.19: Na osnovu stava iz primera 2.4.5, znamo da postoji ortonormirani bazis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ u kojem je normalni operator A reprezentovan gornje-trougaonom matricom:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Međutim, kako je za normalni operator $\|A\mathbf{v}_i\| = \|A^\dagger \mathbf{v}_i\|$, sledi da je

$$||A\mathbf{v}_1||^2 = |a_{11}|^2 = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1i}|^2 = ||A^\dagger \mathbf{v}_i||,$$

tj. da su svi $a_{1i} = 0$, za $i > 1$. Dalje, iz $||A\mathbf{v}_2|| = ||A^\dagger \mathbf{v}_2||$, sledi da su svi $a_{2i} = 0$, za $i > 2$ itd. Dakle, matrica $\mathcal{A}$ je dijagonalna.

2.5.1 Spektri normalnih operatora

U poglavlju 2.3.1 definisali smo vrste normalnih operatora koje su bitne za fiziku. Razmotrimo šta se može reći za njihove spektre.

Teorema 2.20. *Normalni operator A u konačnodimenzionom unitarnom prostoru U_n je:*

(i) *ermitski akko su mu sve svojstvene vrednosti relalne, tj. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$;*

(ii) *unitaran akko su mu sve svojstvene vrednosti jediničnog modula, tj. $(\forall \lambda \in \sigma(A))\ |\lambda| = 1$;*

(iii) *projektor akko su mu sve svojstvene vrednosti jednake nuli ili jednake jedinici, tj. $(\forall \lambda \in \sigma(A))\ \lambda = 1 \vee \ \lambda = 0$.*

Dokaz: (i) Neka je $\mathbf{x}$ svojstveni vektor ermitskog operatora A za svojstvenu vrednost λ. Sledi da je $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = \lambda\|\mathbf{x}\|^2$. Sa druge strane, koristeći definiciju adjugovanog operatora i činjenicu da je $A = A^\dagger$, dobijamo: $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (A^\dagger\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda^*\|\mathbf{x}\|^2$. Konačno, kako je $\mathbf{x}$ nenulti vektor, jednakost $\lambda\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda^*\|\mathbf{x}\|^2$ je tačna jedino ako je λ realan broj, tj. ceo spektar ermitskog operatora mora biti je realan. Obrnuto, ako je spektar realan sledi da je:

$$A^\dagger = \left(\sum_{\lambda_i \in \sigma(A)} \lambda_i P_{\lambda_i} \right)^\dagger = \sum_{\lambda_i \in \sigma(A)} \lambda_i P_{\lambda_i}^\dagger = \sum_{\lambda_i \in \sigma(A)} \lambda_i P_{\lambda_i} = A.$$

(ii) Neka je $\mathbf{x}$ svojstveni vektor unitarnog operatora A za svojstvenu vrednost λ. Tada je $(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = \lambda^*\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Kako unitarni operator održava skalarni proizvod sledi da je $|\lambda|^2\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$. Vektor $\mathbf{x}$ je nenulti, pa iz ove jednakosti sledi da je $|\lambda| = 1$, tj. ceo spektar unitarnog operatora leži na jediničnoj kružnici u kompleksnoj ravni. Obrnuto, ako su sve svojstvene vrednosti jediničnog modula, iz spektralne forme operatora A sledi:

$$\begin{aligned} AA^\dagger &= \left(\sum_{\lambda_i\in\sigma(A)} \lambda_i P_{\lambda_i}\right)\left(\sum_{\lambda_j\in\sigma(A)} \lambda_j P_{\lambda_i}\right)^\dagger = \sum_{\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(A)} \lambda_i\lambda_j^* P_{\lambda_i}P_{\lambda_j}^\dagger = \sum_{\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(A)} \lambda_i\lambda_j^* P_{\lambda_i}P_{\lambda_j} \\ &= \sum_{\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(A)} \lambda_i\lambda_j^* P_{\lambda_i}\delta_{ij} = \sum_{\lambda_i\in\sigma(A)} |\lambda_i|^2 P_{\lambda_i} = \sum_{\lambda_i\in\sigma(A)} P_{\lambda_i} = I. \end{aligned}$$

(iii) Neka je $\mathbf{x}$ svojstveni vektor projektora A za svojstvenu vrednost λ. Tada je $A(A\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}$, te zbog idempotentosti sledi da je $A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$. Dakle, dobili smo da je $\lambda\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$. Kako je $\mathbf{x}$ nenulti vektor, jedino rešenje ove jednakosti je $\lambda = 1$ ili $\lambda = 0$. Obrnuto, ako su sve svojstvene vrednosti nula ili jedan, dakle realne su, pa iz (i) znamo da je operator ermitski. Ostaje da pokažemo da je i idempotentan. Slično kao i kod unitarnog operatora imamo da je:

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sum_{\lambda_i\in\sigma(A)} \lambda_i P_{\lambda_i}\right)\left(\sum_{\lambda_j\in\sigma(A)} \lambda_j P_{\lambda_i}\right) = \sum_{\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(A)} \lambda_i\lambda_j P_{\lambda_i}P_{\lambda_j} \\ &= \sum_{\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(A)} \lambda_i^2 P_{\lambda_i}\delta_{ij} = \sum_{\lambda_i\in\sigma(A)} \lambda_i P_{\lambda_i} = A. \end{aligned}$$

Dakle, A jeste projektor. Q.E.D.

Teorema 2.21. *Normalni operator A u konačnodimenzionolnom unitarnom prostoru U_n je invertibilan akko su mu sve svojstvene vrednosti različite od nule.*

Dokaz: Neka je $\mathbf{x}$ svojstveni vektor invertibilnog operatora A za svojstvenu vrednost λ, očigledno je da λ nesme biti jedako nuli jer bi u suprotnom dobili da je nulpotprostor operatora A netrivijalan, odnosno $N(A) \neq \{\mathbf{0}\}$, što je u suprotnosti sa činjenicom da je A invertibilan. Obrnuto, polazeći od spektralne forme operatora A, za operator B definisan sa [11]

$$B := \sum_{\lambda_i\in\sigma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_{\lambda_i}$$

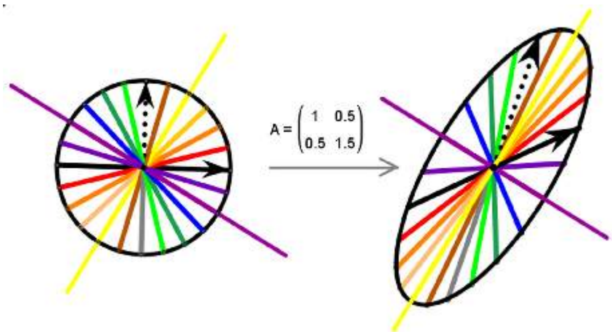
važi da je:

$$\begin{aligned} BA &= \left(\sum_{\lambda_i\in\sigma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_{\lambda_i}\right)\left(\sum_{\lambda_j\in\sigma(A)} \lambda_j P_{\lambda_i}\right) = \sum_{\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(A)} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} P_{\lambda_i}P_{\lambda_j} \\ &= \sum_{\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(A)} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} P_{\lambda_i}\delta_{ij} = \sum_{\lambda_i\in\sigma(A)} P_{\lambda_i} = I. \end{aligned}$$

Slično se pokazuje da je $AB = I$, pa sledi da je $B = A^{-1}$ Q.E.D.

Primer 2.5.2. Razmotrimo ponovo svojstveni problem operatora A iz primera 2.4.1. Operator je simetričan, pa ima realne svojstvene vrednosti. Uočavamo da su svojstveni pravci zapravo pravci male i

[11] kako su sve svojstvene vrednosti nenulte ovaj operator je dobro definisan



Slika 2.10: Elipsa simetričnog operatora zajedno sa svojstvenim pravcima.

velike poluose elipse operatora. S'obzirom da razmatramo u šta se preslikavaju vektori jedinične norme, tj. oni čiji vrhovi leže na jediničnoj kružnici, dužina male i velike poluose odgovaraju, respektivno, manjoj i većoj svojstvenoj vrednosti. To što se svojstveni pravci podudaraju sa poluosama elipse nije slučajno: zbog normalnosti operatora A, moguće je naći unitaran operator koji ortove $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ slika u ortonormirani svojstveni bazis, tj. postoji U tako daje $A = U^{-1}A'U$ gde je $\mathcal{A}'$ dijagonalna matrica. Kako smo u $\mathbb{R}^2$, U se svodi na ortogonalan operator, tj. rotacija ili refleksija. Rotacija U zarotira početnu jediničnu kružnicu za ugao ϕ, tako da svojstveni vektori od A budu duž horizontale i vertikale, zatim je dijagonalan operator A' skalira sa λ_1 duž horizontalne i λ_2 duž vertikalne ose, i na kraju, rotacija U^{-1} vrati elipsu u početni koordinatni sistem. Ta kompozicija je prikazana na slici 2.11. Dejstvo refleksija se može analogno anlizirati.

Primer 2.5.3. Linearni operatori koji nisu normalni, nemaju ortonormiran svojstveni bazis, tj. oba svojstvena vektora nisu u pravcu poluosa elipse. Dijagonalizabilni operatori imaju neortonormirani svojstveni bazis, dok nedijagonalizabilni uopšte nemaju svojstveni bazis. Tipičan primer nedijagonalizabilnog operatora je smicanje, definisan u primeru 2.1.7. Najjednostavnija matrica smicanja je $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ona ima svojstvenu vrednost $\lambda = 1$, algebarskog multiplicita 2, a samo jedan svojstveni vektor $\mathbf{v} = (1\ 0)^T$. Ali, kao i ostali linearni operatori, ima svoju elipsu. Postavlja se pitanje, kakvo značenje imaju velika i mala poluosa elipse operatora u tom slučaju?

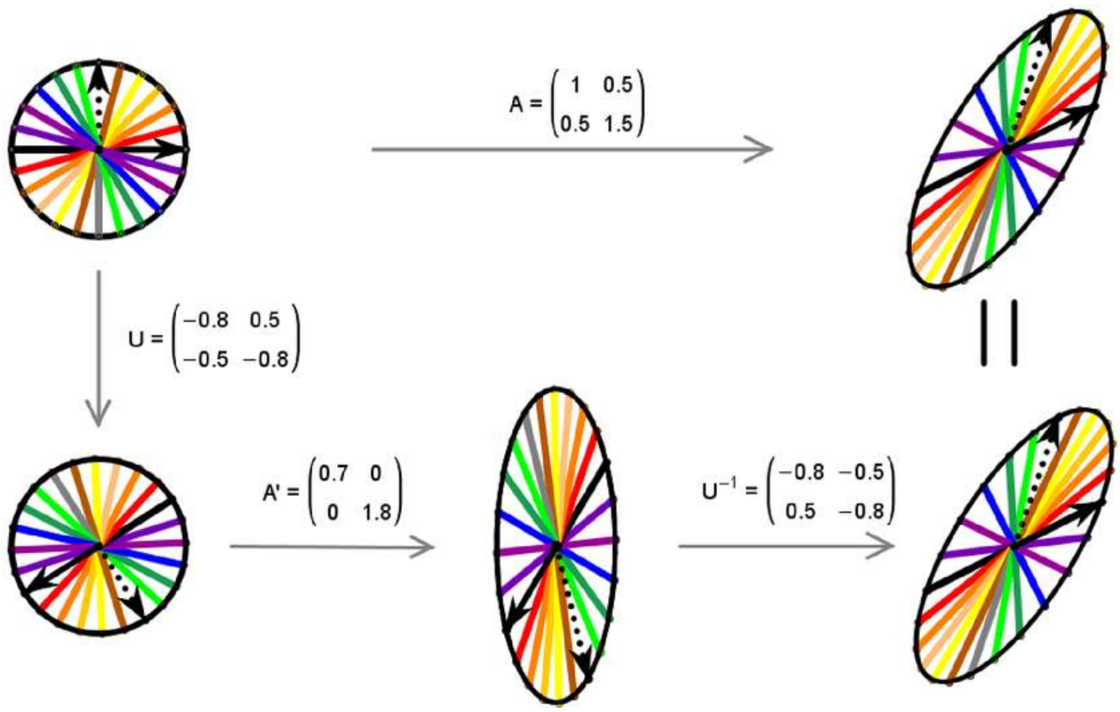
Neka je A proizvoljan linearni operator iz $\hat{L}(U_n, U_n)$. Operatori $AA^\dagger$ i $A^\dagger A$ su ermitski, jer je

$$(AA^\dagger)^\dagger = AA^\dagger, \quad \text{i} \quad (A^\dagger A)^\dagger = A^\dagger A,$$

a i pozitivni jer je

$$(\forall x \in V)(A^\dagger Ax, x) = (Ax, Ax) = ||Ax||^2 \geq 0$$

(analogno se izvodi pozivnost za $AA^\dagger$). Sledi da oba operatora imaju dijagonalnu formu sa realnim, pozitivnim svojstvenim vrednostima. Štaviše, $AA^\dagger$ i $A^\dagger A$ imaju istu svojstvene vrednosti: ako je λ svojstvena vrednost od $A^\dagger A$ za svojstveni vektor $\mathbf{v}$, tj. $A^\dagger A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, delovanjem s'leve strane sa A, dobijamo $AA^\dagger(A\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v})$, pa zaključujemo da je λ svojstvena vrednost i za $AA^\dagger$. Prema tome, postoji unitarne matrice koji matrice kojima su reprezentovani ovi operatori prevodi u dijagonalnu matricu Λ. Neka je $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = U^\dagger \Lambda U$ i $\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = V^\dagger\Lambda V$, gde su U i V unitarne, u opšem slučaju različite



Slika 2.11: Unitarna sličnost matrice $\mathcal{A}$.

matrice. S'obzirom da je Λ pozitivana dijagonalna matrica, može se predstaviti kao $\Sigma^\dagger\Sigma$, gde je Σ realna dijagonalana matrica. Ako prvi izraz napišemo kao

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = U^\dagger\Sigma^\dagger\Sigma U = U^\dagger\Sigma^\dagger V V^\dagger\Sigma U,$$

a drugi kao

$$\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = V^\dagger\Sigma^\dagger\Sigma V = V^\dagger\Sigma^\dagger U U^\dagger\Sigma V,$$

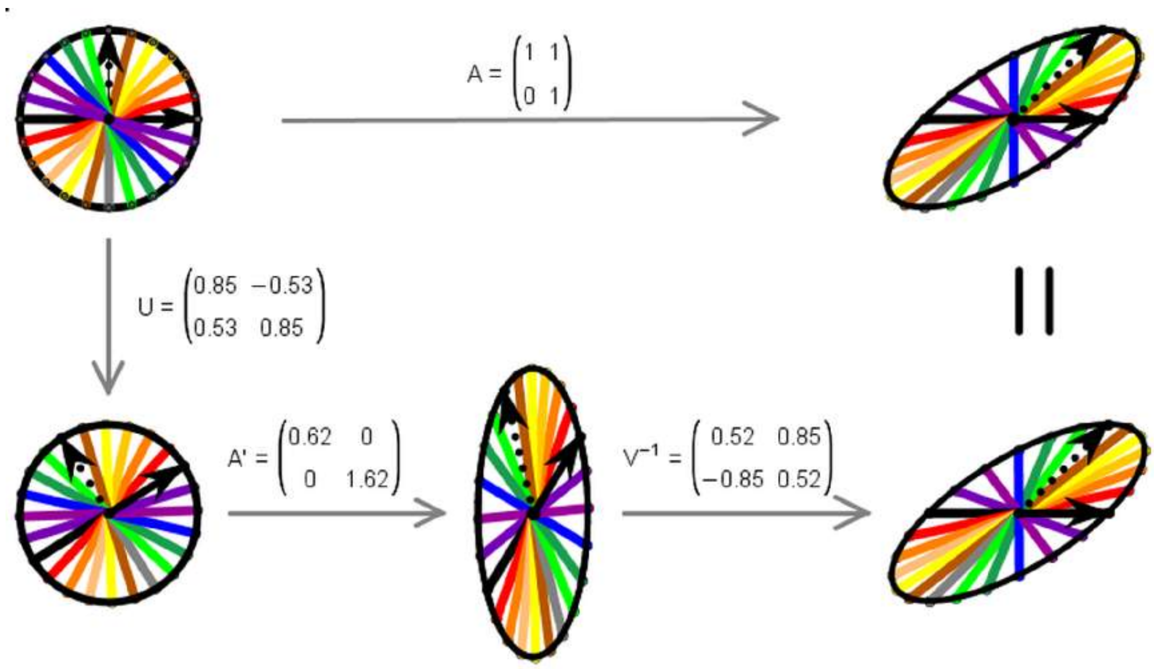
sledi da je $\mathcal{A}$ moguće predstaviti kao

$$\mathcal{A} = U^\dagger\Sigma^\dagger V.$$

Na taj način smo dekomponovali $\mathcal{A}$ na kompoziciju unitarne, skaliranja i unitarne transformacije. Nazivamo je dekompozicija na singularne vrednosti ili, na engleskom, Singular Value Decomposition (SVD). Dijagonalne elemente matrice Σ nazivamo singularnim vrednostima. SVD se pretvara u dijagonalnu formu operatora ako je $U = V$. SVD dekompozicija primenjena na operator smicanja je prikazana na slici 2.12. U ovom slučaju, unitarne transformacije su rotacije. Iz SVD je jasno da su mala i velika poluosa elipse operatora zapravo singularne vrednosti operatora i da se u slučaju normalnih operatora svode na svojstvene vrednosti.

2.6 Svojstveni problem operatora u euklidskom prostoru

Ostalo nam je da ramotrimo šta se događa u slučaju euklidskog prostora. Kako je ovo prostor nad realnim poljem, može se desiti da za dati operator A, svojstveni polinom $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ uopšte nema realne korenove. Dakle, za $A \in \hat{L}(V(\mathbb{R}), V(\mathbb{R}))$ može, ali i ne mora da postoji bar jedan



Slika 2.12: Dekompozicija na singularne vrednosti operatora smicanja.

svojstveni vektor u euklidskom prostoru. Međutim, može se pokazati da u $V(\mathbb{R})$ sigurno postoji bar jedan netrivijalan invarijantni potprostor:

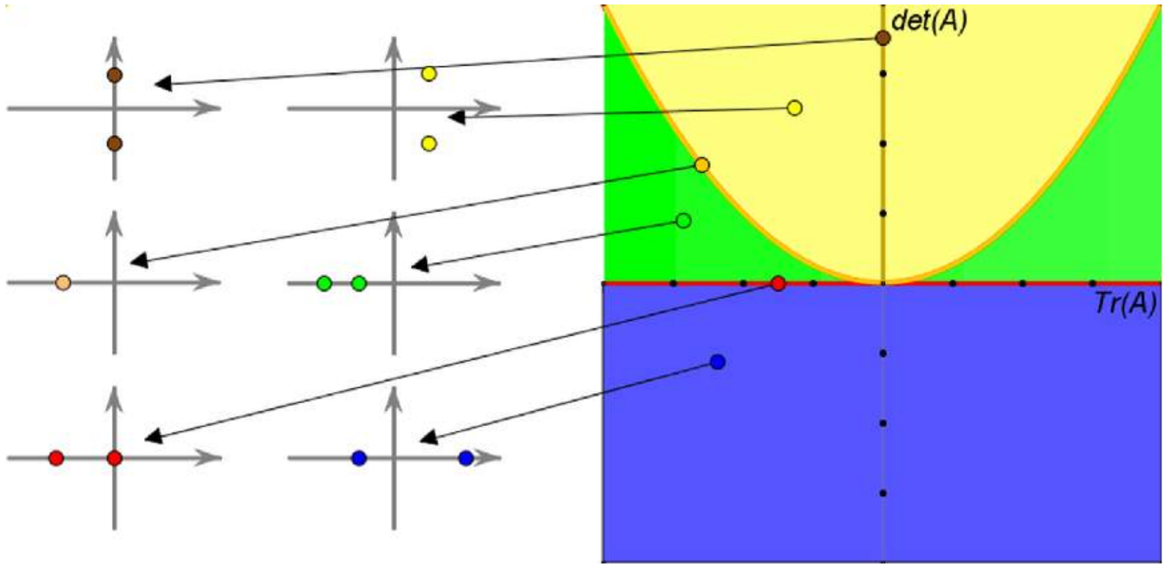
Teorema 2.22. *Svaki operator A koji deluje u konačnodimenzionalnom euklidskom prostoru V_n ima bar jedan invarijantni potprostor dimenzije jedan ili dva.*

Dokaz: Ako postoji realan koren λ_0 jednačine $\det(A - \lambda I) = 0$, onda imamo netrivijalno rešenje sistema jednačina (2.34), tj. nenulti vektor $\mathbf{v} \in V_n$ tako da je $A\mathbf{v} = \lambda_0 \mathbf{v}$. Jednodimenzionalni potprostor $L(\{\mathbf{v}\})$ je invarijantan pod dejstvom operatora A. Ako koren λ_0 nije realan broj, tj. $\lambda_0 = a + \imath b$ gde su a i $b \neq 0$ realni brojevi, tada znamo da ako proširimo polje, tj. razmatramo dejstvo operatora u prostoru $V_n(\mathbb{C})$, postoji bar jedan svojstveni vektor $\mathbf{z} \in V_n(\mathbb{C})$ za svojstvenu vrednost λ_0. Vektor $\mathbf{z}$ se može jednoznažno napisati u obliku $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \imath \mathbf{y}$ gde su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_n(\mathbb{R})$. Zamenom $\mathbf{z}$ u jednakost $A\mathbf{z} = \lambda_0 \mathbf{z}$ dobijamo: $A\mathbf{x} + \imath A\mathbf{y} = (a + \imath b)(\mathbf{x} + \imath \mathbf{y})$. Ova jednačina je ekvivalentna sa dve jednačine (prva se dobija izjednačavanjem delove bez imaginarne jedinice, a druga one uz imaginarnu jedinicu):

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= a\mathbf{x} - b\mathbf{y} \\ A\mathbf{y} &= a\mathbf{y} + b\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Vidimo da dejstvo operatora A na vektore $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ daje linearnu kombinaciju ovih vektora i to sa realnim koeficijentima. Kako je operator A linearan, sledi da je potprostor koji je lineal nad ova dva vektora upravo dvodimenzionalni prostor koji je invarijantan pod dejstvom operatora A. Q.E.D.

U unitarnom prostoru, normalni operatori su najšira klasa operatora za koji može da se nađe ortonormirani svojstveni bazis. U euklidskom je neophodno da spektar operatora A bude realan. Iz Teoreme 2.20 vidimo da operator za koji je $A = A^T$ ima realan spektar. Dakle, sledi da za simetričan operator u euklidskom prostoru V_n sigurno postoji ortonormirani svojstveni bazis (kako su svojstvene vrednosti realne, za svaku od njih, rešenje sistema jednačina (2.34) daje realne koordinate svojstvenih vektora). Može se pokazati da važi i obrnuti iskaz: ako u V_n za operator A postoji ortonormirani svojstveni bazis onda je taj operator simetričan (ovo se trivijalno vidi jer je baš u pomenutom bazisu operatori A i A^T reprezentovani istom dijagonalnom matricom $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$, pa sledi da su u stvari sami operatori jednaki).



Slika 2.13: Tipovi korenova svojstvenog polinoma realne 2×2 matrice: na x-osi je $\mathrm{Tr}\,(A)$ a na y-osi $\det(A)$; svakoj tački u prikazanoj ravni jednoznačno odgovara svojstveni polinom operatora A.

Primer 2.6.1. Razmotrimo operator koji deluje u realnom dvodimenzionalnom vektorskom prostoru. Njegova matrica u opštem slučaju glasi:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

pa mu je svojstveni polinom jednak $\lambda^2 - (a+b)\lambda + (ac - bd) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}\,(A)\lambda + \det(A)$. Prema tome, korenovi svojstvenog polinoma zavise samo od vrednosti traga i determinante operatora. Svakoj realnoj 2×2 matrici možemo jednoznačno pridružiti tačku u ravni, gde su koordinantne ose vrednosti traga i determinante (vidi sliku 2.13). Ova ravan ose dele na oblasti gde je $\det(A) = 0$, $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$ i diskriminantom $(\mathrm{Tr}\,(A))^2 = 4\det(A)$. Tipovi korenova svojstvenog polinoma su pregledno ilustrovani na slici. Boje odgovaraju tipovima rešenja:

- plava: realni korenovi različitog znaka;
- zelena: realni korenovi istog znaka;
- žuta: konjugovano kompleksni korenovi;
- crvena: realni korenovi od kojih je jedan jednak nuli;
- narandžasta: dvostruki realni koren.

Primer 2.6.2. U ovom primeru navodimo nekoliko korisnih saveta pri rešavanju svojstvenog problema.

1. Proizvod svojstvenih vrednosti je jednak determinanti operatora, a njihov zbir, tragu operatora. To je posledica invarijantnosti determinante i traga na transformaciju sličnosti, pokazane u poglavlju 2.2.4. Ponekad je ova činjenica dovoljna da se odredi spektar operatora. Uzmimo na primer, operator reprezentovan matricom $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Kako je determinanta matrice jednaka nuli, jedna svojstvena vrednost mora biti nulta. Drugu svojstvenu vrednost možemo odrediti iz vrednosti traga koja je jednaka 3, pa je druga svojstvena vrednost jednaka 3. Dakle, spektar operatora reprezentovanog navedenom matricom je $\sigma(A) = \{0, 3\}$.

2. Operator A i $aA + bI$ imaju iste svojstvene vektore. Ako je $\mathbf{v}$ svojstveni vektor operatora A za svojstvenu vrednost λ, tada je $(aA + bI)\mathbf{v} = a\lambda\mathbf{v} + b\mathbf{v} = (a\lambda + b)\mathbf{v}$, pa je svojstvena vrednost operatora $aA + bI$, $a\lambda + b$. Na primer, ako znamo da su svojstvene vrednosti matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \pm 1$, za svojstvene vektore $\mathbf{v}_{1,2} = (1 \ \pm 1)^T$, tada znamo i da su isti vektori svojstveni za matricu $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, sa svojstvenim vrednostima $\lambda'_{1,2} = -5 \pm 2 = \{-3, -7\}$.

3. Ako je matrica $\mathcal{A}$ nekog operatora A takva da je zbir koeficijenata u svim vrstama jednak c, tada je jedan svojstveni vektor $\mathbf{v}_1 = (1, 1, \cdots, 1)^T$ i važi $\mathcal{A}\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_1$. Matrice sa tim svojstvom nazivamo stohastičkim [12] matricama. Matrica $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, je stohastička, pa odmah vidimo da ima jedan svojstveni vektor $(1 \ 1)^T$ za svojstvenu vrednost $-5 + 2 = -3$. Vrednost traga je -10, pa je druga svojstvena vrednost -7. Drugi svojstveni vektor je, zbog normalnosti operatora, ortogonalan na prvi, pa mora biti $(1 \ -1)^T$. Ova osobina važi i kada je zbir koeficijenata po kolonama jednak, jer je svojstveni polinom svake matrice jednak svojstvenom polinomu njoj transponovane matrice: $\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I)$.

4. Ako matrica $\mathcal{M}$ ima blok trougaonu formu:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ 0 & \mathcal{D} \end{pmatrix},$$

tada je $p_\lambda(\mathcal{M}) = p_\lambda(\mathcal{A}) p_\lambda(\mathcal{D})$. To znači da svojstvene vrednosti od $\mathcal{M}$ uopšte ne zavise od $\mathcal{B}$, i da je spektar od $\mathcal{M}$ jednak uniji spektara od $\mathcal{A}$ i $\mathcal{D}$.

Primenimo, na kraju sve savete na operator reprezentovan matricom:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[12] Ne mešati sa statističkim matricama.

Matrica se sastoji od blokova

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Spektar matrice $\mathcal{A}$ je, na osnovu traga i determinante, $\{-4, 4\}$. Matrica $\mathcal{D}$ je stohastička sa sumom kolone 3, pa je jedna svojstvena vrednost jednaka 3. I trag i determinata su jednaki 6, pa je zbir preostalih svojstvenih vrednosti jednak 3, a proizvod 2, pa moraju biti 1 i 2. Konačno, spektar matrice $\mathcal{M}$ je $\sigma(M) = \{-4, 4, 1, 2, 3\}$.

Primer 2.6.3. Svakom linearnom operatoru iz $\hat{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ možemo pridružiti svojstveni polinom čiji su korenovi svojstvene vrednosti. Važi i obrnuto: za svaki polinom $p(x)$ iz $P_n(\mathbb{R})$ postoji dijagonalizabilni linearni operator A_p, za koji je $p(x)$ svojstveni polinom. Razmotrimo polinom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_k x^k$, gde je $c_n = 1$. Tada matricu

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

nazivamo pridruženom matricom polinoma $p(x)$. Svojstvene vrednosti matrice $\mathcal{M}$ su korenovi polinoma $p(x)$, dok su odgovarajući svojstveni vektori kolone Vandermondove matrice definisane sa:

$$V(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Proverimo da li je to tačno:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathbf{v}_j &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_j^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \lambda_j^2 \\ \vdots \\ -\sum_{i=0}^{n-1} c_i \lambda_j^i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \lambda_j^2 \\ \vdots \\ \lambda_j^n - p(\lambda_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \lambda_j^2 \\ \vdots \\ \lambda_j^n - 0 \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_j^{n-1} \end{pmatrix} = \lambda_j \mathbf{v}_j. \end{aligned}$$

Na primer, pridružena matrica polinoma $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ je

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix},$$

a s'obzirom da su korenovi ovog polinoma $1, 2$ i 3, odgovarajuća Vandermondova matrica je

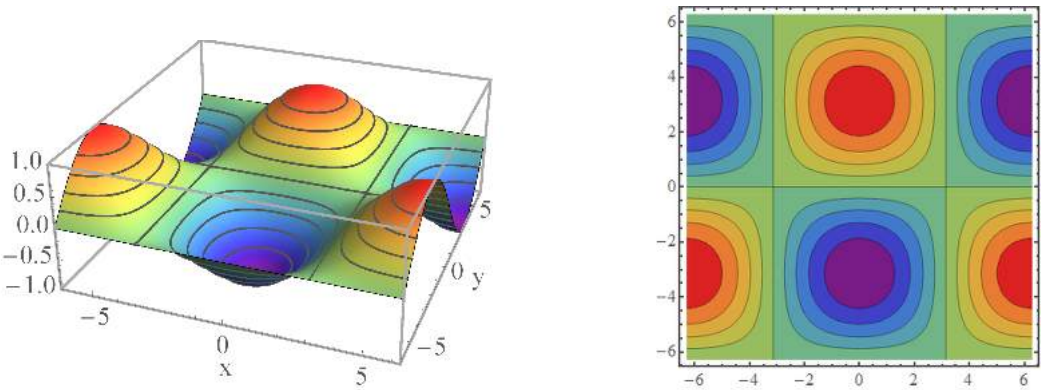
$$V(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Glava 3

Vektorska analiza

3.1 Skalarno polje

Ako je u nekom delu prostora $G \subseteq \mathbb{R}^3$ u svakoj tački, odredjenoj vektorom položaja $\vec{r}$, definisana vrednost nekog skalara $f(\vec{r})$ onda se takvo polje naziva *skalarno polje*. Drugim rečima, skalarno polje je preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, gde je obično $n = 3$ (skalano polje u prostoru) ili u nekim specijalnim sluvcajevima $n = 2$ (skalarno polje u ravni). Primer ovakvog polja u fizici je npr. temperatura $T(\vec{r})$, pritisak $p(\vec{r})$, gustina $\rho(\vec{r})$, potencijal električnog polja $\varphi(\vec{r})$ itd. Kako se vektor položaja $\vec{r}$ u nekom ortonormiranom bazisu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ izražava pomoću koordinata x_1, x_2, x_3, skalarno polje se može pisati kao funkcija od tri promenljive: $f(x_1, x_2, x_3)$.



Slika 3.1: Obojeni 3D i 2D grafik sa ekviskalarnim linijama, polja $h(x, y) = \cos(x/2)\sin(y/2)$.

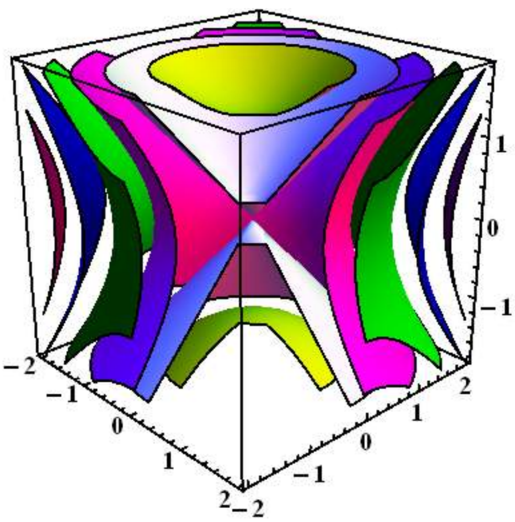
Najjednostavniji primer skalarnog polja je nadmorska visina u geografiji, opisana funkcijom $h(x, y)$, koja svakoj tački M na površini Zemlje (zadatu koordinatama $\vec{r} = (x_M, y_M)$) pridružuje njenu nadmorsku visinu h. Nadmorska visina se prikazuje kao reljefni grafik (reljefna karta) ili kao obična karta u boji: različite boje odgovaraju drugim vrednostima nadmorske visine. Treći način za prikazivanje je pomoću izohipsi: to su linije koje spajaju tačke sa istom vrednošću nadmorske visine. Ovakve karte obično nisu u boji i često se koriste u topografiji. Na slici 3.1 prikazane su sve tri mogućnosti zajedno: dat je trodimenzionalni grafik u boji, dvodimenzioni grafik je ustvari pogled odozgo, a na oba su nacrtane i izohipse.

Da zaključimo, skalarno polje $f(x, y)$ u ravni je moguće vizuelno prikazati na tri načina: kao trodimenzionalni (”reljefni”) grafik funkcije f, kao dvodimenzionalni obojeni grafik gde su različitim vrednostima funkcije pridružene različite boje i pomoću grafika linija koje spajaju tačke sa istom vrednošću funkcije f. Ove linije se nazivaju *ekviskalarne linije* (u slučaju nadmorske visine to su izohipse). Trodimenzionalno skalarno polje $f(\vec{r})$, nije moguće prikazati reljefnim grafikom, pa se u ovom slučaju polje obično ilustruje prikazom ekviskalarnih površi, koje su zamena za ekviskalarne linije.

Def. 3.1. *Ekvipotencijalna (ekviskalarna) površ skalarnog polja $f(\vec{r})$ je skup svih tačaka u kojima polje ima istu vrednost. Jednačina ove površi je: $f(\vec{r}) = const.$*

U fizici se naziv ekviskalarne površi manje koristi, tj. one se obično nazivaju ekvipotencijalnim površima jer su skalarna polja najčešće potencijali.

Primer 3.1.1. Potencijalna energija tačkaste mase ili naelektrisanja je definisana kao skalarno polje u $\mathbb{R}^3$ $u(\vec{r}) = k/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, gde je k odgovarajuća konstanta. Ekvipotencijalna površ je data jednačinom $1/\sqrt{x^2+y^2+z^2} = C$ gde je $C > 0$, što je zapravo jednačina sfere poluprečnika $1/C$ sa centrom u koordinatnom početku.



Slika 3.2: Familija ekviskalarnih površi polja $u(\vec{r}) = x^2 + y^2 - z^2$.

Primer 3.1.2. Neka je u $\mathbb{R}^3$ dato skalarno polje $u(\vec{r}) = x^2 + y^2 - z^2$. Ekviskalarna površ je data jednačinom $x^2 + y^2 - z^2 = C$. Različite vrednosti od C definišu čitavu familiju ekviskalarnih površi (vidi sliku 3.2): za $C = 0$ dobijamo konus, za $C > 0$ jednokrilni rotacioni hiperboloid (nastao rotacijom hiperbole $x^2 - z^2 = C$ oko $x-$ose), i za $C < 0$ dvokrilni rotacioni hiperboloid.

Zadatak 3.1.1. Na osnovu prethodnog primera odrediti (skicirati) oblik mogućih ekviskalarnih površi za polje $u(\vec{r}) = a(x^2 + y^2) - bz^2$ u zavisnosti od odnosa različitih realnih konstante a i b.

Zadatak 3.1.2. Uobičajeno je razmatrati površi kao ekviskalarne površi nekog skalarnog polja. Odrediti skalarno polje za koje su ekviskalarne površi a) sfere, b) rotacioni elipsoidi.

Ispitivanje osobina realne funkcije $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, tj. oblika njenog grafika, se vrši analizom izvoda funkcije g. Izvod je, u tom slučaju definisan kao granična vrednost količnika priraštaja funkcije i njenog argumenta

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Po analogiji sa realnim ("jednodimenzionalnim") funkcijama, za ispitivanje skalarnih polja se, takođe koristi izvod funkcije. Međutim, definicija izvoda je složenija, jer zbog vektorske prirode argumenta ($\vec{r}$ umesto x) priraštaj je moguće definisati na više načina, tj. u više različitih pravaca. Zbog toga se definiše poseban pojam: izvod u pravcu.

Def. 3.2. *Neka je u nekom delu prostora u $\mathbb{R}^3$ definisano skalarno polje $f(\vec{r})$, tačka M čiji je vektor položaja $\vec{r}_0$ i jedinični vektor $\vec{v}$. Ako postoji*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\vec{r}_0 + \lambda \vec{v}) - f(\vec{r}_0)}{\lambda}$$

onda se on naziva izvodom polja f u tački M u pravcu $\vec{v}$ i označava sa $D_{\vec{v}} f(\vec{r}_0)$, ili kao $\frac{\partial f}{\partial v}\big|_M$ [1]

Ukoliko je vektor pravca jedan od koordinatnih ortova, npr. $\vec{v} = \vec{e}_x$, tada je izvod u pravcu jednak

$$D_{\vec{e}_x} f(\vec{r}_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)\,|_M,$$

tj. običnom parcijalnom izvodu od f po koordinati x u tački M.

Proizvoljan jedinični vektor $\vec{v}$ možemo predstaviti u ortonormiranom bazisu $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ linearnom kombinacijom $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$. Priraštaj skalarnog polja možemo tretirati kao realnu funkciju jedne promenljive: $g(\lambda) := f(\vec{r} + \lambda \vec{v}) - f(\vec{r})$. Iz razvoja funkcije g u Tejlorov red po λ u okolini nule dobijamo:

$$D_{\vec{v}} f = \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z. \tag{3.1}$$

Kako su koeficijenti u v_i jednaki $\vec{e}_i \cdot \vec{v}$ (gde je $i = x, y, z$), tj. kosinusima uglova $\cos(\theta_i)$ koje vektor $\vec{v}$ zaklapa sa ortovima $\vec{e}_i$, jednakost (3.1) možemo zapisati u obliku:

$$D_{\vec{v}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x \cdot \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y \cdot \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot \vec{v}. \tag{3.2}$$

Def. 3.3. *Neka je u nekom delu prostora u $\mathbb{R}^3$ definisano skalarno polje $f(\vec{r})$ koje je diferencijabilno. Gradijent,* $\mathrm{grad} f(\vec{r})$*, je vektorsko polje koje je definisano kao:*

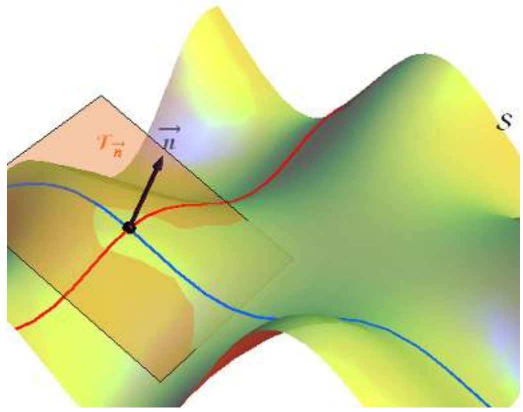
$$\mathrm{grad} f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z. \tag{3.3}$$

[1] Koristi se i oznaka $\frac{\partial f}{\partial v}(\vec{r}_0)$.

Na osnovu definicije gradijenta i izraza 3.2, izvod u pravcu $\vec{v}$ se može zapisati kao:

$$D_{\vec{v}}f = \text{grad}f(\vec{r}) \cdot \vec{v}.$$

Posmatrajmo tačku M na ekvipotencijalnoj površi $\mathcal{S}$. Iz gornje jednakosti vidimo da je vrednost izvoda u pravcu u M maksimalna kada je $\vec{v}$ paralelan sa vektorom $\text{grad}f\ |_M$. Sa druge strane, znamo da je maksimalna vrednost promene polja f u tački M upravo u pravcu normale. Konačno iz $\text{grad}f\ |_M = c\vec{n}$, sledi da je $D_{\vec{n}}f = c$, pa gradijent skalarnog polja f možemo definisati i na sledeći način:



Def. 3.4. *Alternativna definicija za gradijent vektorskog polja: Gradijent,* $\text{grad}f(\vec{r})$, *je vektor koji u posmatranoj tački polja M ima pravac normale na ekvipotencijalnu površ u toj tački, orjentisan je u smeru (najbržeg) rasta skalarnog polja $f(\vec{r})$, a dužina mu je jednaka izvodu polja u pravcu normale ($\vec{n}$ je ort normale), tj.*

$$\text{grad}f(\vec{r}) = (D_{\vec{n}}f)\vec{n} \tag{3.4}$$

Očigledno je da ova definicija gradijenta ne zavisi od izbora koordinatnog sistema, tj. od izbora bazisa. Ako ortonormirani bazis označimo sa $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a koordinate sa x_1, x_2, x_3, izraz za gradijent (3.3) se može još elegantnije zapisati koristeći operator definisan sa:

$$\nabla := \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.5}$$

koji se naziva *Hamiltonov operator*, a čita se kao *Nabla* ili Del. Gradijent i izvod u pravcu jediničnog vektora $\vec{v}$ postaju:

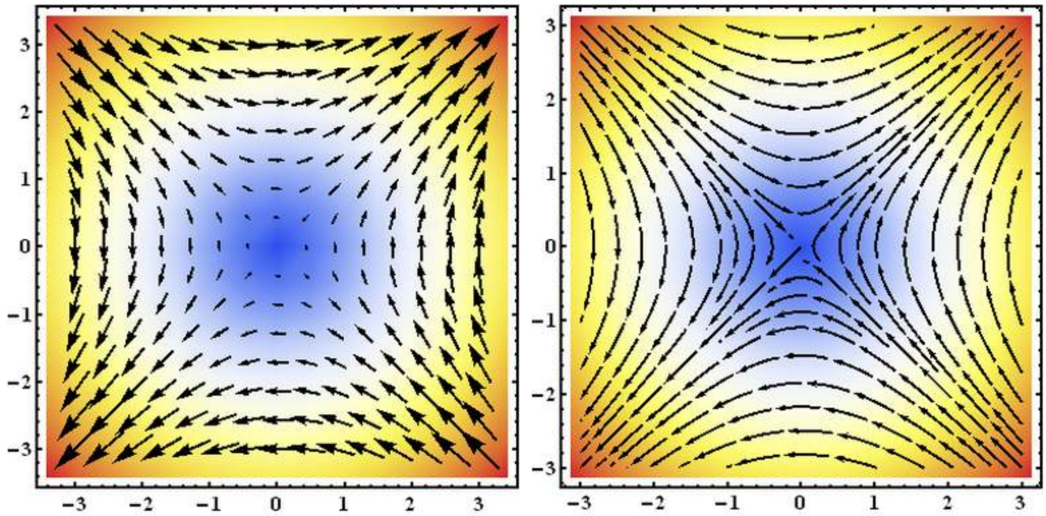
$$\text{grad}f = \nabla f, \quad D_{\vec{v}}f = (\vec{v} \cdot \nabla)f.$$

Definiciju (3.4) možemo iskoristiti za određivanje vektora normale na neku zadatu površ $\mathcal{S}$. S'obzirom da je površ definisana jednačinom $f(x, y, z) = C$, ako za polje zadato kao $f(x, y, z)$ izračunamo $\text{grad}f$, normala na $\mathcal{S}$ (koja je dakle ekvipotencijalna površ polja f) u tački čiji je radijus vektor $\vec{r}_0$ je:

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}f(\vec{r}_0)}{||\text{grad}f(\vec{r}_0)||}.$$

Neka su zadata dva diferencijabilna skalarna polja $f(\vec{r})$ i $g(\vec{r})$. Koristeći se dobro poznatim osobinama diferenciranja funkcije lako se pokazuju sledeće relacije:

$$\begin{aligned}
\nabla(f \pm g) &= \nabla f \pm \nabla g \\
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
\nabla(f/g) &= \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} \quad \text{za } g \neq 0.
\end{aligned}$$



Slika 3.3: Prikaz vektorskog polja (u ravni) pomoć u vektora (levo) i strujnih linija (desno). Boja označava gustinu polja u datoj oblasti.

3.2 Vektorsko polje

Ako je u svakoj tački (odredjenoj vektorom položaja $\vec{r}$) nekog dela prostora $\mathbb{R}^3$ (ili ravni $\mathbb{R}^3$) definisana vrednost nekog vektora $\vec{a}(\vec{r})$, onda se kaže da u tom delu prostora imamo definisano vektorsko polje. Možemo reći i da je vektorsko polje preslikavanje $\vec{a}:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$, gde je n obično jednako 3 (vektorsko polje u prostoru) ili 2 (vektorsko polje u ravni). Primeri takvih polja u fizici su mnogobrojni: električno polje $\vec{E}$, magnetno polje $\vec{B}$, polje brzina u fluidima $\vec{v}(\vec{r})$ itd. Najslikovitiji primer vektorskog polja je polje brzina u fluidu: brzine čestica prašine u vodenoj ili vazdušnoj struji.

Analogno skalarnom polju, u proizvoljnom ortonormiranom bazisu vektorsko polje je zadato svojim komponentama $a_i(\vec{r})$ koje su funkcije tri nezavisne promenljive x_1, x_2 i x_3:

$$\vec{a}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}a_i(x_1,x_2,x_3)\vec{e}_i. \tag{3.6}$$

Geometrijski, vektorsko polje se može prikazati preko vektorskih linija. Linija čiji se vektor tangente u svakoj tački poklapa sa pravcem vektorskog polja u toj tački naziva se vektorska linija. Specijalno, ako je vektorsko polje, polje neke sile onda se njegove vektorske linije zovu linije sila, a ako je vektorsko polje polje brzina, na primer u fluidu, onda govorimo o strujnim linijama. Na slici 3.3 je dat uporedni prikaz vektorskog polja $\vec{a}(x,y)=y\vec{e}_x+x\vec{e}_y$ pomoću vektora polja u nekim tačkama i pomoću strujnih linija.

Neka je zadato vektorsko polje $\vec{a}(\vec{r})$ jednačinom (3.6) i neka su $a_i(x_1,x_2,x_3)$ neprekidne funkcije čiji su prvi izvodi ograničene funkcije. Kriva u $\mathbb{R}^3$ se obično zadaje parametarskom jednačinom $\vec{r}(t)=x_1(t)\vec{e}_1+x_2(t)\vec{e}_2+x_3(t)\vec{e}_3$. Kriva je diferencijabilna ako postoji granična vrednost

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\triangle t)-\vec{r}(t)}{\triangle t},$$

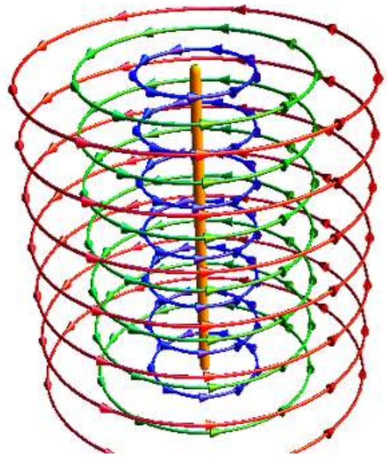
koju nazivamo izvodom krive. Za diferencijabilnu krivu možemo definisati vektor tangente u proizvoljnoj tački odredjenoj sa $t=t_0:\vec{\tau}=(\mathrm{d}\vec{r}(t)/\mathrm{d}t)/_{t=t_0}$. Ako je ta linija ujedno i linija vektorskog polja onda mora da važi da je: $\mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t = a_i(x_1, x_2, x_3)$. Dakle, dobili smo sistem diferencijalnih jednačina koji određuje vektorske linije polja $\vec{a}(\vec{r})$:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{a_2(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\mathrm{d}x_3}{a_3(x_1, x_2, x_3)} \tag{3.7}$$

Primer 3.2.1. Odredimo vektorske linije magnetnog polja koje stvara beskonačni pravolinijski provodnik kroz koji protiče struja I.

► Izaberimo koordinatni sistem tako da je provodnik duž z ose. Neka je struja kroz provodnik I. Magnetno polje u tački $\vec{r}$ je $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi\rho} I\vec{e_z} \times \vec{r}$ gde je $\rho^2 = r^2 - z^2$ (tj. rastojanje date tačke od provodnika). Dakle, magnetno polje je $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} y\vec{e}_x + \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} x\vec{e}_y$. U proizvoljnoj tači polje očigledno nema komponentu duž z- ose. Ako je vektorska linija data sa $\vec{r}(t)$, sledi da je $dz(t)/dt = 0$ tj. $z(t) = C_1$ gde je C_1 realna konstanta. Druge dve jednačine za vektorsku liniju su:

$$\frac{\mathrm{d}x}{-\mu_0 I y/2\pi\rho} = \frac{\mathrm{d}y}{\mu_0 I x/2\pi\rho}.$$



Slika 3.4: Vektorske linije magnetnog polja oko pravolinijkog provodnika.

Rešavanjem ove jednakosti dobijamo da je $x^2(t) + y^2(t) = C_2$. Konačno, vektorske linije su krugovi koji leže u ravnima ortogonalnim na z-osu, tj. na sam provodnik, i centri su im na toj osi. Rešenje je ilustrovano na slici 3.4. ◄

3.3 Fluks i divergencija vektorskog polja

Pojam fluksa u fizici je poznat od ranije. Sama reč potiče od latinske reči *fluxus* koja znači proticanje. Pođimo od dobro poznatog polja brzina $\vec{v}$ u fluidu. Neka je $\mathcal{S}$ izolovana površ ukupne površine S. Protok Q kroz $\mathcal{S}$ je količina tečnosti koja protekne kroz $\mathcal{S}$ u jedinici vremena: $Q = dV/dt$. Ako je polje brzina konstantno i ako je $\mathcal{S}$ ravna površ koja je ortogonalna na strujne linije, onda imamo da je $Q = vS$. Ako $\mathcal{S}$ nije ortogonalna na strujne linije, onda je $Q = \vec{v} \cdot \vec{n}S$, gde je $\vec{n}$ ort normale površi. Takođe, ako je polje brzina kontinualno, a površ $\mathcal{S}$ glatka, onda je možemo izdeliti na manje delove $\mathcal{S}_k (k = 1, 2 \ldots, n)$, tako da se može smatrati da je svaka površ $\mathcal{S}_k$ ravna i da je $\vec{v}$ konstantan u svakoj tački te površi. Onda je protok kroz $\mathcal{S}$ približno jednak sumi protoka kroz sve delove $\mathcal{S}_k$ (površine δS_k): $Q = \sum_k (\vec{v} \cdot \vec{n}_k)\delta S_k$. Za delić površine dS, uobičajeno je da se definiše *površinski element* $d\vec{S} = \vec{n}dS$ gde je $\vec{n}$ normala na površ. Dakle, protok kroz proizvoljnu glatku površ $\mathcal{S}$ je definisan sa: $Q = \lim_{\Delta S_k \to 0} \sum_k (\vec{v} \cdot \vec{n}_k)\Delta S_k$. Vrednost fluksa zavisi od jačine polja (brzine proticanja kod fluida), površine površi i ugla između normale površi i vektorskog polja.

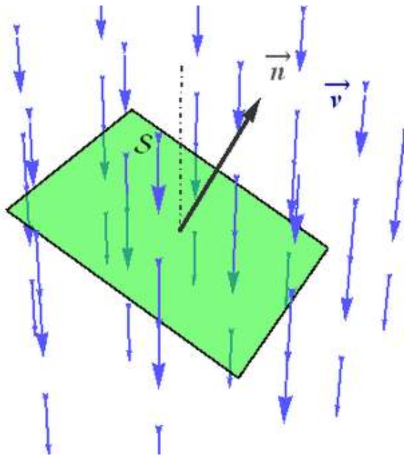
Def. 3.5. *Fluks vektorskog polja $\vec{a}$ kroz površ $\mathcal{S}$ je integral po površi od dužine projekcije $\vec{a}$ na normalu površi $\vec{n}$:*

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{\mathcal{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S}.$$

Ako je površ $\mathcal{S}$ zatvorena onda se flus kroz nju označava kao $\oiint \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

Primer 3.3.1. Ilustrujmo pojam fluksa na očiglednom primeru prikazanom na slici 3.5. Neka je šatorsko krilo razapeto na čvrstom kvadratnom ramu koji možemo da pomeramo. Ukoliko je krilo izloženo kiši, potrebno je odrediti količinu vode koja će pasti na njega (Q). To zavisi od tri veličine: inteziteta kiše (tj. polja brzina kapljica $\vec{v}$), površine rama S i kosinusa ugla između normale na površ rama ($\vec{n}$) i pravca pod kojim pada kiša, tj. $Q = \vec{v} \cdot \vec{n} S$.

U fizičkim primenama, posebno je značajna vrednost fluksa kroz neku zatvorenu površ. Sledeća veličina, koju nazivamo divergencija, je direktno povezana sa fluksom polja kroz zatvorenu površinu u okolini neke tačke.



Slika 3.5: Šatorsko krilo na kiši.

Def. 3.6. *Neka je u nekom delu prostora u $\mathbb{R}^3$ zadato diferencijabilno vektorsko polje $\vec{a}(\vec{r})$. Divergencija $\operatorname{div} \vec{a}$ od $\vec{a}$ je skalarno polje definisano kao:*

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x_1} a_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} a_2(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} a_3(x_1, x_2, x_3). \tag{3.8}$$

Sledeća teorema daje vezu između divergencije vektorskog polja $\vec{a}$ i fluksa.

Teorema 3.1. *(Ostrogradsky-Gauss) Neka je u delu prostora $G \subseteq \mathbb{R}^3$ zadato vektorsko polje: $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_i$, pri čemu su parcijalni izvodi $\partial a_i(x_1, x_2, x_3)/\partial x_i$ neprekidne funkcije. Fluks kroz bilo koju glatku zatvorenu površ $\mathcal{S}$ koja leži u G jednak je trostrukom integralu od $\operatorname{div} \vec{a}$ po zapremini V ograničenoj sa $\mathcal{S}$, tj.*

$$\Phi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}\, dV$$

Uobičajeno je da se ovako i uvodi pojam divergencije vektorskog polja. Neka je M tačka iz oblasti prostora u kojem je definisano polje $\vec{a}$ i neka je $\mathcal{S}$ proizvoljna zatvorena površ (površine S) tako da je M unutar zapremine V ograničene sa $\mathcal{S}$. Ako postoji granična vrednost $\lim_{V\to 0} \oiint \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S}/V$ onda se taj limes naziva divergencija $\operatorname{div}\vec{a}$ vektorskog polja je u datoj tački M, tj:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{V\to 0} \frac{\oiint \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{V}$$

Iz ove formule možemo zaključiti da ustvari divergencija $\operatorname{div}\vec{a}$ vektorskog polja $\vec{a}$ u tački M prestavlja zapreminsku gustinu fluksa polja $\vec{a}$ u toj tački.

Razmotrimo detaljnije polje brzina kod tečnosti. Ako je fluks kroz neku zatvorenu površ $\mathcal{S}$ negativan, to znači da veći broj čestica ulazi u zapreminu V ograničenu sa $\mathcal{S}$ nego što izlazi iz nje. Tada kažemo da imamo ponor tečnosti u datom delu prostora ograničenog sa $\mathcal{S}$. Sa druge strane, ako je $\Phi > 0$ onda više čestica izlazi iz V nego što ulazi i tada kažemo da u tom delu prostora imamo izvor tečnosti. Na osnovu predhodne teoreme (Ostrogradsky-Gauss) jasno je da znak $\operatorname{div}\vec{a}$ govori o tome da li u tom delu prostora postoji izvor ili ponor. Ako pak nemamo ni izvor ni ponor unutar zapremine V ograničenoj sa zatvorenom površi $\mathcal{S}$ onda je div$\vec{a} = 0$ u svakoj tački te oblasti.

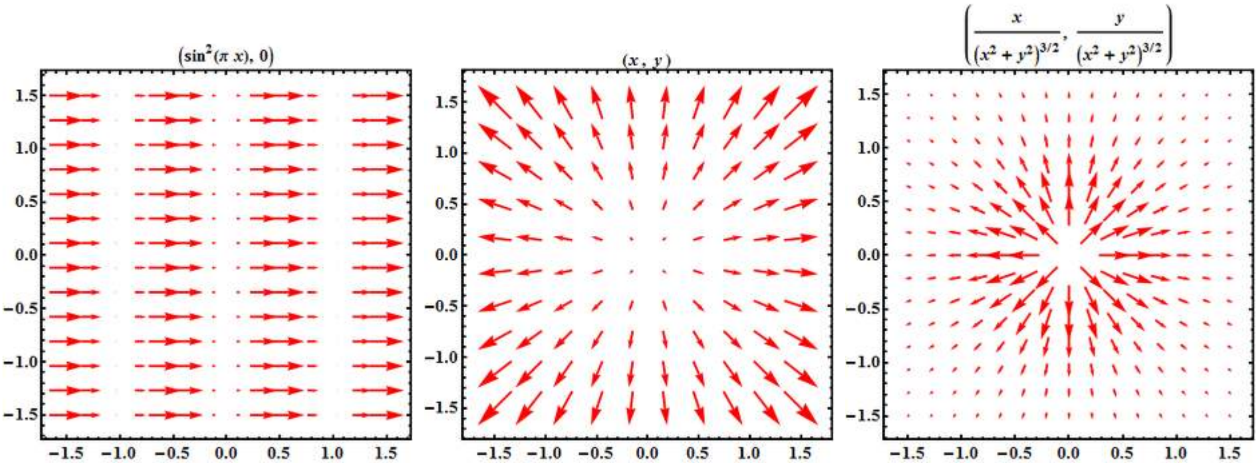
Primer 3.3.2. Prve dve Maksvelove jednačine sadrže divergenciju električnog i magnetnog polja

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

i obično se nazivaju "divergencijskim jednačinama". Ako obe jednačine integralimo u oblasti V ograničenoj sa zatvorenom površi $\mathcal{S}$, primenom teoreme Gaus-Ostrogradskog, dobijamo jednačine u integralnom obliku:

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dV,$$
$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Prva jednačina je ekvivalentna Gausovom zakonu elektrostatike: fluks električnog polja kroz zatvorenu površ $\mathcal{S}$ proporcionalan je ukupnom naelektrisanju koje ta površ obuhvata. Druga je Gausov zakona za magnetizam: fluks magnetnog polja kroz proizvoljnu zatvorenu površ je nula, tj. ne postoje magnetni monopoli.



Slika 3.6: Primeri vektorskih polja u ravni (zadatak 3.3.1).

Zadatak 3.3.1. Na slici 3.6 su prikazana tri primera vektorskih polja u ravni. Procenite da li postoje i gde se nalaze tačke u kojima je je divergencija jednaka nuli. Takođe, proceniti u kojim oblastima je veća, a u kojim, manja od nule. Zatim, na osnovu definicije, izračunati diverginciju polja u celoj oblasti i na taj način proveriti pretpostavku.

Uputstvo za procenu: zamisliti da polje prikazuje proticanje vode u preko ravne ploče i da smo čitavu ploču posuli sitnim, ali vidljivim česticama (npr. brašno ili mlevena kafa). U tačkama u kojima čestice počinju da se razređuju, divergencija je pozitivna, u tačkama u kojima se zgušnjavaju negativna, a tamo gde se njihova gustina ne menja, nulta.

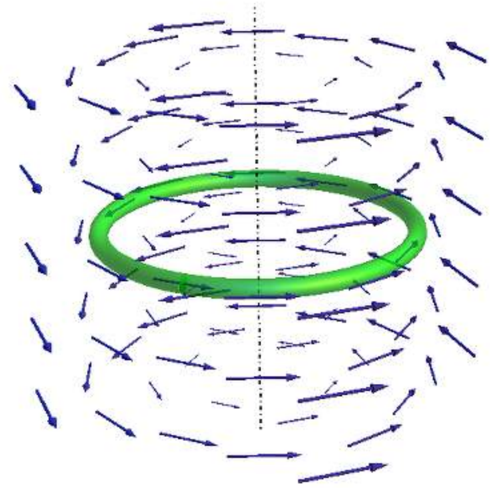
3.4 Cirkulacija i rotor vektorskog polja

Neka je u tečnosti definisano polje brzine. Pretpostavimo da je u tečnost potopljeno providno, zatvoreno, tanko crevo, kao na slici 3.7. Brzine pojedinih delića tečnosti u crevu definisane su samim poljem, ali tako da su zadržane samo tangencijalne komponente u odnosu na zid creva. Proticanje po zatvorenoj putanji obično nazivamo *cirkulacijom*, pa je pitanje da li će tečnost teći kroz crevo (tj. cirkulisati). Odgovor, naravno, zavisi od polja brzine, oblika i položaja creva, ali je pre svega potrebna precizna, kvantitativna definicija pojma cirkulacije.

Za proizvoljno vektorsko polje cirkulacija je definisana na sledeći način:

Def. 3.7. *Cirkulacija vektorskog polja $\vec{a}$ duž putanje L je jednaka linijskom integralu od projekcije $\vec{a}$ na tangentu krive L*

$$\int_L (\vec{a}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau})dl = \int_L \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}.$$



Slika 3.7: Tanko crevo potopljeno u tekući fluid.

Pojam cirkulacije se, u slučaju polja sile podudara sa radom sile na zatvorenoj putanji. Posmatrajmo telo mase koje se kreće duž neke putanje L usled dejstva sile $\vec{F}$. Rad koji sila izvrši na putu, recimo od tačke X do tačke Y je jednak : $A = \int_{L_{XY}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$. gde je L_{XY} deo putanje između date dve tačke. Kako sile koja deluje na telo ne mora biti ista u svakoj tački prostora, možemo smatrati da je $\vec{F}(\vec{r})$ jedno vektorsko polje, tada je rad ustvari cirkulacija polja $\vec{F}$ duž krive L: $A = \int_{L_{XY}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$.

Cirkulacija polja oko neke tačke u prostoru u odnosu na datu osu, je u direktnoj vezi sa pojmom rotora vektorskog polja.

Def. 3.8. *Neka je $\vec{a}(\vec{r})$ diferencijabilno vektorsko polje, tada je* rot $\vec{a}$ *vektorsko polje definisano sa:*

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3})\vec{e}_1 + (\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1})\vec{e}_2 + (\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2})\vec{e}_3. \tag{3.9}$$

Za razliku od divergencije, rotor vektorskog polja je takođe vektorsko polje, jer pored zavisnosti od tačke u prostoru zavisi i od ose. U slučaju vektorskog polja u ravni, rotor je samo jednak trećem sabirku $(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2})\vec{e}_3$. Konkretnu vezu cirkulacije polja duž neke krive i rotora polja uspostavlja sledeća (Stoksova) teorema.

Teorema 3.2. *(Stokes) Neka je $\mathcal{S}$ otvorena dvostrana površ oivičena zatvorenom, nesamopresecajućom konturom L i neka je $\vec{a}(\vec{r})$ vektorsko polje čiji su izvodi neprekidne funkcije. Tada važi da je:*

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\vec{a} \cdot d\vec{S}.$$

Primer 3.4.1. Druge dve Maksvelove jednačine sadrže rotor električnog i magnetnog polja

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

i obično se nazivaju "rotorskim jednačinama". Ako obe jednačine integralimo po nekoj površi $\mathcal{S}$ oivičenoj konturom L i primenimo Stoksovu teoremu, dobijamo Maksvelove jednačine u integralnom obliku:

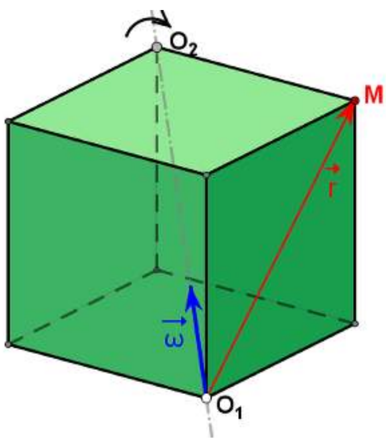
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S},$$
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Prva jednačina je ekvivalentna Faradejevom zakonu indukcije: napon indukovan u zatvorenoj konturi L je proporcionalan brzini promene magnetnog fluksa kroz površ $\mathcal{S}$ ograničenu sa L. Druga je Maksvelova modifikacija Amperovog zakona: integral jačine magnetnog polja duž konture L je proporcionalan zbiru električne struje i struje pomeranja.

Primer 3.4.2. Na slici 3.8 je prikazano kruto telo koje rotira oko ose koja prolazi kroz tačke O_1 i O_2. Vektor brzine tačke M sa radijus vektorom $\vec{r}$ je

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (-\omega_3 x_2 + \omega_2 x_3)\vec{e}_1 + (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3)\vec{e}_2 + (-\omega_2 x_1 + \omega_1 x_2)\vec{e}_3,$$

gde je $\vec{\omega}$ vektor ugaone brzine. Svakoj tački na krutom telu je pridružen vektor brzine, pa je definisano polje brzine. Odredimo rotor polja brzine.

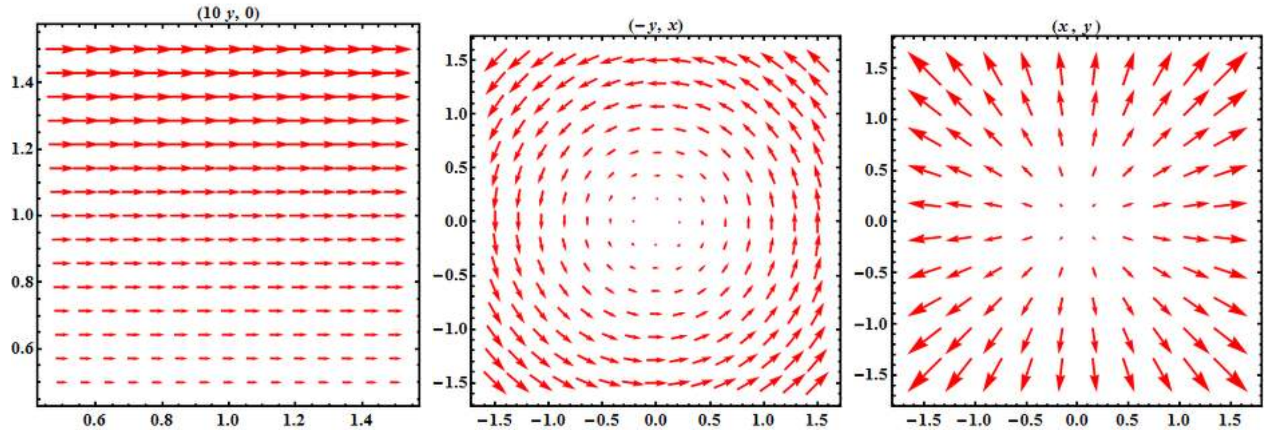


Slika 3.8: Kruto telo koje rotira oko ose $O_1 O_2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\, \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3})\vec{e}_1 + (\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1})\vec{e}_2 + (\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2})\vec{e}_3 \\ &= (\omega_1 - (-\omega_1))\vec{e}_1 - (-\omega_2 - \omega_2)\vec{e}_2 + (\omega_3 - (-\omega_3))\vec{e}_3 \\ &= 2\vec{\omega}. \end{aligned}$$

Prema tome, važi $\nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$, tj. u slučaju rotacije krutog tela, rotor polja brzine je jednak dvostrukom vektoru ugaone brzine.

Zadatak 3.4.1. Na slici 3.9 su prikazana tri primera vektorskih polja u ravni. Proceniti u kojim tačkama je rotor jednak, a zatim i znak u oblastima u kojima je različit od nule. Zatim, na osnovu definicije, izračunati rotor u celoj oblasti i proveriti pretpostavku.
Uputstvo za procenu vrednosti rotora: zamisliti da polje prikazuje proticanje vode u preko ravne ploče i da u vodu u nekoj tački potopimo mali propeler u sa lopaticama u obliku (+), koji može da rotira oko vertikalne ose. U tačkama u kojima se propeler rotira u pozitivnom smeru, rotor je pozitivan, tamo gde se rotira u negativnom smeru, negativan, a tamo gde se uopšte ne rotira je nula.



Slika 3.9: Primeri vektorskih polja u ravni (zadatak 3.4.1).

3.5 Solenoidno i potencijalno polje

Vratimo se na primer polja brzina u fluidu. Videli smo da div$\vec{v}$ govori o tome da li u tom delu prostora postoji izvor ili ponor čestica tečnosti, dok se odsustvo izvor i ponor unutar neke zapremine V ograničene zatvorenom površi $\mathcal{S}$ manifrstuje kao div$\vec{v} = 0$ u svakoj tački te oblasti. Polja kod kojih je div$\vec{a} = 0$ su posebno interesantna za fiziku:

Def. 3.9. *Ako je u svakoj tački prostora $G \subseteq \mathbb{R}^3$ važi da je* div$\vec{a} = 0$, *onda se kaže da je vektorsko polje $\vec{a}$ solenoidno u G.*

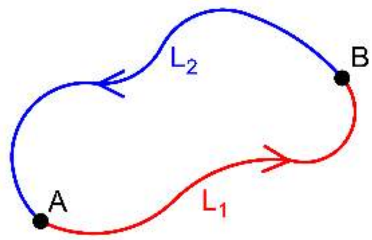
Može se pokazati da je polje $\vec{a}$ solenoidno ako i samo ako postoji vektorska funkcija $\vec{A}$ tako da važi da je $\vec{a} = \mathrm{rot}\vec{A}$. Sama vektorska funkcija $\vec{A}$ se naziva vektorski potencijal polja $\vec{a}$ i određena je do na gradijent proizvoljne funkcije: ako je $\vec{a} = \mathrm{rot}\vec{A}$ onda važi i da je $\vec{a} = \mathrm{rot}(\vec{A} + \mathrm{grad}f)$, jer je $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}f = 0$. Ova osobina vektorskog potencijala naziva se gradijentna invarijantnost. Jednoznačnost vektorskog potencijala se postiže zadavanjem dodatnih uslova. Jedan takav primer je Kulonov kalibracioni uslov: div$\vec{A} = 0$ koji se često javlja u fizici.

Jasno je da je kod solenoidnog polja fluks kroz bilo koju zatvorenu površ $\mathcal{S}$ jednak nuli. Posmatrajmo sad neku orjentisanu zatvorenu krivu L koja je ujedno i granica površi $\mathcal{S}$. Može se pokazati da je fluks kroz bilo koju površ koja ima tu granicu L, jednak. I na kraju još jedan komentar: vektorske linije solenoidnog polja ne mogu da imaju ni početak ni kraj unutar oblasti G. Dakle mogu biti isključivo zatvorene krive ili mogu imati početak i kraj na granici oblasti G u kojoj je polje definisano. Zbog toga se ponekad nazivaju i "bezizvornim"poljima.

Jedna od osnovnih karakteristika sile $\vec{F}$ (polja sile) ja zavisnost rada te sile od oblika putanje. Ukoliko rad ne zavisi od oblika putanje, kao u slučaju gravitacione ili elektrostatičke sile, silu nazivamo konzervativnom. S'obzirom da od dve različite putanje između tačaka A i B, promenom smera jedne od njih uvek možemo formirati zatvorenu krivu koja sadrži obe tačke (kao na slici 3.10). Tada je očigledno da nezavisnost rada, tj. cirkulacije polja $\vec{F}(\vec{r})$ od putanje je ekvivalentna iskazu da je cirkulacija na zatvorenoj putanji jednaka nuli. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 3.3. *Potreban i dovoljan uslov da integral $\int_L \vec{a} \cdot d\vec{l}$ bude nezavisan od izbora krive L koja spaja dve tačke A i B je da je polje $\vec{a}$ bezvrtložno, tj. da je $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.*

Dakle, sila je konzervativna ako je rotor polja koje generiše silu nulti. Takva polja nazivamo potencijalnim.



Slika 3.10:

Def. 3.10. *Vektorsko polje $\vec{a}$ se naziva potencijalnim ako postoji funkcija $f(\vec{r})$ tako da važi da je $\operatorname{grad} f = \vec{a}$. Skalarna funkcija f se naziva skalarnim potencijalom polja $\vec{a}$ i određena je do na aditivnu konstantu.*

Može se pokazati da je uslov $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ potreban i dovoljan uslov potencijalnosti polja $\vec{a}$, pa se takva polja nazivaju i "bezvrtložnim". Potrebnost kriterijuma je očigledna, naime $\operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$. Dovoljnost se pokazuje koristeći Stokes-ov teorem te ovde nećemo dati dokaz.

Osnovna osobina potencijalnog polja je data u sledećoj teoremi:

Teorema 3.4. *U potencijalnom polju $\vec{a}$ integral $\int_{M_1}^{M_2} \vec{a} \cdot d\vec{r}$ ne zavisi od puta integracije već samo od krajnjih tačaka M_1 i M_2 i jednak je razlici vrednosti skalarnog potencijala $f(\vec{r})$ polja $\vec{a}$ u početnoj i krajnjoj tački:*

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = f(M_2) - f(M_1)$$

Primer 3.5.1. Navedimo fizičku interpretaciju identiteta $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$. Rad konzervativne sile između tačaka A i B jednak je razlici potencijalne enrgije početne i krajnje tačke. Prema tome, potencijalno polje ne može da vrši rad na zatvorenoj putanji, tj. njegova cirkulacija je nula. Kada bi to bilo moguće u gravitacionom polju, bilo bi moguće izgraditi gravitacioni perpetum mobile, poput onog prikazanog na poznatoj Ešerovoj litografiji Waterfall. Slična ideja je primenjena i kod litografije Ascending and Descending.

Zadatak 3.5.1. Neka se česticu naelektrisanja q_0 nalazi u električnom polju koje stvara tačkasto naelektrisanje Q i neka je $\vec{r}_Q = 0$. Pokazati da je polje potencijalno i naći potencijal električnog polja. Izračunati i rad koji potreban uložiti da česticu naelektrisanja q_0 pomerimo iz tačke A u tačku B ako:

a) obe tačke imaju istu radijalnu koordinatu r;

b) naelektrisanje Q i obe tačke leže na istoj pravoj i $r_b = 2r_A$;

c) su Dekartove koordinate tačaka $A = (r, 0, 0)$ i $B = (0, r, 0)$.

Polje koje je istovremeno i potencijalno i solenoidno naziva se Laplasovo polje. Skalarni potencijal f takvog polja zadovoljava Laplasovu jednačinu:

$$\triangle f = 0.$$

Primeri ovakvog polja u fizici su:

- električno polje u delu prostora u kojem nema naelektrisanih čestica;
- gravitaciono polje u oblasti gde ne postoje izvori gravitaciog polja;
- solenoidno polje brzine u nestišljivom fluidu.

3.6 Dvostruko dejstvo Hamiltonovog operatora

Definisali smo tri osnovna operatora vektorske analize: grad f za skalarno polje f i $\operatorname{div}\vec{a}$ i $\operatorname{rot}\vec{a}$ za vektorsko polje $\vec{a}$. Videli smo da se one mogu zapisati preko diferencijalnog operatora ∇. Takođe, dvostrukom primenom ∇ dobijaju se diferencijalni operatori drugog reda:

1. Neka je $f(\vec{r})$ skalarno polje, tada se za vektorsko polje $\operatorname{grad} f$ mogu definisati dve operacije

   a) $\nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f$ koja kao rezultat daje skalarno polje:

   $$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = (\nabla \cdot \nabla) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}. \tag{3.10}$$

   Laplasov operator $\triangle := \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ se dobija kao skalarni proizvod $\nabla \cdot \nabla$. Jednačina $\triangle f = 0$ se naziva Laplasova jednačina: veoma su brojne fizičke situacije u kojima fizičke veličine zadovoljavaju upravo jednačinu ovog tipa.

   b) $\nabla \times (\nabla f) = \operatorname{rot}\operatorname{grad} f$. Očigledno je $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = (\nabla \times \nabla) f = 0$.

2. Neka je $\vec{a}$ vektorsko polje, tada imamo sledeće mogućnosti:

   a) $\nabla(\nabla \cdot \vec{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$ koja kao rezultat daje vektorsko polje;

   b) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$ koja kao rezultat treba da daje skalarno polje, a iz osobina mešovitog proizvoda da je $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \vec{a} = 0$;

   c) $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$ koja kao rezultat daje vektorsko polje. Koristeći se formulom za dvostruki vektorski proizvod $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$, nakom zamene $\vec{A} = \vec{B} = \nabla$ i $\vec{C} = \vec{a}$ dobijamo:

   $$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \triangle\vec{a}. \tag{3.11}$$

   Dejstvo Laplasovog operatora na vektorsko polje je definisano kao:

   $$\triangle\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} \triangle a_i \vec{e}_i.$$

Prilikom delovanja ∇ na proizvode $fg, f\vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}$ i $\vec{u}\cdot\vec{v}$ treba voditi računa o dvojakoj prirodi Hamiltonovog operatora: on je i vektor i operator (tj. ∇ deluje na svaki faktor ponaosob i pri tome se koriste poznata pravila iz vektorske algebre, a sam operator se tretira kao vektor). Tako se već dato pravilo za gradijent proizvoda dve funkcije može naći kao:

$$\mathrm{grad}(fg) = \nabla(fg) = \nabla(\underline{\boldsymbol{f}}\, g) + \nabla(f\, \underline{\boldsymbol{g}}) = g\nabla f + f\nabla g.$$

Ostala dejstva operatora ∇ na proizvode su:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \nabla(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= \nabla(\underline{\boldsymbol{\vec{u}}}\cdot\vec{v}) + \nabla(\vec{u}\cdot\underline{\boldsymbol{\vec{v}}}) \\
&= (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{u}) + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v} + \vec{u}\times(\nabla\times\vec{v}) \\
&= (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u} + \vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v} + \vec{u}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f\vec{v}) = \nabla\cdot(f\vec{v}) &= \nabla\cdot(\underline{\boldsymbol{f}}\vec{v}) + \nabla\cdot(f\underline{\boldsymbol{\vec{v}}}) = \vec{v}\cdot\nabla f + f\nabla\vec{v} \\
&= \vec{v}\cdot\mathrm{grad} f + f\mathrm{div}\,\vec{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}(f\vec{v}) = \nabla\times(f\vec{v}) &= \nabla\times(\underline{\boldsymbol{f}}\vec{v}) + \nabla\times(f\,\underline{\boldsymbol{\vec{v}}}) = -\vec{v}\times\nabla f + f(\nabla\times\vec{v}) \\
&= -\vec{v}\times\mathrm{grad} f + f(\mathrm{rot}\,\vec{v})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\vec{u}\times\vec{v}) = \nabla\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) &= \nabla\cdot(\underline{\boldsymbol{\vec{u}}}\times\vec{v}) + \nabla\cdot(\vec{u}\times\underline{\boldsymbol{\vec{v}}}) = \vec{v}\cdot(\nabla\times\vec{u}) - \vec{u}\cdot(\nabla\times\vec{v}) \\
&= \vec{v}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{u} - \vec{u}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\vec{u}\times\vec{v}) = \nabla\times(\vec{u}\times\vec{v}) &= \nabla\times(\underline{\boldsymbol{\vec{u}}}\times\vec{v}) + \nabla\times(\vec{u}\times\underline{\boldsymbol{\vec{v}}}) \\
&= (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u} - \vec{v}(\nabla\cdot\vec{u}) + \vec{u}(\nabla\cdot\vec{v}) - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v} \\
&= (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u} - \vec{v}(\mathrm{div}\,\vec{u}) + \vec{u}(\mathrm{div}\,\vec{v}) - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v}
\end{aligned}$$

3.7 Krivolinijske koordinate

Veoma često je zgodnije koristiti neke druge koordinate umesto Dekartovih koordinata x, y i z. Ako svakoj tački M prostora $\mathbb{R}^3$ jednoznačno odgovara skup brojeva (q_1, q_2, q_3) onda se veličine q_1, q_2, q_3 nazivaju krivolinijske koordinate tačke M. Koordinatne površi su zadate jednačinama $q_1 = C_1, q_2 = C_2, q_3 = C_3$. Linije preseka koordinatnih površi nazivaju se koordinatne linije. Analogno kao kod Dekartovog sistema, uvode se vektori $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ koji su usmereni duž tangenti na koordinatne linije i smer im je u pravcu rasta q_1, q_2, q_3 respektivno. Ako važi da su u svakoj tački M vektori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ međusobno ortogonalni onda se kaže da je dati krivolinijski sistem ortogonalan. Primeri ortogonalnih krivolinijskih koordinatnih sistema, koji se veoma često koriste, su sferni i cilindrični sistem. Koje koordinate koristimo u datom problemu zavisi od simetrije sistema koji analiziramo. Tako smo kog primera 3.2.1 koristili cilindrične kooditane, dok kod sferno simetričnog polja koristimo sferne koordinate.

3.7.1 Cilindrične koordinate

U cilindričnim koordinatama vektor položaja proizvoljne tačke M je zadat sa tri koordinate:

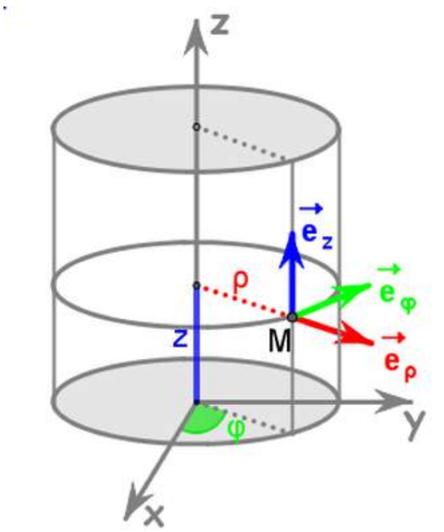
$$q_1 = \rho, \quad 0 \le \rho < +\infty$$
$$q_2 = \varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$
$$q_3 = z, \quad -\infty < z < +\infty$$

Koordinatne površi su:

$\rho = const$– cilindar poluprečnika ρ čija se osa poklapa sa z osom;

$\varphi = const$– poluravan koja sadrži z osu a sa x osom gradi ugao φ

$z = const$– ravan koje je ortogonalna na z osu.



Slika 3.11: Cilindrični koordinatni sistem.

U proizvoljnoj tački M koordinatna linija za z je ista kao i kod Dekartovog sistema, dok je za ρ to zrak koji počinje na z osi i normalan je na nju. Koordinatna linija za φ je krug sa centrom na z osi i leži u ravni koja je normalna na z. Veza između Dekartovih i cilindričnih koordinata data je jednačinama:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{3.12}$$

3.7.2 Sferne koordinate

U sfernim koordinatama vektor položaja proizvoljne tačke M je zadat sa tri koordinate:

$$q_1 = r, \quad 0 \le r < +\infty$$
$$q_2 = \theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$$
$$q_3 = \varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Koordinatne površi su:

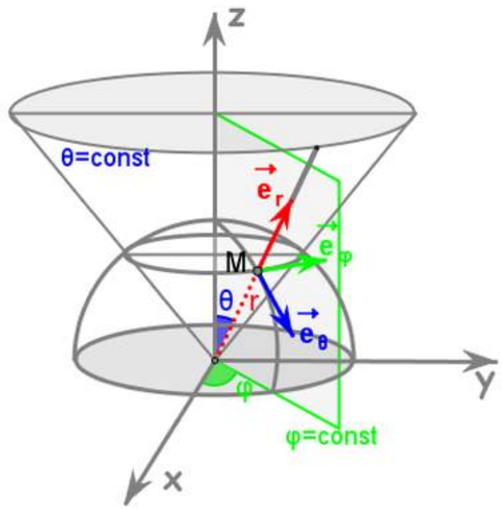
$r = const$– sfera poluprečnika r sa centrom u koordinatnom početku;

$\varphi = const$– poluravan koja sadrži z osu a sa x osom gradi ugao od φ;

$\theta = const$– površ konusa (ali samo jedna njegova polovina) čija se osa poklapa sa z osom.

U proizvoljnoj tački M koordinatne linije su:
za r – zrak sa početkom u koordinatnom početku;
za φ – paralela na sferi koja prolazi kroz tačku M;
za θ – meridijan na sferi koji prolazi kroz M.
Veza sa dekartovim koordinatama data je jednačinama:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta. \tag{3.13}$$



Slika 3.12: Sferni koordinatni sistem.

3.7.3 Lameovi koeficienti

Neka je vektor položaja u datom krivolinijskom sistemu zadat kao funkcija koordinata $\vec{r}(q_1, q_2, q_3)$. Koordinatne linije koje formiraju koordinatnu mrežu, date su jednačinama: $q_i = const$. Tangente na koordinatne linije $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ u nekoj tački grade lokalni triedar, koji u opštem slučaju nije ortonormiran. Norma i- tog vektora iz koordinatnog triedra se naziva Lamé-ov koeficient i označava sa

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}. \tag{3.14}$$

Lako se može pokazati da je:

$$d\vec{r} = H_1 dq_1 \vec{e}_1 + H_2 dq_2 \vec{e}_2 + H_3 dq_3 \vec{e}_3 \tag{3.15}$$

Specijalno, za cilindrične koordinate imamo:

$$H_1 = H_\rho = 1, \quad H_2 = H_\varphi = \rho, \quad H_3 = H_z = 1,$$

dok je za sferni koordinatni sistem:

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r, \quad H_3 = H_\varphi = r\sin\theta.$$

Ako koristimo neki od ortogonalnih krivolinijskih koordinatnih sistema zgodno je znati kako u njemu izgledaju osnovne operatorske funkcije vektorske analize. Neka je $f(q_1, q_2, q_3)$ skalarno polje i neka je $\vec{a}(q_1, q_2, q_3) = \sum_{i=1}^{3} a_i(q_1, q_2, q_3)\vec{e}_i$ vektorsko polje zadato u krivolinijskim koordinatama (q_1, q_2, q_3), tada je:

$$\mathrm{grad} f = \frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\vec{e}_3$$

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right]$$

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_1}{H_2 H_3} & \frac{\vec{e}_2}{H_1 H_3} & \frac{\vec{e}_3}{H_1 H_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 a_1 & H_2 a_2 & H_3 a_3 \end{vmatrix} \tag{3.16}$$

Specijalno, za cilindrični koordinatni sistem imamo:

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (a_1\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{\rho}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix},$$

a za sferni koordinatni sistem:

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (a_1 r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (a_2\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_3}{\partial \varphi}$$

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2\sin\theta}\vec{e}_r & \frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\theta & \frac{1}{r}\vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_1 & r a_2 & r\sin\theta a_3 \end{vmatrix}.$$

Bibliografija

[1] Ivanka Milošević, 1997. *Vektorski prostori i elementi vektorske analize*, Fizički Fakultet, Univerzitet u Beogradu.

[2] Milan Vujičić, 1990. *Vektorski prostori u fizici, treće izdanje*, Fizički Fakultet, Univerzitet u Beogradu.

[3] Milan Vujičić, 2008. *Linear Algebra Thoroughly Explained*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[4] Jim Hefferon, 2014. *Linear Algebra*, http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra .

[5] David C. Lay, 2012. *Linear Algebra and Its Applications, 4th Edition*, Pearson Education, Inc.

[6] Gilbert Strang, 2006. *Linear Algebra and Its Applications, 4th Edition*, Brooks Cole.

[7] Lorenzo Sadun, 2007. *Applied Linear Algebra, 2nd Edition*, American Mathematical Society.

[8] Gerald Farin, Dianne Hansford, 2013. *Practical Linear Algebra: A Geometry Toolbox, 3rd Edition*, A K Peters/CRC Press.

[9] Sheldon Axler, 2015. *Linear Algebra Done Right*, Springer International Publishing.

[10] Philip N. Klein, 2013. *Coding the Matrix: Linear Algebra through Applications to Computer Science*, Newtonian Press.

[11] Susan J. Colley, 2012. *Vector Calculus, 4th Edition*, Pearson Education, Inc..