1. MATEMATIČKE OSNOVE

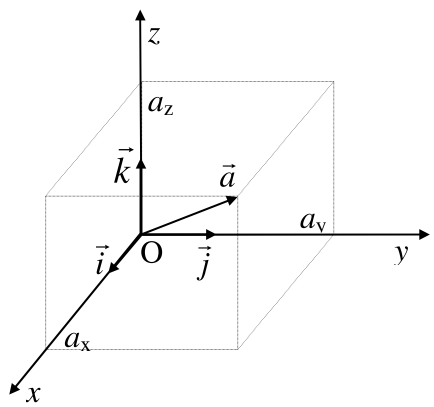
U fizici se razlikuju skalarne, vektorske i tenzorske veličine. Skalarne veličine definirane su jednim brojem (skalarom), a takve su veličine npr. masa m, volumen V, gustoća ρ, specifična unutarnja energija u itd. Vektorske veličine su određene smjerom, intenzitetom i orijentacijom, odnosno s pomoću tri komponente (npr. tri projekcije na osi koordinatnog sustava), a takve su veličine brzina $\vec{v}$, ubrzanje $\vec{a}$, sila $\vec{F}$, vektor površinske gustoće snage toplinskog toka $\vec{q}$ itd. Vektorske veličine se u literaturi još označavaju i masno otisnutim slovima (***v, a, F, q***). Tenzorske veličine mogu biti drugog, trećeg ili višeg reda. Tenzori drugog reda definirani su s devet komponenti, tenzori trećeg reda s 27 komponenti, odnosno općenito broj komponenti tenzora n-tog reda je 3^n. Tako bi se i skalari mogli smatrati tenzorima nultog reda, a vektori su tenzori prvog reda. Tipični tenzori drugog reda u mehanici fluida su: tenzor naprezanja **T**, tenzor brzine deformacije **D**, tenzor vrtložnosti **V** itd.

1.1 SIMBOLIČKI I INDEKSNI ZAPIS VEKTORA

Gore navedeni način označavanja vektorskih i tenzorskih veličina se naziva simboličkim ili apstraktnim, a takav zapis ne zavisi od izbora koordinatnog sustava. Tako bi drugi Newtonov zakon primijenjen na tijelo mase m, na koje djeluje rezultantna sila $\vec{F}$, glasio:

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1}$$

Iz navedenog zapisa se može zaključiti da su vektor ubrzanja tijela $\vec{a}$, i vektor sile $\vec{F}$ kolinearni vektori i da je vektor sile razmjeran umnošku mase i vektora ubrzanja. Također se može zaključiti da ako na isto tijelo djeluje dva puta veća sila, da će i ubrzanje biti dva puta veće. U fizici se, međutim, ne zadovoljava s ovakvim relativnim odnosima među veličinama, nego se sadržaj svake veličine želi brojčano definirati. Brojčano iskazivanje sadržaja vektorske fizikalne veličine podrazumijeva izbor koordinatnog sustava, te prikaz vektora s pomoću komponenti, koje su projekcije tog vektora na osi izabranog koordinatnog sustava. Tada je svaka komponenta jedna skalarna veličina čiji se sadržaj iskazuje mjernim brojem i mjernom jedinicom. Slika 1. prikazuje desni kartezijski koordinatni sustav Oxyz u kojem su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ jedinični vektori (ortovi) u smjerovima osi x, y i z. Skup triju jediničnih vektora u smjerovima koordinatnih osi se naziva bazom vektorskog prostora, a svi vektori u prostoru se mogu prikazati kao linearna kombinacija tih baznih vektora. Koeficijenti te linearne kombinacije su komponente vektora, odnosno projekcije vektora na smjer triju osi. Projekcije vektora $\vec{a}$ na smjer pojedinih osi dobivaju se njegovim skalarnim množenjem (vidjeti poglavlje 1.2.3) s ortovima $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$. Tako bi se vektor $\vec{a}$ prikazao zbrojem:



Slika 1. Koordinatni sustav

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{2}$$

Sila $\vec{F}$ u izrazu (1) se također može prikazati s pomoću komponenti:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \tag{3}$$

Uvrštavanjem izraza (2) i (3) u izraz (1), on prelazi u oblik:

$$m\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \tag{4}$$

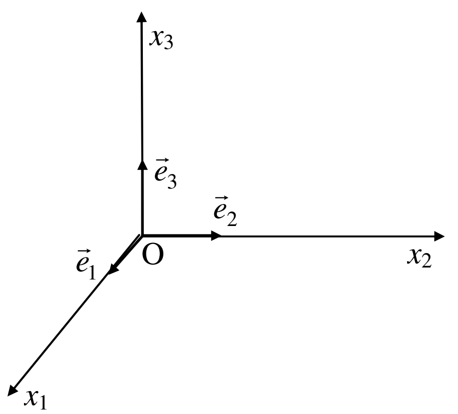
Vektorska jednadžba (4) se može razložiti na tri skalarne jednadžbe. Izjednačavajući koeficijente uz jedinične vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, na lijevoj i desnoj strani gornjeg izraza slijede te tri skalarne jednadžbe:

$$\begin{aligned} m a_x &= F_x \\ m a_y &= F_y \\ m a_z &= F_z \end{aligned} \tag{5}$$

U jednadžbama (5) se uočava pravilnost, te bi se sva tri izraza mogla napisati jedinstveno, jednom jednadžbom:

$$m a_i = F_i \tag{6}$$

u kojoj bi indeks *i*, poprimao vrijednosti “*x*”, “*y*” ili “*z*”. U tome se sastoji ideja indeksnog zapisa vektorskih i tenzorskih veličina, pri čemu se za indekse umjesto slova koriste brojevi, tako da sve što se odnosi na os *x* nosi indeks 1, što se odnosi na os *y* nosi indeks 2, a što se odnosi na os *z*, nosi indeks 3. Slika 2. prikazuje desni kartezijski koordinatni sustav u kojemu su osi označene slovom “*x*”, a jedinični vektori slovom “*e*”, dok indeksi 1, 2 i 3 označavaju pripadnost osima *x*, *y* i *z*. Tako bi se komponente vektora $\vec{a}$ označile s a_1, a_2 i a_3, te bi vrijedilo:



Slika 2. Indeksno označavanje osi

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i \tag{7}$$

S obzirom da će se pri opisu vektora s pomoću njegovih komponenti i baznih vektora, sumiranje uvijek odnositi na iste vrijednosti indeksa *i* (*i*=1, 2 i 3), nije nužno tu sumu niti pisati, jer će se ona podrazumijevati. Stoga se uvodi dogovor: **Ponovljeni indeks (koji se pojavljuje dva puta u nekom članu) označuje zbrajanje po svim njegovim vrijednostima. Indeksi će se označavati malim kosim slovima.** Temeljem ovog dogovora simbol sume se može ispustiti, te se vektor $\vec{a}$ može jednostavno zapisati kao $\vec{a} = a_i\vec{e}_i$.

Ponovljeni indeks se naziva još i nijemim indeksom, a gledajući izraz (7), jasno je da se u sumi indeks po kojem se sumira može imenovati bilo kojim slovom, iz čega proizlazi i pravilo: **Nijemom (ponovljenom) indeksu smije se proizvoljno promijeniti ime.** Primjenjujući to pravilo i dogovor o ponovljenim indeksima, može se pisati:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i = a_k \vec{e}_k = a_m \vec{e}_m = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \qquad (8)$$

Naravno da bi pojavljivanje triju ili više istih indeksa izazvalo zabunu, te se ne bi znalo na koja se dva indeksa odnosi pravilo za zbrajanje, te vrijedi ograničenje: **U svakom od članova jednadžbe ponovljeni indeks smije se pojaviti najviše dva puta.**
Primjenom indeksnog načina označavanja vektora, apstraktno zapisani drugi Newtonov zakon, jednadžba (1) $m\vec{a} = \vec{F}$ prelazi u:

$$m a_i \vec{e}_i = F_i \vec{e}_i \qquad (9)$$

Jasno je da je jednadžba (9) vektorska i da se može razložiti u tri skalarne jednadžbe, kao što je dano izrazima (5). Ispuštanjem baznih vektora[1] iz lijeve i desne strane jednadžbe (9), dolazi se do indeksnog zapisa, koji glasi:

$$m a_i = F_i \qquad (10)$$

Sadržaj jednadžbe (10) istovjetan je sadržaju jednadžbi (5), s tim da su sve tri skalarne jednadžbe zapisane u istom obliku, a uzimanjem i=1 ili i=2 ili i=3, dolazi se do triju skalarni jednadžbi, tj. raspisani oblik jednadžbe (10) glasi:

$$\begin{aligned} m a_1 &= F_1 \\ m a_2 &= F_2 \\ m a_3 &= F_3 \end{aligned} \qquad (11)$$

Indeks i u jednadžbi (10) se naziva slobodnim indeksom. Za svaku od triju vrijednosti slobodnog indeksa dobije se po jedna skalarna jednadžba, kao u izrazu (11). Iako je sličnost jednadžbe (10) i jednadžbe (1) očita, ipak je njihov sadržaj bitno različit, jer jednadžba (1) uspostavlja vezu među vektorima, dok jednadžba (10) uspostavlja vezu među komponentama tih vektora. Vidljivo je da je prijelaz iz jednog u drugi zapis vrlo jednostavan. S obzirom da je uz zadanu bazu vektorskog prostora, svaki vektor jednoznačno zadan svojim komponentama uobičajeno je pisati $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, što bi u indeksnom zapisu jednostavno glasilo $\vec{a} = a_i$, gdje znak jednakosti treba shvatiti kao činjenicu da je vektor definiran svojim komponentama. Zamjenom vektora sa svojim komponentama u jednadžbi (1) direktno slijedi jednadžba (10). Iz rečenog slijedi da su veličine s jednim slobodnim indeksom vektori (tenzori prvog reda). Skalari su tenzori nultog reda i nemaju niti jedan slobodni indeks. Za očekivati je da će tenzori drugog reda imati dva slobodna indeksa, tenzori trećeg reda tri i tako dalje. Dakle vrijedi pravilo: **Broj slobodnih indeksa definira red tenzora. Veličine s jednim slobodnim indeksom su vektori, a veličine bez indeksa su skalari.** U jednadžbi (10) je slobodni indeks lijeve i desne strane jednadžbe jedan te isti, jer su jedino pod tim uvjetom bazni vektori u jednadžbi (9) mogli biti ispušteni, što je dovelo do jednadžbe (10). Dakle vrijedi pravilo: **Slobodni indeksi moraju biti isti u svim članovima jednadžbe.**
U nastavku ovog poglavlja dat će se indeksni zapis osnovnih operacija s vektorima: zbrajanje i oduzimanje vektora, množenje vektora skalarom, skalarni produkt vektora, vektorski produkt vektora, te složeni produkt vektora, koji se standardno uče u matematici, a definirat će se i tenzorski produkt vektora.

---

[1] Bazni vektori se smiju ispustiti samo ako su označeni istim indeksom

1.2 INDEKSNI ZAPIS OSNOVNIH OPERACIJA S VEKTORIMA

1.2.1 Zbrajanje vektora

Zbroj dvaju vektora je vektor. Ako je zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak vektoru $\vec{c}$, to bi u apstraktnom zapisu glasilo:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Prikazom vektora s pomoću njihovih komponenti, gornji izraz prelazi u:

$$c_i\vec{e}_i = a_i\vec{e}_i + b_i\vec{e}_i$$

S obzorom da je bazni vektor u svim članovima označen istim indeksom, bazni vektori se mogu ispustiti, te slijedi indeksni zapis pravila za zbrajanje vektora:

$$c_i = a_i + b_i \tag{12}$$

U gornjoj jednadžbi indeks *i* je slobodni indeks, što znači da je to vektorska jednadžba, koja se može raspisati u tri skalarne jednadžbe:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + b_1 \\ c_2 &= a_2 + b_2 \\ c_3 &= a_3 + b_3 \end{aligned} \tag{13}$$

Izraz (12), dakle, izražava poznato pravilo za analitičko zbrajanje vektora, po kojemu se vektori zbrajaju tako da im se zbroje pripadajuće komponente.

1.2.2 Množenje vektora skalarom

Umnožak skalara i vektora je vektor. Ako je vektor $\vec{c}$ jednak umnošku skalara λ s vektorom $\vec{a}$ tada se može pisati:

$$\vec{c} = \lambda\,\vec{a} \qquad \text{ili} \qquad c_i\vec{e}_i = \lambda\,a_i\vec{e}_i$$

Ispuštanjem baznih vektora iz gornje, desne jednadžbe, slijedi indeksni zapis pravila za množenje vektora sa skalarom, koji glasi:

$$c_i = \lambda\,a_i \tag{14}$$

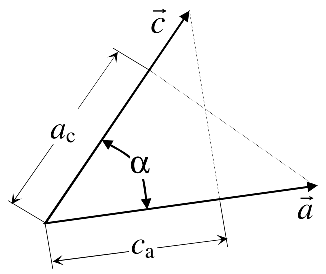
U jednadžbi (14) slobodni indeks i označuje vektorski karakter jednadžbe, što znači da se ona može razložiti na tri skalarne jednadžbe, analogno s (13)

$$\begin{aligned} c_1 &= \lambda\,a_1 \\ c_2 &= \lambda\,a_2 \\ c_3 &= \lambda\,a_3 \end{aligned}$$

Izraz (14) iskazuje poznato pravilo koje kaže da se vektor množi skalarom tako da mu se skalarom pomnoži svaka komponenta.

1.2.3 Skalarni produkt dvaju vektora

Skalarni ili unutarnji produkt dvaju vektora je skalar koji je po veličini jednak umnošku intenziteta obaju vektora i kosinusa kuta među njima. Skalarni produkt označuje se točkicom. Slika 3. prikazuje vektore $\vec{a}$ i $\vec{c}$, koji međusobno čine kut α. Ako se sa λ označi njihov skalarni produkt, može se pisati:



Slika 3. Skalarni produkt dvaju vektora

$$\lambda = \vec{a} \cdot \vec{c} = ac\cos\alpha = ac_{\mathrm{a}} = a_{\mathrm{c}}c$$

U gornjem su izrazu a i c intenziteti vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$, a c_{a} i a_{c} projekcije vektora $\vec{c}$ na vektor $\vec{a}$, odnosno projekcije vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{c}$. Skalarni produkt dvaju vektora jednak je umnošku prvog vektora s projekcijom drugog vektora na smjer prvog, ili obrnuto. Iz gornjeg izraza je jasno da je skalarni produkt dvaju ortova jednak kosinusu kuta između njih, te da je skalarni produkt okomitih vektora jednak nuli. Skalarni produkt vektora samog sa sobom daje kvadrat njegova intenziteta.

Skalarni produkt okomitih baznih vektora će biti jednak nuli, a skalarni produkti baznih vektora samih sa sobom će biti jednaki jedinici. Sve kombinacije skalarnih umnožaka baznih vektora mogu se prikazati sljedećim izrazom:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases} \tag{15}$$

U gornjem izrazu indeks i, kao i indeks j, može poprimiti vrijednosti 1, 2 ili 3, te se zaključuje da postoji devet mogućih kombinacija skalarnih umnožaka. Rezultati tih umnožaka mogu se dakle, svrstati u tablicu dimenzije 3 puta 3, u kojoj indeks i označuje broj retka, a indeks j broj stupca. Za tu se tablicu uvodi Kroneckerov delta simbol δ_{ij}, koji poprima vrijednosti kao što je definirano u izrazu (15).

Prikazom vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$ s pomoću kartezijskih komponenti njihov skalarni produkt poprima oblik:

$$\lambda = a_i\vec{e}_i \cdot c_j\vec{e}_j = a_i c_j\left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right) = a_i c_j \delta_{ij}$$

U gornjem izrazu se u prikazima vektora nije mogao za oba vektora koristiti isti indeks, jer bi se on pojavljivao četiri puta, što bi bilo suprotno prije rečenom pravilu, da se ponovljeni indeks smije u jednom članu pojavljivati najviše dva puta. Komponente vektora a_i i c_j su skalari te se mogu stavljati na bilo koje mjesto unutar produkta, a skalarni produkt baznih vektora se može zamijeniti Kroneckerovim deltom, prema izrazu (15). Gornji izraz bi se mogao razviti po nijemim indeksima i i j. Razvojem po jednom indeksu dobiju se tri pribrojnika, a razvojem po drugom indeksu od svakog tog pribrojnika dobiju se po tri nova pribrojnika, tako da bi ukupno bilo devet pribrojnika. Od tih devet pribrojnika samo bi tri bila različita od nule i to ona kod kojih je $i=j$ jer je samo tada Kroneckerov delta različit od nule i jednak jedinici. Prema tome od umnoška $a_i c_j \delta_{ij}$ ostaje samo $a_i c_i$ ili $a_j c_j$, te se gornji izraz može napisati kraće:

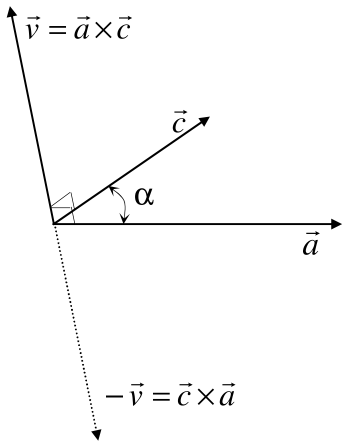
$$\lambda = a_i c_i = a_j c_j = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \tag{16}$$

Izraz (16) označuje skalarnu jednadžbu u kojoj se pojavljuju nijemi indeksi, na koje se primjenjuje dogovor o sumiranju. Razvojem po nijemim indeksima slijedi poznato pravilo za skalarni produkt dvaju vektora kada su oni zadani komponentama.

Iz ovog primjera se može izvesti pravilo množenja s Kroneckerovim deltom: **Ako se u nekom članu pojavljuje Kroneckerov delta δ_{ij} pri čemu je indeks *i* nijemi, on se zamjenjuje s indeksom *j*, a Kroneckerov delta isčezava** (npr. $a_i \delta_{ij} = a_j$). **Ako je indeks *j* nijemi, on se zamijenjuje s *i*, a Kroneckerov delta isčezava** (npr. $c_j \delta_{ij} = c_i$). U prethodnom primjeru, u izrazu $a_i c_j \delta_{ij}$ su oba indeksa bila nijema, te se moglo birati kojeg će se zamijeniti.

1.2.4 Vektorski produkt dvaju vektora

Vektorski ili vanjski produkt dvaju vektora je vektor, koji je okomit na oba vektora koja čine produkt, a po veličini je jednak umnošku intenziteta tih vektora i sinusa kuta među vektorima.



Slika 4. Vektorski produkt dvaju vektora

Orijentacija vektora koji je rezultat vektorskog produkta dvaju vektora određuje se pravilom desne ruke. Ako se prstima desne ruke ide od prvog vektora u produktu prema drugom vektoru, palac će pokazivati orijentaciju vektorskog produkta. Vektorski produkt vektora označuje se znakom "×". Slika 4. prikazuje vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$. Vektorski produkt je označen s $\vec{v}$. Vektor $\vec{v}$ je okomit i na vektor $\vec{a}$ i na vektor $\vec{c}$, a orijentacija mu je određena pravilom desne ruke. Jasno je da ako se vektorima u vektorskom produktu zamijene mjesta da će prema pravilu desne ruke i vektorski produkt promijeniti predznak, kao što je naznačeno na slici 4.

Intenzitet vektora $\vec{v}$ je prema rečenom pravilu:

$$v = ac \sin \alpha$$

Iz gornjeg izraza je jasno da će vektorski produkt dvaju kolinearnih vektora biti jednak nuli (vektorski produkt vektora samog sa sobom je također jednak nuli), a da će intenzitet vektorskog produkta okomitih vektora biti jednak umnošku njihovih intenziteta. Vektorski produkt dvaju ortova jednak je sinusu kuta među njima. Geometrijski gledano intenzitet vektorskog produkta ima značenje površine paralelograma čije su stranice vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$.

Vektorskim množenjem dvaju baznih vektora dolazi se do onog trećeg (s predznakom plus ili minus, zavisno od redoslijeda vektora u produktu), pri čemu za desni[2] kartezijski sustav vrijedi sljedećih šest relacija:

[2] U lijevo orijentiranom koordinatnom sustavu predznaci bi bili suprotni.

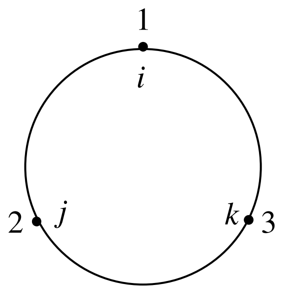
$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \qquad \text{ili} \qquad -\vec{e}_1 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_2$$
$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \qquad \text{ili} \qquad -\vec{e}_2 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_3$$
$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \qquad \text{ili} \qquad -\vec{e}_3 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_1$$

Gledajući indekse u gornjim izrazima, očito je da se u svakom od šest izraza, pojavljuju sva tri indeksa, pri čemu je veza među vektorima pozitivna ako ti indeksi čine nizove 123, 231 i 312, a negativna za nizove 132, 213 i 321. Uvođenjem permutacijskog simbola[3] ε_{ijk} koji može poprimiti vrijednost 1, 0 ili –1, prema slijedećoj definiciji:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{za } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{za } ijk = 132, 213, 321 \\ 0 & \text{za dva (tri) jednaka indeksa} \end{cases} \tag{17}$$

svih šest prethodnih izraza se mogu napisati jednim izrazom, koji glasi:

$$\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i = \vec{e}_j \times \vec{e}_k \tag{18}$$



Slika 5.

Držeći se definicije (17) lako je provjeriti da izraz (18) opisuje sve slučajeve vektorskih umnožaka baznih vektora. Definiciju permutacijskog simbola lako je zapamtiti preko sheme dane na slici 5. Ako se na kružnici u pozitivnom smjeru (u obrnutom smjeru kazaljke na satu) označe indeksi 1, 2 i 3, taj će permutacijski simbol imati vrijednost +1 ako se, počevši od bilo kojeg indeksa, oni uzimaju u pozitivnom smjeru. To su upravo tri niza dana u izrazu (17). Ako se indeksi uzimaju u negativnom smjeru (u smjeru kazaljke na satu) permutacijski simbol će poprimiti vrijednost –1, kao što stoji u izrazu (17). Slika 5. može pomoći i za memoriranje svojstava permutacijskog simbola. Naime ako se indeksi *i*, *j* i *k* uzimaju u pozitivnom smjeru (počevši od bilo kojeg od njih) vrijednost permutacijskog simbola se neće mijenjati, tj. vrijedi:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \tag{19}$$

Ako bilo koja dva susjedna indeksa zamijene mjesto, rezultat je isti kao da se smjer uzimanja indeksa promijenio, te permutacijski simbol mijenja predznak, tj. vrijedi:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} \quad \text{i} \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} \tag{20}$$

Ako se vektori u vektorskom produktu $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{c}$ prikažu s pomoću komponenti, slijedi:

$$v_i\vec{e}_i = a_j\vec{e}_j \times c_k\vec{e}_k = a_j c_k \left(\vec{e}_j \times \vec{e}_k\right) = a_j c_k \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i$$

---

[3] Permutacijski simbol se još naziva Levi-Civita simbolom.

U gornjem je izrazu za vektorski produkt baznih vektora iskorišten izraz (18). S obzirom da su na obje strane gornjeg izraza bazni vektori označeni istim indeksom, oni se mogu ispustiti, te se dobiva indeksni zapis vektorskog produkta dvaju vektora, koji glasi[4]:

$$v_i = \varepsilon_{ijk} a_j c_k \tag{21}$$

Izraz (21) najlakše je zapamtiti ako se drži pravila, da se u permutacijskom simbolu na prvom mjestu nalazi slobodni indeks. Tada će se drugi indeks permutacijskog simbola odnositi na prvi vektor u vektorskom produktu, a treći indeks će se odnositi na drugi vektor u vektorskom produktu. Treba naglasiti da se u indeksnom zapisu barata s komponentama vektora, kao skalarnim veličinama, te za njihov produkt vrijedi zakon komutacije, koji ne vrijedi za vektorski produkt dvaju vektora. Tako bi se primjenom izraza (19), te primjenom zakona komutacije i prava promjene imena nijemim indeksima, indeksni zapis vektorskog produkta (21) mogao napisati i u sljedećim oblicima:

$$v_i = \varepsilon_{kij} a_j c_k = \varepsilon_{kij} c_k a_j = a_m \varepsilon_{kim} c_k$$

Za tumačenje indeksnog zapisa vektorskog produkta uvijek će biti najbolje slobodni indeks (u ovom slučaju je to indeks *i*) dovesti na prvo mjesto u permutacijskom simbolu, a tada će se, kao što je prije rečeno, drugi indeks odnositi na prvi vektor u vektorskom produktu. Ako se u izrazu (21) zamijene mjesta indeksima *j* i *k*, on će prema (20), promijeniti predznak, te se može pisati:

$$v_i = -\varepsilon_{ikj} c_k a_j \tag{22}$$

S obzirom da je na prvom mjestu permutacijskog simbola slobodni indeks *i*, indeks *k*, koji se nalazi na drugom mjestu, ukazuje da je vektor $\vec{c}$ čije su komponente označene indeksom *k*, prvi u vektorskom produktu, te izraz (22) označuje vektorski produkt $\vec{c} \times \vec{a}$, koji je upravo suprotnog predznaka od produkta $\vec{a} \times \vec{c}$, koji je opisan izrazom (21).

---

[4] Navedeni izraz vrijedi za desni kartezijski koordinatni sustav, a u lijevom koordinatnom sustavu na desnoj strani izraza (21) bi trebao stajati negativni predznak, jer komponente permutacijskog simbola u lijevom koordinatnom sustavu mijenjaju predznak. Postoji praksa da se izraz (21) primjenjuje i za određivanje komponenti vektorskog produkta u lijevom koordinatnom sustavu (bez negativnog predznaka), što bi odgovaralo primjeni pravila lijeve ruke za određivanje smjera vektorskog produkta. Jasno je da je smjer vektorskog produkta određen po pravilu lijeve ruke, po definiciji suprotan predznaku smjeru vektorskog produkta definiranog pravilom desne ruke, što znači da bi vektorski produkt dvaju vektora gledano iz desnog koordinatnog sustava imao suprotan predznak od vektorskog produkta gledano iz lijevog koordinatnog sustava. Naravno, do promjene predznaka je došlo zbog ispuštanja minusa u desnoj strani izraza (21) za slučaj lijevog koordinatnog sustava. Takvi vektori kojima se mijenja predznak pri prijelazu iz desnog u lijevi koordinatni sustav se nazivaju aksijalnim ili pseudovektorima, za razliku od pravih ili polarnih vektora kojima se pri prijelazu iz lijevog u desni koordinatni sustav sadržaj ne mijenja. Aksijalni vektor se pretvara u pravi tako da mu se komponente u lijevom koordinatnom sustavu pomnože s minus jedan. Jasno je da će vektorski produkt pravog i aksijalnog vektora biti pravi vektor, jer će se utjecaj ispuštenog minusa koji je doveo do aksijalnog vektora i ispuštenog minusa u permutacijskom simbolu koji označuje vektorski produkt poništiti. Isto tako bi vektorski produkt dvaju aksijalnih vektora bio aksijalni vektor (jer postoje tri ispuštena minusa, u svakom pseudovektoru po jedan i jedan u permutacijskom simbolu).

1.2.5 Složeni produkt vektora

Vektorski produkt dvaju vektora je vektor kojeg možemo također skalarno ili vektorski množiti s drugim vektorima tako da se dobivaju vektorsko-vektorski ili vektorsko-skalarni produkti vektora. Skalarno-vektorski produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je skalar[5] $\lambda = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, jer je vektorski produkt u zagradi također vektor. Geometrijski gledano skalarno-vektorski produkt je volumen paralelopipeda kojemu su bridovi vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Vektorski produkt vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$, po intenzitetu odgovara površini baze paralelopipeda, a skalarni produkt odgovara projekciji trećeg brida na smjer okomice na tu bazu, odnosno umnošku visine paralelopipeda i rečene površine baze. Ovaj produkt se može prikazati preko determinante trećeg reda u kojoj su redci komponente vektora koji čine produkt i to u redoslijedu u kojem se pojavljuju u produktu, kako slijedi:

$$\lambda = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 \qquad (23)$$

Pri indeksnom zapisu ovog skalarno-vektorskog produkta jedino treba obratiti pažnju da indeks vektora $\vec{a}$ odgovara slobodnom indeksu vektorskog produkta u zagradi, tako da vrijedi:

$$\lambda = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \qquad (24)$$

Jasno je da se u indeksnom zapisu barata s komponentama vektora i da redoslijed faktora nije bitan, kao kod simboličkog zapisa. Razvojem izraza (24) po nijemim indeksima dolazi se do istog rezultata kao u izrazu (23). Izraz (24) opisuje dakle, razvoj determinante trećeg reda. Koristeći svojstvo (19) permutacijskog simbola, što odgovara parnim permutacijama redaka determinante, kod kojih vrijednost determinante ostaje ista, te vrijedi:

$$\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \varepsilon_{kij} c_k a_i b_j = \varepsilon_{jki} b_j c_k a_i \quad \text{ili} \quad \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \qquad (25)$$

Primjenom svojstva (20) permutacijskog simbola, koje odgovara neparnim permutacijama redaka determinante, vrijednost determinante mijenja predznak, jer vektorski produkt mijenja predznak kada faktori zamijene mjesta, npr.:

$$\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = -\varepsilon_{ikj} a_i b_k c_j \quad \text{ili} \quad \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = -\vec{a} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{b}\right)$$

Složeni skalarno-vektorski produkt baznih vektora jednak je $\vec{e}_i \cdot \left(\vec{e}_j \times \vec{e}_k\right)$, a primjenom izraza (18) i (15) slijedi:

$$\vec{e}_i \cdot \left(\vec{e}_j \times \vec{e}_k\right) = \vec{e}_i \cdot \varepsilon_{mjk} \vec{e}_m = \varepsilon_{mjk} \delta_{im} = \varepsilon_{ijk} \qquad (26)$$

---

[5] Ako bi se vektorski produkt u lijevom koordinatnom sustavu računao prema pravilu lijeve ruke (izraz (21), bez promjene predznaka permutacijskog simbola), tada bi rezultat mješovitog produkta imao različit predznak u lijevom i desnom koordinatnom sustavu, te bi se λ nazivao pseudoskalarom.

Jasno je da jedinični, međusobno okomiti bazni vektori razapinju paralelopiped jediničnog volumena, a predznak njihova skalarno-vektorskog produkta zavisi od njihova redoslijeda. Ako se u produktu pojavljuje dva puta isti vektor, oni više ne razapinju volumen, te je produkt jednak nuli.
Primjenom osnovnih pravila indeksnog zapisa lako se zapisuje bilo koji složeni produkt vektora. Pri zapisu složenog produkta $\vec{f} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$ treba se prvo odlučiti za indekse pojedinih vektora. Jasno je da su izrazi u zagradama vektori, koji će imati jedan slobodan indeks. Neka je *i* indeks vektora $\vec{f}$, tada će i prvi indeks permutacijskog simbola koji označuje vektorski produkt među zagradama imati indeks *i*, a neka vektorski produkt prve zagrade ima indeks *j*, a druge *k*. Za indekse vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se više ne smiju uzimati iskorištena slova *i*,*j* i *k*, pa se uzima npr. *l* i *m*, dok se za indekse vektora $\vec{c}$ i $\vec{d}$ izabiru indeksi *p* i *r*. Temeljem rečenoga indeksni zapis navedenog složenog produkta bi glasio:

$$f_i = \varepsilon_{ijk} \left(\varepsilon_{jlm} a_l b_m \right) \left(\varepsilon_{kpr} c_p d_r \right)$$

Naravno da zagrade u gornjem izrazu nisu nužne, a redoslijed faktora je potpuno proizvoljan.

1.2.6 Relacije između permutacijskog i Kroneckerovog simbola

Često se u izrazima pojavljuje umnožak permutacijskih simbola (kao u prethodnom izrazu) koji se može zamijeniti umnoškom Kroneckerovih simbola, a s obzirom na jednostavnost pravila množenja s Kroneckerovim simbolom, to obično vodi kraćem zapisu takvih izraza. Zato je nužno istražiti vezu među ta dva simbola.
Ako se s det(*A*) označi determinanta trećeg reda:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

tada se poznata činjenica da se zamjenom redaka determinanti ne mijenja vrijednost, već samo predznak ovisno da li je permutacija redaka parna ili neparna, može izraziti s pomoću permutacijskog simbola u obliku:

$$\varepsilon_{ijk} \det(A) = \begin{vmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} \\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3} \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{vmatrix}$$

Isto pravilo vrijedi i za stupce što se također može izraziti s pomoću permutacijskog simbola kao:

$$\varepsilon_{lmn} \det(A) = \begin{vmatrix} A_{1l} & A_{1m} & A_{1n} \\ A_{2l} & A_{2m} & A_{2n} \\ A_{3l} & A_{3m} & A_{3n} \end{vmatrix}$$

Permutacija redaka i stupaca je definirana sljedećim izrazom:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\det(A) = \begin{vmatrix} A_{il} & A_{im} & A_{in} \\ A_{jl} & A_{jm} & A_{jn} \\ A_{kl} & A_{km} & A_{kn} \end{vmatrix}$$

Ako se za A_{ij} uzme δ_{ij} što znači da je det(A)=1, slijedi izraz za relaciju između umnoška permutacijskih simbola prikazanih s pomoću Kroneckerovih simbola, koja glasi:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

Razvojem gornje determinante po prvom retku slijedi:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\right) + \delta_{im}\left(\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{jl}\delta_{kn}\right) + \delta_{in}\left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) \tag{27}$$

Izjednačavanjem indeksa n=k u izrazu (27) dobije se:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{28}$$

Izjednačavanjem indeksa m=j u izrazu (28) dobije se:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \tag{29}$$

Izjednačavanjem indeksa l=i u izrazu (29) slijedi:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \tag{30}$$

Najčešću primjenu ima izraz (28) za umnožak dvaju permutacijskih simbola s jednim nijemim indeksom.

1.2.7 Tenzorski produkt dvaju vektora

Tenzorski produkt dvaju vektora je tenzor drugog reda. Ako među vektorima nema oznake niti za skalarni niti za vektorski produkt, podrazumijeva se tenzorski produkt[6]. Ako je tenzor **T** rezultat množenja vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$, može se pisati:

$$\mathbf{T} = \vec{a}\vec{c}$$

Tenzori se kao i vektori prikazuju s pomoću komponenti. Prikazom vektora u gornjem izrazu s pomoću komponenti slijedi:

$$\mathbf{T} = a_i\vec{e}_i c_j\vec{e}_j = a_i c_j \vec{e}_i\vec{e}_j = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j \tag{31}$$

Iz gornjeg je izraza očito da tenzorski umnožak baznih ortova $\vec{e}_i\vec{e}_j$ čini bazu za tenzore drugog reda (bazu tenzorskog prostora), s pomoću koje se može prikazati bilo koji tenzor drugog reda.

---

[6] Poneki autori tenzorski produkt označavaju posebnim simbolom, npr. ⊗.

Ta bi se baza mogla prikazati tablicom u kojoj indeks i označuje broj retka, a indeks j broj stupca:

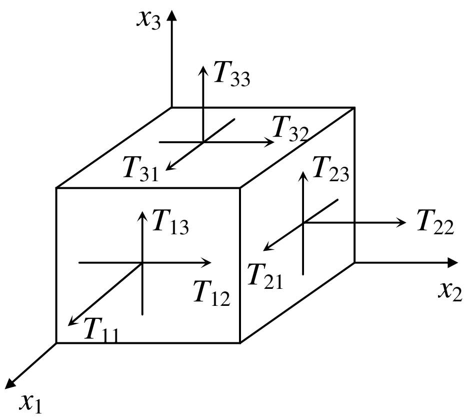
$$\vec{e}_i\vec{e}_j = \begin{pmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_1 & \vec{e}_1\vec{e}_2 & \vec{e}_1\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\vec{e}_1 & \vec{e}_2\vec{e}_2 & \vec{e}_2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\vec{e}_1 & \vec{e}_3\vec{e}_2 & \vec{e}_3\vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

Iz izraza (31) se mogu očitati i komponente tenzorskog umnoška dvaju vektora, za koje vrijedi:

$$T_{ij} = a_i c_j = \begin{pmatrix} a_1c_1 & a_1c_2 & a_1c_3 \\ a_2c_1 & a_2c_2 & a_2c_3 \\ a_3c_1 & a_3c_2 & a_3c_3 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Tenzor drugog reda ima dva slobodna indeksa i 3^2=9 komponenti. Dijagonala koja se proteže od lijevog gornjeg do desnog donjeg člana u gornjoj tablici se naziva glavnom dijagonalom tenzora. Zbroj komponenti glavne dijagonale tenzora u izrazu (32) očito je jednak skalarnom produktu vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$, koji je definiran izrazom (16). Dakle od tenzorskog produkta dvaju vektora dolazi se do njihova skalarnog produkta jednostavnim izjednačavanjem indeksa i=j. Ta se operacija naziva kontrakcijom indeksa, a njome se red tenzora smanjuje za dva, tako da tenzor drugog reda prelazi u skalar. Kontrakcijom indeksa u izrazu (32) i primjenom pravila o nijemim indeksima slijedi:

$$T_{ii} = a_i c_i = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = \lambda$$



Slika 6. Komponente tenzora naprezanja

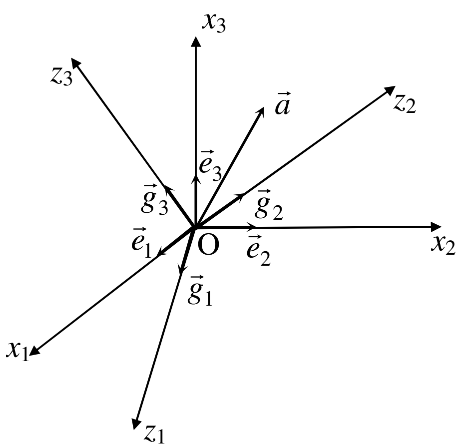
Tipični tenzor drugog reda koji se pojavljuje u mehanici kontinuuma je tenzor naprezanja. U tenzoru naprezanja komponente na glavnoj dijagonali označavaju normalna naprezanja, a komponente izvan glavne dijagonale tangencijalna naprezanja. Slika 6. ilustrira sadržaj komponenti tenzora naprezanja na primjeru elementarnog paralelopipeda dimenzija dx_1, dx_2 i dx_3. Na tom su paralelopipedu tri karakteristične površine, čiji vektori vanjske normale (vektori okomiti na površinu i gledaju od paralelopipeda) gledaju u pozitivnim smjerovima osi. Na svakoj toj površini djeluje vektor naprezanja koji se može razložiti u tri komponente, jednu okomitu (normalnu) na površinu i dvije tangencijalne. Tako komponente vektora naprezanja na površini čija normala gleda u smjeru osi x_1, uvijek nose prvi indeks 1, a drugi indeks odgovara osi u čijem smjeru komponenta gleda. Tako T_{11} označuje komponentu vektora naprezanja na površini orijentiranoj normalom u smjeru osi x_1, koja gleda u smjeru osi x_1 i ta je komponenta okomita na površinu. Isto tako su komponente T_{22} i T_{33} okomite na pripadajuće površine. Komponenta T_{23} označuje komponentu vektora naprezanja na površini orijentiranoj normalom u smjeru osi x_2, koja djeluje u smjeru osi x_3. Svih devet komponenti označenih triju vektora naprezanja se mogu označiti s T_{ij}, gdje i označuje površinu na kojoj djeluje vektor naprezanja, a j smjer u kojem komponenta vektora naprezanja djeluje. Tenzor naprezanja se može prikazati i s pomoću tablice:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

U gornjoj tablici svaki redak označuje tri komponente vektora naprezanja, pri čemu članovi na glavnoj dijagonali označuju normalna naprezanja, a ostali tangencijalna.

1.3 OSNOVNE OPERACIJE S TENZORIMA

1.3.1 Komponente tenzora u zarotiranom koordinatnom sustavu



Slika 7. Zarotirani koordinatni sustav $Oz_1z_2z_3$

Sadržaj fizikalnih veličina opisanih vektorima i tenzorima ne smije zavisiti od izbora koordinatnog sustava. Promjenom koordinatnog sustava promijenit će se komponente vektora i tenzora, ali će sadržaj vektora i tenzora ostati isti. Slika 7. prikazuje koordinatni sustav $Ox_1x_2x_3$ i u odnosu na njega, zarotirani sustav $Oz_1z_2z_3$, kojemu su ortovi u smjeru osi označeni slovom g. Tako će prikazani vektor $\vec{a}$ biti isti u oba koordinatna sustava. Neka su komponente vektora $\vec{a}$ u odnosu na koordinatni sustav $Ox_1x_2x_3$, označene sa a_i, a neka su $\bar{a}_j$ komponente tog vektora u koordinatnom sustavu $Oz_1z_2z_3$. Sadržaj vektora $\vec{a}$ izražen komponentama u jednom i drugom koordinatnom sustavu je:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i = \bar{a}_j \vec{g}_j \tag{33}$$

Kao što je prije rečeno sve kombinacije skalarnog produkta međusobno okomitih baznih vektora daju Kroneckerov delta simbol, tj. u oba koordinatna sustava vrijedi:

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j &= \delta_{ij} \\ \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{34}$$

Skalarni produkt i-tog baznog vektora $\vec{e}_i$ iz koordinatnog sustava $Ox_1x_2x_3$ s j-tim baznim vektorom $\vec{g}_j$ koordinatnog sustava $Oz_1z_2z_3$ je po veličini jednak kosinusu kuta što ga ti ortovi zatvaraju, odnosno kosinusu kuta između pripadajućih koordinatnih osi, te se može pisati:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{g}_j = \cos\left(\vec{e}_i, \vec{g}_j\right) = \cos\left(x_i, z_j\right) = C_{ij} = \begin{pmatrix} \cos(x_1, z_1) & \cos(x_1, z_2) & \cos(x_1, z_3) \\ \cos(x_2, z_1) & \cos(x_2, z_2) & \cos(x_2, z_3) \\ \cos(x_3, z_1) & \cos(x_3, z_2) & \cos(x_3, z_3) \end{pmatrix} \tag{35}$$

Uvest će se dogovor da se u gornjoj tablici prvi indeks uvijek odnosi na koordinatni sustav O$x_1x_2x_3$, a drugi na koordinatni sustav O$z_1z_2z_3$. Iz tablice je očito da prvi redak predstavlja komponente vektora $\vec{e}_1$ u odnosu na koordinatni sustav O$z_1z_2z_3$, drugi redak komponente vektora $\vec{e}_2$, a treći redak komponente vektora $\vec{e}_3$. Isto tako prvi stupac tablice u izrazu (35) označuje komponente orta $\vec{g}_1$ u odnosu na koordinatni sustav O$x_1x_2x_3$, drugi stupac sadrži komponente vektora $\vec{g}_2$, a treći vektora $\vec{g}_3$.
Prema tome među baznim vektorima dvaju koordinatnih sustava vrijede relacije:

$$\vec{g}_j = C_{ij}\vec{e}_i \tag{36}$$

$$\vec{e}_i = C_{ij}\vec{g}_j \tag{37}$$

Uvrštavanjem izraza (36) u izraz (33), te nakon ispuštanja baznih vektora, slijedi prikaz komponenti vektora $\vec{a}$ u koordinatnom sustavu O$x_1x_2x_3$ s pomoću njegovih komponenti iz koordinatnog sustava O$z_1z_2z_3$, koji glasi:

$$a_i = C_{ij}\overline{a}_j \tag{38}$$

Analogno se dolazi i do inverzne relacije, uvrštavanjem izraza (37) u izraz (33):

$$\overline{a}_j = C_{ij}a_i \tag{39}$$

Sadržaj tenzora **T** se može prikazati s pomoću komponenti T_{ij} u odnosu na koordinatni sustav O$x_1x_2x_3$ ili s pomoću komponenti $\overline{T}_{kl}$ u odnosu na koordinatni sustav O$z_1z_2z_3$:

$$\mathbf{T} = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = \overline{T}_{kl}\vec{g}_k\vec{g}_l \tag{40}$$

Primjenom izraza (36) i (37) slijede relacije među tenzorskim bazama dvaju koordinatnih sustava:

$$\vec{g}_k\vec{g}_l = C_{ik}C_{jl}\vec{e}_i\vec{e}_j \tag{41}$$

$$\vec{e}_i\vec{e}_j = C_{ik}C_{jl}\vec{g}_k\vec{g}_l \tag{42}$$

Uvrštavanjem izraza (41) u izraz (40) slijedi:

$$T_{ij} = C_{ik}C_{jl}\overline{T}_{kl} \tag{43}$$

Uvrštavanjem izraza (42) u izraz (40) daje:

$$\overline{T}_{kl} = C_{ik}C_{jl}T_{ij} \tag{44}$$

Izrazi (43) i (44) izražavaju vezu među komponentama tenzora u dva međusobno zarotirana koordinatna sustava, a dobiveni su uz pretpostavku da je sadržaj tenzora isti u ta dva koordinatna sustava, pa oni mogu poslužiti za definiciju tenzora, koja glasi: **Sve veličine zadane s devet skalarnih komponenti koje se pri rotaciji koordinatnog sustava mijenjaju prema izrazima (43) i (44) su tenzori drugog reda**.
Tako se može pokazati da Kroneckerov delta koji je uveden kao simbol, također označuje komponente tenzora drugog reda. Polazeći od izraza (34) i primjenom izraza (37) proizlazi:

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = C_{ik} C_{jl} \vec{g}_k \cdot \vec{g}_l = C_{ik} C_{jl} \overline{\delta}_{kl}$$
$$\overline{\delta}_{kl} = \vec{g}_k \cdot \vec{g}_l = C_{ik} C_{jl} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = C_{ik} C_{jl} \delta_{ij} \qquad (45)$$

iz čega je jasno da se komponente δ_{ij} mijenjaju prema pravilima (43) i (44). Imajući na umu pravilo množenja s Kroneckerovim deltom, tenzor s komponentama δ_{ij} se naziva jediničnim tenzorom. Ako ga se označi s **I**, njegov bi se sadržaj mogao prikazati komponentama u jednom ili drugom koordinatnom sustavu kao:

$$\mathbf{I} = \delta_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = \overline{\delta}_{kl} \vec{g}_k \vec{g}_l$$

Ovaj tenzor ima svojstvo da su mu komponente jednake u oba koordinatna sustava što je osobina izotropnih tenzora. **Izotropni tenzor drugog reda ima svojstvo da mu se rotacijom koordinatnog sustava komponente ne mijenjaju, tj. vrijedi:**

$$T_{ij} = \overline{T}_{ij} \qquad (46)$$

Uzimajući u obzir da je množenje s Kroneckerovim deltom supstitucija iz izraza (45) slijedi:

$$\delta_{ij} = C_{ik} C_{jk}$$
$$\overline{\delta}_{kl} = C_{jk} C_{jl} \qquad (47)$$

Pravila (38), (39) te (43) i (44) za vezu među koordinatama vektora odnosno tenzora drugog reda u dva koordinatna sustava mogu se poopćiti i za tenzore višeg reda, te se može pisati:

$$T_{ijk...} = C_{il} C_{jm} C_{km} ... \overline{T}_{lmn...} \qquad (48)$$

$$\overline{T}_{lmn...} = C_{il} C_{jm} C_{km} ... T_{ijk...} \qquad (49)$$

Također se može pokazati da postoji tenzor trećeg reda kojemu su komponente jednake komponentama permutacijskog simbola. Polazeći od izraza (26), primjenom izraza (36) slijedi:

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot \left(\vec{e}_j \times \vec{e}_k \right) = C_{il} C_{jm} C_{kn} \vec{g}_l \cdot \left(\vec{g}_m \times \vec{g}_n \right) = C_{il} C_{jm} C_{kn} \overline{\varepsilon}_{lmn}$$

što je u skladu s (48). Ako su oba ($Ox_1x_2x_3$ i $Oz_1z_2z_3$) koordinatna sustava desna, onda su permutacijski simboli jednako definirani u oba koordinatna sustava, a ako je jedan lijevi a drugi desni permutacijski simboli će se razlikovati u predznaku, tako da permutacijski tenzor neće u općem slučaju biti izotropan.

1.3.2 Zbrajanje tenzora

Zbroj dva tenzora je tenzor. Zbrajati se mogu samo tenzori istog reda. Simbolički zapis zbroja dvaju tenzora je **A**=**B**+**C**. Prikaz ovog simboličkog zapisa s pomoću komponenti tenzora drugog reda glasi:

$$A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = B_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j + C_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

Ispuštanjem baze tenzora u gornjem izrazu slijedi pravilo za zbrajanje tenzora:

$$A_{ij} = B_{ij} + C_{ij} \tag{50}$$

po kojem se tenzori zbrajaju tako da im se zbroje pripadajuće komponente.

1.3.3 Množenje tenzora skalarom

Umnožak skalara λ i tenzora $\mathbf{B}$ je tenzor $\mathbf{A}$, ili $\mathbf{A}=\lambda\mathbf{B}$. Prikazom sadržaja tenzora drugog reda preko komponenti slijedi izraz: $A_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = \lambda B_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$. Ispuštanjem baze iz tog izraza slijedi pravilo za množenje tenzora skalarom:

$$A_{ij} = \lambda B_{ij} \tag{51}$$

prema kojem se tenzor množi skalarom tako da mu se skalarom pomnoži svaka komponenta.

1.3.4 Unutarnji produkt vektora i tenzora

Kao što je rečeno vektori, kao tenzori prvog reda, se mogu množiti skalarno, vektorski ili tenzorski, a rezultat množenja je skalar vektor ili tenzor. Također je pokazano da se od tenzorskog produkta vektora dolazi do njihova skalarnog produkta jednostavnom kontrakcijom (izjednačavanjem) indeksa u tenzorskom produktu. Kod tenzora višeg reda definiraju se samo unutarnji produkt i tenzorski produkt. Pri unutarnjem produktu red tenzora umnoška se smanjuje, a pri tenzorskom produktu se povećava. Tako je unutarnji produkt vektora i tenzora drugog reda vektor, produkt se označuje točkicom pa se može simbolički zapisati u obliku $\vec{a} = \vec{b} \cdot \mathbf{T}$. Prikazom sadržaja vektora i tenzora preko komponenti slijedi:

$$a_j\vec{e}_j = b_k\vec{e}_k \cdot T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = b_k T_{ij}\left(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i\right)\vec{e}_j = b_k T_{ij}\delta_{ki}\vec{e}_j = b_i T_{ij}\vec{e}_j$$

Ispuštanjem baznih vektora (što je dopušteno jer su označeni istim indeksom) iz gornje jednadžbe slijedi pravilo za unutarnji produkt vektora i tenzora drugog reda koje u indeksnom zapisu glasi:

$$a_j = \left(\vec{b} \cdot \mathbf{T}\right)_j = b_i T_{ij} \tag{52}$$

Na desnoj strani gornjeg izraza indeks i je nijemi, a j je slobodni. Da je tenzor bio množen vektorom s desne strane tj. $\vec{c} = \mathbf{T} \cdot \vec{b}$, vrijedilo bi:

$$c_i\vec{e}_i = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j \cdot b_k\vec{e}_k = T_{ij}b_k\vec{e}_i\left(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k\right) = b_k T_{ij}\delta_{jk}\vec{e}_i = b_j T_{ij}\vec{e}_i \quad \text{odnosno} \quad c_i = \left(\mathbf{T} \cdot \vec{b}\right)_i = b_j T_{ij}$$

U ovom bi slučaju drugi indeks tenzora bio nijemi, te se zaključuje da u općem slučaju za unutarnji produkt vektora i tenzora ne vrijedi zakon komutacije. Naravno da u indeksnom zapisu, gdje se barata s komponentama vektora i tenzora, uvijek vrijedi zakon komutacije, a iz nijemog indeksa tenzora se zaključuje da li je množenje tenzora vektorom s lijeve ili desne strane.

Tipičan primjer primjene skalarnog produkta u mehanici kontinuuma je određivanje vektora naprezanja na elementarnoj površini orijentiranoj vektorom jedinične normale $\vec{n}$. Kao što je prije spomenuto tenzor naprezanja definira stanje naprezanja u točki prostora, a svaki redak tog tenzora sadrži tri komponente vektora naprezanja na površinama orijentiranim vektorima normale u smjeru osi x_1, x_2 i x_3, kao što pokazuje slika 6. Vektor naprezanja na površini orijentiranoj vektorom jedinične normale $\vec{n}$ (označen sa $\vec{\sigma}$, odnosno u indeksnom zapisu sa σ_i) je definiran izrazom:

$$\vec{\sigma} = \vec{n} \cdot \mathbf{T} \qquad \text{odnosno u indeksnom zapisu} \qquad \sigma_i = n_j T_{ji} \tag{53}$$

Lako se pokaže da množenjem tenzora naprezanja jediničnim vektorom $\vec{e}_1$ slijede komponente vektora naprezanja na površini kojoj je normala vektor $\vec{e}_1$ (vidjeti sliku 6), a koje čine prvi redak tenzora naprezanja, tj.

$$\vec{e}_1 \cdot \mathbf{T} = T_{11}\vec{e}_1 + T_{12}\vec{e}_2 + T_{13}\vec{e}_3$$

Množenjem tenzora naprezanja vektorom $\vec{e}_1$ s desne strane slijedi izraz:

$$\mathbf{T} \cdot \vec{e}_1 = T_{11}\vec{e}_1 + T_{21}\vec{e}_2 + T_{31}\vec{e}_3$$

koji se očito razlikuje od njemu prethodnog izraza. Budući da je tenzor naprezanja simetričan, što podrazumijeva da je $T_{12}=T_{21}$ i $T_{13}=T_{31}$, slijedi da je pri određivanju vektora naprezanja svejedno s koje strane će se tenzor naprezanja množiti vektorom normale, jer za simetrične tenzore vrijedi zakon komutacije za unutarnji produkt vektora i tenzora drugog reda, kako će kasnije biti pokazano.

1.3.5 Dvostruki unutarnji produkt dvaju tenzora

Dvostruki unutarnji produkt dvaju tenzora drugog reda je skalar, a označuje se s dvije točkice. Simbolički zapis dvostrukog unutarnjeg produkta tenzora **A** i **B** glasi λ=**A:B**. Prikazom sadržaja tenzora drugog reda preko komponenti, ovaj produkt prelazi u oblik:

$$\lambda = A_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j : B_{km}\vec{e}_k\vec{e}_m = A_{ij}B_{km}\vec{e}_i\vec{e}_j : \vec{e}_k\vec{e}_m = A_{ij}B_{km}(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k)(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_m) = A_{ij}B_{km}\delta_{ik}\delta_{jm} = A_{ij}B_{ij} \tag{54}$$

Dvostruki unutarnji produkt dvaju tenzora drugog reda dobije se tako da se odgovarajuće komponente tenzora međusobno pomnože i zbroje. Iz definicije (54) je jasno da za ovaj produkt vrijedi zakon komutacije.

1.3.6 Tenzorski produkt tenzora

Analogno tenzorskom produktu vektora, pri tenzorskom množenju dvaju tenzora red tenzora umnoška jednak je zbroju redova tenzora u produktu. Tako bi tenzorski umnožak dvaju tenzora drugog reda bio tenzor četvrtog reda ili simbolički **C**=**AB**. Prikazom sadržaja tenzorskog produkta s pomoću komponenti slijedi izraz:

$$C_{ijkl}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k\vec{e}_l = A_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j B_{kl}\vec{e}_k\vec{e}_l = A_{ij}B_{kl}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k\vec{e}_l$$

Ispuštanjem baznih vektora slijedi indeksni zapis tenzorskog produkta dvaju tenzora drugog reda, koji glasi:

$$C_{ijkl} = A_{ij} B_{kl} \tag{55}$$

Dvostrukom kontrakcijom indeksa ($i=k$ i $j=l$) dolazi se do dvostrukog unutarnjeg produkta, pri čemu tenzor C_{ijkl} prelazi u skalar $C_{ijij}=\lambda$.

1.3.7 Transponirani tenzor

Transponirani tenzor drugog reda dobije se tako da se indeksima zamijene mjesta. Ako je tenzor $\mathbf{A}$ definiran kao $\mathbf{A} = A_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$, tada je njemu transponirani tenzor $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = A_{ji}\vec{e}_i\vec{e}_j$, što ima isti učinak kao da su komponente ostale iste, a da su bazni vektori zamijenili mjesta. Gledajući samo komponente može se pisati $A_{ij}{}^{T} = A_{ji}$ i obrnuto, $A_{ji}{}^{T} = A_{ij}$. Gledajući tablicu s komponentama tenzora, transponiranje označuje zamjenu mjesta stupaca i redaka, kao što je prikazano u sljedećem primjeru.

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} -8 & 6 & -2 \\ 4 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & -9 \end{vmatrix}, \qquad A_{ij}{}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} -8 & 4 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & -9 \end{vmatrix}$$

1.3.8 Simetrični tenzori

Simetrični tenzori drugog reda su svi oni koji se ne mijenjaju transponiranjem, tj. za simetrični tenzor drugog reda vrijedi $\mathbf{S}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$, odnosno $S_{ij}=S_{ji}$. Prema tome simetrični tenzor se ne mijenja ako mu se indeksima zamjene mjesta. Ako se gleda tablica s komponentama tenzora, to znači da su komponente koje se nalaze iznad glavne dijagonale jednake odgovarajućim komponentama ispod glavne dijagonale. Simetrični tenzor drugog reda ima šest različitih komponenti, kako je prikazano u sljedećem primjeru.

$$S_{ij} = \begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Za tenzore višeg reda kaže se da su simetrični u odnosu na dva indeksa čijom se zamjenom tenzor ne mijenja. Tako bi se za tenzor $\mathbf{T}$ za koji vrijedi $\mathbf{T}_{ijk\ldots}=\mathbf{T}_{ikj\ldots}$ kazalo da je simetričan u odnosu na indekse j i k.

1.3.9 Antisimetrični tenzori

Antisimetrični tenzori drugog reda su suprotni po predznaku svome transponiranome tenzoru, tj. za antisimetrični tenzor $\mathbf{A}$ vrijedi $\mathbf{A}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ili u indeksnom zapisu je $A_{ij}=-A_{ji}$. Iz same definicije je jasno da antisimetrični tenzor ima nule na glavnoj dijagonali, a da su komponente iznad glavne dijagonale jednake po veličini, ali suprotne po predznaku komponentama ispod glavne dijagonale kao što prikazuje sljedeći primjer:

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & -4 \\ -6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Ne računajući promjene predznaka članova iznad glavne dijagonale u odnosu na članove ispod glavne dijagonale, antisimetrični tenzor je definiran s tri različite komponente. Za tenzore višeg reda kaže se da su antisimetrični u odnosu na dva indeksa čijom se zamjenom tenzoru mijenja predznak. Tako bi se za tenzor **T** za koji vrijedi $T_{ijk...}=-T_{ikj...}$ kazalo da je antisimetričan u odnosu na indekse j i k. Permutacijski simbol ε_{ijk} je također antisimetričan u odnosu na indekse i,j ; j,k i i,k.

Dvostruki unutarnji produkt simetričnog S_{ij} i antisimetričnog A_{ij} tenzora jednak je nuli. Ova se tvrdnja lako dokazuje. Produkt $\lambda = S_{ij}A_{ij}$ se može prikazati kao zbroj dvaju polovina:

$$\lambda = \frac{1}{2}S_{ij}A_{ij} + \frac{1}{2}S_{ij}A_{ij}$$

Ako se u drugom članu desne strane gornjeg izraza iskoriste svojstva simetričnog odnosno antisimetričnog tenzora, tj. $S_{ij}=S_{ji}$ i $A_{ij}=-A_{ji}$ gornji izraz se može zapisati kao:

$$\lambda = \frac{1}{2}S_{ij}A_{ij} - \frac{1}{2}S_{ji}A_{ji}$$

Držeći se pravila da se nijemim indeksima smije promijeniti ime, u prvom članu desne strane gornjeg izraza će se nijemi indeks i zamijeniti sa k, a nijemi indeks j sa m, dok će se u drugom članu nijemi indeks i zamijeniti sa m, a nijemi indeks j sa k, te gornji izraz prelazi u:

$$\lambda = \frac{1}{2}S_{km}A_{km} - \frac{1}{2}S_{km}A_{km} = 0$$

čime je gornja tvrdnja o dvostrukom unutarnjem produktu simetričnog i antisimetričnog tenzora dokazana. Ovo vrijedi i za dvostruki unutarnji produkt tenzora višeg reda s tim da je jedan od njih simetričan u odnosu na nijeme indekse, a drugi antisimetričan. Dvostruki unutarnji produkt permutacijskog simbola sa simetričnim tenzorom također je jednak nuli. Na primjer ako je S_{ij} simetrični tenzor, tada vrijedi:

$$\varepsilon_{ijk}S_{jk} = 0 \qquad (56)$$

Gornji izraz predstavlja vektorsku jednadžbu jer je indeks i slobodni indeks, što znači da se gornja jednadžba može rastaviti na tri skalarne od kojih je svaka jednaka nuli.

Svaki tenzor drugog reda se može prikazati zbrojem simetričnog i antisimetričnog tenzora. Ova tvrdnja se također lako dokazuje. Neka T_{ij} označuje komponente nekog tenzora drugog reda, koje se mogu prikazati zbrojem njegovih polovina kojemu se dodaje i oduzima polovina njegovog transponiranog tenzora, tj. vrijedi:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ji} - \frac{1}{2}T_{ji}$$

Grupiranjem prvog i trećeg pribrojnika desne strane gornjeg izraza dobiva se simetrični dio tenzora **T**, a spajanjem drugog i četvrtog člana dobiva se njegov antisimetrični dio, tj. može se pisati:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) = S_{ij} + A_{ij} \tag{57}$$

Simetrični dio je jedna polovina zbroja tenzora **T** i transponiranog tenzora $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$, dok je antisimetrični dio jednak polovini njihove razlike. Sljedeći primjer ilustrira razlaganje tenzora na simetrični i antisimetrični dio.

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix} \tag{58}$$

1.3.10 Dualni vektor tenzora drugog reda

Svakom se tenzoru drugog reda zadanom komponentama T_{jk} može pridružiti dualni vektor d_i, definiran izrazom:

$$d_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk} \tag{59}$$

Razlaganjem tenzora na njegov simetrični i antisimetrični dio prema (57), uzimajući u obzir da je umnožak permutacijskog simbola sa simetričnim dijelom jednak nuli prema (56), zaključuje se da se definicija (59) može pisati i u obliku:

$$d_i = \varepsilon_{ijk} A_{jk} \tag{60}$$

gdje je A_{ij} antisimetrični dio tenzora T_{ij}. Kao što je prije rečeno antisimetrični tenzor ima tri različite komponente (ne računajući različitost predznaka članova iznad i ispod glavne dijagonale) poput vektora, pa je logično da ga se može opisati s pomoću vektora kako je definirano izrazom (60). Ako se izraz (60) pomnoži s ε_{ilm}, te umnožak $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}$ zamijeni umnoškom Kroneckerovih simbola prema (28), dobije se:

$$\varepsilon_{ilm} d_i = \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) A_{jk} = A_{lm} - A_{ml} = 2A_{lm}$$

U gornjem je izrazu za dobivanje zadnjeg člana iskorišteno svojstvo antisimetričnosti tenzora A_{ij}, a izraz se može napisati i u obliku:

$$A_{lm} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ilm} d_i \tag{61}$$

Dakle, svaki se tenzor može prikazati s pomoću simetričnog i antisimetričnog dijela ili s pomoću simetričnog dijela i dualnog vektora u obliku:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} = S_{ij} + \frac{1}{2}\varepsilon_{kij} d_k \tag{62}$$

1.3.11 Sferni i devijatorski dio tenzora drugog reda

Svaki se tenzor drugog reda može prikazati kao zbroj sfernog i devijatorskog dijela tenzora u obliku:

$$T_{ij} = \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} + \Sigma_{ij} \tag{63}$$

gdje je prvi član desne strane sferni dio, a drugi devijatorski dio tenzora. Očito da je T_{kk} skalar, pa je sferni dio izotropni tenzor, kojemu se pri rotaciji koordinatnog sustava komponente ne mijenjaju. Devijatorski dio tenzora se računa kao razlika samog tenzora i njegova sfernog dijela. Kontrakcijom indeksa u izrazu (63) slijedi da je Σ_{jj}=0 (suma članova na glavnoj dijagonali devijatorskog dijela tenzora je nula). Sljedeći primjer ilustrira razlaganje tenzora na sferni i devijatorski dio.

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

1.4 DIFERENCIJALNI OPERATORI

U dosadašnjem dijelu se baratalo s vektorima i tenzorima kao pojedinačnim matematičkim objektima. U mehanici kontinuuma se s pomoću skalara, vektora i tenzora opisuju fizikalna svojstva koja se u općem slučaju mijenjaju od točke do točke kontinuuma, tako da oni postaju funkcije prostornih koordinata, pa se govori o skalarnim, vektorskim i tenzorskim poljima. Ako se svakoj točki kontinuuma definira pripadajuća temperatura dobiva se polje temperature. Ako se svakoj točki kontinuuma definira brzina gibanja, dobiva se vektorsko polje brzine. Ako se u svakoj točki kontinuuma definira stanje naprezanja dolazi se do tenzorskog polja naprezanja, itd. Polja fizikalnih veličina su u općem slučaju ne samo funkcije prostornih nego i vremenske koordinate, te se kaže da su nestacionarna. U ovom će se poglavlju promatrati samo stacionarna polja koja nisu funkcija vremena. U nastavku će se sa $\Phi = \Phi(\vec{r})$ označavati skalarno polje, sa $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ vektorsko polje, a sa $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\vec{r})$ tenzorsko polje. Naravno da se vektorsko polje prikazuje s pomoću triju skalarnih polja:

$$\vec{v}(x_i) = v_1(x_1, x_2, x_3)\,\vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3)\,\vec{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3)\,\vec{e}_3\,,$$

a tenzorsko polje drugog reda s pomoću devet skalarnih polja (svaka komponenta je jedno skalarno polje). Za opis osnovnih zakona u mehanici kontinuuma bit će potrebno definirati osnovne operacije diferencijalnog računa koje se simbolički daju zapisati s pomoću nabla operatora[7] definiranog kao:

$$\nabla \bullet = \vec{e}_1 \frac{\partial \bullet}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial \bullet}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial \bullet}{\partial x_3} = \vec{e}_i \frac{\partial \bullet}{\partial x_i} \tag{64}$$

gdje umjesto oznake $\bullet$ može stajati skalarno, vektorsko ili tenzorsko polje pri čemu se za vektorsko i tenzorsko polje treba definirati način primjene ovog operatora: tenzorski, vektorski ili skalarni produkt.

1.4.1 Gradijent, usmjerena derivacija i potpuni diferencijal

Diferencijalni operator gradijent dobiva se primjenom operatora nabla na skalarna, vektorska ili tenzorska polja. Ovaj operator podiže red tenzora za jedan. Tako je gradijent skalarnog polja vektorsko polje, gradijent vektorskog polja je tenzorsko polje, a gradijent tenzora drugog reda je tenzor trećeg reda. Gradijent se dobiva primjenom operatora nabla na polje čiji se gradijent želi odrediti. Tako bi gradijent skalarnog polja bio:

$$\operatorname{grad}\Phi = \nabla\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\vec{e}_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\vec{e}_i \tag{65}$$

Iz prethodnog izraza je očito da je gradijent skalarnog polja vektorsko polje, a i-ta komponenta tog polja je :

$$(\operatorname{grad}\Phi)_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{66}$$

---

[7] Operator još nosi naziv Hamiltonov ili del operator

Po istom pravilu se definira i gradijent vektorskog polja. Primjenom nabla operatora (64) na vektorsko polje, analogno izrazu (65) daje:

$$\mathrm{grad}\vec{v} = \nabla\vec{v} = \vec{e}_i \frac{\partial\left(v_j \vec{e}_j\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\vec{e}_i\vec{e}_j \tag{67}$$

Iz izraza (67) je jasno da je gradijent vektorskog polja tenzorsko polje, čija je komponenta zadana indeksima i i j definirana kao:

$$\left(\mathrm{grad}\vec{v}\right)_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tag{68}$$

Analogno se definira i gradijent tenzora:

$$\mathrm{grad}\mathbf{T} = \nabla\mathbf{T} = \vec{e}_i \frac{\partial\left(T_{jk}\vec{e}_j\vec{e}_k\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k \tag{69}$$

Komponenta gradijenta tenzorskog polja drugog reda zadana indeksima ijk je:

$$\left(\mathrm{grad}\mathbf{T}\right)_{ijk} = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \tag{70}$$

Iz formule (65) je jasno da komponente gradijenta skalarnog polja odgovaraju parcijalnim derivacijama polja Φ u smjeru pripadajućih osi. Očito da se do parcijalne derivacije u smjeru osi x_1 može doći skalarnim množenjem jediničnog vektora u smjeru osi x_1 i gradijenta polja Φ. Slično se dolazi i do parcijalnih derivacija u smjeru osi x_2 i x_3. Isto tako je moguće definirati parcijalnu derivaciju polja Φ u proizvoljnom smjeru skalarno množeći gradijent polja Φ s jediničnim vektorom koji pokazuje željeni smjer deriviranja. Ako je $\vec{n}$ jedinični vektor zadan komponentama n_i, tada se usmjerena derivacija polja Φ u smjeru n računa kao:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{n}\cdot\mathrm{grad}\Phi = n_i\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}n_j \tag{71}$$

Jednako tako je usmjerena derivacija vektorskog polja vektor definiran kao:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial n} = \vec{n}\cdot\mathrm{grad}\vec{v} = n_i\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j\frac{\partial v_k\vec{e}_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}n_j\vec{e}_k \tag{72}$$

Iz izraza (72) se može očitati k-ta komponenta usmjerene derivacije vektorskog polja:

$$\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial n}\right)_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}n_j \tag{73}$$

Analogno se definira i usmjerena derivacija tenzorskog polja drugog reda zadanog komponentama T_{ij} u obliku:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial n}\right)_{ij} = \left(\vec{n}\cdot\mathrm{grad}\mathbf{T}\right)_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}n_k \tag{74}$$

Poznavajući parcijalne derivacije polja Φ u pojedinom smjeru lako se određuje prirast polja Φ kada se iz jedne točke pomakne u drugu blisku točku koja se nalazi na smjeru u kojem je poznata parcijalna derivacija. Tako bi prirast $\mathrm{d}\Phi$ polja Φ pri infinitezimalnom pomaku $\mathrm{d}x_1$ iz jedne u drugu točku koje se nalaze na osi x_1 bio:

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1$$

Analogno bi se odredili infinitezimalni prirasti polja Φ pri infinitezimalnim pomacima u smjeru osi x_2 i x_3. Ako bi pomak između dvaju bliskih točaka bio definiran elementarnim vektorom pomaka:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x_i\vec{e}_i = \mathrm{d}x_1\vec{e}_1 + \mathrm{d}x_2\vec{e}_2 + \mathrm{d}x_3\vec{e}_3 \tag{75}$$

tada bi se prirast polja Φ uslijed pomaka $\mathrm{d}\vec{r}$ prikazao skalarnim umnoškom vektora pomaka i gradijenta polja Φ:

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\vec{r}\cdot \mathrm{grad}\,\Phi = \mathrm{d}x_i\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \tag{76}$$

Izraz (76) označuje poznatu formulu za potpuni diferencijal polja Φ iz koje se može zaključiti o dva bitna svojstva gradijenta skalarnog polja. Kada su vektor pomaka $\mathrm{d}\vec{r}$ i vektor gradijenta $\mathrm{grad}\,\Phi$ paralelni vektori njihov će skalarni produkt biti maksimalno mogući, što znači da će i prirast polja Φ biti maksimalan. Iz toga se zaključuje da gradijent polja Φ pokazuje smjer najbrže promjene polja. Također je jasno da kada je vektor pomaka $\mathrm{d}\vec{r}$ paralelan i suprotno usmjeren vektoru gradijenta, da će njihov skalarni produkt biti minimalno mogući, te će polje Φ najbrže opadati idući u smjeru suprotnom od vektora gradijenta. Ako su vektor gradijenta i vektor pomaka okomiti vektori, njihov skalarni umnožak je jednak nuli što znači da nema prirasta polja Φ, tj. tada se vektor pomaka nalazi u površini u kojoj je vrijednost polja Φ konstantna. Takva se površina naziva razinskom plohom polja Φ. Iz rečenog se zaključuje da je vektor gradijenta okomit na razinsku plohu polja.

Analogno izrazu (76) za određivanje diferencijalnog prirasta skalarnog polja, definiraju se i izrazi za diferencijalni prirast vektorskog odnosno tenzorskog polja, koji glase:

$$\mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}\cdot \mathrm{grad}\,\vec{v} = \mathrm{d}x_i\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\frac{\partial (v_k\vec{e}_k)}{\partial x_j} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\vec{e}_k \qquad \text{ili} \qquad \mathrm{d}v_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \tag{77}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{T} = \mathrm{d}\vec{r}\cdot \mathrm{grad}\,\mathbf{T} = \mathrm{d}x_i\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\frac{\partial (T_{kl}\vec{e}_k\vec{e}_l)}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\vec{e}_k\vec{e}_l \qquad \text{ili} \qquad \mathrm{d}T_{kl} = \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \tag{78}$$

1.4.2 Divergencija

Divergencija je operator koji snižava red tenzora za jedan. Naravno da onda ne postoji divergencija skalarnog polja, jer je skalarno polje tenzorsko polje nultog reda, pa bi rezultat bio reda minus jedan što ne postoji. Divergencija vektorskog polja je skalarno polje, a divergencija tenzorskog polja je vektorsko polje. Divergencija vektorskog polja simbolički se označava skalarnim umnoškom nable i polja u obliku:

$$\mathrm{div}\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(v_j \vec{e}_j\right) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \delta_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \tag{79}$$

Divergencija tenzorskog polja je vektorsko polje oblika:

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = \nabla \cdot \mathbf{T} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k\right) = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \delta_{ij} \vec{e}_k = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \vec{e}_k \quad \text{ili} \quad \left(\mathrm{div}\mathbf{T}\right)_k = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \tag{80}$$

1.4.3 Rotor vektorskog polja

Rotor vektorskog polja je vektorsko polje koje se simbolički zapisuje vektorskim produktom nable i vektorskog polja:

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \times \left(v_k \vec{e}_k\right) = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{e}_j \times \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{e}_i \quad \text{ili} \quad \left(\mathrm{rot}\vec{v}\right)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \tag{81}$$

1.4.4. Laplaceov (delta) operator

Laplaceov ili delta operator definiran je kao divergencija gradijenta i označava se sa Δ. Primjenom Laplaceova operatora na skalarno polje dobije se:

$$\Delta \Phi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\Phi) = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\vec{e}_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} \tag{82}$$

Delta operator se dakle može zapisati u obliku:

$$\Delta \bullet = \frac{\partial \bullet}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial \bullet}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial \bullet}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial \bullet}{\partial^2 x_3} \tag{83}$$

gdje umjesto oznake "$\bullet$" može stajati skalarno, vektorsko ili tenzorsko polje.

1. 5 INTEGRALI I INTEGRALNE FORMULE

U mehanici fluida se pojavljuju tri vrste integrala: krivuljni, površinski i volumenski integrali. Krivuljnim integralom prikazuje se npr. cirkulacija brzine, a površinskim integralom protok kroz površinu. Postoji veza između krivuljnog integrala po zatvorenoj krivulji i površinskog integrala po površini koja je obrubljena tom zatvorenom krivuljom. Također postoji veza između površinskog integrala po zatvorenoj površini i volumenskog integrala po volumenu obuhvaćenom zatvorenom površinom. U nastavku će se definirati spomenute tri vrste integrala, te dati formule koje definiraju rečene veze među različitim integralima. Na kraju će se dati Leibnizova formula za vremensku derivaciju volumenskog integrala po vremenski promjenjivom volumenu.

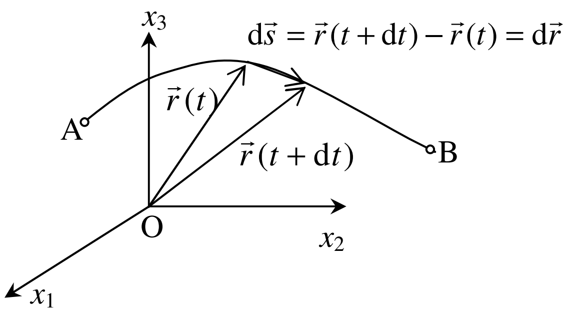
1.5.1 Prostorna krivulja i krivuljni integral

Slika 8. prikazuje krivulju C omeđenu točkama A i B. Jedan od načina analitičkog zadavanja krivulje je parametarski, u kojem se položaj svake točke na krivulji opisuje vektorom položaja koji je funkcija parametra t, u obliku:

$$\vec{r}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + x_3(t)\vec{e}_3 \tag{84}$$

Povećavajući vrijednost parametra t u granicama t_A (vrijednost parametra u točki A) do t_B dobivaju se sve točke krivulje C, omeđene točkama A i B. Ako su točke A i B iste, krivulja je zatvorena. Usmjereni element $\mathrm{d}\vec{s}$ krivulje C orijentiran je u smjeru porasta parametra t i odgovara razlici vektora položaja kao što je definirano na slici 8. Komponente elementarnog vektora $\mathrm{d}\vec{s}$ u indeksnoj notaciji su:

$$\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}x_j\vec{e}_j = \mathrm{d}x_1\vec{e}_1 + \mathrm{d}x_2\vec{e}_2 + \mathrm{d}x_3\vec{e}_3 \tag{85}$$



Slika 8. Usmjereni element krivulje

Krivuljni integral vektorskog polja $\vec{v}$ po orijentiranoj krivulji C, obrubljenoj točkama A i B, definiran je izrazom[8]:

$$\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} v_j\mathrm{d}x_j \tag{86}$$

[8] Osim navedenog linijskog integrala moguće je definirati i sljedeće linijske integrale: $\int \varphi\,\mathrm{d}\vec{s}$, gdje je φ skalarno polje ili $\int \vec{v}\times\mathrm{d}\vec{s}$, gdje je $\vec{v}$ vektorsko polje. Također je moguće definirati krivuljni integral po neorijentiranom luku krivulje npr. $\int \varphi\,\mathrm{d}s$. Ovdje će se koristiti samo oblik krivuljnog integrala koji je dan u tekstu, s pomoću kojeg se definiraju fizikalni pojmovi poput mehaničkog rada u polju sile i cirkulacije brzine.

Tako se npr. u mehanici rad polja sile na putu duž krivulje *C*, opisuje krivuljnim integralom, koji se još naziva hod u polju sile duž krivulje *C*. Krivuljni integral po jednostavno zatvorenoj krivulji *C* (krivulja koja nema samopresjecišta) nosi naziv ophod ili cirkulacija, a označuje se u obliku:

$$\oint_C \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_C v_j \mathrm{d}x_j \qquad (87)$$

Ako je $\vec{v}$ polje brzine gornji izraz označuje cirkulaciju brzine po zatvorenoj krivulji *C*.

1.5.2 Bezcirkulacijsko, konzervativno, potencijalno i bezvrtložno polje

Vektorsko polje $\vec{v}$ je bezcirkulacijsko (bezophodno) ako je cirkulacija po bilo kojoj jednostavno zatvorenoj krivulji *C* u području polja $\vec{v}$, jednaka nuli, tj. vrijedi:

$$\oint_C v_j \mathrm{d}x_j = 0 \qquad (88)$$

Vektorsko polje $\vec{v}$ je konzervativno ako krivuljni integral između točaka A i B ne zavisi od krivulje koja spaja te točke. Lako se može pokazati da je vektorsko polje bezcirkulacijsko ako i samo ako je konzervativno.
Svako vektorsko polje koje se može prikazati s pomoću gradijenta skalarnog polja Φ u obliku:

$$\vec{v} = \mathrm{grad}\,\Phi \qquad \text{ili} \qquad v_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

naziva se potencijalnim poljem, kojemu je polje Φ skalarni potencijal. Svako potencijalno polje je konzervativno i bezophodno, jer je krivuljni integral duž krivulje obrubljene točkama A i B jednak:

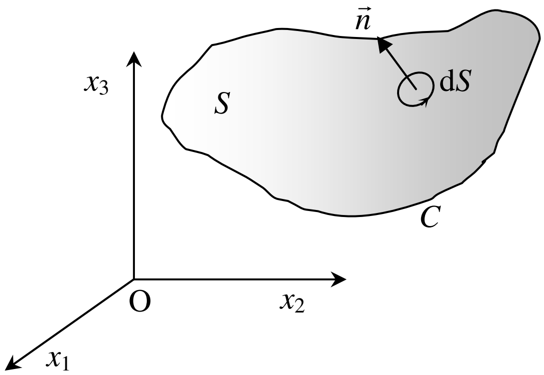
$$\int_A^B v_j \mathrm{d}x_j = \int_A^B \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{j}} \mathrm{d}x_j = \int_A^B \mathrm{d}\Phi = \Phi(\mathrm{B}) - \Phi(A) \qquad (89)$$

Iz izraza (89) je jasno da se za slučaj potencijalnog polja podintegralna funkcija svodi na potpuni diferencijal, te je vrijednost krivuljnog integrala jednaka razlici potencijala u točkama B i A i ne zavisi od spojnice točaka A i B, što je po definiciji svojstvo konzervativnih polja. Ako je krivulja zatvorena, što znači da se točke A i B poklapaju, slijedi iz izraza (89) da će i cirkulacija potencijalnog polja biti jednaka nuli, što je osobina bezcirkulacijskog polja. Dakle potencijalno polje je konzervativno i bezcirkulacijsko. Lako se pokaže da je rotor potencijalnog polja nul vektor, jer je:

$$(\mathrm{rot}\vec{v})_i = (\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\Phi))_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right) = 0 \qquad (90)$$

Gornji je izraz jednak nuli jer je tenzor $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right)$ simetričan u odnosu na indekse *j* i *k* (zbog poznatog pravila po kojemu je dozvoljena zamjena redoslijeda deriviranja), a permutacijski tenzor je antisimetričan s obzirom na indekse j i k, te je njihov umnožak, prema prije rečenom pravilu jednak nuli. Vektorsko polje kojemu je rotor jednak nuli je bezvrtložno polje, pa se zaključuje da su pojmovi potencijalnosti i bezvrtložnosti polja $\vec{v}$ ekvivalentni.

1.5.3 Površinski integral



Slika 9. Površina u prostoru

Slika 9. prikazuje površinu S, obrubljenu krivuljom C. Prostorna površina se analitički može zadati u parametarskom obliku (gdje je svaka komponenta radius vektora koji pokazuje na točku površine, funkcija dvaju parametra) ili funkcijom $F(x_i)=0$. Orijentirani infinitezimalni element površine S definiran je u obliku $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\mathrm{d}S$, gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor normale na površinu S, a dS infinitezimalni dio te površine. Pozitivni smjer normale je određen pravilom desne ruke, tj. ako se prstima desne ruke kruži u pozitivnom smjeru (obrnuto od kazaljke na satu) tada palac desne ruke pokazuje pozitivni smjer normale. Ako je površina S zatvorena (površina koja obrubljuje tijelo) pozitivna strana površine je orijentirana vanjskom normalom. Definiraju se slijedeće tri vrste integrala po orijentiranoj površini[9]:

$$\iint_S \varphi \,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \varphi \vec{n}\,\mathrm{d}S \quad \text{ili} \quad \iint_S \varphi n_j \,\mathrm{d}S \tag{91}$$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \quad \text{ili} \quad \iint_S v_j n_j \,\mathrm{d}S \tag{92}$$

$$\iint_S \vec{v} \times \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{v} \times \vec{n}\,\mathrm{d}S \quad \text{ili} \quad \iint_S \varepsilon_{ijk} v_j n_k \,\mathrm{d}S \tag{93}$$

U mehanici kontinuuma se npr. integralom tipa (91) određuje rezultantna sila tlaka na površinu S, a integral (92) definira tok ili fluks vektora $\vec{v}$ kroz površinu S. Ako je vektor $\vec{v}$ vektor brzine onda se govori o volumenskom protoku. Integral po zatvorenoj površini S, orijentiranoj vanjskom normalom označuje se na sljedeći način:

$$\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

[9] Moguće je definirati i površinski integral po neorijentiranoj površini, npr. $\iint_S \varphi \,\mathrm{d}S$, a koji se ovdje neće koristiti.

1.5.4 Volumenski integral

Volumenski ili obujamski integral skalarnog polja φ, definiranog svojom volumenskom gustoćom u obliku:

$$\varphi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{dV} \tag{94}$$

gdje je $\Delta\Phi$ sadržaj fizikalnog svojstva unutar elementarnog volumena ΔV. Očito da će volumenskim integralom:

$$\Phi = \iiint_V \varphi \,\mathrm{d}V \tag{95}$$

biti definiran sadržaj fizikalnog svojstva unutar volumena V. Analogno se može definirati volumenski integral vektorskog i tenzorskog polja:

$$\iiint_V \vec{v}\,dV \quad \text{ili u indeksnom zapisu} \quad \iiint_V v_i \,\mathrm{d}V \tag{96}$$

$$\iiint_V \mathbf{T}\,dV \quad \text{ili u indeksnom zapisu} \quad \iiint_V T_{ij} \,\mathrm{d}V \tag{97}$$

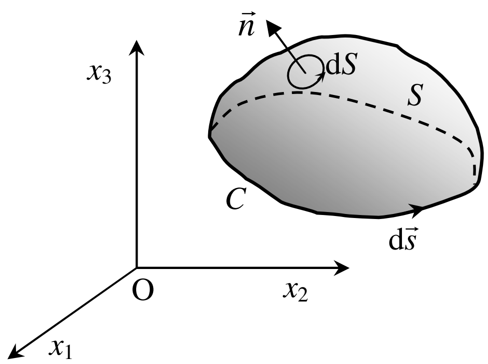
1.5.5 Stokesova formula

Slika 10. prikazuje površinu S obrubljenu zatvorenom krivuljom C. Stokesova formula povezuje krivuljni integral po orijentiranoj zatvorenoj krivulji C i površinski integral po orijentiranoj površini S. Ako je $\vec{v}$ vektorsko polje, prema Stokesovoj formuli vrijedi:

$$\oint_C \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S (\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{98}$$

ili u indeksnom zapisu:

$$\oint_C v_j \mathrm{d}x_j = \iint_S \varepsilon_{mpj} \frac{\partial v_j}{\partial x_p} n_m \mathrm{d}S \tag{99}$$



Slika 10. Uz Stokesovu formulu

Pri tome površina S označuje bilo koju površinu kojoj je rub zatvorena krivulja C. Iz (98) slijedi prije rečeno pravilo da je bezvrtložno polje ($\mathrm{rot}\vec{v} = \vec{0}$) bezcirkulacijsko, što znači da je potencijalno.

Stokesova formula se u indeksnom zapisu može poopćiti u oblik:

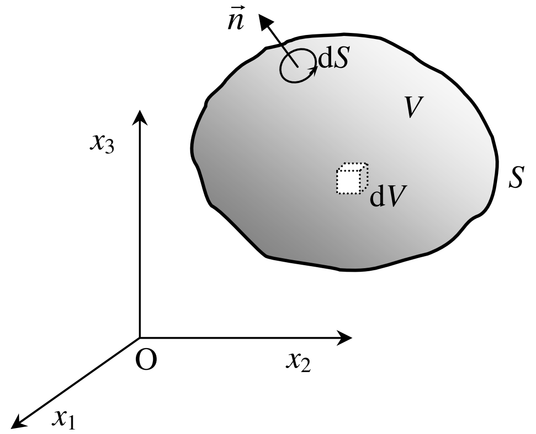
$$\oint_C \bullet\, \mathrm{d}x_j = \iint_S \varepsilon_{mpj} \frac{\partial \bullet}{\partial x_p} n_m \mathrm{d}S \tag{100}$$

gdje umjesto oznake • može stajati skalarno polje ili komponente vektorskog ili tenzorskog polja. Na primjer za skalarno polje φ vrijedi:

$$\oint_C \varphi \mathrm{d}x_j = \iint_S \varepsilon_{mpj} \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} n_m \mathrm{d}S \qquad \text{ili} \qquad \oint_C \varphi \mathrm{d}\vec{s} = \iint_S \mathrm{d}\vec{S} \times \mathrm{grad}\,\varphi \tag{101}$$

1.5.6 Gaussova formula

Slika 11. prikazuje volumen V omeđen zatvorenom površinom S. Površina S je orijentirana jediničnim vektorom $\vec{n}$ vanjske normale. Gaussova formula[10] povezuje površinski integral po orijentiranoj površini S i volumenski integral po volumenu omeđenom tom površinom. Prema Gaussovoj formuli za vektorsko polje $\vec{v}$ vrijedi:



Slika 11. Uz Gaussovu formulu

$$\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\vec{v} \mathrm{d}V = \iiint_V \nabla \cdot \vec{v}\, \mathrm{d}V \tag{102}$$

ili u indeksnom zapisu:

$$\oiint_S v_j n_j \mathrm{d}S = \iiint_V \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \mathrm{d}V \tag{103}$$

Ako je $\vec{v}$ vektorsko polje brzine, tada površinski integral u gornja dva izraza označuje volumenski protok kroz površinu S. Gaussova formula se u indeksnoj notaciji može pisati općenitije u obliku:

$$\oiint_S \bullet\, n_j \mathrm{d}S = \oiiint_V \frac{\partial \bullet}{\partial x_j} \mathrm{d}V \tag{104}$$

gdje umjesto oznake • može stajati skalarno, vektorsko ili tenzorsko polje. Ako je p polje tlaka, tada vrijedi:

$$-\oiint_S p n_j \mathrm{d}S = -\oiiint_V \frac{\partial p}{\partial x_j} \mathrm{d}V \qquad \text{ili} \qquad -\oiint_S p \vec{n} \mathrm{d}S = -\iiint_V \mathrm{grad}\,p \mathrm{d}V \tag{105}$$

gdje površinski integral označuje rezultirajuću silu tlaka na zatvorenu površinu S. Iz izraza (105) slijedi poznato pravilo da je rezultirajuća sila konstantnog tlaka na tijelo jednaka nuli. U općem su slučaju površinske sile zadane tenzorom naprezanja, te vrijedi:

$$-\oiint_S T_{ji} n_j \mathrm{d}S = -\oiiint_V \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \mathrm{d}V \qquad \text{ili} \qquad -\oiint_S \vec{n} \cdot \mathbf{T} \mathrm{d}S = -\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{T} \mathrm{d}V \tag{106}$$

[10] U ruskoj se literaturi ova formula naziva formulom Ostrogradskog, a može se naći i pod nazivom formula divergencije.

gdje unutarnji produkt vektora normale i tenzora naprezanja označuje vektor naprezanja, kao što je dano izrazom (53). Jasno je da se primjenom Gaussove formule površinske sile (po zatvorenoj površini tijela) mogu prikazati i volumenskim integralom.

1.5.7 Solenoidalno vektorsko polje

Prije je pokazano da se potencijalno ili bezvrtložno vektorsko polje može prikazati gradijentom skalarnog polja koje nosi naziv skalarni potencijal vektorskog polja. Rotor potencijalnog polja identički je jednak nuli. Za polje kod kojega je divergencija identički jednaka nuli ($\mathrm{div}\vec{v}=0$), kaže se da je bezizvorno ili solenoidalno. Iz formule (102) je vidljivo da je za bezizvorno polje brzine, volumenski protok kroz zatvorenu površinu jednak nuli, tj. volumenski protok kojim kontinuum ulazi u volumen V, jednak je volumenskom protoku kojim kontinuum iz njega izlazi. Svako bezizvorno polje se može prikazati s pomoću rotora nekog drugog vektorskog polja, koje se naziva vektorskim potencijalom. Ako je polje $\vec{a}$ vektorski potencijal polja $\vec{v}$, tada vrijedi:

$$\vec{v} = \mathrm{rot}\vec{a} \qquad \text{ili} \qquad v_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j} \tag{107}$$

Jasno je da je divergencija polja $\vec{v}$ jednaka nuli, jer je $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{a})=0$, što je u indeksnom zapisu očito:

$$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\right) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

jer je permutacijski simbol antisimetričan u odnosu na indekse i i j, dok je tenzor $\dfrac{\partial^2 a_k}{\partial x_j \partial x_i}$ simetričan u odnosu na te iste indekse, zbog pravila o zamjeni redoslijeda deriviranja, a prema prije rečenom pravilu produkt simetričnog i antisimetričnog tenzora jednak je nuli. Budući da je rotor potencijalnog vektorskog polja jednak nuli, za zadano vektorsko polje $\vec{v}$ vektorski je potencijal $\vec{a}$ neodređen do na $\mathrm{grad}U$ (jer je $\mathrm{rot}(\vec{a}+\mathrm{grad}U)=\mathrm{rot}\vec{a}$). Svako će se vektorsko polje moći prikazati zbrojem svoga potencijalnog i solenoidalnog dijela.

1.5.8 Leibnizova formula

Često je u mehanici kontinuuma potrebno odrediti brzinu promjene (vremensku derivaciju) sadržaja fizikalnog svojstva unutar vremenski promjenjivog volumena. Ako vremenski promjenjivo polje $\Phi(x_i,t)$ označuje volumensku gustoću nekog fizikalnog svojstva (skalarog, vektorskog ili tenzorskog karaktera), brzinu promjene sadržaja tog fizikalnog svojstva unutar vremenski promjenjivog volumena $V(t)$ se zapisuje u obliku:

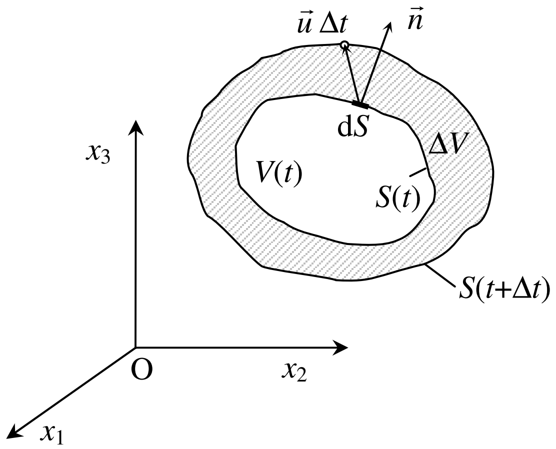
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{V(t)} \Phi(x_i,\mathrm{t})\,\mathrm{d}V \tag{108}$$

Držeći se definicije derivacije, može se pisati:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{V(t)} \Phi(x_i,\mathrm{t})\,\mathrm{d}V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\iiint\limits_{V(t+\Delta t)} \Phi(x_i,t+\Delta t)\,\mathrm{d}V - \iiint\limits_{V(t)} \Phi(x_i,t)\,\mathrm{d}V}{\Delta t} \tag{109}$$

Slika 12. shematski prikazuje položaje volumena $V(t)$ i $V(t+\Delta t)$ u pripadajućim vremenskim trenucima. Površine koje omeđuju volumen V u dvama trenucima su označene sa $S(t)$ i $S(t+\Delta t)$. Ako je površina koja omeđuje volumen opisana implicitnom funkcijom $F(x_i,t)=0$, (koja je identički jednaka nuli kada se u nju uvrste koordinate točaka površine S), tada je brzina u_j pomicanja točaka granice S po definiciji:

$$u_j = \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} \tag{110}$$



Slika 12. Uz Leibnizovu formulu

Volumen $V(t+\Delta t)$ se može prikazati kao zbroj volumena $V(t)$ i prirasta volumena ΔV, koji je na slici 12. osjenčan. Uzimajući u obzir pravilo da je integral po zbroju volumena jednak zbroju integrala po pojedinačnim volumenima, te da se razlika integrala po volumenu $V(t)$ može svesti na jedan integral, izraz (109) prelazi u oblik:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)} \Phi\, \mathrm{d}V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\iiint_{V(t)}\left[\Phi(x_i,t+\Delta t)-\Phi(x_i,t)\right]\mathrm{d}V + \iiint_{\Delta V}\Phi(x_i,t+\Delta t)\mathrm{d}V}{\Delta t} \tag{111}$$

Limes podintegralne funkcije prvog integrala gornjeg izraza (podijeljen s Δt) označuje parcijalnu derivaciju polja Φ po vremenu, a diferencijal prirasta volumena ΔV sa slike 12. se može izraziti formulom za volumen kose prizme baze dS, visine $u_j n_j \Delta t$:

$$dV = u_j n_j \Delta t \mathrm{d}S \tag{112}$$

gdje je $u_j\Delta t$ put koji prevali točka granice u vremenu Δt, a n_j jedinični vektor vanjske normale na površinu $S(t)$. Uvrštavajući izraz (112) u drugi integral desne strane izraza (111) on prelazi na površinski integral po površini $S(t)$, pa konačna formula za izračunavanje brzine promjene sadržaja fizikalnog svojstva unutar vremenski promjenjivog volumena glasi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)} \Phi\, \mathrm{d}V = \iiint_{V(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\mathrm{d}V + \oint\!\!\oint_{S(t)} \Phi u_j n_j \mathrm{d}S \tag{113}$$

Izraz (113) se naziva Leibnizovom formulom. Primjenom Gaussove formule na površinski integral u gornjem izrazu Leibnizova formula prelazi u oblik:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)} \Phi\, \mathrm{d}V = \iiint_{V(t)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \Phi)}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}V \tag{114}$$