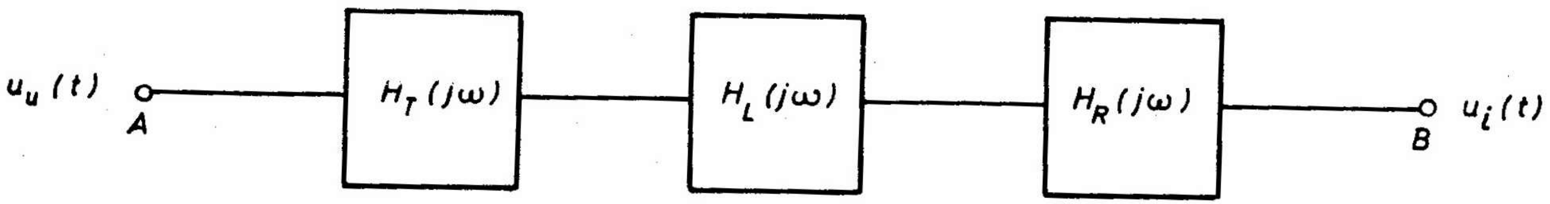
# Prenos bez ISI u realnim sistemima

- Prenos bes ISI u realnim sistemima
- Prvi Nyquistov kriterijum
- Sistemi koji zadovoljavaju prvi Nyquistov kriterijum
  - Idealni sistem
  - Nyquistovi slučajevi
  - Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

# Prenos bez ISI u realnim sistemima

- Idealni sistemi fizički ne postoje
- Jednostavna eliminacija ISI podešavanjem signalizacionog intervala propusnom opsegu filtra se ne može realizovati
- *Nyquist*-ovi kriterijumi preciziraju uslove koje treba da zadovolje sistemi za prenos signala u osnovnom opsegu učestanosti kako bi se izbjegla pojava intersimbolske interferencije.

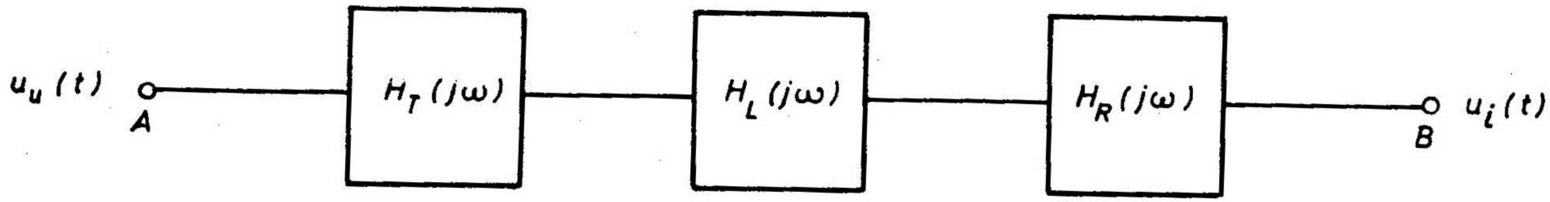


# Prenos bez ISI u realnim sistemima

- Digitalni signal $$u_u(t)=\sum_{k=-N}^{N} a_k x(t-kT)$$
- x(t) je standardni signal (impuls u jednom signalizacionom intervalu)
- *Fourier*-ova transformacija ulaznog signala $U_u(j\omega)=F\{u_u(t)\}$
- *Fourier*-ova transformacija izlaznog signala $U_i(j\omega)=F\{u_i(t)\}$

$U_i(j\omega)=H_T(j\omega)\,H_L(j\omega)\,H_R(j\omega)\,U_u(j\omega)=H(j\omega)\,U_u(j\omega)$

$$u_i(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)U_u(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$



# Prenos bez ISI u realnim sistemima

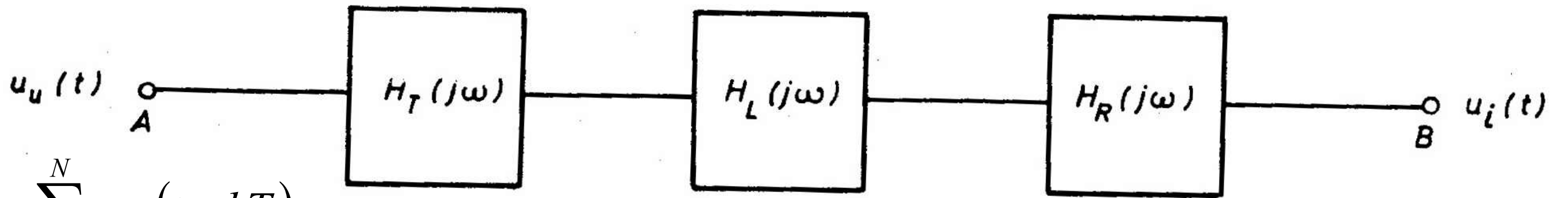
$$u_i(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)U_u(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$U_u(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u_u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-N}^{N}a_k x(t-kT)e^{-j\omega t}dt=\sum_{k=-N}^{N}a_k X(j\omega)e^{-j\omega kT}$$

$$u_i(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)\sum_{k=-N}^{N}a_k X(j\omega)e^{-j\omega kT}e^{j\omega t}d\omega=\sum_{k=-N}^{N}a_k\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega(t-kT)}d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega(t-kT)}d\omega=y(t-kT)$$

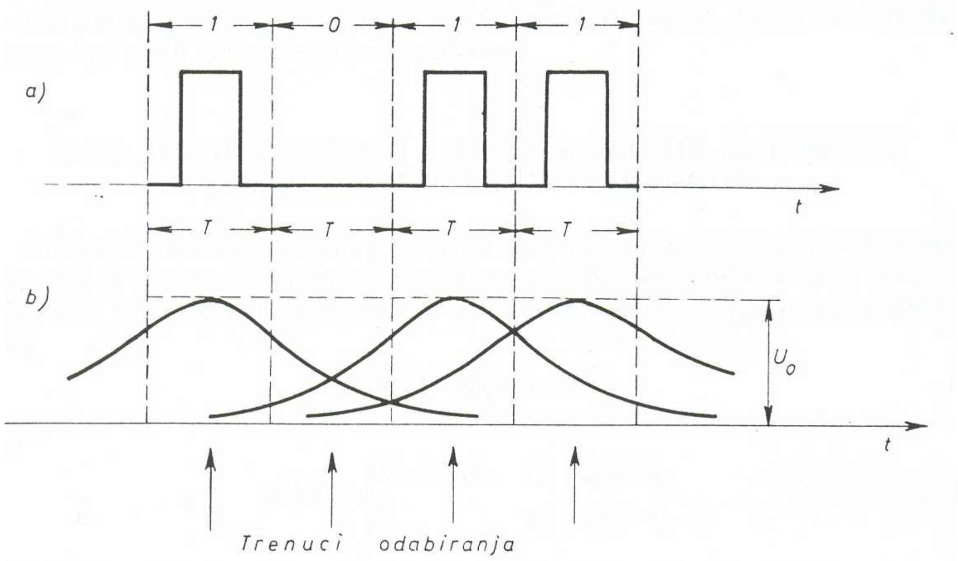
$$u_i(t)=\sum_{k=-N}^{N}a_k y(t-kT)$$




$$u_u(t)=\sum_{k=-N}^{N}a_k x(t-kT)$$

# Prenos bez ISI u realnim sistemima

- Signal $u_i(t)$ dolazi na sklop za odlučivanje
- Zavisi od standardnog odziva y(t)
- Njegov oblik treba podesiti tako da u trenucima odlučivanja nema ISI
- Cilj je da značajni parametar digitalnog signala $u_i(t)$ u složenoj funkciji u jednom određenom signalizacionom intervalu bude potpuno nezavisan od onoga što se dešava u ostalim signalizacionim intervalima.

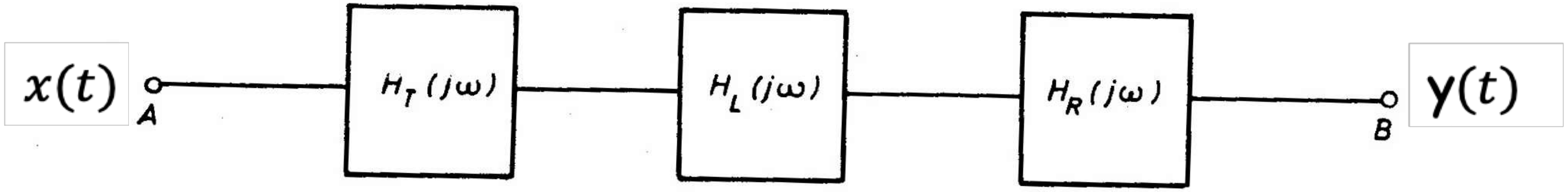


# Prenos bez ISI u realnim sistemima

- Fourierovu transformacija funkcije $y(t)$ se označava sa $Y(j\omega)$:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = H_T(j\omega)H_L(j\omega)H_R(j\omega)X(j\omega)$$

- Mogu se projektovati filtri (podešavati $H_T(j\omega)$ i $H_R(j\omega)$) tako da se dobije funkcija $Y(j\omega)$ čija će inverzna Fourierova transformacija $y(t)$ obezbijediti odsustvo ISI
- Ova dva filtra se često nazivaju *filtrima za oblikovanje impulsa*, i određuju se na osnovu Nyquistovih kriterijuma.



# Prenos bez ISI u realnim sistemima

**Postoje 3 različita** Nyquistova kriterijuma, u zavisnosti od tog šta se uzima kao značajni parametar signala:

- **Prvi Nyquistov kriterijum:**
  - odnosi se na prenos digitalnih signala kod kojih se odluka na prijemu donosi na osnovu ***amplituda*** odbiraka uzetih u sredini signalizacionih intervala.
- **Drugi Nyquistov kriterijum:**
  - definiše uslove za sisteme u kojima je za tačan prenos potrebno da ne dođe do promjene ***trajanja*** značajnog stanja signala.
- **Treći Nyquistov kriterijum:**
  - govori o mogućnosti da se izbjegne ISI u sistemima u kojima se kao značajni parametar signala odabere površina koju signal obuhvata u jednom signalizacionom intervalu. <u>Ova situacija se rijetko koristi i ima više teorijski nego praktični značaj.</u>

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

- Prvi Nyquistov kriterijum se odnosi na prenos digitalnih signala kod kojih se odluka na prijemu donosi na osnovu amplituda odbiraka uzetih u sredini signalizacionih intervala.
- <u>Taj kriterijum kaže da u ovakvom sistemu prenosa neće doći do ISI ako standardni odziv $y(t)$ zadovoljava uslov da je $y(0)=y_0$, gdje je $y_0$ konstanta različita od 0, i ako su sve vrijednosti $y(mT)$ ravne nuli, gje je $m$ bilo koji pozitivan ili negativan cio broj, a T trajanje signalizacionog intervala.</u>

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

- Analitički izraz za prvi Nyquistov kriterijum bi bio:

$$y(mT) = y_0 \delta_{m0} \quad \text{, gdje je} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \mathrm{i} = \mathrm{j} \\ 0 & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \end{cases} \quad \textit{Kronecker}\text{-ova delta}$$

$$u_i(mT) = \sum_{k=-N}^{N} a_k y[(m-k)T] = y_0 \sum_{k=-N}^{N} a_k \delta_{m-k,0}$$

$$u_i(mT) = y_0 (a_{-N} \delta_{m+N,0} + \cdots + a_m \delta_{m-m,0} + \cdots + a_N \delta_{m-N,0})$$

$$u_i(mT) = a_m y_0 = a_m y(0)$$

- vrijednost primljenog signala u *m*-tom trenutku odabiranja zavisi samo od onoga što je u tom signalizacionom intervalu bilo poslato od predajnika (ISI je jednaka nuli) ukoliko standardni odziv zadovoljava uslov koji definiše prvi Nyquistov kriterijum.

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

- Polazeći od formulacije Nyquistovog kriterijuma u domenu vremena, može se odrediti i odgovarajuća forma u domenu učestanosti kako bi se definisao uslov koji treba da zadovolji funkcija prenosa sistema kako ne bi došlo do ISI.

$$y(mT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega mT}\,d\omega$$

$$y(mT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\frac{2\pi m}{\omega_s}\omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y[j(\omega+n\omega_s)]\,d\omega$$

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

$$y(mT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\frac{2\pi m}{\omega_s}\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y[j(\omega + n\omega_s)]d\omega$$

- Kako bi bio ispunjen Prvi Nyquistov kriterijum, tj. $y(mT) = y_0\delta_{m,0}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y[j(\omega + n\omega_s)] = \frac{2\pi}{\omega_s} y_0 = T y_0$$

- Ovo je formulacija Prvog Nyquistovog kriterijuma u domenu učestanosti.
- Tada je:

$$y(mT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\frac{2\pi m}{\omega_s}\omega} \frac{2\pi}{\omega_s'} y_0 d\omega = y_0 \frac{\sin m\pi}{m\pi} = y_0 \delta_{m0}$$

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=H_T(j\omega)H_L(j\omega)H_R(j\omega)X(j\omega)$$

- Ako je standardni signal koji predstavlja digitalni signal u jednom signalizacionom intervalu delta impuls ( $x(t)=\delta(t)$ ), tada je

$$Y(j\omega)=H(j\omega)=A(\omega)e^{j\chi(\omega)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y[j(\omega+n\omega_s)]=\sum_{-\infty}^{\infty} A(\omega+n\omega_s)e^{j\chi(\omega+n\omega_s)}=\frac{2\pi}{\omega_s}y_0=Ty_0=K,\quad -\frac{1}{2}\omega_s\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

Ako se razdvoje realni i imaginarni dio, dolazi se do uslova:

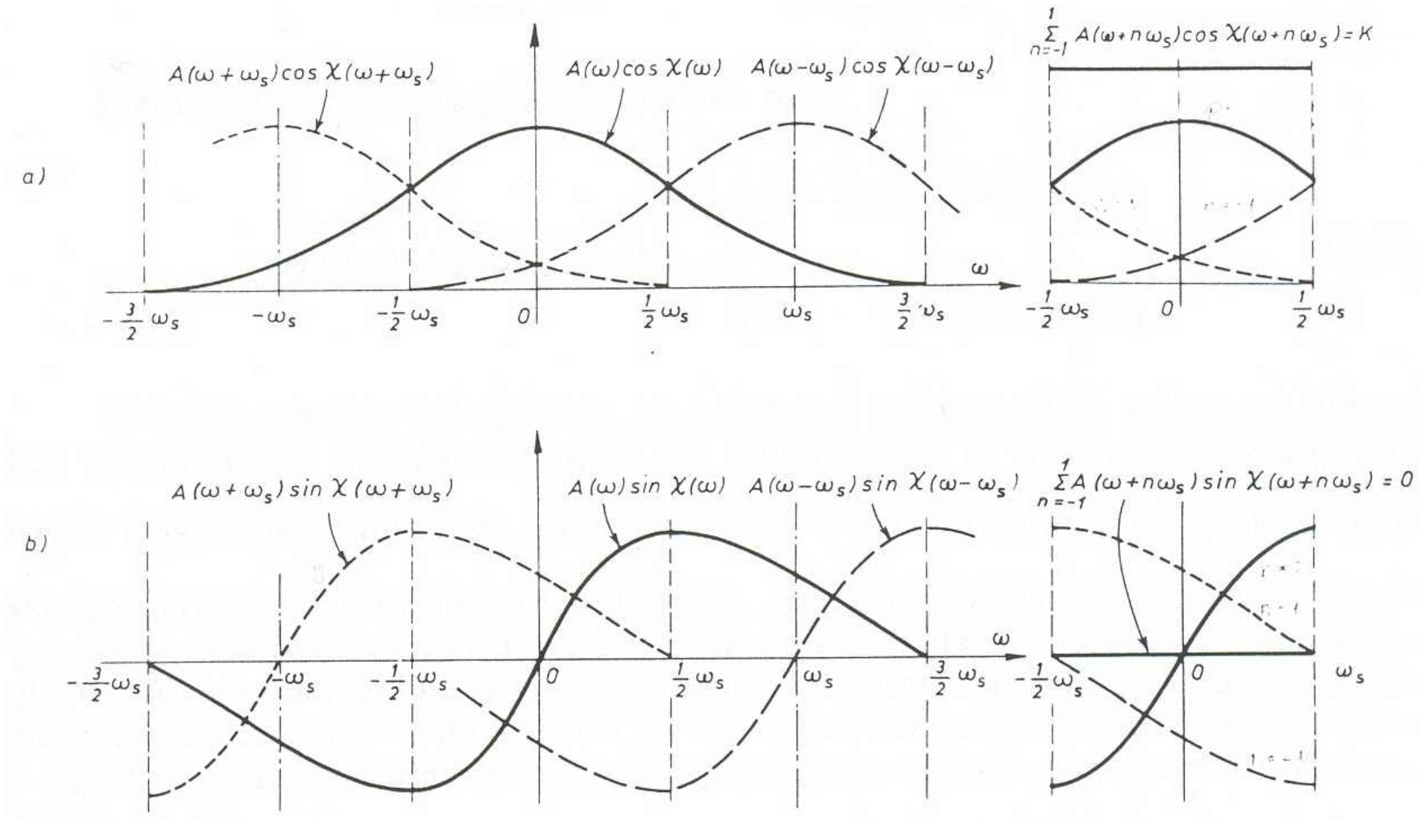
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega+n\omega_s)\cos\chi(\omega+n\omega_s)=K,\quad -\frac{1}{2}\omega_s\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega+n\omega_s)\sin\chi(\omega+n\omega_s)=0,\quad -\frac{1}{2}\omega_s\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega + n\omega_s)\cos\chi(\omega + n\omega_s) = K, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega + n\omega_s)\sin\chi(\omega + n\omega_s) = 0, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$



# Prvi Nyquist-ov kriterijum

Sistemi koji zadovoljavaju prvi Nyquistov kriterijum

1. Idealni sistem

- Amplitudska i fazna karakteristika

$$A(\omega) = \begin{cases} A(\omega), |\omega| \le \dfrac{\omega_s}{2} = \omega_c \\ 0, \qquad |\omega| > \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases} \qquad \chi(\omega) = \begin{cases} \chi(\omega), |\omega| \le \dfrac{\omega_s}{2} = \omega_c \\ 0, \qquad |\omega| > \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

Pošto je ovako definisana funkcija prenosa različita od 0 samo u intervalu $-\omega_s/2 \le \omega \le \omega_s/2$ , sume Nyquistovo kriterijuma će imati po jedan član i svešće se na

$$A(\omega)\cos\chi(\omega) = K, \text{ i } A(\omega)\sin\chi(\omega) = 0, \qquad |\omega| \le \frac{1}{2}\omega_s$$

$$A(\omega) = K = y_0, \text{ i } \chi(\omega) = 0, \qquad |\omega| \le \frac{1}{2}\omega_s$$

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

- Na osnovu toga je jasno da je funkcija prenosa sistema u opsegu učestanosti $-\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s/2$ koja zadovoljava Prvi Nyquistov kriterijum oblika:

$$H(j\omega) = A(\omega) = \begin{cases} K = Ty_0, & |\omega| \leq \dfrac{1}{2}\omega_s \\ 0, & |\omega| \geq \dfrac{1}{2}\omega_s \end{cases}$$

- Uočava se da je sistem prenosa koji ima minimalni propusni opseg, i u kome nema intersimbolske interferencije, ustvari idealni sistem prenosa.
- Sistemi koji zadovoljavaju Nyquistov kriterijum i mogu se fizički realizovati (na račun proširenja propusnog opsega za najviše dva puta) nazivaju se ***Nyquistovi slučajevi.*** Takvih sistema je beskonačno mnogo.

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

Nyquistovi slučajevi

- Riječ je o sistemima propusnicima niskih učestanosti kod kojih je propusni opseg proširen u odnosu na idealan sistem. Kod takvih sistema je:

$$A(\omega)=\begin{cases} A(\omega), & |\omega|\le\omega_g \\ 0, & |\omega|>\omega_g \end{cases} \qquad , \frac{1}{2}\omega_s\le\omega_g\le\omega_s$$

- Ograničenje u realizaciji ovakvih sistema se ogleda u tome da se minimalni propusni opseg (slučaj idealnog sistema) može proširiti najviše 100%.
- Amplitudska i fazna karakteristika ovakvog realnog sistema zadovoljavaju uslove:

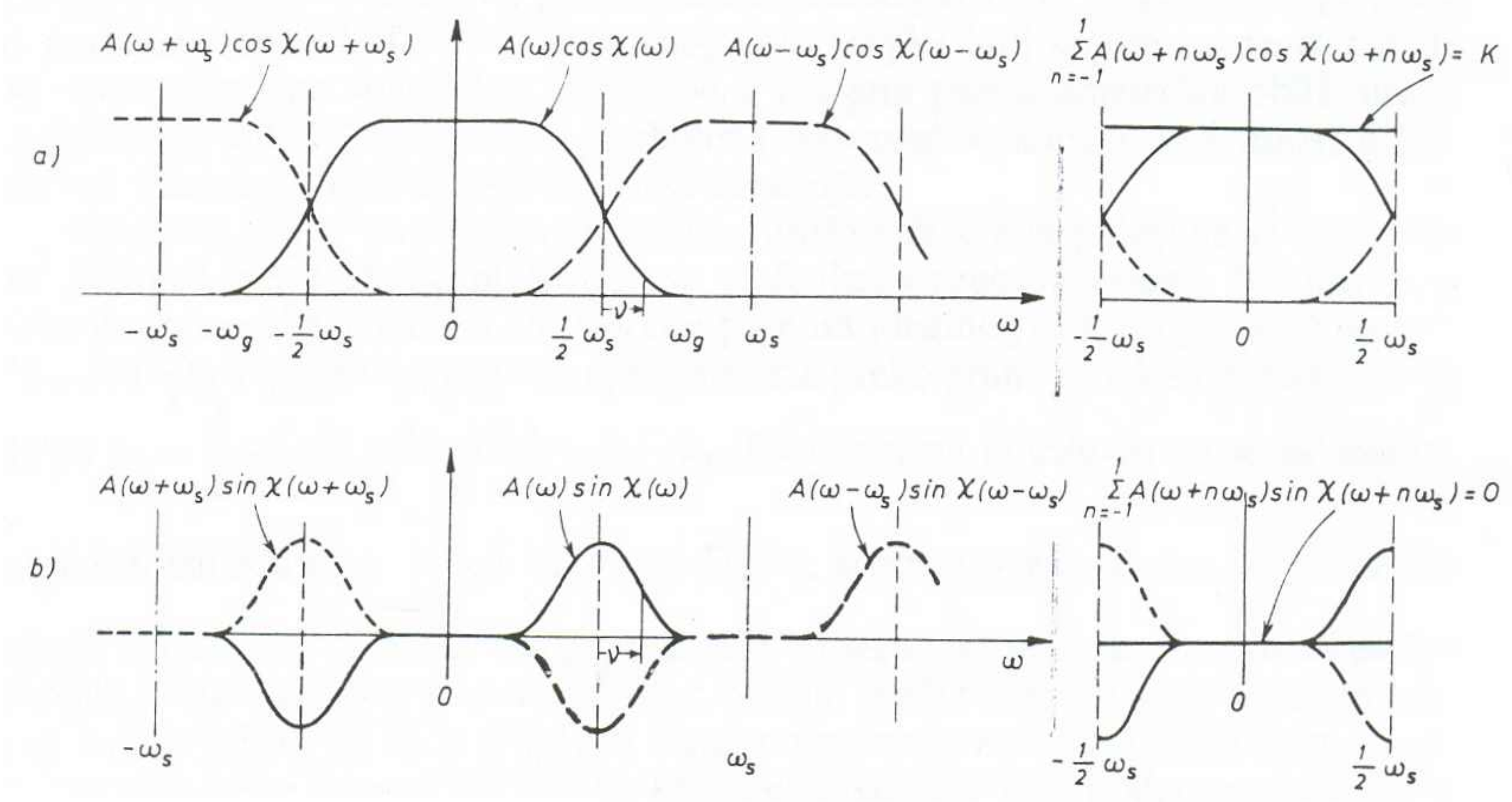
$$A(\omega)\cos\chi(\omega)+A(\omega-\omega_s)\cos\chi(\omega-\omega_s)=K, \qquad 0\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

$$A(\omega)\sin\chi(\omega)+A(\omega-\omega_s)\sin\chi(\omega-\omega_s)=0, \qquad 0\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

Nyquistovi slučajevi

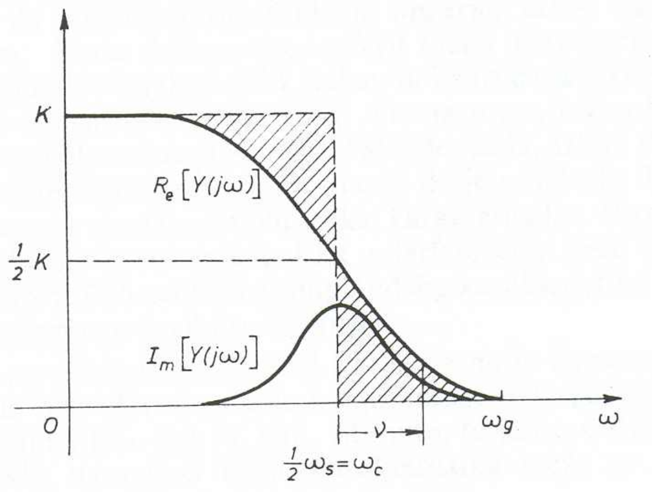
- Realni i imaginarni dio funkcije prenosa imaju oblik kao na slici:



# Prvi Nyquist-ov kriterijum

Nyquistovi slučajevi

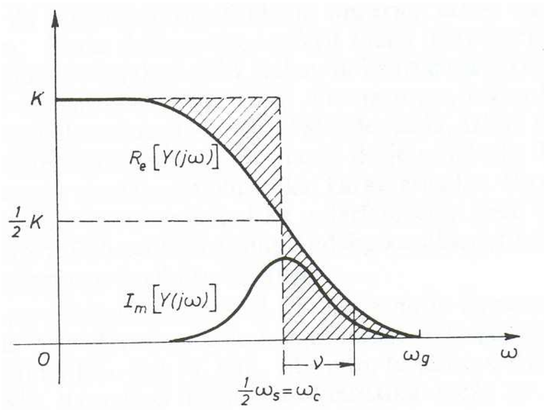
- Ako se sa prethodnih slika uzme samo jedan detalj može se zaključiti sledeće:
  - realni i imaginarni dio funkcije prenosa imaju određenu simetriju.
  - realni dio može da se shvati kao da je sastavljen iz dva dijela: iz pravougaonog oblika, prikazanog isprekidanom linijom, i zaobljenog oblika, koji je neparno simetričan u odnosu na tačku ($\omega_s/2$, K/2).
  - zaobljena kriva linija definiše osjenčenu površinu koja se oduzima od pravougaonog oblika i dodaje iznad učestanosti $\omega_c = \omega_s/2$ kako bi se dobio realni dio funkcije prenosa.
  - imaginarni dio funkcije prenosa je parno simetričan u odnosu na pravu $\omega=\omega_c = \omega_s/2$.



# Prvi Nyquist-ov kriterijum

Nyquistovi slučajevi

- Kako je $\omega_s/2 = \omega_c \leq \omega_g \leq \omega_s = 2\,\omega_c$ , Nyquist je zaključio da je moguće napraviti bezbroj funkcija prenosa koje obezbjeđuju prenos bez ISI. Pri tome je definisao ***Nyquistove uslove simetrije*** koje te funkcije prenosa moraju zadovoljavati:
- Ako se pođe od idealnog sistema prenosa za koji je realni dio Re[H(jω)] dat pravougaonim oblikom, a imaginarni dio Im[H(jω)] je 0, i doda li se prvom neparno simetrično zaobljenje u odnosu na tačku ($\omega_s/2$, K/2), a drugom parno simetričan oblik u odnosu na pravu $\omega = \omega_c = \omega_s/2$, uslovi za prenos bez interferencije među simbolima (Prvi Nyquistov kriterijum) biće uvijek ispunjeni.

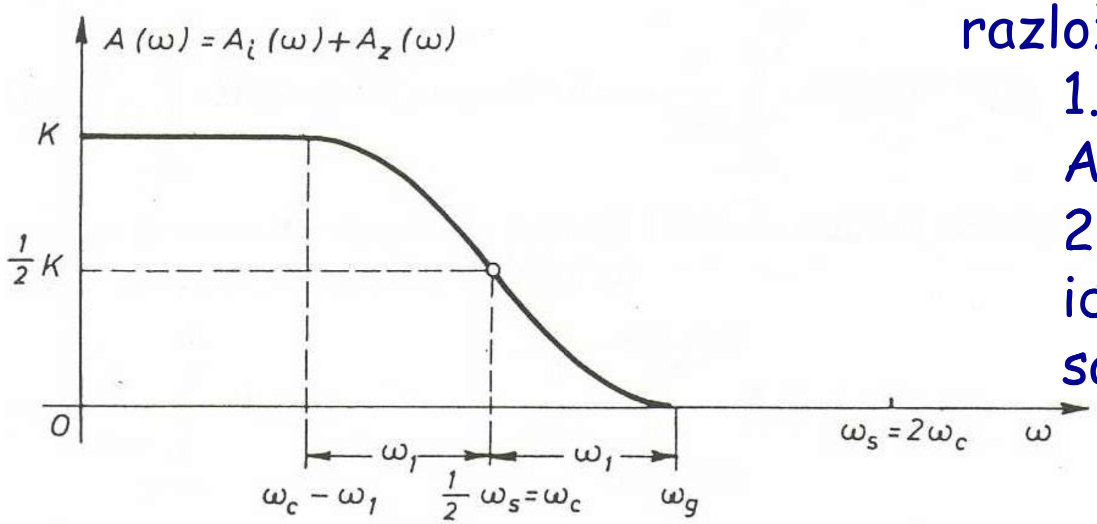


# Prvi Nyquist-ov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

- fazna funkcija ravna nuli ($\chi(\omega)=0$, tj. nema kašnjenja), a da amplitudska karakteristika ima opšti oblik kao na slici. Idealnom sistemu prenosa je dodato ***neparno*** zaobljenje i to po zakonu kosinusa.
- Potrebno je pronaći odziv takvog sistema na pobudu u vidu delta impulsa ($x(t)=\delta(t)$).



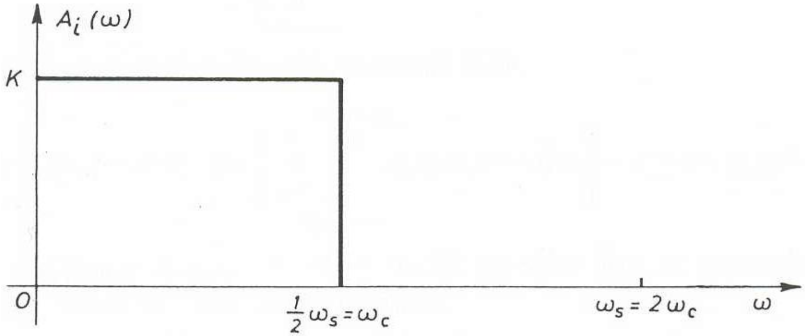

Pretpostavljena amplitudska karakteristika $A(\omega)$ može da se razloži na dvije karakteristike:

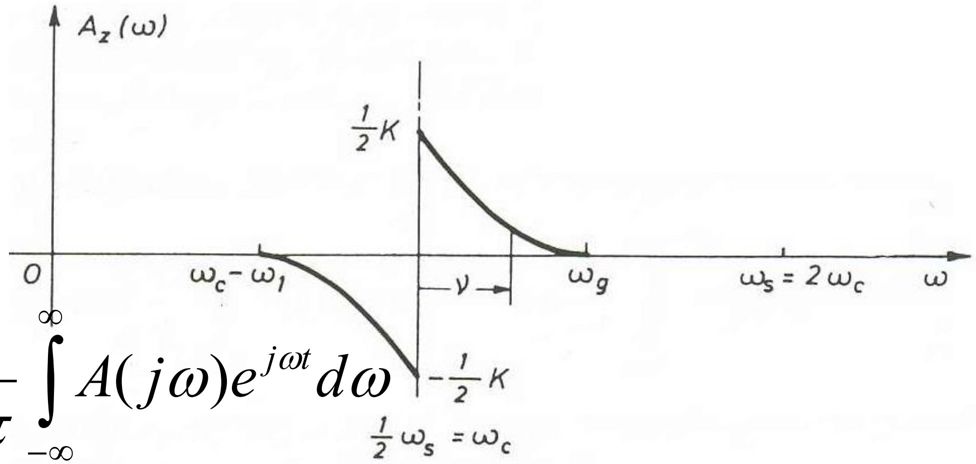
1. Idealni dio sistema označen sa $A_i(\omega)$
2. Izobličenje u odnosu na idealnu karakteristiku označeno sa $A_z(\omega)$

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

## Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

## Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem




$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}A_i(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-(\omega_c+\omega_1)}^{-(\omega_c-\omega_1)}A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c-\omega_1}^{\omega_c+\omega_1}A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}A_i(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_{\omega_c-\omega_1}^{\omega_c+\omega_1}A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]=y_i(t)+y_z(t)$$

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

- Odziv se sastoji od dvije komponente. Jedna je posljedica idealnog dijela karakteristike prenosa, a druga je od zaobljenja.
- Kako je $A_i(\omega)=K$, to je odziv na idealni dio prenosne karakteristike sistema:

$$y_i(t) = K\frac{2\omega_s}{2\pi}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} = \frac{K}{T}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} = y_0\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$$

- Komponenta odziva koja potiče od zaobljenja karakteristike je:

$$y_z(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_{\omega_c-\omega_1}^{\omega_c} A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{\omega_c}^{\omega_c+\omega_1} A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]$$

# Prvi Nyquist-ov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

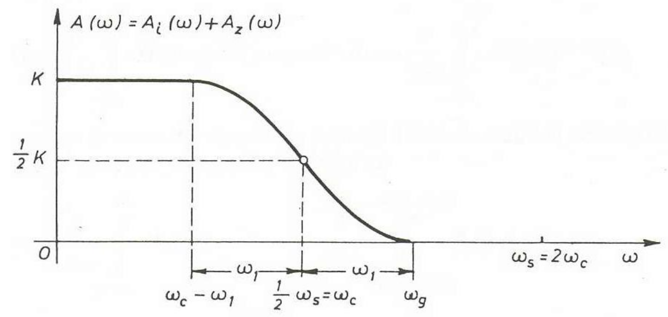
- Posmatrana funkcija zadovoljava Nyquistov kriterijum simetrije, tj. zaobljenje je neparno simetrično, pa važi da je:

$$A_z(\omega_c - \nu) = -A_z(\omega_c + \nu)$$

- Odavde se dobija da je:

$$y_z(t) = \frac{2}{\pi}\sin\omega_c t\int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c - \nu)\sin\nu t\,d\nu$$

$$y(t) = y_i(t) + y_z(t) = \frac{K}{T}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} + \frac{2}{\pi}\sin\omega_c t\int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c - \nu)\sin\nu t\,d\nu$$




# Prvi Nyquist-ov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

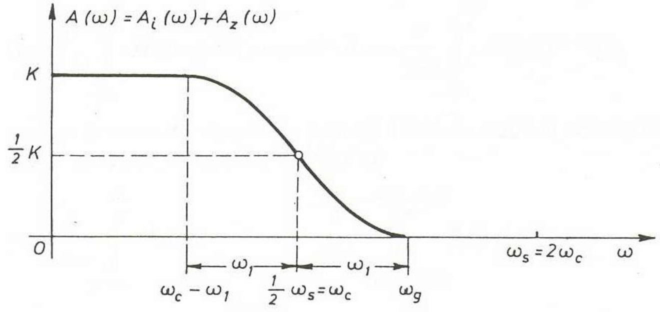
- Ako se pretpostavi kosinusoidalno zaobljenje tako da je:

$$A_z(\omega) = K\begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c - \omega_1 \le |\omega| \le \omega_c \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c \le |\omega| \le \omega_c + \omega_1 \end{cases}$$

- Ukupna prenosna funkcija je:
- 

$$A(\omega) = K\begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c - \omega_1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c - \omega_1 \le |\omega| \le \omega_c + \omega_1 \\ 0, & |\omega| \ge \omega_c + \omega_1 \end{cases}$$

# Prvi Nyquist-ov kriterijum




## Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

### Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

- Uobičajeno je da se za ovakve zaobljene karakteristike definiše ***faktor zaobljenja*** ("roll off") kao odnos $\omega_1$ i $\omega_c$.

$$\xi = \frac{\omega_1}{\omega_c}$$

- Kod sistema iz grupe Nyquistovih slučajeva ovaj faktor se kreće u granicama od 0 (idealan sistem) do 1 (maksimalno proširenje sistema, duplo veće od idealnog).
- Da bi se pronašao traženi odziv sistema čija amplitudska karakteristika ima kosinusoidalno zaobljenje na pobudu δ impulsom potrebno je u izrazu za odziv sistema uvrstiti karakteristiku $A_z(\omega)$, pa se konačno dobija:

$$y(t) = \frac{K}{T}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} + \frac{2}{\pi}\sin\omega_c t\int_0^{\omega_1} K\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{\nu}{\omega_1}\right)\sin\nu t\, d\nu$$

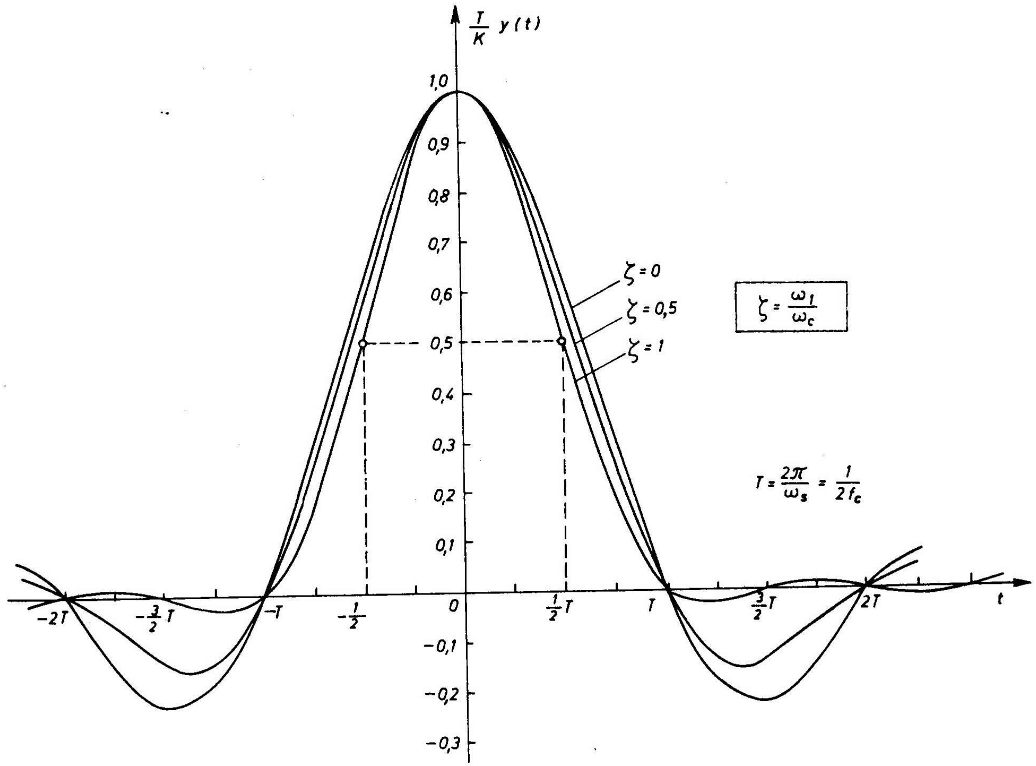
$$y(t) = \frac{K}{T}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}\frac{\cos\omega_1 t}{1-\left(\frac{2\omega_1 t}{\pi}\right)^2}, \quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{1}{2f_c}$$

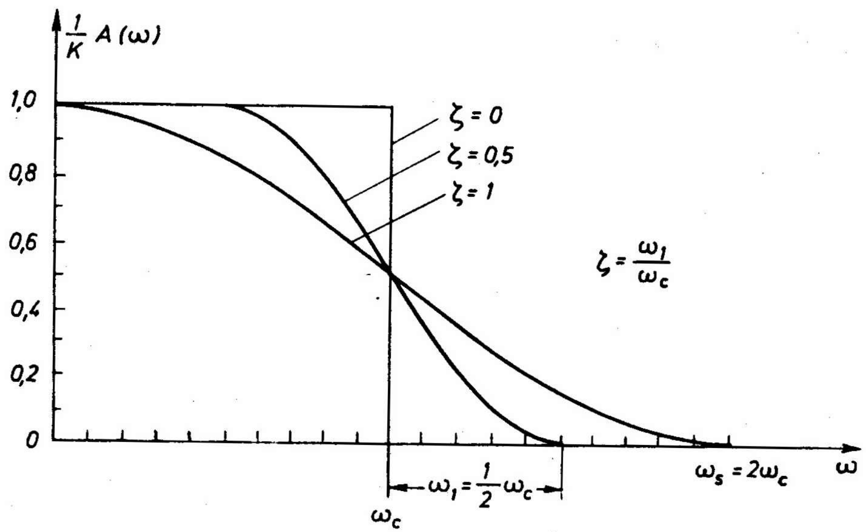
# Prvi Nyquist-ov kriterijum

## Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

## Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

- Za različite vrijednosti roll off faktora dobijaju se različiti oblici odziva.
- Neki od njih su prikazani na slici, i to: slučaj idealne amplitudske karakteristike za koji je faktor zaobljenja ξ=0, slučaj u kome je faktor zaobljenja ξ=0,5 i slučaj u kome je ξ= 1. Prikazane su i odgovarajuće amplitudske karakteristike ovih sistema.



# Prvi Nyquist-ov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

- Analizirajući impulsni odziv vidi se da se unošenjem zaobljenja u amplitudsku karakteristiku nije izmijenio ni položaj nula odziva u odnosu na odziv idealnog sistema, ni maksimalna vrijednost odziva $y(0)=y_0=K/T$. Znači, neće postojati ISI.
- S druge strane, uticaj zaobljenja je takav da je amplituda oscilacija u »repu« odziva utoliko manja ukoliko je faktor zaobljenja $\xi$ bliži vrijednosti 1. To znači da ako i dođe do intersimbolske interferencije iz bilo kojih razloga, njen uticaj će biti manji ako postoji zaobljenje.
- Posebnu pažnju zaslužuje karakteristika čiji je faktor zaobljenja $\xi=1$. Ovakva karakteristika naziva se često i karakteristikom "*podignuti kosinus*". Sa slike se vidi da su u tom slučaju amplitude oscilacija u odzivu ne samo smanjene već se u odzivu javljaju i dodatne nule u trenucima $\pm 3T/2$, $\pm 5T/2$, $\pm 7T/2$, ....$(2n+1)T/2$, a u tačkama $\pm T/2$ relativna amplituda odziva iznosi 0,5. To ima poseban značaj i na to će biti dat osvrnuti kada bude riječi o Drugom Nyquistovom kriterijumu.

# Ispitna pitanja

- Prenos bes ISI u realnim sistemima
- Prvi Nyquistov kriterijum
- Sistemi koji zadovoljavaju prvi Nyquistov kriterijum
  - Idealni sistem
  - Nyquistovi slučajevi
  - Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem