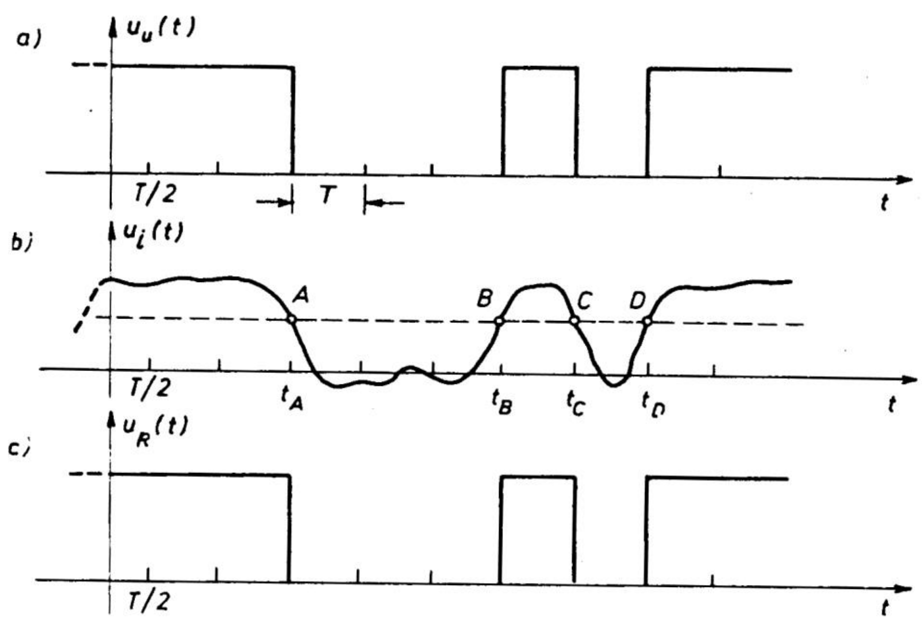
DRUGI NYQUISTOV KRITERIJUM

Kada je zadovoljen prvi Nyquistov kriterijum onda je sigurno da u trenucima koji se na1aze u sredini signa1izacionih interva1a primljenog signa1a ne postoji intersimbolska interferencija. Na taj način amplituda signala u ovim tačkama ne podliježe izobličenjima ove vrste. Drugi Nyquistov kriterijum govori o tome kako je moguće obezbijediti prenos u kome ne dolazi do izobličenja trajanja značajnih stanja signala. Očigledno, ovo će biti ispunjeno ako trenuci promjene značajnih stanja signala budu bez uticaja ISI. Za signale koji imaju dva takva stanja Nyquist kaže: "Kriterijum za savršen prenos je da interval između trenutaka kada struja prolazi kroz srednju vrijednost (ili neku drugu specificiranu vrijednost) treba biti isti kao i odgovarajući interval na strani predaje". Situacija se da opisati uz pomoć slike.



Pos1ati signal $u_u(t)$ koji ima dva značajna stanja izob1iči se tokom prenosa. Neka na ulazu u sklop za odlučivanje on izgleda otprilike kao na slici b. Pretpostavimo da je prag odlučivanja u prijemniku postavljen na ispravno odabranu vrijednost označenu isprekidanom linijom. Ako u trenucima t_A, t_B, t_C i t_D ne postoji intersimbolska interferencija, prijemnik će donositi ispravne odluke o trajanju značajnih stanja signala i signal na njegovom izlazu $u_R(t)$ će izgledati kao na slici c.

Iz ovih razmatranja se može zaključiti:

- promjena značajnih stanja smije da se odigrava uvijek na ivicama signalizacionih intervala, dakle, u trenucima t koji su jednaki **pozitivnim i negativnim neparnim multiplima od *T/2***, gdje T predstavlja trajanje signalizacionog intervala.

-drugi Nyquistov kriterijum biće uvijek zadovo1jen ako standardni odziv $y(t)$ bude imao vrijednost $y_1/2$ u trenucima $t=\pm T/2$ i ako u svim ostalim trenucima koji su ravni pozitivnim i negativnim neparnim multiplima od T/2 bude jednak 0. Izrečeni stav obezbjeđuje da u svakoj od tačaka na ivicama signalizacionih intervala, amplituda složenog signala ima ili vrijednost 0, ili $y_1/2$, ili y_1. Ako prag odlučivanja u prijemniku postavimo na vrijednost $y_1/2$, prijemnik će registrovati trenutke promjene u kojima se značajno stanje mijenja iz 0 u 1 i obratno.

Ovoj formulaciji treba dodati i sledeće napomene.

- obavezno je da kompletan digitalni signal na prijemu unutar bilo kog svog signalizacionog intervala ne prolazi kroz vrijednost $y_1/2$ kako ne bi došlo do promjene odluke unutar samog intervala.
- treba dodati i onaj slučaj u kome bi signal duže vremena zadržavao vrijednost $y_1/2$, što bi dovelo do toga da se odluka ne može donijeti (neki oblici binarnih signala pokazuju ovaj efekat).

Imajući u vidu sve što je rečeno, Drugi Nyquistov kriterijum može da se analitički formuliše na sledeći način:

Standardni odziv *y(t)* mora da zadovolji uslov:

$$y\left[(2m-1)\frac{T}{2}\right]=\frac{y_1}{2}\left(\delta_{m0}+\delta_{m1}\right),\quad \mathrm{m}=0,\pm 1,\pm 2,...$$

$\delta_{i,j}$ je Kroneckerova delta.

Ovo je formulacija drugog Nyquistovog kriterijuma u domenu vremena. U domenu učestanosti biće:

$$y\left[(2m-1)\frac{T}{2}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(j\omega)e^{j\omega(2m-1)\frac{T}{2}}d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n Y[j(\omega+n\omega_s)] = y_1 \frac{2\pi}{\omega_s}\frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{\omega_s}\omega} + e^{-j\frac{\pi}{\omega_s}\omega}), \quad -\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$$

Što se može zapisati i kao:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n Y[j(\omega+n\omega_s)] = y_1 T \cos\frac{\pi}{\omega_s}\omega, \qquad -\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$$

Izvedena relacija predstavlja uslov koji treba da bude zadovoljen u sistemu za prenos pa da u trenucima u kojima se mijenja značajno stanje signala nema intersimbolske interferencije. Tj., ovaj izraz iskazuje drugi Nyquistov kriterijum u frekvencijskom domenu.
Odavde se lako izvodi uslov koji mora da zadovolji funkcija prenosa sistema. Pretpostavi li se da se sistem pobuđuje standardnim signalom u obliku delta impulsa, *x*(t)=δ(t), onda će odziv *y*(t) predstavljati impulsni odziv sistema, a njegova Fourierova transformacija Y(jω) biće jednaka funkciji prenosa.

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X\left(j\omega\right) = H(j\omega) = A(\omega)e^{j\chi(\omega)}$$

Uvrštavajući ovo u dobijeni izraz i izjednačavajući realni i imaginarni dio dobija se :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n A(\omega+n\omega_s)\cos\chi(\omega+n\omega_s) = y_1 T\cos\frac{\pi}{\omega_s}\omega, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n A(\omega+n\omega_s)\sin\chi(\omega+n\omega_s) = 0, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

Ovo su uslovi koje treba da zadovoljavaju realni i imaginarni dio funkcije prenosa sistema pa da bude zadovoljen drugi Nyquistov kriterijum, tj.da ne dođe do ISI.

Prema tome, funkcija prenosa sistema koji zadovoljava drugi Nyquistov kriterijum se svodi na amplitudsku karakteristiku:

$$H(j\omega) = A(\omega) = \begin{cases} y_1 T \cos\dfrac{\pi}{\omega_s}\omega, & |\omega| \le \dfrac{1}{2}\omega_s = \omega_c \\ 0, & |\omega| \ge \dfrac{1}{2}\omega_s = \omega_c \end{cases}$$

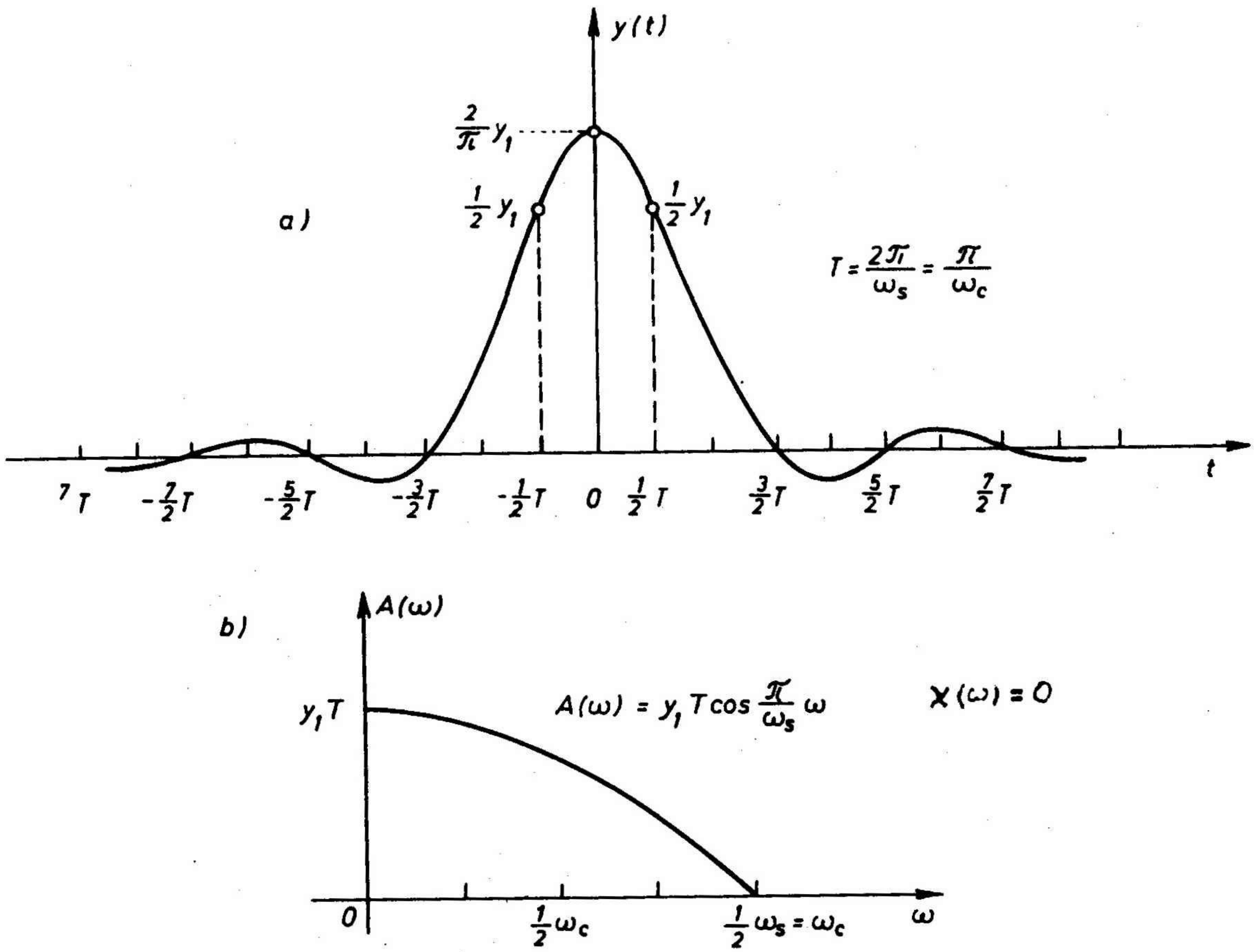
Vidi se da, za razliku od sistema minimalnog propusnog opsega koji zadovoljava prvi Nyquistov kriterijum, sistem minimalnog propusnog opsega koji zadovoljava drugi Nyquistov kriterijum nije idealan, već se fizički može realizovati.

Odziv ovog sistema na impulsnu pobudu će biti:

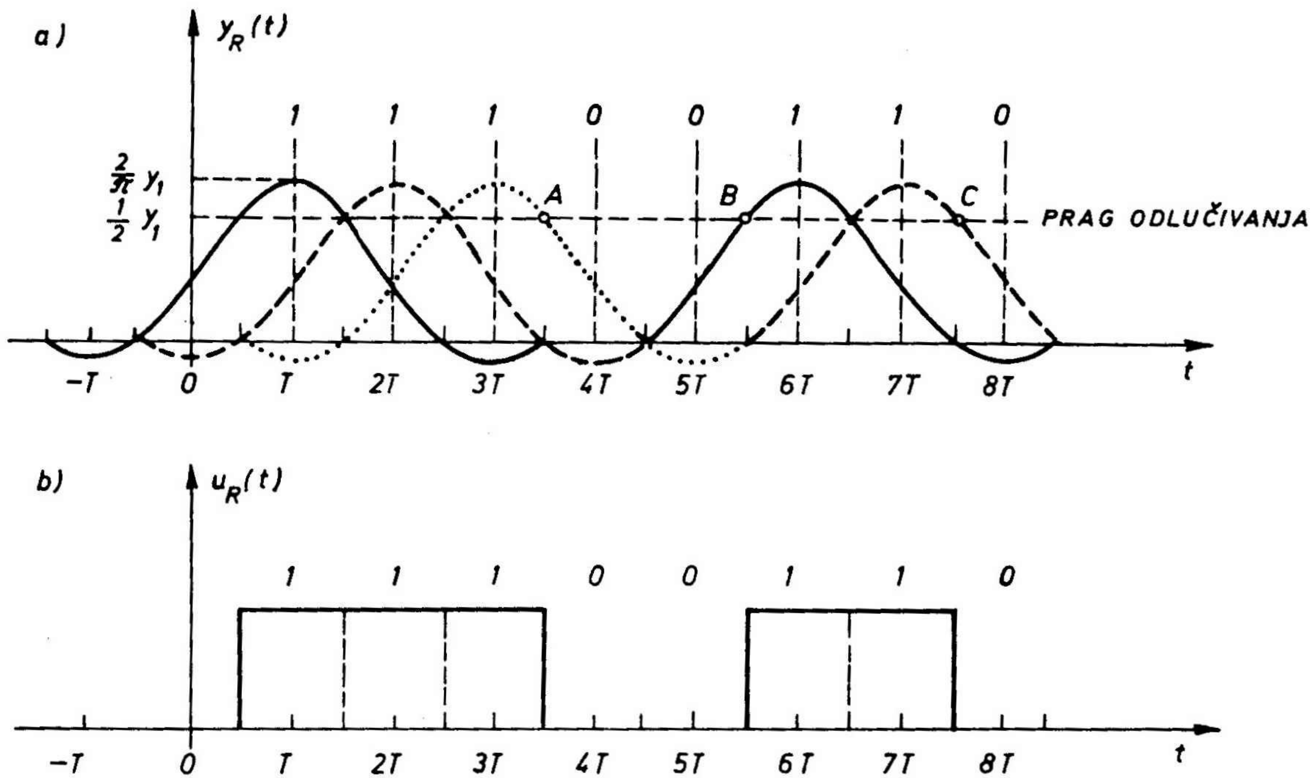
$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} y_1 T\cos\frac{\pi}{\omega_s}\omega \cdot e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi}y_1\frac{\cos\omega_c t}{1-(\frac{2\omega_c t}{\pi})^2}, \quad \omega_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\omega_s$$

Impulsni odziv i funkcija prenosa imaju oblik kao na slici:



Kao što se vidi odziv y(t) u tačkama t=±T/2 ima vrijednost $y_1/2$, a za sve pozitivne i negativne neparne multiple od T/2 ima vrijednost 0. Zahvaljujući ovakvom obliku standardnog odziva y(t) u trenucima u kojima nastupa promjena značajnog stanja ne postoji intersimbolska interferencija, pa prema tome ni trajanja značajnih stanja signala nisu izobličena. Ovo može da se vidi sa slike.



U tačkama A, B i C mijenja se značajno stanje signala. U tim trenucima ne postoji intersimbolska interferencija i vrijednost amplitude u njima iznosi $y_1/2$. Kako je ova vrijednost ravna pragu odlučivanja, to ni trajanje značajnih stanja za ovakav signal nisu izobličena.

NYQUISTOVI SLUČAJEVI:

I kod drugog Nyquistovog kriterijuma postoji mogućnost da se proširi propusni opseg sistema. Ovdje to nije zbog mogućnosti fizičke realizacije (kao kod prvog Nyquistovog kriterijuma kod koga je sistem minimalnog propusnog opsega ujedno i idealni sistem) već zbog mogućnosti povećanja broja sistema koji zadovoljavaju drugi Nyquistov kriterijum. Funkcije prenosa takvih sistema su oblika:

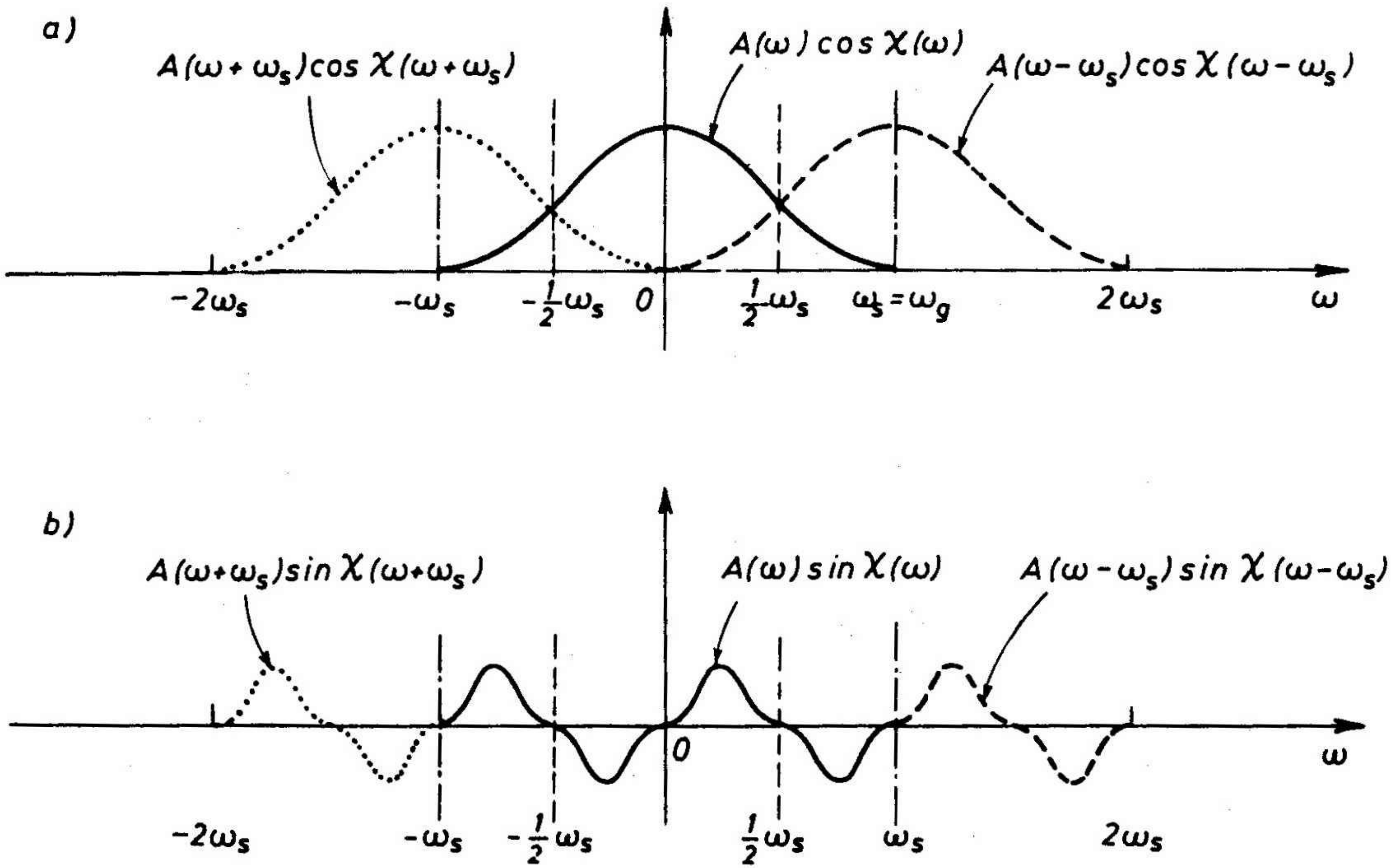
$$A(\omega)=\begin{cases} A(\omega), & |\omega|\le\omega_g \\ 0, & |\omega|>\omega_g \end{cases} \qquad \omega_c\le\omega_g\le 2\omega_c$$

Opšti uslovi za realni i imaginarni dio karakteristike postaju oblika:

$$A(\omega)\cos\chi(\omega)-A(\omega-\omega_s)\cos\chi(\omega-\omega_s)=y_1T\cos\frac{\pi}{\omega_s}\omega, \qquad 0\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

$$A(\omega)\sin\chi(\omega)-A(\omega-\omega_s)\sin\chi(\omega-\omega_s)=0, \qquad 0\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

Jedan primjer funkcija prenosa koje spadaju u grupu Nyquistovih slučajeva po drugom Nyquistovom kriterijumu je kao na slici:



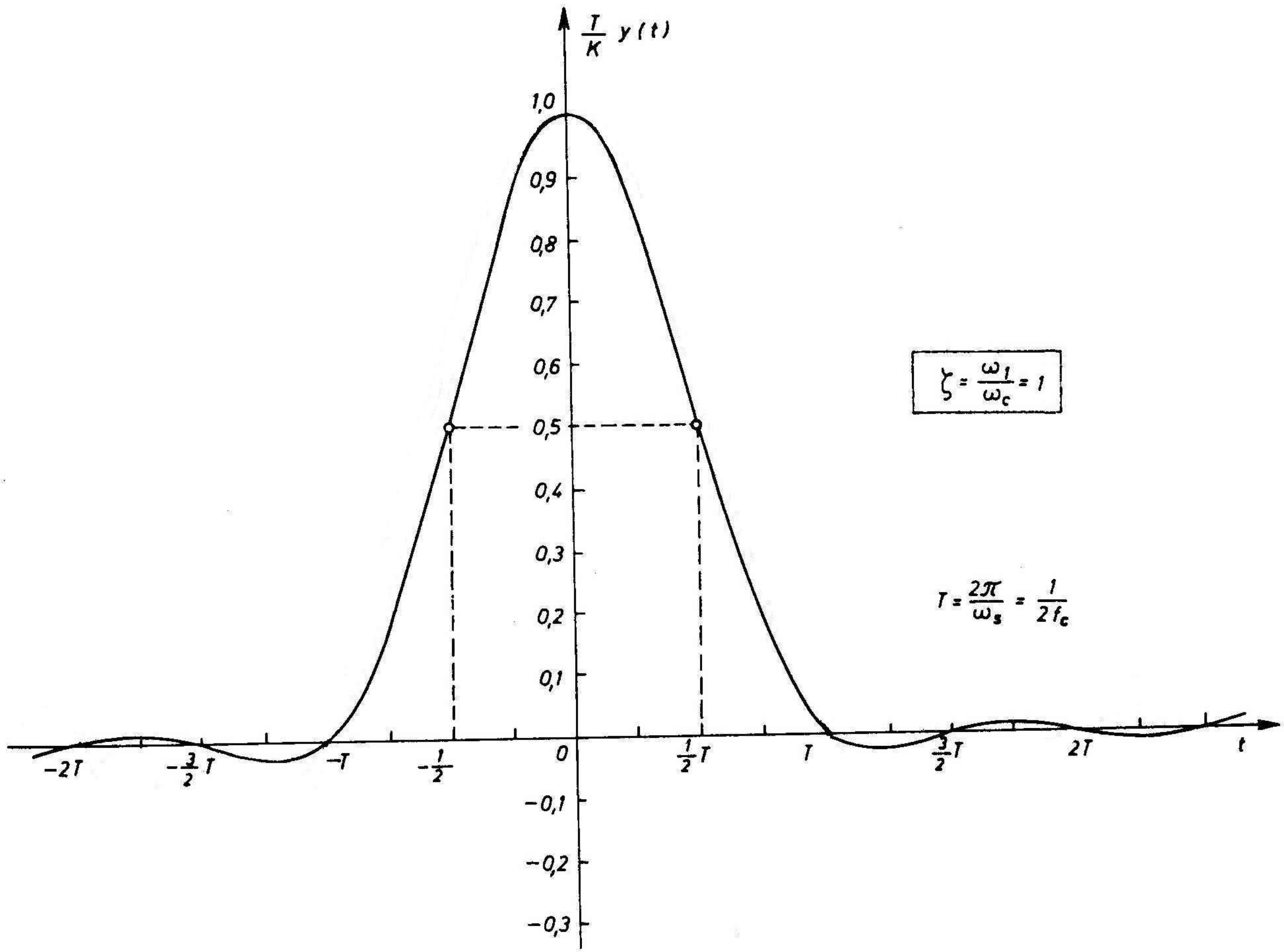
I po drugom Nyquistovom kriterijumu se za funkcije prenosa koje spadaju u Nyquistove slučajeve definišu uslovi simetrije tako da kriterijum bude zadovoljen. On glasi: realnom dijelu karakteristike sistema sa minimalnim propusnim opsegom može da se superponira dodatak koji ima parnu simetriju u odnosu na pravu $\omega=\omega_s/2=\omega_c$, a imaginarnom dijelu neparno simetrično zaobljenje u odnosu na tačku $\omega=\omega_s/2=\omega_c$.
Jedna od funkcija koja zadovoljava ove uslove je funkcija prenosa ***"podignuti kosinus"***. Ona ima poseban značaj u prenosu digitalnih signala iz tog razloga što ovakva funkcija prenosa zadovoljava i Prvi i Drugi Nyquistov kriterijum.
Pretpostavimo da je fazna funkcija sistema $\chi(\omega)=0$, amplitudska karakteristika je:

$$A(\omega)=K\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{\omega_s}\omega=\cos^2\dfrac{\pi}{2\omega_s}\omega, & |\omega|\le\omega_s=2\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_s\end{cases}$$

Kod ove funkcije roll off faktor je jednak jedinici. Impulsni odziv sistema je:

$$y(t)=\frac{K}{T}\frac{1}{1-(\frac{2\omega_c t}{\pi})^2}\frac{\sin 2\omega_c t}{2\omega_c t},\qquad \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{T}}=y_0$$

Ovdje je zadovoljen prvi Nyquistov kriterijum, tj. u trenutku T=0 funkcija ima maksimum a u trenucima nT je jednaka nuli. Isto tako, u trenucima ±T/2 odziv ima polovinu svoje maksimalne vrijednosti, a u trenucima (2n+1)T/2 ima vrijednost nula, tj. zadovoljen je i drugi Nyquistov kriterijum.



TREĆI NYQUISTOV KRITERIJUM

Treći Nyquistov kriterijum govori o tome kako je moguće izbjeći uticaj intersimbolske interferencije kada se za značajan parametar signala izabere površina koju on omeđava u jednom signalizacionom intervalu. Naravno, tada ta površina predstavlja vrijednost signala i ona na prijemu može da se identifikuje prostom integracijom signala.
Ako sa $p(mT)$ označimo pomenutu površinu u m-tom signalizacionom intervalu koji zahvata domen od $[(2m-1)T/2, (2m+1)T/2]$, onda se treći Nyquistov kriterijum može analitički formulisati na sledeći način:

$$p(mT) = \int_{(2m-1)\frac{T}{2}}^{(2m+1)\frac{T}{2}} y(t)dt = p_0\delta_{m0}, \qquad \mathrm{m} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Tj. površina koju omeđava signal u *m*-tom signalizacionom intervalu treba biti određena samo onim što je u tom signalizacionom intervalu bilo poslato.
y(t) predstavlja kao i do sada standardni odziv sistema na standardnu pobudu x(t), a $\delta_{m,0}$ predstavlja Kroneckerovu deltu.

OPŠTI OBLIK STANDARDNOG SIGNALA

Postavlja se pitanje kako udovoljiti Nyquistovim kriterijumima pa da nema intersimbolske interferencije i onda kada je standardni signal $x(\mathrm{t})$ dat u opštem obliku, tj. kada nije delta impuls.

U tom slučaju, Nyquistovi kriterijumi i uslovi koje oni zahtjevaju ostaće i dalje na snazi ako se učini da spektar standardnog signala na ulazu u sistem bude konstantan. To se može jednostavno uraditi tako što će se ispred sistema prenosa kaskadno vezati mreža koja modifikuje spektar standardnog signala i koja ima funkciju prenosa $H_X(j\omega)=1/X(j\omega)$ tako da na njenom izlazu on bude kao i spektar delta impulsa, tj. konstantan.

PRENOS SIGNALA KROZ REALNE KANALE I DIJAGRAM OKA

Neka se radi o prenosu u osnovnom opsegu učestanosti i neka na ulaz sistema dolazi standardni signal:

$$u_u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x(t - kT)$$

Odziv sistema na emitovani signal je:

$$u_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(t - kT)$$

Pošto se signalu u toku prenosa superponira i šum, rezultirajući signal na ulazu sklopa za odlučivanje je:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(t - kT) + \eta(t)$$

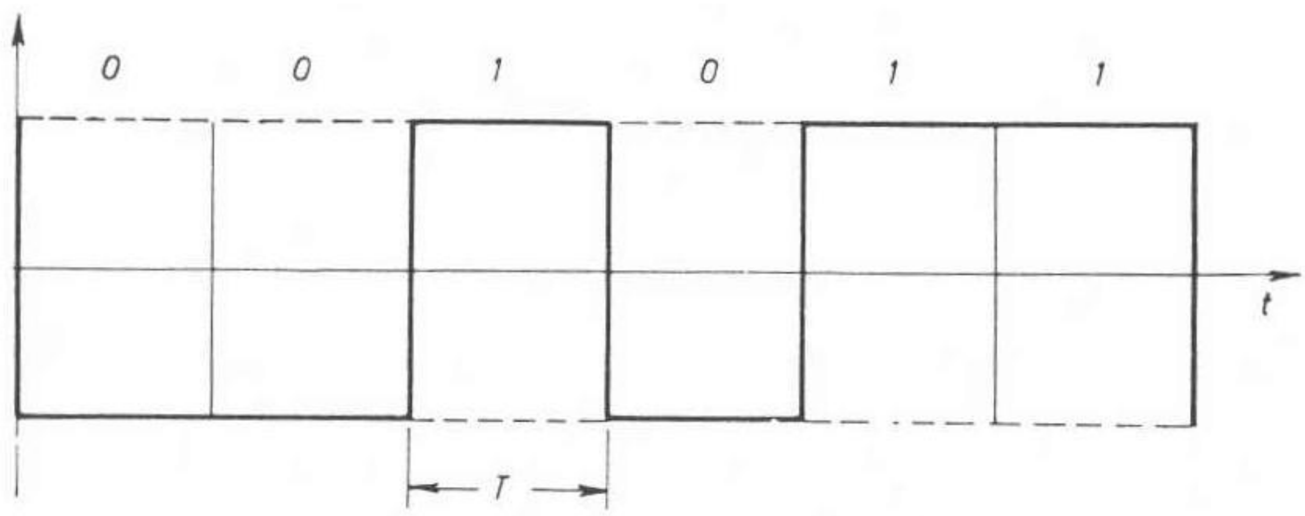
Neka se odbirci uzimaju u trenucima t=*n*T.

$$u(nT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(nT-kT)+\eta(nT)$$

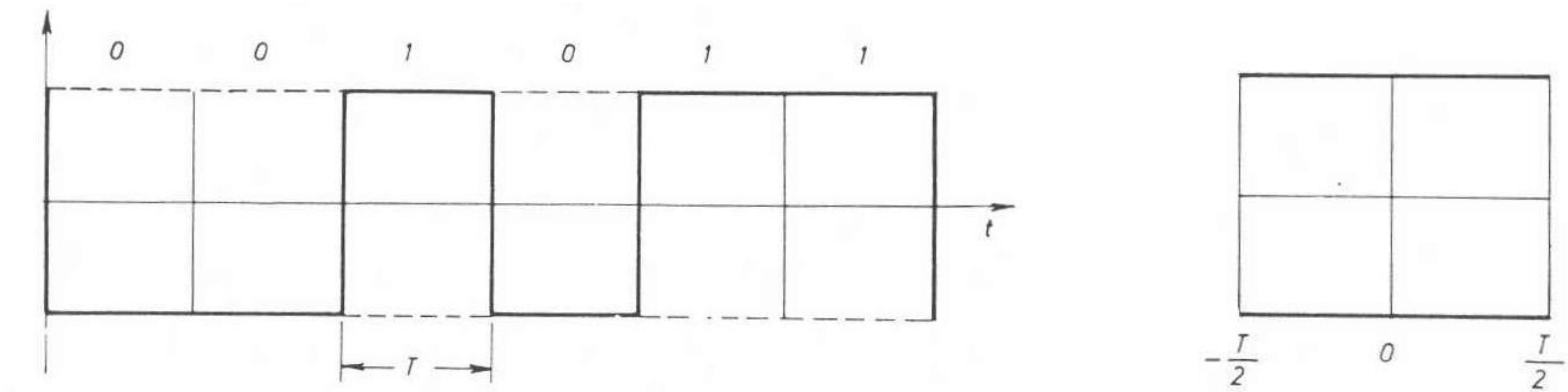
Ovaj *n*-ti odbirak može da se piše i u obliku:

$$u_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{n-k}+\eta_n=a_n y_0+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq n}}^{\infty} a_k y_{n-k}+\eta_n$$

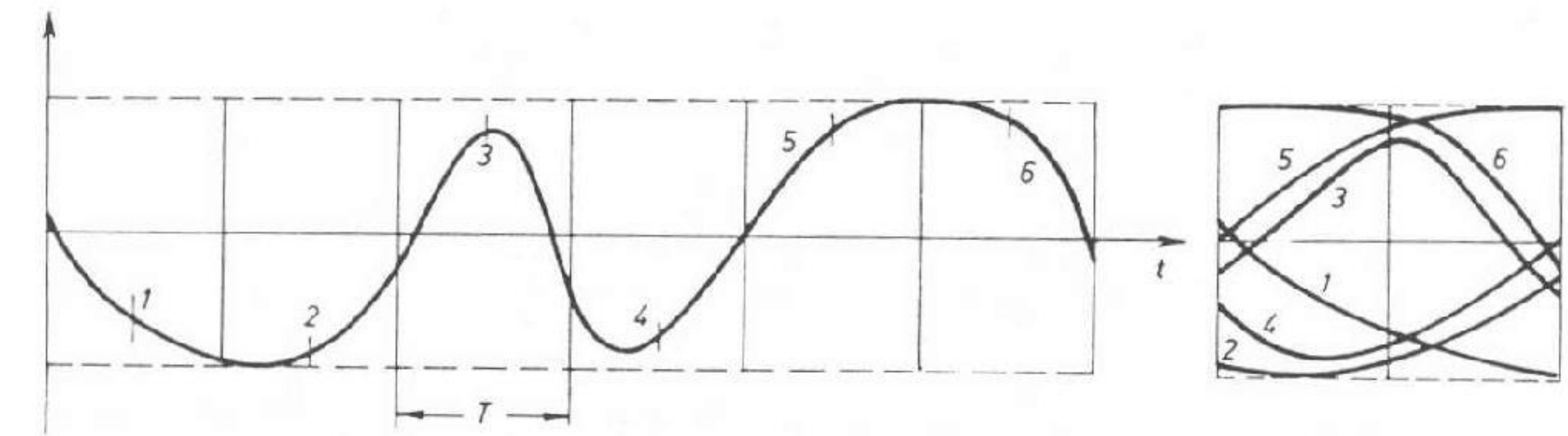
U slučaju da dio koji se ne odnosi na odbirak u n-tom intervalu nije jednak nuli postoji ISI. Analiza prisutne ISI se eksperimentalno može izvršiti na relativno jednostavan i efikasan način pomoću ***dijagrama oka***.
Posmatrajmo povorku pravougaonih polarnih impulsa kao na slici.



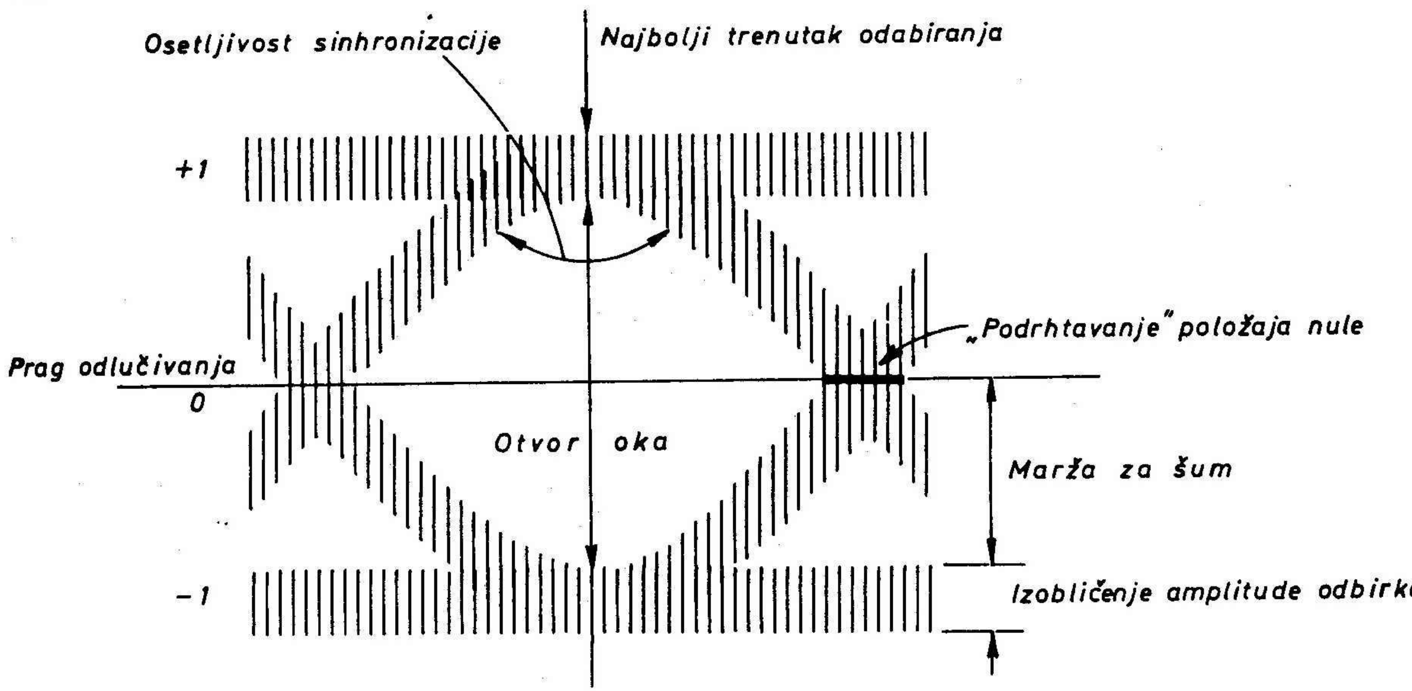
Ako bi se ovakav signal doveo na ulaz osciloskopa čija je vremenska baza podešena trajanju jednog signalizacionog intervala T, onda bi se na njegovom ekranu dobio dijagram kao na slici. To su dvije deblje izvučene horizontalne linije nastale preklapanjem signala iz svih signalizacionih intervala.



Međutim, na drugoj strani veze se nalazi izobličeni signal koji može da izgleda kao na slici, pa preklopljeni tragovi signala mogu sada da izgledaju drugačije:



Ovi dijelovi signala iz pojedinih signalizacionih intervala koji su preklopljeni jedan preko drugog daju dijagram oka. Naravno, ako se uzme dugačka povorka impulsa, mnoge linije ce se ispreplesti i obrazovaće se zadebljani tragovi. Oni su prikazani kao osjenčene površine na slici.



Otvor oka govori o tome kolika je intersimbolska interferencija: što je otvor oka veći to je interferencija manja. Isto tako, širina otvora daje indikaciju o tome koliki je vremenski interval u kome je moguće izabrati trenutak odabiranja. Drugim riječima, ta širina govori o osetljivosti sistema u pogledu tačnosti sinhronizacije: što je otvor širi, sistem je manje osetljiv na grešku u sinhrornzaciji. Najbolji trenutak odabiranja je tamo gdje je otvor oka najveći.

Sa slike se vidi da položaji tačaka u kojima signal prolazi kroz nulu nisu na istom mjestu, već obrazuju jednu zonu. To je bitno jer se u mnogim sistemima referentni signal takta za prijemni odabirač uzima iz samog primljenog digitalnog signala baš na osnovu njegovih presjeka sa nultom osom. Kako usled intersimbolske interferencije položaj tih presjeka sa nulom varira, to se kaže da greška u prenosu u ovom slučaju potiče od podrhtavanja takta prijemnog odabirača. Debljina osjenčenih tragova govori o izobličenju amplitude odbiraka.

Rastojanje od linije koja označava prag odlučivanja pa do najbliže ivice traga, do one koja se nalazi sa unutrašnje strane otvora oka, predstavlja maržu za šum u dotičnom trenutku odabiranja. Naime, dokle god je šum manji od ove vrijednosti, on i kad se superponira amplitudi odgovarajućeg odbirka, još uvijek ne utiče na ispravnost donesene odluke.

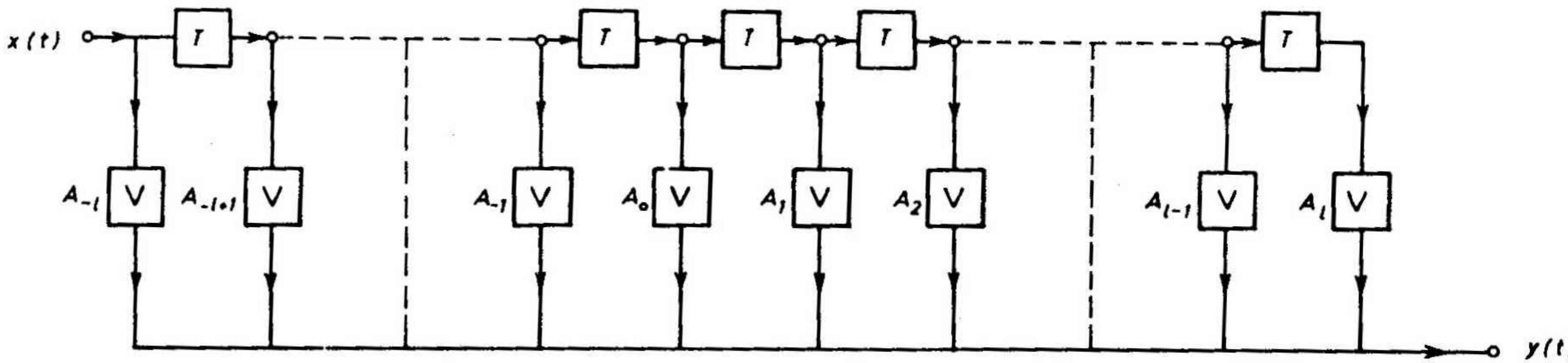
Ovdje je bilo riječi o dijagramima oka za slučaj kad se oni snimaju pri prenosu binarnih signala. Isto tako je moguće snimati ove dijagrame i kada se radi o M-arnim signalima, samo se u tom slučaju dobija M-1 oblik oka jedan ispod drugog.

PROBLEM KOREKCIJE I TRANSVERZALNI FILTAR

Prethodna izlaganja pokazala su da funkcija prenosa sistema mora da zadovolji Nyquistove kriterijume kako u njemu ne bi došlo do intersimbolske interferencije. Međutim, ti uslovi nikada ne mogu idealno da se ostvare. Nesavršenost u izgradnji filtara za oblikovanje impulsa, nepoznavanje tačnih karakteristika kanala, njihove varijacije u vremenu, ili, napokon, rad u sistemima sa komutacijom kanala gdje se često razlikuje kanal od kanala, čine da je gotovo uvijek neophodno da se vrši korekcija funkcije prenosa sistema. Ta korekcija ima za cilj da se amplitudska i fazna karakteristika sistema u praktičnim uslovima mogu lako dovesti na onaj oblik koji zahtijevaju Nyquistovi kriterijumi, ili, koji im je bar toliko blizak da se i u tim realnim uslovima intersimbolska interferencija može smatrati zanemarljivom.

Ovaj zadatak obavlja se pomoću korektora. To je tzv. ***transverzalni filtar***. Osnovnu ideju za njegovu konstrukciju dao je još 1940. godine *Kallmann* (***Kallmann-ov filtar***). S obzirom na njegovu adaptabilnost on se koristi gotovo u svim sistemima za prenos podataka. On je relativno jednostavan. Sastoji se iz kaskadne veze četvoropola označenih sa T koji predstavljaju liniju za kašnjenje. One su podešene na svom kraju i postavljene na jednakim rastojanjima, tako da kašnjenje između dva susjedna izvoda iznosi T (T je trajanje signalizacionog intervala). Ukupno ima $(2l+1)$ ovakvih izvoda.

Blok šema transverzalnog filtra je prikazana na slici.



Signal uzet sa svakog izvoda prolazi kroz njemu odgovarajući pojačavač. Pojačanja pojačavača A_{-l}, A_{-l+1}, ..., A_{-1}, A_0, A_1, A_2, ..., A_l mogu da se podešavaju i po svom iznosu i po znaku (pojačanje može biti manje od 1). Izlazni signali iz svih pojačavača se sabiraju i tako daju rezultantni izlazni signal.

Ako označimo ulazni signal u transverzalni filtar sa x(t), a njegov izlazni signal sa y(t), biće:

$$y(t) = A_{-l}x(t) + A_{-l+1}x(t-T) + \cdots + A_0 x(t-lT) + \cdots + A_l x(t-2lT) =$$

$$= \sum_{k=-l}^{l} A_k x[t-(k+l)T]$$

Ako se sa X(jω) označi Fourierova transformacija signala *x*(t), a sa Y(jω) Fourierova transformacija signala *y*(t), onda će funkcija prenosa transverzalnog filtra biti:

$$H_K(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=e^{-jlT\omega}\sum_{k=-l}^{l}A_k e^{-jkT\omega}=e^{-jlT\omega}H_k(j\omega)$$

Kada se pogleda ovaj izraz onda se vidi da se on sastoji iz dva karakteristična dijela. Prvi njegov faktor $e^{-jlT\omega}$ opisuje komponentu fazne funkcije koja linearno zavisi od učestanosti. Njom se unosi konstantno kašnjenje *lT*. Drugi faktor

$$H_K(j\omega)=\sum_{k=-l}^{l}A_k e^{-jkT\omega}$$

predstavlja periodičnu funkciju po ω čija je perioda 2π/T. Oblik ove funkcije zavisi od kašnjenja T i koeficijenata A_k. Prema tome, pogodnim izborom kašnjenja T, koeficijenata A_k i njihovim ukupnim brojem (2*l*+1), može se podešavati oblik funkcije $H_k(j\omega)$ u opsegu učestanosti $|f|\leq 1/2T$ koji odgovara jednoj njenoj periodi 2π/T. Zato transverzalni filtar i može da obavi ulogu korektora.

Ako sistem prenosa ima funkciju prenosa $H_s(j\omega)$, a prema Nyquistovom kriterijumu je potrebno da ona bude $H(j\omega)$, onda se kaskadnim vezivanjem transverzalnog filtra i sistema prenosa dolazi do relacije:

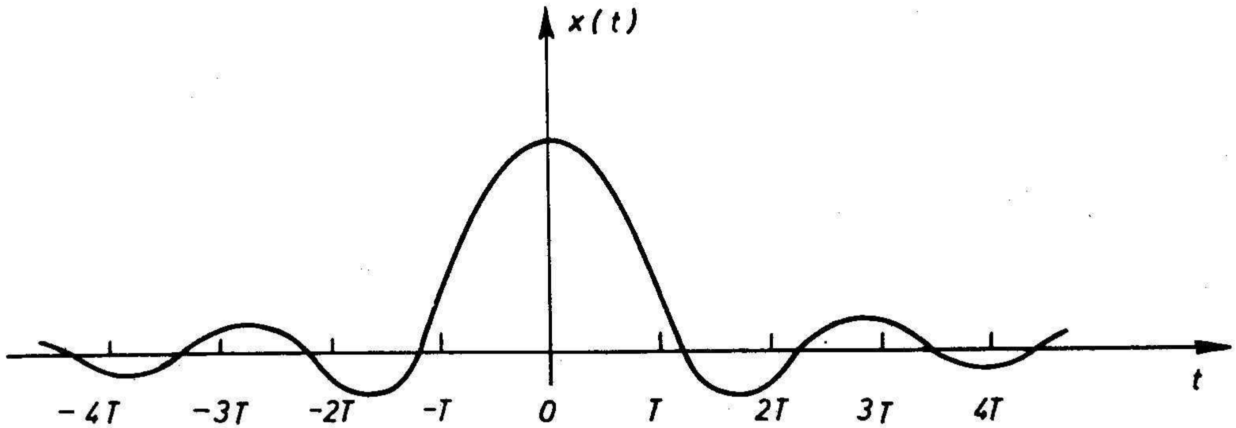
$$H_s(j\omega)H_K(j\omega) \cong e^{-jlT\omega}H(j\omega)$$

Ona omogućava da se dimenzioniše transverzalni filtar. Ako se uvrsti dobijeni izraz za H_K, dobija se:

$$H_k(j\omega) = \sum_{k=-l}^{l} A_k e^{-jkT\omega} \cong \frac{H(j\omega)}{H_s(j\omega)} = F(j\omega)$$

U gornjim relacijama stavljen je znak približnosti jer se radi o aproksimaciji. U stvari od funkcije $F(j\omega)$ uzeće se dio koji se nalazi u intervalu $|\omega| \leq \pi/T$, i od njega će se napraviti periodična funkcija. Njenim razvijanjem u Fourierov red dobija se izraz koji kada se izjednači sa sumom iz gornjeg izraza omogućava da se metodom identifikacije odrede koeficijenti A_k. Istovremeno, moći će se procijeniti koliko koeficijenata treba uzeti u obzir za željenu aproksimaciju (odrediće se broj *l*). Što je *l* veće biće i aproksimacija bolja.
Prema tome, kada se pronađu koeficijenti A_k biće određeni pojačavači, a kad se odredi *l* znaće se i linija za kašnjenje, pa će i transverzalni filtar u potpunosti biti određen.

Ilustracije radi, pokažimo kako se transverzalnim filtrom kao korektorom može obezbijediti da se u nekom sistemu prenosa zadovolji prvi Nyquistov kriterijum.
Pretpostavimo da je odziv toga sistema na digitalni signal koji je poslat u jednom signalizacionom intervalu čije je trajanje T kao na slici.



Odmah se vidi da Prvi Nyquistov kriterijum nije ispunjen i da u tačkama odabiranja t=*m*T, gdje je *m*=±1, ±2, ... postoji intersimbolska interferencija.
Ako datom sistemu prenosa kaskadno vežemo transverzalni filtar i ako se sistem pobudi signalom *x*(t), na izlazu se dobija se signal *y*(t) u obliku:

$$y(t) = A_{-l}x(t) + A_{-l+1}x(t-T) + \cdots + A_0 x(t-lT) + \cdots + A_l x(t-2lT) =$$

$$= \sum_{\mathrm{k=-l}}^{\mathrm{l}} \mathrm{A_k} x[t-(k+l)T]$$

Prvi Nyquistov kriterijum će biti zadovoljen ako y(t) zadovoljava uslov da je:

$$y[(m+l)T] = \begin{cases} y_0, & \mathrm{m} = 0 \\ 0, & \mathrm{m} = \pm 1, \pm 2, \pm \cdots \end{cases}$$

Medutim, ovaj uslov upotrebom transverzalnog filtra ne može da se zadovolji u svim tačkama mT, već samo u onoliko tačaka koliko grana ima filtar. Tj. Nyquistov kriterijum može da se zadovolji u konačnom broju tačaka (2l+1). Tada uslov glasi:

$$y[(k+l)T] = \begin{cases} y_0, & \mathrm{k} = 0 \\ 0, & \mathrm{k} = \pm 1, \pm 2, \pm \cdots \pm l \end{cases}$$

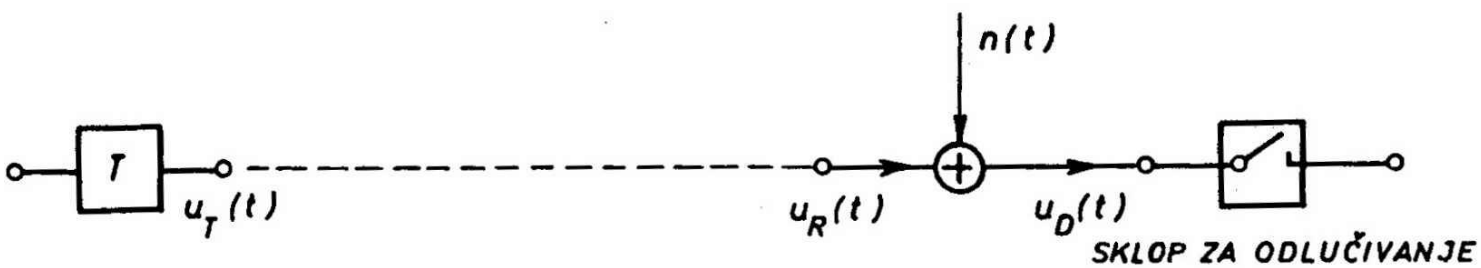
Ako se, sada, ovaj uslov uvrsti u opšti izraz za odziv sistema i za zadato x(t) napiše za svako k, dobiće se (2l+1) simultanih linearnih jednačina iz kojih se mogu pronaći svi koeficijenti A_k. Na taj način je osigurano da u 2l tačaka odabiranja odziv y(t) ima vrijednost nula.

UTICAJ SLUČAJNOG ŠUMA NA PRENOS DIGITALNIH SIGNALA U OSNOVNOM OPSEGU UČESTANOSTI

Pored pojave intersimbolske interferencije, drugo važno pitanje u analizi prenosa digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti odnosi se na izučavanje uticaja šuma.
Slučajan šum je neminovno prisutan na ulazu svakog prijemnika. Po svojoj prirodi, to je slučajan proces koji slijedi Gaussov zakon raspodjele amplituda i koji se može statistički opisati funkcijom gustine vjerovatnoće, datom sa:

$$p(U_N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{U_N^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 \text{ - varijansa, } \sigma^2=U_{Neff}^2=\overline{U_N^2}$$

Blok šema sistema za prenos digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti je:



Na ulazu u prijemnik, slučajni šum se superponira signalu, pa se zato često i kaže da je to ***aditivni šum***. Tako sabrani signal i šum stižu na ulaz sklopa za odlučivanje.
Ako sa $u_R(t)$ označimo signal na ulazu tog sklopa, a sa $n(t)$ šum, onda će, saglasno slici, signal na osnovu koga se donosi odluka biti:

$$u_{\mathrm{D}}(\mathrm{t})=u_{\mathrm{R}}(\mathrm{t})+n(\mathrm{t})$$

Razmatraćemo one signale kod kojih je značajni parametar njihova amplituda u datom trenutku vremena. Zato se sklopom za odlučivanje uzimaju odbirci ovog signala u svakom signalizacionom intervalu i porede sa nekom referentnom vrijednošću na osnovu čega se donosi odluka o vrijednosti značajnog parametra.
Ako sa $\mathrm{t}=m\mathrm{T}$, gdje je $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$ označimo trenutke odabiranja, onda će amplituda odbiraka u tim trenucima biti:

$$u_{\mathrm{D}}(m\mathrm{T})=u_{\mathrm{R}}(m\mathrm{T})+n(m\mathrm{T})$$

Jasno je da u zavisnosti od toga koliki je relativan iznos amplitude odbirka šuma u odnosu na amplitudu odbirka signala, ovaj poslednji može da bude toliko izmijenjen da prijemnik donese pogrešnu odluku. Kvantitativna ocjena ovog efekta se izražava vjerovatnoćom greške. Na osnovu nje se međusobno mogu porediti različiti sistemi, ali izraz za vjerovatnoću greške pruža i mogućnost da se sagleda uticaj raznih parametara sistema i da se njenom minimizacijom optimizuje cijeli sistem.

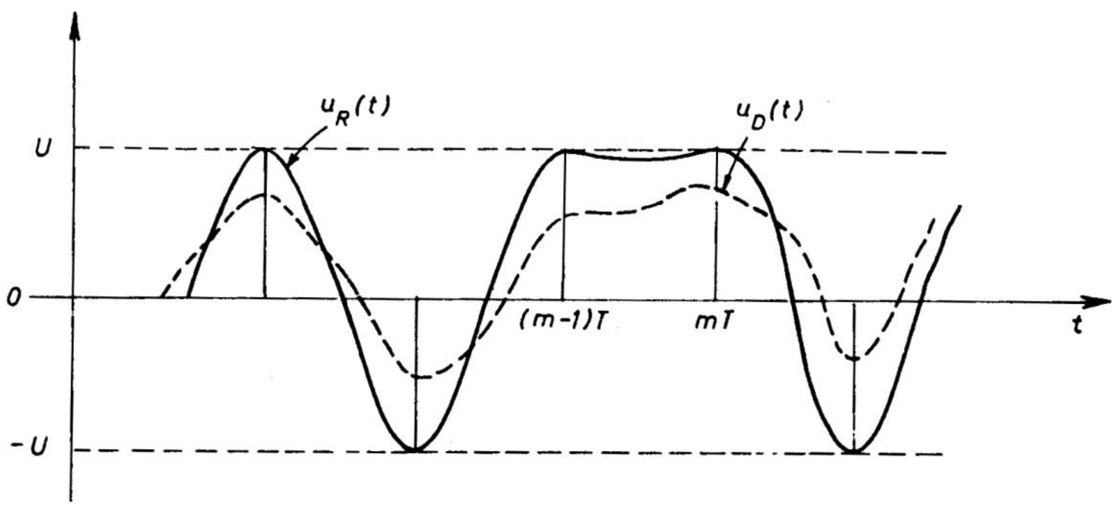
VJEROVATNOĆA GREŠKE PRI ODLUČIVANJU

Vjerovatnoća greške u odlučivanju biće izračunata za tri vrste digitalnih signala:

1. polarni binarni,
2. unipolarni binarni
3. M-arni signal

1. Polarni binarni signal

   Pretpostavimo da polarni binarni signal $u_R(t)$ na ulazu u sklop za odlučivanje izgleda kao na slici. Neka u trenucima odabiranja amplituda ovog signala $u_R(mT)$ kao značajan parametar ima jednu od dvije moguće vrijednosti $u_R(mT) = \pm U$.



Na istoj slici nacrtan je i signal u_D(t) koji je dobijen superpozicijom korisnog signala i šuma. Neka je vjerovatnoća da predajnik šalje binarni digit + 1, predstavljen amplitudom odbirka na prijemu U, jednaka P(U), a vjerovatnoća da se šalje digit -1, predstavljen amplitudom -U P(-U). Važi da je P(U)+ P(-U)=1.

Osim toga, pretpostavimo da na ulazu u sklop za odlučivanje šum *n*(t) predstavlja gausov slučajan proces čija je srednja vrijednost jednaka 0. On je okarakterisan funkcijom gustine vjerovatnoće:

$$p(U_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{U_N^2}{2\sigma^2}}$$

Razmatrajmo dvije situacije:

1. Predajnik uzastopno šalje binarnu jedinicu kojoj odgovara amplituda odbirka signala $u_R(mT)$=U. Sklopom za odlučivanje u regularnim trenucima vremena t=mT uzimaju se odbirci ulaznog signala u_D(t). Vrijednost ovih odbiraka će biti:

$$u_D(mT) = u_R(mT) + n(mT) = U + n(mT)$$

Kako je amplituda odbiraka šuma slučajna veličina, to će i amplituda odbiraka $u_D(mT)$ takođe biti slučajna veličina. Ako označimo ove slučajne veličine na sledeći način:

$$n(mT) = u_N$$

$$u_D(mT) = u_D$$

Imaćemo da je:

$$u_D = U + u_N$$

Raspodjela amplituda odbiraka u_D kao nove slučajne promjenljive, može da se opiše odgovarajućom funkcijom gustine vjerovatnoće $q_U(u_D)$. Ona se dobija transformacijom poznate gustine vjerovatnoće $p(u_N)$.

$$q_U(u_D)du_D = p(u_N)du_N$$

Vjerovatnoća da se amplituda rezultantnog odbirka u_D nalazi između u_D i u_D+du_D mora biti jednaka vjerovatnoći da amplituda šuma u_N bude između u_N i u_N+du_N. Saglasno definiciji funkcije gustine vjerovatnoće, biće:

$$q_U(u_D) = p(u_D - U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D-U)^2}{2\sigma^2}}$$

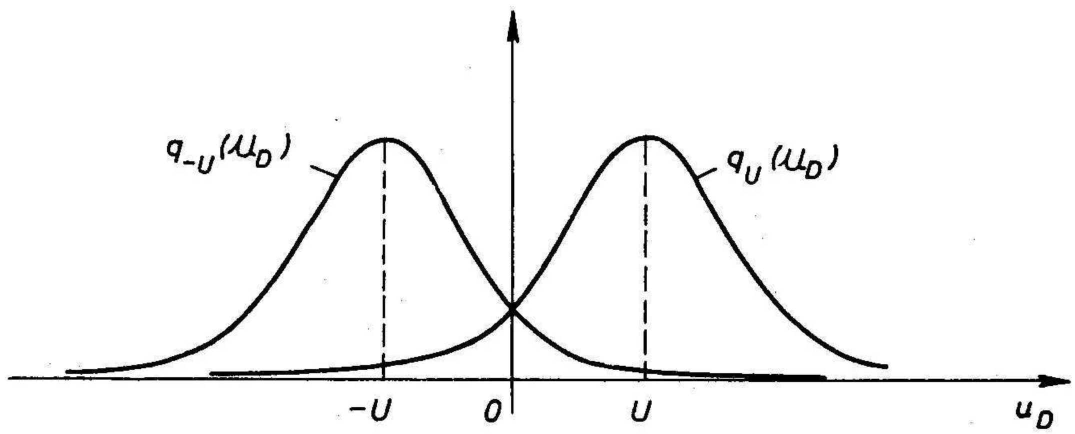
2. Predajnik uzastopno šalje binarnu nulu kojoj odgovara amplituda odbirka signala $u_R(mT)=$ -U. Sklopom za odlučivanje u regularnim trenucima vremena $t=mT$ uzimaju se odbirci ulaznog signala $u_D(t)$. Vrijednost ovih odbiraka će biti:

$$u_D = -U + u_N$$

Tj. funkcija gustine vjerovatnoće amplituda uzetih odbiraka kada se šalje logička nula je:

$$q_{-U}(u_D) = p(u_D + U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D+U)^2}{2\sigma^2}}$$

Funkcije $q_U(u_D)$ i $q_{-U}(u_D)$ prikazane su na slici. Na osnovu ove dvije funkcije gustine vjerovatnoće možemo odrediti vjerovatnoću bilo koje vrijednosti amplituda.



Sa ove slike je jasno da su u principu moguće sve vrijednosti amplituda odbiraka u_D pa se postavlja pitanje kako programirati postupak za donošenje odluke u sklopu za odlučivanje.
Prije svega, pretpostavimo da je, u nekoj dugoj povorci koju predajnik šalje, vjerovatnoća sa kojom se pojavljuje jedan bit jednaka vjerovatnoći sa kojom se pojavljuje drugi bit
(P(U) = P(-U) = 1/2). Zaključak je da se prag odluke u sklopu za odlučivanje treba postaviti na sredinu mogućih vrijednosti. Kako su te vrijednosti +U i -U, onda se za prag uzima vrijednost 0.
Dakle, prijemnik će raditi tako što će svaki odbirak čija je amplituda $u_D>0$ interpretirati kao binarnu brojku 1, a svaki odbirak čija je amplituda $u_D<0$ biti proglašen za -1.
Usled prisustva šuma može doći do greške. Greška će nastupiti svaki put kada se šalje binarna cifra 1, a amplituda napona odbirka bude $u_D < 0$ kao i kada se šalje -1, a amplituda bude $u_D>0$.
Analitički se ove greške izražavaju uslovnom vjerovatnoćom.

Ako se ša1je “1” amplituda odbirka korisnog signala iznosi U, pa uslovna vjerovatnoća da prijemnik donese pogrešnu odluku, tj. da je poslata cifra bila –1 iznosi:

$$P(-1|U) = P[(u_D < 0|U] = \int_{-\infty}^{0} q_U(u_D)du_D$$

U drugom slučaju greška nastaje ako se šalje binarna brojka –1 (amplituda korisnog signala iznosi –U, tako da uslovna vjerovatnoća da prijemnik pogriješi tako što će proglasiti da je poslata cifra bila 1, glasi:

$$P(1|-U) = P[(u_D > 0|-U] = \int_{0}^{\infty} q_{-U}(u_D)du_D$$

Sada će ukupna vjerovatnoća greške biti:

$$P_e = P(U)P(-1|U) + P(-U)P(1|-U)$$

Gore navedeni integrali su jednaki, tj. važi da je:

$$\int_{-\infty}^{0} q_U(u_D)du_D = \int_{0}^{\infty} q_{-U}(u_D)du_D$$

Kako je $P(U) = P(-U) = \frac{1}{2}$, konačno se dobija:

$$P_e = \int_0^{\infty} q_{-U}(u_D)du_D$$

tj.

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(u_D+U)^2}{2\sigma^2}}du_D = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}}^{\infty} e^{-z^2}dz =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-z^2}dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}erf\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

Uzimajući u obzir da je *erfc x* = 1- *erf x* komplementarna funkcija greške, konačno vjerovatnoću greške možemo da zapišemo u obliku:

$$P_e = \frac{1}{2}erfc\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

Napomenimo da je U razlika amplitude odbirka signala i vrijednosti na koju je postavljen prag odlučivanja, odnosno predstavlja ***polovinu razlike amplituda odbiraka*** koji odgovaraju binarnim brojkama + 1 i -1, a ***ne apsolutni odbirak.***