2. Unipolarni binarni signal

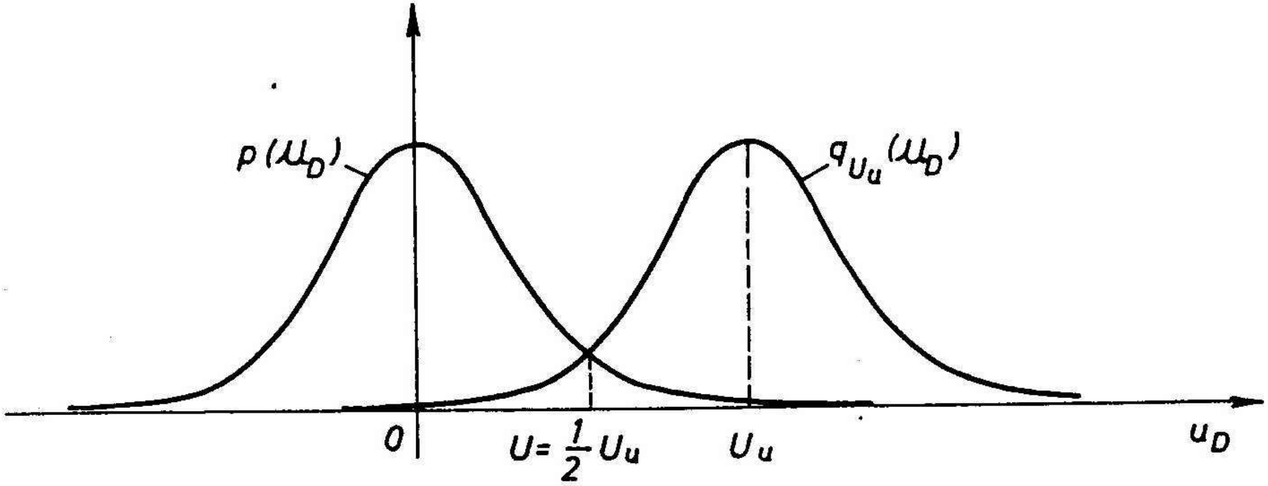
Pretpostavimo da predajnik šalje unipolarni binarni signal. Neka binarnoj “1” odgovara amplituda odbirka korisnog signala $u_R(t)$ na ulazu u sklop za odlučivanje jednaka $U_u$, a binarnoj “0” odgovara amplituda odbirka jednaka 0. Tada će amplituda odbirka rezultantnog signala $u_D(t)$ u slučaju da se šalje binarna “1” biti:

$$u_D = U_u + u_N$$

a u slučaju da se šalje binarna “0”:

$$u_D = u_N$$

Ovim slučajnim promjenljivim odgovaraju funkcije gustine vjerovatnoće prikazane na slici:



Ako predajnik šalje obje binarne brojke sa podjednakom vjerovatnoćom, onda će važiti relacija:

$$P(U) = P(0) = \frac{1}{2}$$

pa se opet intuitivno dolazi do zaključka da prag u sklopu za odlučivanje treba postaviti u sredinu između dvije očekivane vrijednosti $U_u$ i 0, tj. prag će biti postavljen na vrijednost:

$$U = \frac{1}{2} U_u$$

Daljom analizom se dolazi do izraza za vjerovatnoću greške:

$$P_e = P(U_u) P(0|U_u) + P(0) P(1|0)$$

Važi da je:

$$P(0|U_u) = P\left[u_D < \frac{U}{2} \middle| U\right] = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}U_u} q_{U_u}(u_D)\, du_D$$

i:

$$P(1|0) = P\left[u_D > \frac{U}{2} \middle| 0\right] = \int_{\frac{1}{2}U_u}^{\infty} p(u_D)\, du_D$$

Ove dvije površine su jednake, tj. P(1|0)= P(0|1), i P(0)=P(1)=1/2, pa je:

$$P_e = \int_{\frac{1}{2}U_u}^{\infty} p(u_D)du_D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\frac{1}{2}U_u}^{\infty} e^{-\frac{U_D^2}{2\sigma^2}}du_D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{U_u}{2\sqrt{2}\sigma}} e^{-z^2}dz =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}erf\,\frac{U_u/2}{\sqrt{2}\sigma}$$

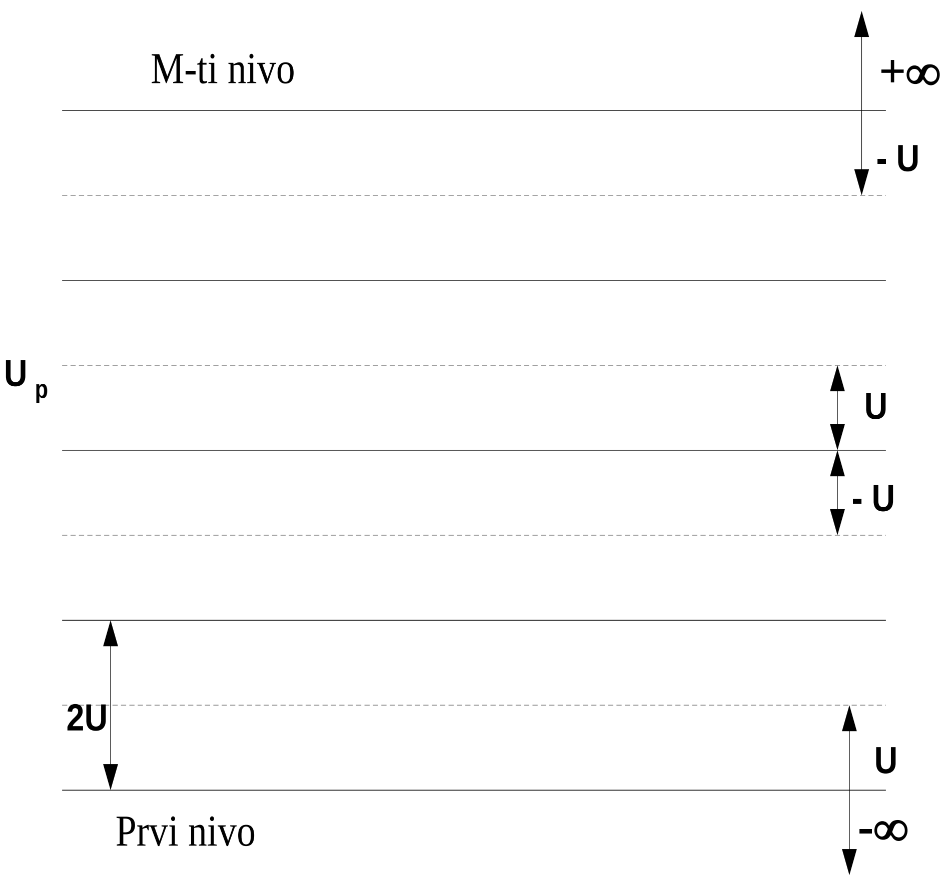
Konačno dobijamo da je:

$$P_e = \frac{1}{2}erfc\frac{U_u/2}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{1}{2}erfc\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

Vjerovatnoća greške u slučaju prenosa unipolarnog signala zavisi od karakteristike prisutnog šuma (σ) i polovine razlike amplituda odbiraka koji odgovaraju binarnim digitima 1 i 0, odnosno razlike amplituda odbirka signala ($U_u$ ili 0), i vrijednosti na koju je postavljen prag odlučivanja ($U=U_u/2$).

3. M-arni signal

Pretpostavimo da predajnik šalje M-arni digitalni signal. Amplituda odbiraka ovakvog signala može da ima jednu od M različitih vrijednosti. Neka su one uniformno raspoređene tako da se bilo koje dvije susjedne vrijednosti na ulazu u sklop za odlučivanje razlikuju za konstantnu vrijednost 2U. Pretpostavimo još i da se svi simboli u poruci šalju sa istom vjerovatnoćom ($P_i$=1/M). U ovim uslovima pragovi odlučivanja se postavljaju na sredinu izmedu dvije susjedne vrijednosti amplitude.




Do greške će doći u slučaju kad je amplituda odbirka šuma $u_N$ manja od -U i veća od U. U prvom slučaju prijemnik će pogrešno da donese odluku da je bila poslata neka niža vrijednost, a u drugom neka viša. Izuzetak su prvi i zadnji nivo, tj. slučaj kada odbirak ima najveću amplitudu i slučaj kada je amplituda odbirka najmanja. U tim slučajevima može da se griješi samo na jednu stranu, tj. kada odbirak ima najveću amplitudu, samo amplitude odbiraka šuma $u_N$<-U prouzrokuju grešku; slično, kad odbirak ima najmanju amplitudu samo odbirci šuma čije su amplitude $u_N$ > U dovode do greške.

Sada možemo da pronađemo izraz za vjerovatnoću greške.

Posmatrajmo prvi (najniži) nivo:
Vjerovatnoća da prvi simbol bude poslat je $P_1 = \frac{1}{M}$, a vjerovatnoća da šum bude manji od U je:

$$P(u_N < U) = \int_{-\infty}^{U} p(u_N) du_N$$

Vjerovatnoća da prvi simbol bude ispravno primljen je:

$$P_1 = \frac{1}{M} P(u_N < U) = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{U} p(u_N) du_N$$

Za najviši, M-ti nivo se na sličan način dolazi do izraza za vjerovatnoću da M-ti simbol bude ispravno primljen:

$$P_M = \frac{1}{M} P(u_N > -U) = \frac{1}{M} \int_{-U}^{\infty} p(u_N) du_N$$

Za sve ostale simbole vjerovatnoća da budu ispravno primljeni je:

$$P_2 = \frac{1}{M} P(-U < u_N < U) = \frac{1}{M} \int_{-U}^{U} p(u_N) du_N = P_3 = \ldots = P_{M-1}$$

Ukupna vjerovatnoća ispravnog prijema je data sa $P_K$:

$$P_K = P_1 + P_2 + \cdots + P_{M-1} + P_M = \frac{1}{M}\left[\int_{-\infty}^{U} p(u_N) du_N + (M-2)\int_{-U}^{U} p(u_N) du_N + \int_{-U}^{\infty} p(u_N) du_N\right] =$$

$$= \frac{1}{M}\left[1 + 2(M-1)\int_{0}^{U} p(u_N) du_N\right]$$

Ako uzmemo u obzir da je $p(u_N)$ Gaussova raspodjela, tj.

$$p(u_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{U_N^2}{2\sigma^2}}$$

Konačno se dobija da je vjerovatnoća ispravnog prijema data izrazom:

$$P_e = \frac{1}{M}\left[1 + (M-1)erf\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}\right]$$

Vjerovatnoća greške se sada lako dobija kao:

$$P_e = 1 - P_K = \frac{M-1}{M}erfc\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

pod uslovom da se svi simboli javljaju sa istom vjerovatnoćom.

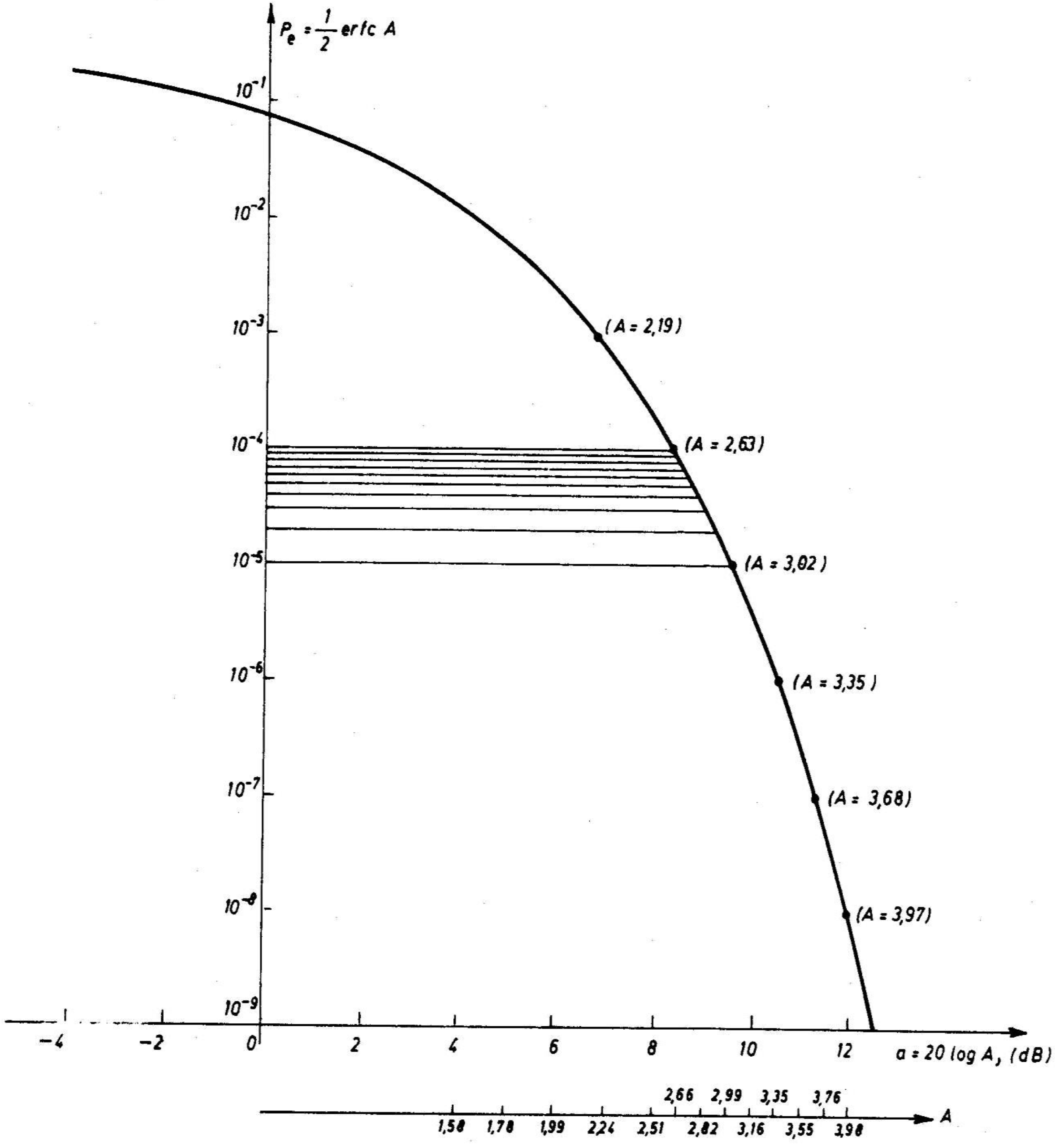
Za M=2 dobija se:

$$P_e = \frac{1}{2}erfc\frac{U}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{1}{2}erfcA$$

Što je u skladu sa izračunatom vrijednošću za polarne binarne signale. Argument A zavisi od polovine rastojanja između dva susjedna nivoa, kao i karakteristike šuma.

**Zaključak:**

Izvedena su tri značajna izraza koja omogućavaju da se izračuna vjerovatnoća greške u prenosu poruka polarnim binarnim signalom, unipolarnim binarnim signalom i M-arnim signalom. Upoređujući ih, vidi se da se vjerovatnoća greške u sva tri slučaja opisuje komplementarnom funkcijom greške. U odgovarajućoj razmjeri na slici je prikazana grafička predstava funkcije pomoću koje se u bilo kom od razmatranih slučajeva lako izračunava vjerovatnoća greške.



Vjerovatnoća greške uvijek zavisi od odnosa U/σ, gdje je U razlika amplitude odbirka signala i vrijednosti na koju je postavljen prag, a σ predstavlja efektivnu vrijednost šuma. Obje te veličine, U i σ su uzete na ulazu u sklop za odlučivanje. Na taj način, ovi obrasci vode računa samo o mehanizmu donošenja odluke u prisustvu aditivnog bijelog Gaussovog šuma i kao takvi ne uzimaju u obzir dio sistema za prenos koji se nalazi ispred sklopa za odlučivanje.

Očigledno, bilo bi mnogo cjelishodnije da se uzme u obzir i taj dio sistema i da se obuhvati njegov uticaj na odnos U/σ. Kao što se vidi na prethodnoj slici ovaj odnos treba maksimizirati kako bi vjerovatnoća greške bila što manja. Međutim, u tom slučaju treba voditi računa i o nizu drugih faktora o čemu će naknadno biti riječi.

# OPTIMIZACIJA SISTEMA ZA PRENOS U OSNOVNOM OPSEGU UČESTANOSTI

Prethodno je razmatran uticaj dvije značajne pojave na prenos digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti. To su intersimbolska interferencija i slučajan šum. Naredni korak podrazumijeva analizu uslova i definisanje zaključaka o tome šta treba uraditi pa da njihov, u pogledu kvaliteta prenosa, degradirajući uticaj bude što je moguće manji. Generalno, to se postiže optimizacijom prijemnika, optimizacijom predajnika, odnosno njihovom združenom optimizacijom. U stvari, cilj svake optimizacije je da se pronađe sistem koji je u pretpostavljenim uslovima, prema nekim usvojenim kriterijumima za kvalitet, najbolji. Medutim, čitav je niz pretpostavki koje mogu biti uzete u obzir u manjoj ili većoj mjeri, brojni su i međusobno različiti i kriterijumi o kvalitetu. Stoga i odgovori na pitanje koji je to sistem koji je optimalan, imaju smisla samo onda kada se znaju svi postavljeni uslovi i svi kriterijumi. U narednim analizama kriterijum za ocjenu kvaliteta sistema biće vjerovatnoća greške.

Kako smo pokazali, izraz za vjerovatnoću greške zavisi od odnosa $U/\sigma$, i to tako da je vjerovatnoća greške manja što je navedeni odnos veći. Stoga će cilj optimizacije biti maksimiziranje odnosa $U/\sigma$.

Kako bi analiza imala opštiji karakter, razmatraćemo jedan M-arni signal koji se na ulazu u sistem ili neki njegov dio opisuje izrazom:

$$u_u(t) = \sum_{-N}^{N} a_k x(t-kT)$$

dok je odziv sistema na pobudu standardnim impulsom:

$$u_i(t) = \sum_{-N}^{N} a_k y(t-kT)$$

$x$(t) je standardni signal, koji je unaprijed poznat,
$y$(t) je odziv sistema na pobudu standardnim impulsom,
T je trajanje signalizacionog intervala,
koeficijent $a_k$ u k-tom signalizacionom intervalu je jednak jednoj od M diskretnih vrijednosti $s_1$, $s_2$, . . ., $s_M$ koju može da ima značajni parametar signala i koja opisuju prenošenu poruku.

Pretpostavimo da se diskretne vrijednosti $s_i$, $s_{i-1}$ na predaji razlikuju za neku konstantu, tj. $s_i - s_{i-1} = 2a$, tako da će $a_k$ uvijek da ima jednu od sledećih vrijednosti:

$$a_k = s_i = \begin{cases} 0, \ \pm 2a, \ \pm 4a, \ \pm \ \cdots \ \pm (\text{M-1})a & ;\text{M-neparno} \\ \pm a, \ \pm 3a, \ \pm 5a, \pm \ \cdots \ \pm (\text{M-1})a & ;\text{M-parno} \end{cases}$$

Emitovani signal $u_u(t)=\sum_{-N}^{N} a_k x(t-kT)$ se prenosi linijom veze, pa ako sa $y(t_m)$ označimo amplitudu odbirka odziva $y$(t) na standardni signal $x$(t), razlika dvije susjedne amplitude odbiraka M-arnog signala na mjestu prijema biće:

$$s_i y(t_m) - s_{i-1} y(t_m) = 2U = 2ay(t_m)$$

Pod uslovom da su sve vrijednosti $s_i$ jednako vjerovatne i da je prag odlučivanja za dvije susjedne vrijednosti postavljen na sredinu između njih, za vjerovatnoću greške važi izraz:

$$P_e = \frac{M-1}{M} erfc \frac{ay(t_m)}{\sqrt{2}\sigma}$$

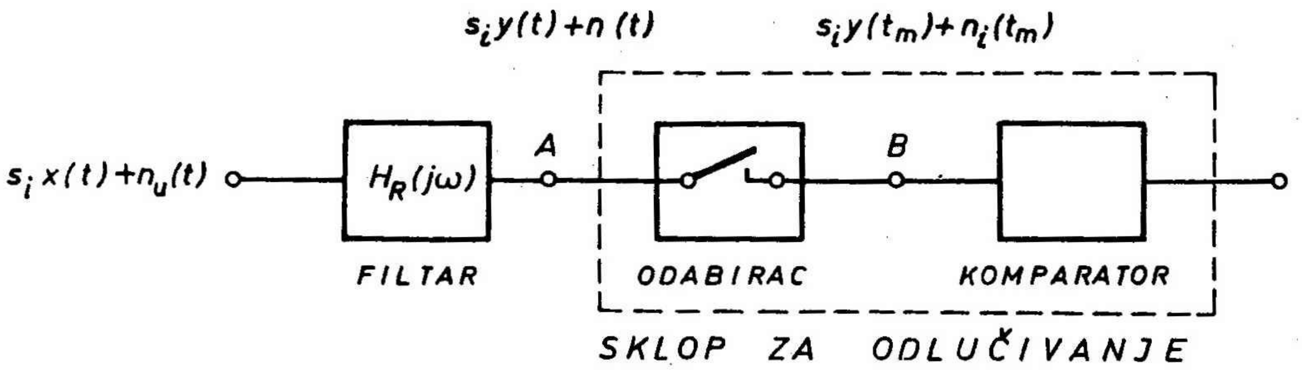
U ovom izrazu, argument komplementarne funkcije greške koji treba maksimizirati napisan je u podesnom obliku. On zavisi od toga koliko se međusobno razlikuju dvije susjedne vrijednosti značajnog parametra izabrane na predaji, zavisi od toga kakav je standardni odziv i njegov odbirak i zavisi od šuma na ulazu u sklop za odlučivanje.

U daljoj analizi, razmatraćemo dva značajna slučaja:

1. Optimizacija sistema kada u njemu ***ne postoji*** intersimbolska interferencija
2. Optimizacija sistema u kome istovremeno treba ispuniti i uslove da u njemu ne dođe do intersimbolske interferencije.

# OPTIMIZACIJA SISTEMA KADA U NJEMU NE POSTOJI ISI OPTIMALNI FILTAR

Posmatrajmo sistem za prenos digitalnih signala čiji je prijemni dio prikazan blok šemom:




Kao što se vidi, na ulazu u prijemnik ispred sklopa za odlučivanje nalazi se prijemni filtar. Očigledno je da njegovo prisustvo utiče i na signal i na šum koji dolaze na ulaz u odabirač. Sada se postavlja pitanje da li je moguće izborom ovog filtra uticati na to da se maksimizira argument komplementarne funkcije greške U/σ (minimizira vjerovatnoća greške).
Odgovor na ovo pitanje je potvrdan. Filtar kojim se koriguje funkcija prenosa sistema kako bi se povećao navedeni odnos se naziva ***optimalni filtar***. Pri tome, treba imati u vidu da je optimizacija moguća pod određenim uslovima.
Smatraćemo da je vremenska zavisnost M-arnog digitalnog signala određena standardnim signalom *x*(t) čije je trajanje strogo ograničeno na odgovarajući signalizacioni interval čije je trajanje T. Pretpostavimo još da u sistemu, od predajnika do ulaza u prijemnik, intersimbolska interferencija ne postoji.

Uz ove dvije pretpostavke zadatak optimizacije može se formulisati na sledeći način:
Kada nema intersimbolske interferencije, a na ulazu u prijemni filtar u jednom posmatranom signalizacionom intervalu je prisutan poznati signal

$$u_{Su}(t) = s_i x(t), \qquad 1 \le i \le M$$

pri čemu postoji aditivni bijeli Gaussov šum $n_u(t)$ čija je srednja vrijednost jednaka 0, kako treba izabrati funkciju prenosa prijemnog filtra $H_R(j\omega)$, pa da odnos amplitude odbirka $y(t_m)$ standardnog odziva i efektivne vrijednosti šuma na izlazu iz filtra $(y(t_m)/\sigma)$ bude maksimalan?

Može se tražiti maksimalna vrijednost izraza $y(t_m)/\sigma$, mada je nekada jednostavnije uzeti odnos kvadrata ovih veličina (u pogledu maksimiziranjanja nema razlike):

$$A_N = \frac{y^2(t_m)}{\sigma^2} = \frac{y^2(t_m)}{\overline{n_i^2(t)}}$$

Vrijednost *a* je konstanta, pa ona nema značaja prilikom maksimiziranja, tako da cijelu analizu možemo da sprovedemo tako što ćemo uzeti da se filtar $H_R(j\omega)$ pobuđuje signalom $x(t)$ koji na izlazu daje odziv $y(t)$. Uz pretpostavku da je $X(j\omega)$ Fourierova transformacija $x(t)$, odziv je:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

pa je tražena vrijednost amplitude odbirka ovog signala u trenutku $t=t_m$ jednaka:

$$y(t_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t_m}d\omega$$

Što se tiče efektivne vrijednosti šuma na izlazu iz filtra, nju ćemo pronaći na sledeći način. Neka je šum na ulazu u filtar specificiran spektralnom gustinom snage $S_N(\omega)$. Tada će spektralna gustina snage šuma $n_i(t)$ na izlazu iz filtra biti:

$$S_{Ni}(\omega) = \left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)$$

Srednja kvadratna vrijednost šuma je jednaka kvadratu njegove efektivne vrijednosti. Zato je ona istovremeno jednaka i srednjoj snazi šuma na otporniku otpornosti 1Ω, pod uslovom da slučajna funkcija $n_i(t)$ opisuje napon šuma na njegovim krajevima. Na osnovu ovoga biće:

$$\sigma^2 = u_{Neff}^2 = \overline{n_i^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{Ni}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)d\omega$$

Obrazujmo sada odnos $A_N$, uz napomenu da važi:

$\overline{n_i^2(t)} = \overline{n_i^2(t_m)}$ i $y^2(t_m) = \left|y(t_m)\right|^2$ , jer je $y(t)$ realna funkcija vremena.

$$A_N = \frac{\left|y(t_m)\right|^2}{\overline{n_i^2(t)}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t_m}d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)d\omega}$$

Da bi se pronašla funkcija prenosa $H_R(j\omega)$ koja čini ovaj odnos maksimalnim, potrebno je primijeniti Schwarzovu nejednakost. Ta nejednakost definiše da dvije kompleksne funkcije $F_1(j\omega)$ i $F_2(j\omega)$ uvijek zadovoljavaju sledeću relaciju:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2(j\omega)d\omega\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|F_1(j\omega)\right|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty}\left|F_2(j\omega)\right|^2 d\omega$$

Znak jednakosti u ovom izrazu važi u slučaju kada je

$$F_1(j\omega) = kF_2^*(j\omega)$$

k je proizvoljna konstanta. Ako usvojimo da je:

$$F_1(j\omega) = H_R(j\omega)S_N^{\frac{1}{2}}(\omega)$$

$$F_2(j\omega) = X(j\omega)S_N^{-\frac{1}{2}}(\omega)e^{j\omega t_m}$$

dobija se:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t_m}d\omega\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty}\left|X(j\omega)\right|^2 S_N^{-1}(\omega)d\omega$$

Saglasno gornjem izrazu važi da je:

$$A_N = \frac{|y(t_m)|^2}{\overline{n_i^2(t)}} \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{S_N(\omega)} d\omega$$

Maksimalna vrijednost $A_N$ se postiže u slučaju znaka jednakosti, pa je:

$$A_{N\max} = \left[ \frac{|y(t_m)|^2}{\overline{n_i^2(t)}} \right]_{\max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{S_N(\omega)} d\omega$$

Kako je u tom slučaju $F_1(j\omega) = kF_2^*(j\omega)$ dobija se izraz za optimalni filtar

$$H_R(j\omega) = H_{Ropt}(j\omega) = k\frac{X^*(j\omega)}{S_N(\omega)} e^{-j\omega t_m} = k\frac{X(-j\omega)}{S_N(\omega)} e^{-j\omega t_m}$$

Izvedeni izraz pokazuje da funkcija prenosa optimalnog filtra zavisi i od signala i od šuma na njegovom ulazu.

Postoji više vrsta optimalnog filtra. Navešćemo neke od njih.

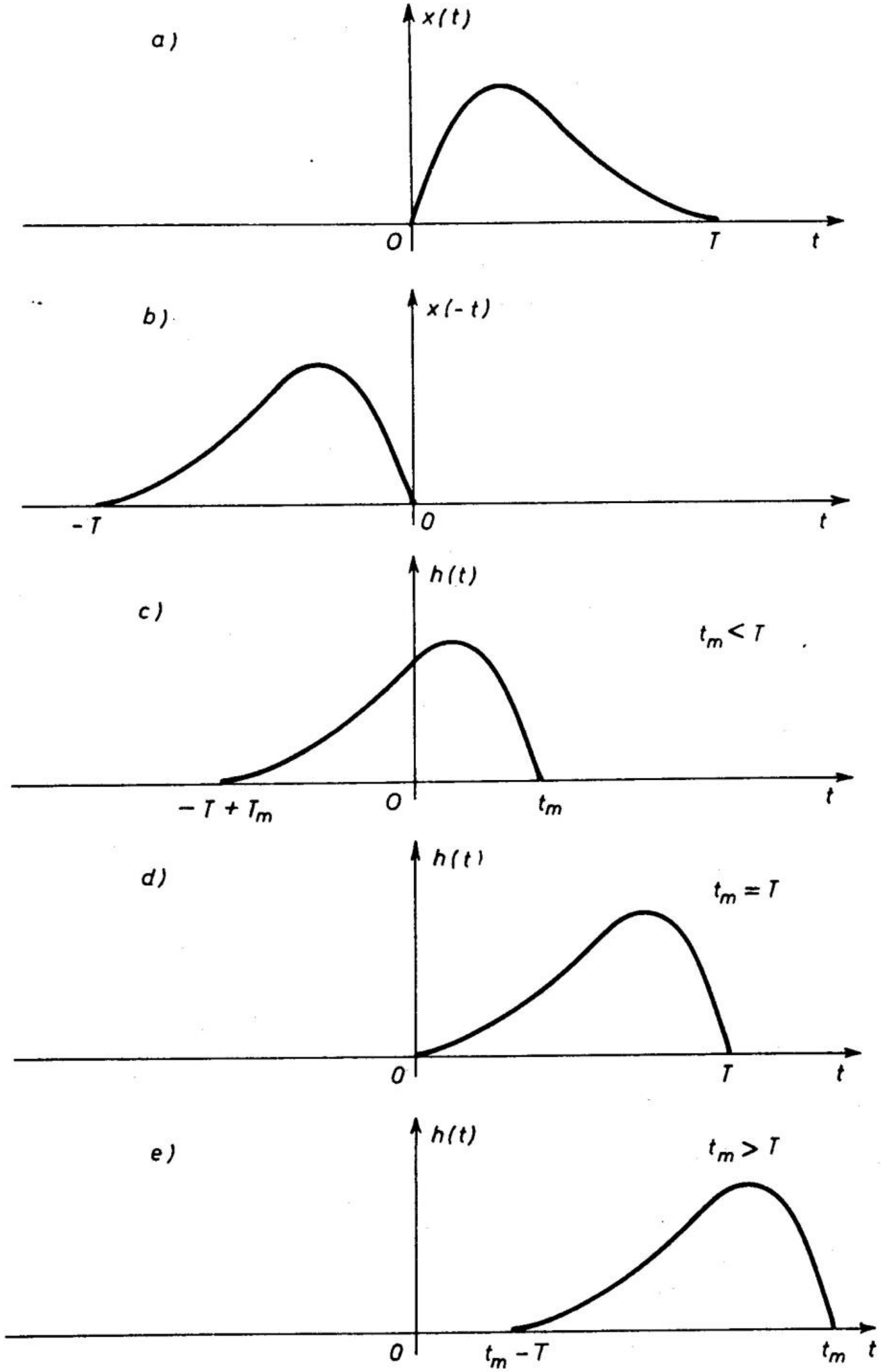
## *Podešeni filtar*

Posmatrajmo optimalni filtar koji funkcioniše u uslovima kada na njegovom ulazu postoji bijeli šum. Tada je spektralna gustina snage ovog šuma $S_N(\omega)=S_N$ konstantna u cijelom opsegu učestanosti. Ako se ovo uvrsti u izraz za $H_{Ropt}(j\omega)$, dobiće se da impulsni odziv ovog optimalnog filtra iznosi:

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_{Ropt}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{k}{S_N}\int_{-\infty}^{\infty}X(-j\omega)e^{j\omega(t-t_m)}d\omega$$

$$h(t)=\frac{k}{S_N}x(t_m-t)$$

Ovaj izraz pokazuje da je impulsni odziv optimalnog filtra, kad je na njegovom ulazu bijeli šum, određen signalom $x(t)$. Dakle, u pretpostavljenim uslovima, da bi se izvršila optimizacija, filtar mora biti podešen obliku signala, Zato se ovakav filtar i naziva ***podešenim filtrom***.




Na početku ove analize pretpostavljeno je da signal $x(t)$ ima konačno trajanje T. Na slici *a*) je prikazan signal $x(t)$, na slici *b*) njegov lik u ogledalu $x(-t)$, a na ostale tri slike odziv $h(t)$ za slučajeve kada je $t_m$<T, $t_m$=T i $t_m$>T.

U prvom slučaju kada je $t_m$<T (slika *c*), impulsni odziv postoji i za vrijeme $t$<0. Dakle, takav sistem fizički nije ostvarljiv.

U ostala dva slučaja ($t_m$=T i $t_m$>T) impulsni odziv $h(t)=0$ za $t<0$, pa je uslov fizičke ostvarljivosti ispunjen. Po pitanju kvaliteta bolje je da se češće uzimaju odbirci, tj. poželjno je da vrijeme $t_m$ bude što manje kako bi se odluke donosile što češće. Stoga se za podešeni filtar uzima da je $t_m$=T.

Prema tome, na izlazu iz podešenog filtra odnos odbirka $y\,(t_m)$ signala $y(t)$ i efektivne vrijednosti šuma, dostiže svoj maksimum kad je trenutak odabiranja $t_m$ jednak T, a to znači u trenutku u kome je cijeli signal $x(t)$ već u prijemniku.

Sada je maksimalna vrijednost $A_N$ na izlazu iz podešenog filtra:

$$A_{N\max} = \left[ \frac{\left| y\left(t_m\right) \right|^2}{\overline{n_i^2(t)}} \right]_{\max} = \left[ \frac{\left| y\left(t_m\right) \right|^2}{\sigma^2} \right]_{\max} = \frac{1}{S_N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| X\left(j\omega\right) \right|^2 d\omega = \frac{W_x}{S_N}$$

gdje $W_x$ predstavlja ukupnu energiju standardnog signala $x(t)$ na ulazu u filtar, a $S_N$ je spektralna gustina snage bijelog šuma na tom istom ulazu.

Dobijeni rezultat dovodi do sledećeg zaključka: **odnos kvadrata amplitude odbirka odziva i kvadrata efektivne vrijednosti šuma ne zavisi za podešeni filtar od oblika pobudnog signala *x*(*t*), već zavisi od njegove energije.** To znači da različiti signali koji nose istu energiju mogu dati istu vjerovatnoću greške. Ovo je specifično svojstvo podešenog filtra.

Isto važi i za amplitudu odbirka $y(t_m)$, jer ona iznosi:

$$y(t_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{X^*(j\omega)}{S_N} e^{-j\omega t_m} X(j\omega) e^{j\omega t_m} d\omega = k \frac{W_x}{S_N}$$

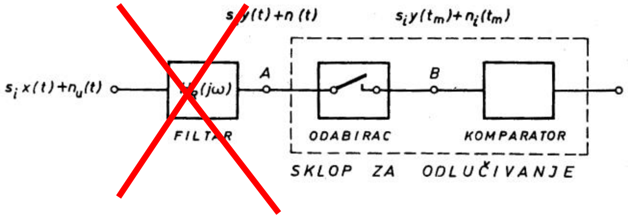
**Oblik standardnog signala je u ovom slučaju odredio oblik funkcije prenosa filtra, ali ne i njegov izlaz.**

## *Korelator*

Predstavlja jednu varijantu podešenog filtra. To je prijemnik digitalnih signala koji ima iste performanse kao i prijemnik sa podešenim filtrom, ali se realizuje bez klasičnog filtra. Do njegovog dizajna dolazi se na sledeći način.

Pretpostavimo da na ulaz dolazi složeni napon:

$$u_u(t) = x(t) + n_u(t)$$




Impulsni odziv podešenog filtra je:

$$h(t) = \frac{k}{S_N} x(t_m - t)$$

Izlazni signal $u_i(t)$ se dobija kao konvolucija ulaznog signala i impulsnog odziva sistema:

$$u_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_u(\tau) h(t-\tau) d\tau = \frac{k}{S_N} \int_{-\infty}^{\infty} u_u(\tau) x(t_m - t + \tau) d\tau$$

Sada je cilj da se utvrdi kako se može dobiti identičan izlaz bez upotrebe podešenog filtra.

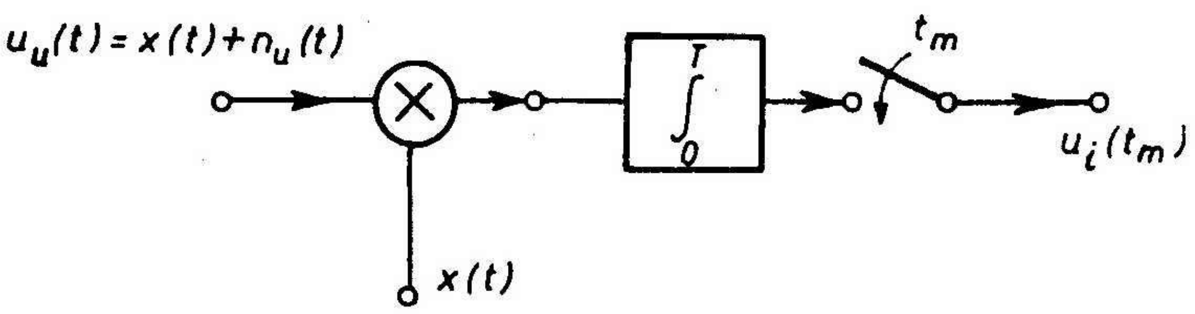
Odbirak na osnovu koga se donosi odluka u trenutku $t_m$ ima amplitudu:

$$u_i(t_m) = \frac{k}{S_N} \int_{-\infty}^{\infty} u_u(\tau) x(\tau) d\tau$$

Kako je trajanje signala $x(t)$ ograničeno na interval od 0 do T=$t_m$, to se granice integrala mogu ograničiti tako da je:

$$u_i(t_m) = u_i(T) = \frac{k}{S_N} \int_{0}^{t_m = T} u_u(\tau) x(\tau) d\tau$$

Ovaj izraz pokazuje kako je moguće konstruisati prijemnik na drugi način. On je prikazan na slici. Na njegovom ulazu se nalazi produktni modulator u kom se množe ulazni signal i signal iz lokalnog oscilatora.



Nakon toga, njihov proizvod se integrali integratorom i odbirak se uzima na njegovom izlazu u trenutku $t_m$=T. Naravno, po završetku jednog signalizacionog intervala, svi inertni elementi moraju da rasterete svoje električno opterećenje kako bi proces u svakom intervalu T bio potpuno nezavisan.

Kako se u ovom prijemniku obavlja koherentna ili sinhrona demodulacija i pošto se u njemu korelira dolazeći signal $x(t)$ zajedno sa aditivnim šumom $n_u(t)$ sa istim takvim poznatim signalom $x(t)$ iz lokalnog oscilatora, to mu je i dato ime ***korelator ili korelacioni prijemnik***.

Vjerovatnoća pojave greške na izlazu iz prijemnika je ista kao i kod podešenog filtra.

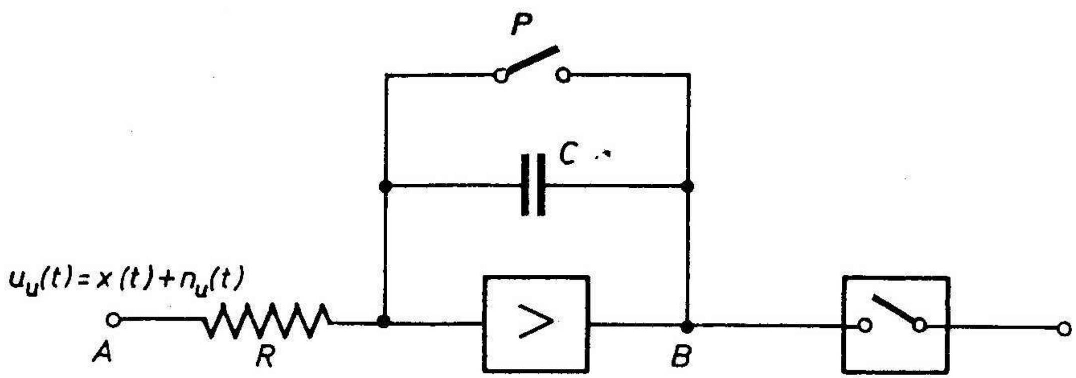
Naravno, i ovdje važi da korelator radi u uslovima bijelog šuma.

## *Prijemnik sa integriranjem i rasterećenjem*

Ovaj prijemnik (*integrate and dump*) predstavlja još jednu varijantu prijemnika digitalnih signala čije su performanse pod određenim uslovima identične onima koje ima prijemnik sa podešenim filtrom. Ti uslovi su sledeći:

1. Prije svega, signal $x(t)$ mora da bude pravougaonog oblika konačnog trajanja T,
2. Na ulaz prijemnika dolazi bijeli šum konstantne spektralne gustine snage.

Blok šema ovakvog prijemnika prikazana je na slici.




Na ulazu se nalaze korisni signal $x(t)$ i aditivni bijeli Gaussov šum $n_u(t)$, tako da je ukupna pobuda:

$$u_u(t)=x(t)+n_u(t)$$

Integrator je sastavljen na uobičajen način od otpornika otpornosti R i kondenzatora kapaciteta C. Paralelno kondenzatoru je vezan pojačavač velikog pojačanja i prekidač P. Prekidač ima zadatak da osigura da u početku svakog signalizacionog intervala, $t=0^+$, kondenzator bude prazan. To se postiže njegovim rasterećenjem u vrlo kratkom intervalu u kom se prekidač P na kratko zatvori. Ovo se odigrava u vremenu $t=0^-$ i to poslije trenutka u kome je odabiračem uzet odbirak iz prethodnog signalizacionog intervala. U posmatranom signalizacionom intervalu odbirak se uzima u trenutku $t=T$. Saglasno opisanim operacijama, ovaj prijemnik je i dobio svoje ime.

Ako sa $T_i=CR$ označimo vremensku konstantu integratora, onda će na izlazu iz integratora biti signal čiji odbirak na kraju posmatranog signalizacionog intervala ima vrijednost:

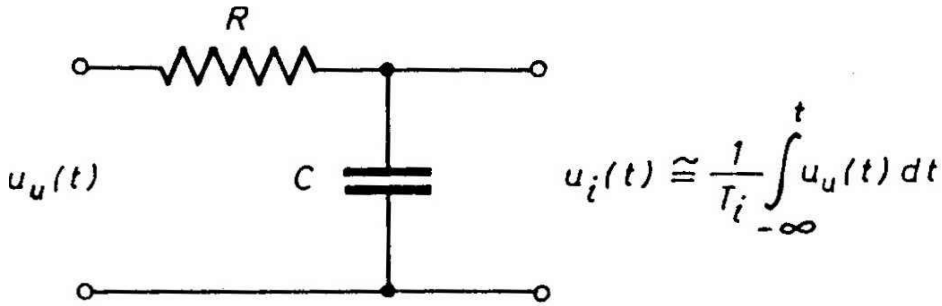
$$u_i(T)=\frac{1}{T_i}\int_0^T u_u(t)dt=\frac{1}{T_i}\int_0^T x(t)dt+\frac{1}{T_i}\int_0^T n_u(t)dt=y(T)+n_i(T)$$

Vidimo da ima dvije komponente. Jedna je posledica poslatog signala, a druga prisutnog šuma.
Kako je standardni signal pravougaonog oblika i ograničen na jedan signalizacioni interval, to je:

$$x(t)=\begin{cases} U, & 0\le \mathrm{t}\le \mathrm{T} \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(T)=\frac{1}{T_i}\int_0^T U dt=\frac{1}{T_i}UT$$

Pronađimo sada srednju kvadratnu vrijednost odbiraka šuma. Da bi se to uradilo potrebno je najpre odrediti funkciju prenosa prijemnika.

U tu svrhu, polazi se najprije od standardnog integratora:




$$u_i(T)=\frac{1}{T_i}\int_{-\infty}^{t}u_u(t)dt=\frac{1}{T_i}\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U_u(j\omega)e^{j\omega t}d\omega dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U_u(j\omega)\frac{1}{T_i}\int_{-\infty}^{t}e^{j\omega t}dtd\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{j\omega T_i}U_u(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_i(j\omega)U_u(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Odakle se dobija da je funkcija prenosa standardnog integratora data sa:

$$H_i(j\omega)=\frac{1}{j\omega T_i}$$

Za razliku od ovog standardnog integratora koji vrši integraljenje kontinualno u intervalu (-∞, t) sklop integratora u prijemniku sa integriranjem i rasterećenjem obavlja integraciju ulaznog signala u intervalu trajanja T, tj. od nekog trenutka *t*-T do trenutka *t* (zbog prisustva prekidača P i njegove uloge).

Funkciju prenosa ovakvog sklopa možemo pronaći na sledeći način:

- signal na izlazu integratora u trenutku *t* je:

$$u_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega T_i} U_u(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- signal na izlazu u trenutku *t*-T je:

$$u_i(t-T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega T_i} U_u(j\omega) e^{-j\omega T} e^{j\omega t} d\omega$$

To su dvije krajnje vrijednosti izlaznog signala iz integratora. Prema tome, u intervalu od *t*-T do *t* integral ulaznog signala biće jednak razlici ovih krajnjih vrijednosti :

$$u_i(t) - u_i(t-T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T_i} U_u(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Lako se zaključuje da je funkcija prenosa integratora sa rasterećenjem:

$$H_i(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega T_i}=\frac{T}{T_i}\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

Sada je lako pronaći srednju kvadratnu vrijednost šuma na ulazu u sklop za odlučivanje. Ako je na ulazu u prijemnik prisutan bijeli šum čija spektralna gustina snage iznosi $S_N$, onda će spektralna gustina snage šuma na izlazu iz integratora biti:

$$S_{Ni}(\omega)=\left|H(j\omega)\right|^2 S_N=\left(\frac{T}{T_i}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 S_N$$

odakle slijedi da će srednja kvadratna vrijednost šuma na izlazu biti:

$$\overline{n_i^2(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{Ni}(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{T}{T_i}\right)^2 S_N\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 d\omega$$

Kada se obavi integracija, nalazi se da je

$$\overline{n_i^2(t)} = \frac{1}{T_i^2} S_N T$$

Konačno, odnos koji predstavlja karakteristiku funkcije greške $A_N$ je:

$$A_N = \frac{y^2(t)}{\overline{\overline{n_i^2(t)}}} = \frac{U^2 T}{S_N} = \frac{W_x}{S_N} = A_{N\max}$$

**Kao što se vidi, dolazi se do istog rezultata kao i u prijemniku s podešenim filtrom. Prema tome, prijemnik sa integriranjem i rasterećenjem faktički predstavlja jednu varijantu prijemnika s podešenim filtrom, pod uslovom da *x*(*t*) ima oblik pravougaonog impulsa.**