

GLAVA 3

VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

Dosadašnja analiza elektrostatičkog, stacionarnog električnog i stacionarnog magnetskog polja, čini prirodni uvod u analizu vremenski promjenljivog električnog i magnetskog polja. Vremenski promjenljivo električno i magnetsko polje ne mogu egzistirati nezavisno, već čine jedinstveno elektromagnetsko polje. Fenomen koji predstavlja vezu između vremenski promjenljivog električnog i magnetskog polja jeste elektromagnetska indukcija.

3.1. FARADEJEV ZAKON ELEKTROMAGNETSKE INDUKCIJE

Fenomen elektromagnetske indukcije otkrio je engleski fizičar *Michael Faraday* 1831. godine. Intrigiran činjenicom da tok električne struje u provodnicima ima za posledicu magnetsko polje u okolini provodnika, bio je ubijeđen da postoji i obratna veza: smatrao je, naime, da i magnetsko polje, na neki način, može dovesti do stvaranja električne struje u provodnicima koji se nalaze u tom polju. Nakon nekoliko godina bezuspješnih eksperimenata došao je do ključnog sastojka u receptu za dobijanje električne struje u provodnicima koji se nalaze u magnetskom polju. To je,

vremenski promjenljivo magnetsko polje

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

Faradej je došao do zaključka da samo vremenski promjenljivo magnetsko polje, u provodniku koji se u tom polju nalazi, dovodi do indukovanja elektromotorne sile. Ukoliko se radi o zatvorenoj provodnoj konturi, indukovana elektromotorna sila uzrokuje i tok električne struje u njoj.

Faradejev zakon elektromagnetske indukcije glasi:

Indukovana elektromotorna sila u provodnoj konturi proporcionalna je brzini vremenske promjene magnetskog fluksa kojim se kontura obuhvata

Kvantitativno:

$$e = \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.1)$$

Kako je magnetski fluks kroz konturu funkcija više promjenljivih,

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \angle(\mathbf{B}, \mathbf{S}) \quad (3.2)$$

očigledno je da do indukovanja ems u konturi može doći u sledećim slučajevima:

- kontura se nalazi u vremenski promjenljivom magnetskom polju, $B=f(t)$;
- kontura se nalazi u stalnom magnetskom polju, ali je njena površina funkcija vremena, $S=f(t)$;
- orijentacija konture u odnosu na stalno magnetsko polje je funkcija vremena, $\angle(\mathbf{B}, \mathbf{S})=f(t)$ (ovdje se najčešće radi o rotaciji konture u magnetskom polju);
- kombinacija prethodnih slučajeva;

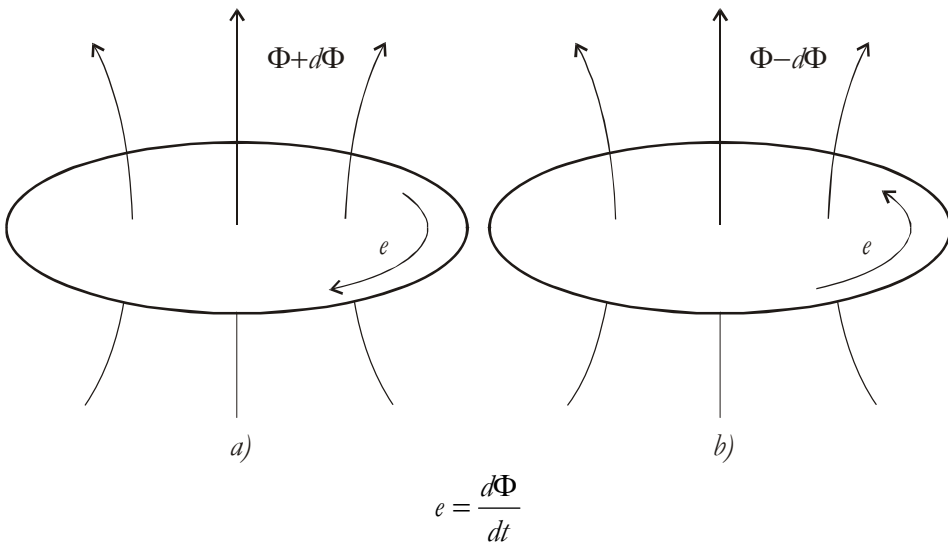
Kakav je smjer indukovane ems u konturi? Pretpostavimo da je indukovana ems u zatvorenoj provodnoj konturi takvog smjera da u konturi izazove struju čije sopstveno magnetsko polje podržava strano magnetsko polje. Tada rezultatno magnetsko polje raste u vremenu, što dovodi do rasta indukovane ems, samim tim i struje. Očigledno, dolazi do jednog

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

kumulativnog procesa koji vodi indukovanju beskonačno velike ems i struje u konturi. Na osnovu gornjeg razmatranja, prirodno je da je smjer indukovane ems u provodnoj konturi suprotan. Naime,

indukovana ems u zatvorenoj provodnoj konturi je takvog smjera da se magnetsko polje struje u konturi suprotstavlja promjeni magnetskog polja koje je izazvalo tu struju

Gornja konstatacija je poznata kao *Lenz*-ovo pravilo po ruskom fizičaru njemačkog porijekla *Heinrich*-u *Lenz*-u, koji je gornje pravilo definisao 1834. godine. Na osnovu *Lenz*-ovog pravila, smjer indukovane ems je moguće odrediti prema slici 3.1.



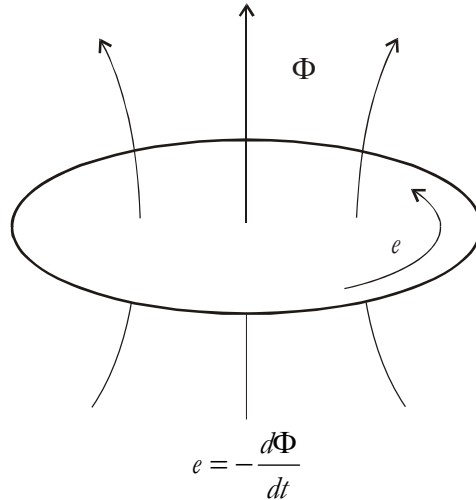
Slika 3.1. Određivanje smjera indukovane ems u skladu sa *Lenz*-ovim pravilom

Uzimajući u obzir *Lenz*-ovo pravilo, Faradejev zakon elektromagnetske indukcije se obično piše u sledećem obliku:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.3)$$

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

Izraz (3.3) daje pravilan smjer indukovane ems bez potrebe poznavanja činjenice da li magnetski fluks raste ili opada u vremenu. Potrebno je samo smjer indukovane ems, pravilom desne ruke vezati sa usvojenim referentnim smjerom magnetskog fluksa kroz konturu, slika 3.2.



Slika 3.2. Određivanje smjera indukovane ems u skladu sa relacijom (3.3) u kojoj je Lenz-ovo pravilo izraženo negativnim znakom

Tada je, u slučaju da magnetski fluks raste u vremenu ($d\Phi/dt > 0$), ems negativna odnosno suprotnog je smjera u odnosu na referentni, što je identično situaciji prikazanoj na slici 3.1a. U suprotnom slučaju, kada magnetski fluks opada u toku vremena, ($d\Phi/dt < 0$), ems je pozitivna, tj. slaže se sa usvojenim referentnim smjerom, slika 3.1b.

Ukoliko provodnu konturu čine N redno vezanih, koncentričnih navojaka, pri čemu se svaki od njih obuhvata sa istim magnetskim fluksom, indukovana ems je N puta veća,

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.4)$$

gdje je Ψ magnetsko obuhvatanje, $\Psi = N\Phi$.

Primjer p3.1. Princip rada generatora naizmjeničnog napona: Generator naizmjeničnog napona predstavlja jednu od mnogobrojnih i raznovrsnih primjena fenomena

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

elektromagnetske indukcije. Slika p3.1. ilustruje princip generisanja naizmjeničnog napona kod primitivnog generatora. Pravougaoni navojak se nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije \mathbf{B} . Rotor, a tim i navojak koji se nalazi na njemu, se stranom silom (vodena turbina, parna turbina, motor sa unutrašnjim sagorijevanjem,...) rotira konstantnom ugaonom brzinom ω . U trenutku kada se namotaj nalazi u položaju prikazanom na slici p3.1, magnetski fluks kroz konturu je,

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \alpha$$

gdje je α ugao koji zaklapaju vektor magnetske indukcije i normala na konturu koju čini pravougaoni navojak. Kako je ugaona brzina rotacije navojka konstantna, to se ugao α može prikazati kao proizvod ugaone brzine i vremena:

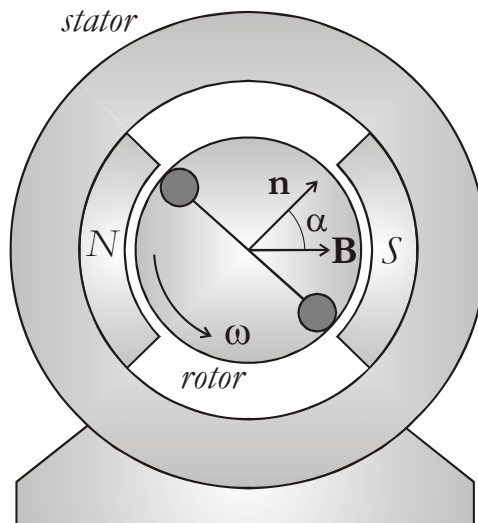
$$\Phi = BS \cos \omega t$$

Indukovana ems u navojku je, prema Faradejevom zakonu elektromagnetske indukcije,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) = \omega BS \sin \omega t$$

U slučaju koncentričnog namotaja istog oblika ali namotanog sa N navojaka, indukovana ems je N puta veća:

$$e = \omega NBS \sin \omega t = E_m \sin \omega t$$



Slika p3.1. Ilustracija principa rada generatora naizmjeničnog napona

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

Opisani princip rada, istina invertovan, primjenjuje se kod sinhronih generatora, mašina velikih snaga koje proizvode električnu energiju koja se svakodnevno koristi u industriji i domaćinstvima. Invertovan, u tom smislu što vremenski stalno magnetsko polje proizvodi namotaj na rotoru, dakle magnetsko polje rotira zajedno sa rotorom, a namotaji u kojima se indukuje ems se nalaze na statoru i nepokretni su ♦

3.2. INDUKOVANO ELEKTRIČNO POLJE

U cilju definisanja indukovano električnog polja i analize njegovih osobina, posmatraće se zatvorena provodna kontura u vremenski promjenljivom magnetskom polju. Vremenski promjenljiv magnetski fluks koji se obuhvata sa konturom, u njoj indukuje ems:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.5)$$

Kako je provodna kontura zatvorena, indukovana ems dovodi do toka električne struje u konturi.

Da bi kroz konturu protekla određena količina naelektrisanja potrebno je nad tom količinom naelektrisanja izvršiti rad. Postavlja se pitanje: koje sile u ovom slučaju vrše rad? Kao što je ranije konstatovano, magnetsko polje ne može vršiti rad nad naelektrisanjima. Dakle, rad se vrši na račun sila električnog polja i to *indukovanog električnog polja*. Indukovana ems iz (3.5) jednaka je cirkulaciji vektora indukovano električnog polja \mathbf{E}_{ind} po zatvorenoj konturi C ,

$$e = \oint_C \mathbf{E}_{ind} d\mathbf{l} \quad (3.6)$$

Sa druge strane je,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.7)$$

pa je,

$$\oint_C \mathbf{E}_{ind} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.8)$$

ili

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E}_{ind} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}} \quad (3.9)$$

Riječima:

Cirkulacija vektora indukovanog električnog polja po zatvorenoj konturi jednaka je negativnoj brzini promjene magnetskog fluksa u vremenu

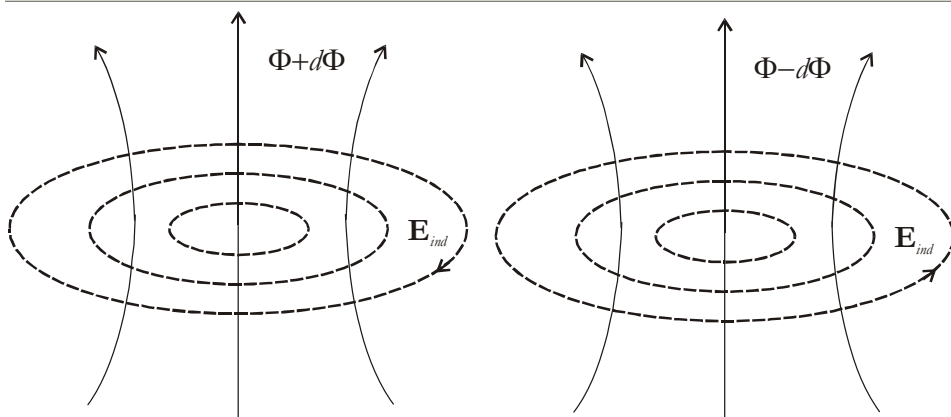
Gornji zaključak je izveden analizom procesa u zatvorenoj provodnoj konturi.

Može, međutim, da se postavi sledeće pitanje: da li je postojanje provodne konture neophodan uslov važenja gornjeg zaključka? Odgovor je: ne. Relacija (3.9) važi za bilo kakvu, pa čak i zamišljenu konturu u vakumu ili vazduhu. Postojanje provodne konture je preduslov egzistencije struje u konturi. Povećavanje otpornosti takve konture, u граниčnom slučaju na beskonačno veliku vrijednost, dovodi do toga da u toj konturi neće biti električne struje iako u njoj i dalje postoji indukovana ems odnosno indukovano električno polje.

Linije indukovanog električnog polja su vrtložne linije koje leže u ravni normalnoj na magnetsko polje. Za smjer indukovanog električnog polja važe iste konstatacije izvedene ranije za smjer indukovane ems, slika 3.3.

Ovdje je potrebno osvrnuti se i na razlike koje postoje između indukovanog električnog i elektrostatičkog polja. Kao što je poznato, elektrostatičko polje je izvorno polje: njegove linije izvire iz pozitivnih i poniru u negativna naelektrisanja. Za razliku od elektrostatičkog, indukovano električno polje je vrtložno polje: linije ovog polja su zatvorene same u sebe.

Elektrostatičko polje je, sa druge strane, konzervativno polje. Ta njegova osobina je okarakterisana činjenicom da je rad sila tog polja po zatvorenoj konturi jednaka nuli. Ova osobina, imajući na umu izraz (3.9), ne važi za indukovano električno polje.



Slika 3.3. Linije indukovanog električnog polja

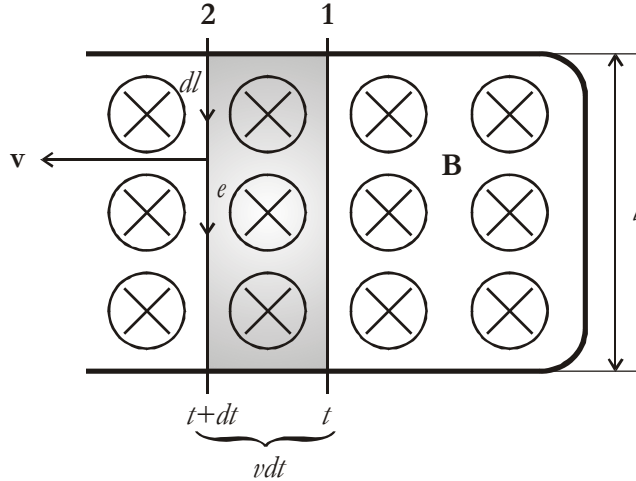
Kako su potencijal i napon u elektrostatickom polju definisani upravo koristeći osobinu konzervativnosti tog polja, postavlja se logično pitanje da li ti pojmovi ostaju na snazi i u indukovanom električnom polju? U indukovanom električnom polju rad pri premještanju naelektrisanja iz jedne drugu tačku polja očigledno zavisi od puta kojim se to premještanje vrši. Međutim, u indukovanom električnom polju upravo provodnik jednoznačno definiše putanju kretanja naelektrisanja tako da i u ovom slučaju definicija potencijala i napona ostaje na snazi.

3.3. INDUKOVANA EMS U PROVODNIKU KOJI SE KREĆE U MAGNETSKOM POLJU

Dosad je, izuzimajući objašnjeni princip rada generatora naizmjenične struje, analiziran slučaj nepokretne provodne konture u vremenski promjenljivom magnetskom polju. Po Faradejevom zakonu slijedi da se indukovana ems javlja i u slučaju promjene površine provodne konture. Analizirajući taj slučaj, može se doći do alternativnog zapisa Faradejevog zakona elektromagnetske indukcije. U tom cilju će se analizirati provodnik dužine l koji se stalnom brzinom v , bez trenja kreće po nepokretnim provodnim šinama sa kojima čini provodnu konturu. Čitav sistem se nalazi u vremenski stalnom magnetskom polju indukcije \mathbf{B} , slika 3.4.

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

U početnom trenutku provodnik je u položaju 1. Nakon vremenskog intervala dt provodnik se nađe u položaju 2. Tokom vremenskog intervala dt došlo je do promjene površine provodne konture, odnosno do promjene magnetskog fluksa koji se obuhvata sa provodnom konturom (osjenčena površina):



Slika 3.4. Uz izvođenje izraza za dinamičku indukciju

$$d\Phi = BdS = Blvdt \quad (3.10)$$

Intenzitet indukovane ems je,

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{Blvdt}{dt} = Blv \quad (3.11)$$

a njen smjer je prikazan na slici 3.4. Smjer indukovane ems je takav da teži da smanji magnetski fluks kroz konturu, tj. takav da se protivi nastaloj promjeni. Smjer indukovane ems je definisan sledećim vektorskim proizvodom:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.12)$$

Kako je indukovana ems skalarna veličina, to je, u opštem slučaju,

$$de = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (3.13)$$

odnosno,

$$e = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (3.14)$$

gdje se integracija vrši po pokretnom dijelu konture, duž provodnika.

Gornji izraz se može riječima iskazati na sledeći način: u provodniku koji se kreće brzinom \mathbf{v} u stalnom magnetskom polju indukcije \mathbf{B} dolazi do indukovanja ems opisane izrazom (3.14).

Ukoliko istovremeno postoji i vremenska promjena magnetskog fluksa i kretanje provodnika u magnetskom polju, tada je indukovana ems data sledećim izrazom:

$$e = \oint_C \mathbf{E}_{ind} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} + \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (3.15)$$

Prvi član izraza (3.15) je poznat kao transformatorska (statička) ems dok se drugi član često naziva dinamička ems ili ems kretanja (rotacije). Takva podjela je, međutim, uslovna: kao što se vidi iz gornjeg razmatranja, izraz za indukovanu ems kretanja je izveden upravo iz izraza za transformatorsku ems.

Primjer p3.2. Princip rada mikrofona: Mikrofon je pretvarač akustičnog u električni signal. Jedna od mnogobrojnih vrsta mikrofona, dinamički mikrofon, radi na principu elektromagnetske indukcije. Princip njegovog rada je invertovan princip rada, ranije opisanog, dinamičkog zvučnika. Kod mikrofona je na ulazu akustični talas. Pod njegovim dejstvom dolazi do vibriranja membrane mikrofona, na kojoj je fiksiran namotaj (kalem) koji se nalazi u homogenom magnetskom polju. Vibriranjem membrane dolazi do kretanja kalema u magnetskom polju a na osnovu (3.14) i do indukovanja ems koja je električna slika akustičnog talasa tj. zvučnog signala.

3.4. VRTLOŽNE STRUJE I SKIN EFEKAT

Posledica vremenski promjenljivog magnetskog polja jeste vrtložno, indukovano električno polje u njegovoj okolini. Ukoliko je ta okolina provodna, vrtložno električno polje za posledicu ima iste takve, vrtložne

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

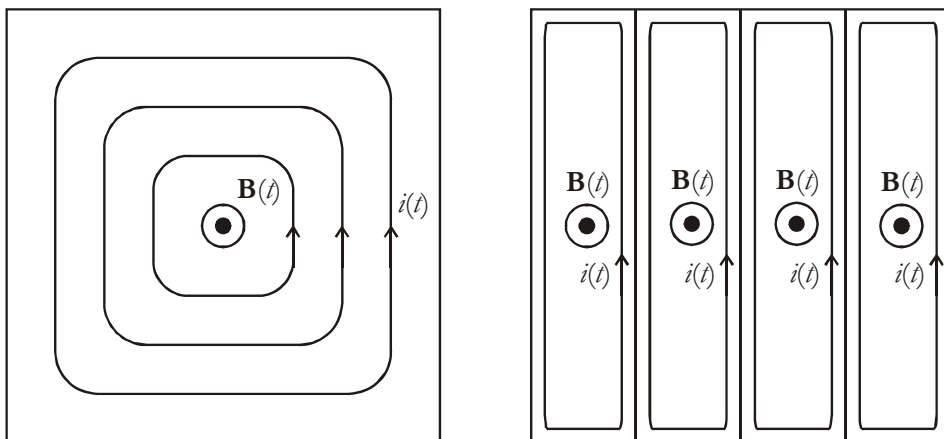
struje. Električna struja, pa makar bila i vrtložna, za posledicu uvijek ima zagrijavanje provodnika, odnosno Džulove gubitke.

Ovaj fenomen najčešće je nepoželjan u praksi. Problem vrtložnih struja posebno je izražen kod električnih mašina koje u cilju kanalisanja magnetskog fluksa imaju magnetsko kolo izvedeno od gvožđa, koje je dobar feromagnetski materijal ali je istovremeno i dobar provodnik. Kako, u principu, sve električne mašine rade sa naizmjeničnim strujama odnosno sa vremenski promjenljivim magnetskim poljima, neminovno je indukovanje vrtložnih struja u magnetskom kolu mašine.

Jedan od načina da se gubici usled vrtložnih struja smanje jeste povećanje specifične otpornosti gvožđa koje se koristi u konstrukciji magnetskog kola. To se radi dodavanjem silicijuma kao primjese odnosno legiranjem gvožđa.

Druga mjera koja se preduzima u cilju smanjenja gubitaka usled vrtložnih struja jeste lameliranje feromagnetskog jezgra, slika 3.5.

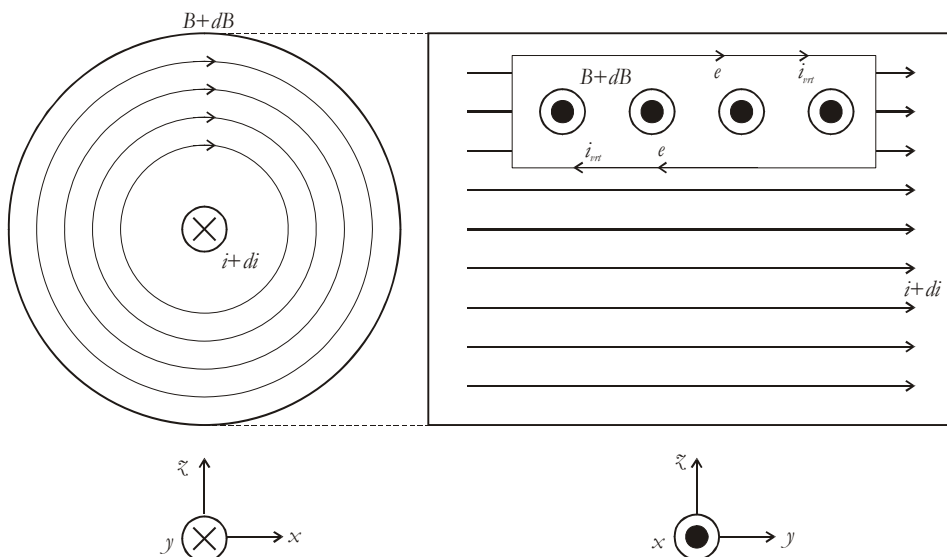
Šta se postiže lameliranjem magnetskog jezgra? Poznato je da je u svakom otporničkom kolu snaga (ovdje snaga gubitaka) proporcionalna kvadratu napona (ovdje kvadratu indukovane ems) a obrnuto proporcionalna otpornosti. Lameliranjem jezgra, pri čemu su lamele električno izolovane jedna od druge, dovodi do značajnog produžavanja puta, samim tim i povećanja otpornosti puta kojim se vrtložne struje zatvaraju. Ovom mjerom se gubici usled vrtložnih struja u feromagnetnom jezgru svode na minimum. Standardne debljine limova (tzv. dinamo limovi) koji se koriste u ove svrhe iznose 0.5 i 0.35mm.



Slika 3.5. Lameliranje magnetskog jezgra

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

Vrtložne struje u provodnicima dovode do još jednog interesantnog efekta: efekta potiskivanja struje. Slika 3.6. prikazuje provodnik kroz koji teče vremenski promjenljiva struja, posmatran iz dva različita ugla.



Slika 3.6. Efekat potiskivanja struje

Vremenski promjenljiva struja, oko provodnika, ali i u samom provodniku, izaziva vremenski promjenljivo magnetsko polje. Vremenski promjenljivo magnetsko polje indukuje vremenski promjenljivo, vrtložno električno polje koje u provodniku izaziva vrtložne struje. Smjer vrtložnih struja se pokorava Lenz-ovom zakonu. Pokazuje se da je njihov smjer takav da se one u unutrašnjosti provodnika suprotstavljaju osnovnoj struji. Uz površinu provodnika vrtložne struje se sabiraju sa osnovnom strujom. Kao rezultat, raspodjela struje po poprečnom presjeku provodnika postaje neravnomjerna. U centru provodnika je gustina struje minimalna, dok značajno raste idući radialno ka površini provodnika.

Ovaj efekat je poznat kao efekat potiskivanja struje, površinski ili skin efekat. Utoliko je izraženiji ukoliko je osnovna struja više učestanosti. Opisani efekat za posledicu ima povećanje otpornosti provodnika jer struja teče kroz provodnik virtuelno manjeg poprečnog presjeka.

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

Primjer p3.3. Princip rada detektora metala: Detektori metala rade na principu elektromagnetske indukcije. Danas su najčešće u upotrebi detektori metala koji se baziraju na *VLF* (very low frequency) tehnologiji. Takav detektor ima dva kalema. Kroz jedan od njih (predajnik) se propušta naizmjenično pulsirajuća struja koja stvara magnetski fluks koji je normalan na ravan kalema. Magnetski fluks prodire u zemlju do izvesne dubine. Ukoliko se ispod detektora nalazi metalni predmet, magnetski fluks u metalnom predmetu indukuje vrtložne struje, koje, sa svoje strane, stvaraju magnetski fluks suprotan onom fluksu koji ih je izazvao. Povratni magnetski fluks indukuje ems u drugom kalemu (prijemnik), koji je potpuno oklopljen i zaštićen od magnetskog fluksa koji stvara predajnik. Indukovana ems u prijemnom kalemu napaja zvučnik ili signalnu lampicu i na taj način signalizira postojanje metalnog predmeta u zemlji. Opisani princip važi i za detektore metala na aerodromima, ručne detektore metala kojim se kontrolišu učesnici masovnih okupljanja (koncerti, utakmice), itd.

3.5. INDUKTIVNOST

U prethodnim poglavljima je apsolviran fenomen elektromagnetske indukcije. Došlo se do zaključka da vremenski promjenljivo magnetsko polje dovodi do indukovanja ems. Pri analizi električnih kola vremenski promjenljivih struja i ova, indukovana ems, mora se uzeti u obzir. Kako je u električnim kolima od prevashodne važnosti uspostavljanje veze između napona i struje na krajevima elemenata električnog kola, poželjno je uvesti jednu novu veličinu, kao i simbol za tu veličinu u električnim kolima, koja će indukovanu ems vezati sa strujom a ne sa magnetskim fluksom koji je posledica te struje. Ovdje se razlikuju dva slučaja:

- Indukovana ems u kolu posledica je vremenski promjenljivog magnetskog fluksa kojeg proizvodi struja u istom tom kolu. Ova pojava je poznata pod imenom samoindukcija a veličina koja se uvodi u cilju njenog opisivanja je poznata kao sopstvena induktivnost.
- Indukovana ems u kolu posledica je vremenski promjenljive struje u nekom drugom kolu, koje je magnetski spregnuto sa kolom u kome se indukovana ems opaža. Ova pojava je poznata pod imenom međusobna indukcija a veličina koja se uvodi u cilju njenog opisivanja poznata je kao međusobna induktivnost.

3.5.1. SOPSTVENA INDUKTIVNOST

Električna struja za posledicu uvijek ima magnetsko polje u svojoj okolini. Magnetski fluks linearno raste sa porastom struje (ne i u feromagnetskim materijalima), a sa druge strane zavisi od oblika električnog kola (broja navojaka, prečnika odnosno poprečnog presjeka kalema) kao i od magnetskog kola (magnetske otpornosti). U opštem slučaju se za magnetsko obuhvatanje može pisati,

$$\Psi = f(\text{struje, konstruktivnih parametara, sredine}) \quad (3.16)$$

ili

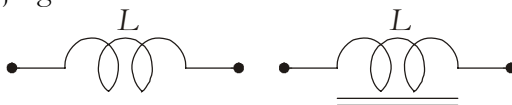
$$\Psi = L \cdot i \quad (3.17)$$

Gornji obrazac je definicioni obrazac sopstvene induktivnosti L . Sopstvena induktivnost u linearnim sredinama ne zavisi od struje niti od magnetskog obuhvatanja već samo od sredine i geometrije sistema. Imajući na umu Faradejev zakon elektromagnetske indukcije, može se doći do sledeće veze između indukovane ems u nekom kolu i struje u tom istom kolu, u linearnoj sredini:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(L \cdot i)}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (3.18)$$

Jedinica induktivnosti je Henri, simbol H, $1\text{H}=1\text{Wb}/1\text{A}$. Jedinica Henri je prilično velika tako da je u svakodnevnoj upotrebi mnogo češća jedinica jednaka hiljaditom dijelu Henrija, $m\text{H}$.

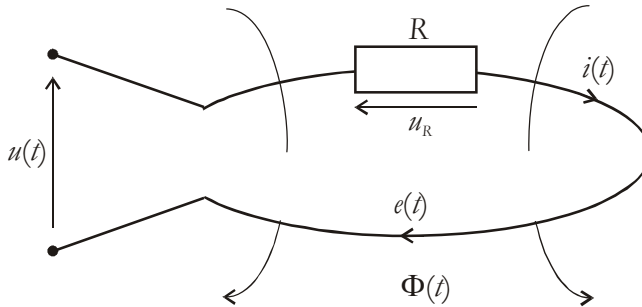
Simbol induktiviteta u električnim kolima je prikazan na slici 3.7. u zavisnosti od toga da li se kalem nalazi na neferomagnetskom ili feromagnetskom jezgru:



Slika 3.7. Simbol induktiviteta (kalema) u električnim kolima

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

U cilju nalaženja veze između napona na realnom kalemu (onome čija otpornost nije jednaka nuli) i struje kroz njega analiziraće se kalem prikazan na slici 3.8. Naponska jednačina ovog kalema je,



Slika 3.8. Izvođenje izraza za napon na kalemu

$$u - u_R + e_{ind} = 0 \quad (3.19)$$

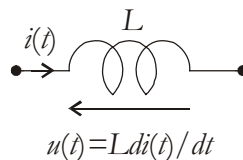
ili

$$u = u_R - e_{ind} \quad (3.20)$$

Iz (3.18) slijedi:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (3.21)$$

Usaglašeni referentni smjerovi napona na idealnom kalemu i struje kroz idealni kalem su prikazani na slici 3.9:



Slika 3.9. Referentni smjerovi za napon na i struju kroz idealni kalem

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

Primjer p3.4. Izračunati induktivnost namotaja izvedenog sa N gusto motanih navojaka, smještenog na tankom torusnom jezgru od neferomagnetskog materijala. Površina poprečnog presjeka jezgra je S dok je njegova srednja dužina l_{sr} .

Primjenom Amperovog zakona duž srednje linije jezgra dobija se jačina magnetskog polja u jezgru:

$$H = \frac{NI}{l_{sr}}$$

Magnetska indukcija duž srednje linije jezgra je (neferomagnetsko jezgro, μ_0),

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 NI}{l_{sr}}$$

Navojak na torusnom jezgru obuhvata se sa magnetskim fluksom,

$$\Phi = BS = \frac{\mu_0 N^2 SI}{l_{sr}}$$

dok je ukupno magnetsko obuhvatanje namotaja,

$$\Psi = N\Phi = \frac{\mu_0 N^2 SI}{l_{sr}}$$

Po definiciji, sopstvena induktivnost namotaja je jednaka,

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l_{sr}} = \frac{N^2}{\left(\frac{l_{sr}}{\mu_0 S}\right)} = \frac{N^2}{R_m}$$

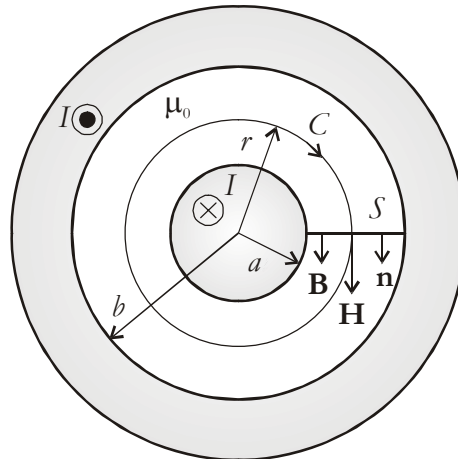
Očigledno je sopstvena induktivnost namotaja proporcionalna kvadratu broja navojaka dok je obrnuto proporcionalna magnetskoj otpornosti jezgra.

Primjer p3.5. Izračunati podužnu spoljašnju induktivnost koaksijalnog kabla dimenzija prikazanih na slici p3.5.

Primjenom Amperovog zakona na konturu C poluprečnika r , slika p3.5, za jačinu magnetskog polja u prostoru između obloga kabla, dobija se:

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$



Slika p3.5.

Odgovarajuća magnetska indukcija u prostoru između obloga kabla je:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Magnetski fluks kroz površ S , za usvojene referentne smjerove prikazane na gornjoj slici, je,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

gdje je l dužina kabla. Induktivnost kabla je,

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

tako da je podužna spoljašnja induktivnost:

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \blacklozenge$$

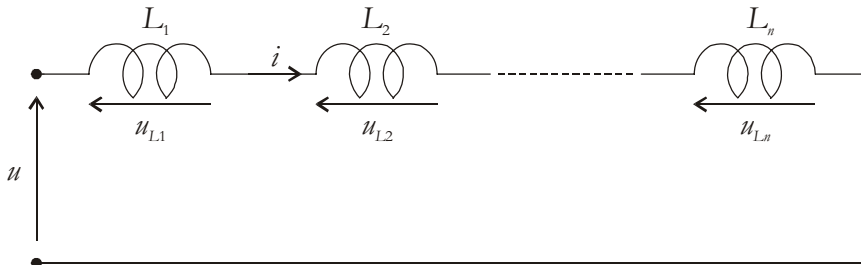
Primjer p3.6. Princip rada induktivnog senzora: Induktivni senzor radi na principu detektovanja promjene induktivnosti. Karakterističan primjer su induktivni senzori koji se ugrađuju u asfalt, na raskrsnicama ispred semafora. Na raskrsnici gdje je značajno veći

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

protok saobraćaja duž jedne ulice, semafor neće davati zeleno svjetlo automobilima iz poprečne ulice sve dok ne “osjeti” da tamo stoje auta koja čekaju prolaz. Semaforu taj “osjećaj” daje induktivni senzor. Parkiranjem automobila iznad senzora, koji je obična provodna kontura sa nekoliko navojaka u asfaltu, induktivnost konture se značajno povećava što se detektuje odgovarajućim električnim kolima koja daju signal za paljenje zelenog svjetla. Zašto se induktivnost povećava? Zato što se parkiranjem automobila, odnosno ogromne količine gvožđa, iznad provodne konture, smanjuje magnetska otpornost protoku magnetskog fluksa koji stvara struja u konturi: $\mu_{Fe} \gg \mu_0 \Rightarrow R_{mFe} \ll R_{m0} \Rightarrow L_{Fe} \gg L_0$ (vidjeti primjer p3.4).

- REDNA VEZA INDUKTIVITETA

Kolika je ekvivalentna induktivnost redne veze više kalemova koji nijesu magnetski spregnuti? Slika 3.10. prikazuje takvu vezu.



Slika 3.10. Redna veza kalemova koji nijesu magnetski spregnuti

Naponska jednačina gornjeg kola je:

$$u = u_{L_1} + u_{L_2} + \dots + u_{L_n} \quad (3.22)$$

Na osnovu (3.21), zanemarujući aktivne otpornosti kalemova, dobija se:

$$u = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_n \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + \dots + L_n) \frac{di}{dt} \quad (3.23)$$

Očigledno je da je ekvivalentna induktivnost gornje veze kalemova jednaka,

$$L_{ekv} = L_1 + L_2 + \dots + L_n = \sum_{i=1}^n L_i \quad (3.24)$$

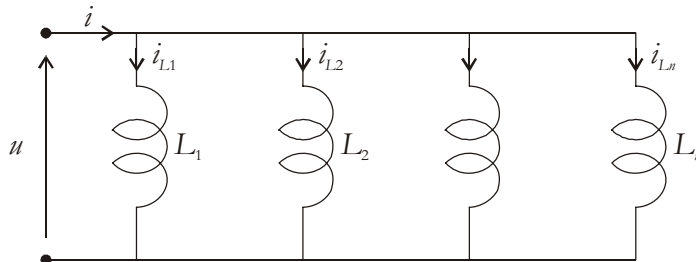
• PARALELNA VEZA INDUKTIVITETA

Paralelna veza kalemova koji nijesu magnetski spregnuti prikazana je na slici 3.11. Strujna jednačina za prikazano kolo je:

$$i = i_{L_1} + i_{L_2} + \dots + i_{L_n} \quad (3.25)$$

Diferencijaleći gornju jednačinu po vremenu, slijedi:

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_{L_1}}{dt} + \frac{di_{L_2}}{dt} + \dots + \frac{di_{L_n}}{dt} \quad (3.26)$$



Slika 3.11. Paralelna veza kalemova koji nijesu magnetski spregnuti

Iz (3.21), smatrajući kaleme idealnim, slijedi,

$$\frac{u}{L_{ekv}} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} + \dots + \frac{u}{L_n} \quad (3.27)$$

jer je napon na svim kalemima identičan. Sređivanjem se dobija,

$$\boxed{L_{ekv} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}}} \quad (3.28)$$

Dakle, za određivanje ekvivalentne induktivnosti redne i paralelne veze kalemova koji nijesu međusobno magnetski spregnuti važe ista pravila kao i za određivanje ekvivalentnih otpornosti. U slučaju njihove magnetske

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

sprege, izrazi za ekvivalentnu induktivnost uključuju i njihovu međusobnu induktivnost, kako će to biti pokazano u dijelu analize električnih kola naizmjeničnih struja.

3.5.2. MEĐUSOBNA INDUKTIVNOST

U cilju definisanja pojma međusobne induktivnosti posmatra se slika 3.12. Na slici su šematski prikazana dva kalema. Vremenski promjenljiva struja u prvom kalemu, i_1 , stvara vremenski promjenljiv magnetski fluks Φ_1 koji se jednim dijelom obuhvata i sa drugim kalemom. Iz tog razloga se u drugom kalemu indukuje ems međusobne indukcije, e_{21}

$$e_{21} = -\frac{d\Phi_1}{dt} \quad (3.29)$$

Kako je magnetski fluks Φ_1 proporcionalan struji u prvom kalemu, gornja jednakost se može prikazati kao,

$$e_{21} = -M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (3.30)$$

gdje je M_{21} koeficijent međusobne indukcije. Invertovanjem uloga ova dva kalema, sada propuštajući struju u drugom kalemu, indukovana ems u prvom kalemu je:

$$e_{12} = -M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (3.31)$$

U magnetski linearnim sredinama, koeficijenti međusobne indukcije M_{12} i M_{21} su nezavisni od struja i jednaki su jedan drugom,

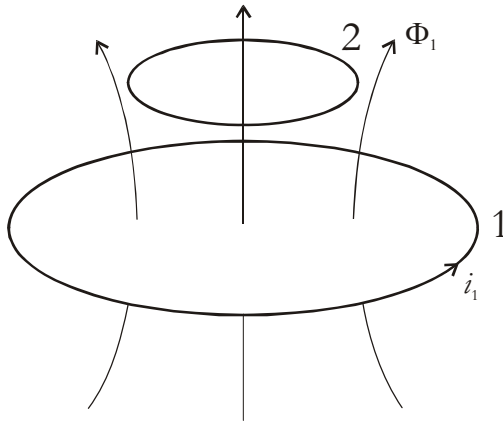
$$\boxed{M = M_{12} = M_{21}} \quad (3.32)$$

Može se jednostavno pokazati da između koeficijenta međusobne indukcije i koeficijenata sopstvene indukcije kalemova postoji sledeća veza,

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad (3.33)$$

koja važi u slučaju tzv. idealne magnetske sprege, tj. u slučaju kada se magnetski fluks koji je posledica struje u jednom kalemu u potpunosti obuhvata sa drugim.



Slika 3.12. Uz izvođenje izraza za međusobnu induktivnost

U opštem slučaju, a to je slučaj kada magnetska sprega nije idealna, koeficijent međusobne indukcije je, u funkciji sopstvenih induktivnosti kalemova,

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (3.34)$$

pri čemu je k (neimenovan broj) koeficijent magnetske sprege, $0 \leq k \leq 1$.

Primjer p3.7. Odrediti izraz za međusobnu induktivnost M dva solenoida umetnutih jedan u drugi, koaksijalno, čiji poprečni presjek je prikazan slikom p3.7a. Odrediti i koeficijent magnetske sprege k . Oba solenoida su kružnog poprečnog presjeka. Spoljašnji solenoid je poluprečnika a i na sebi ima N_a navojaka gusto i ravnomjerno motanih. Unutrašnji solenoid je poluprečnika b i na sebi ima N_b navojaka, takođe motanih gusto i ravnomjerno. Oba solenoida su iste dužine, l . Sav okolni prostor je vazduh.

Propuštajući jednosmjernu struju kroz namotaj unutrašnjeg solenoida, pri čemu kroz namotaj spoljašnjeg ne teče struja, u odnosu na referentne smjerove prikazane na slici p3.7b, vektor jačine magnetskog polja i vektor magnetske indukcije su usmjereni ka posmatraču. U

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

ovom slučaju, magnetsko polje egzistira samo u dijelu prostora unutar unutrašnjeg solenoida. Intezitet vektora jačine magnetskog polja je,

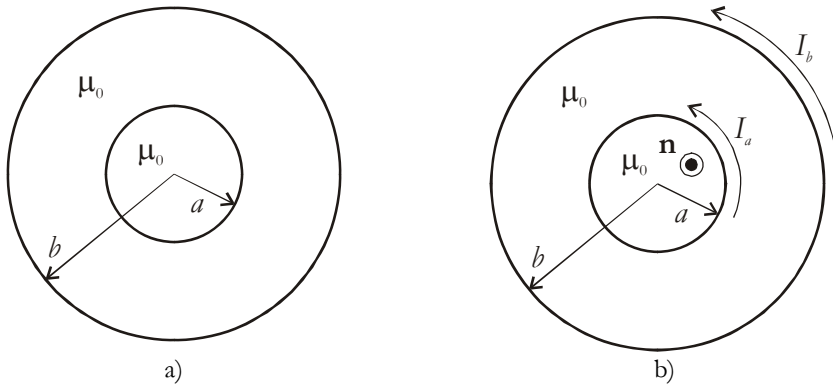
$$B_a = \mu_0 n_a I_a$$

gdje je n_a podužna gustina unutrašnjeg namotaja, $n_a = N_a/l$. Magnetski fluks kojim se obuhvata navojak unutrašnjeg namotaja je,

$$\Phi_{aa} = B_a S_a = \mu_0 n_a I_a a^2 \pi$$

dok je ukupno magnetsko obuhvatanje unutrašnjeg namotaja ovim fluksom,

$$\Psi_{aa} = N_a \Phi_{aa} = \mu_0 n_a N_a I_a a^2 \pi$$



Slika p3.7.

Sopstvena induktivnost unutrašnjeg namotaja je:

$$L_{aa} = \frac{\Psi_{aa}}{I_a} = \mu_0 n_a N_a a^2 \pi$$

Sa istim fluksom se obuhvata i spoljašnji namotaj. Njegovo magnetsko obuhvatanje je:

$$\Psi_{ba} = N_b \Phi_{aa} = \mu_0 n_a N_b I_a a^2 \pi$$

Međusobna induktivnost između ova dva namotaja je,

$$M_{ba} = \frac{\Psi_{ba}}{I_a} = \mu_0 n_a N_b a^2 \pi$$

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

Propuštajući sada struju kroz spoljašnji namotaj, dok kroz unutrašnji nema struje, magnetsko polje se formira u unutrašnjosti spoljašnjeg solenoida. Magnetska indukcija je sada,

$$B_b = \mu_0 n_b I_b$$

gdje je n_b podužna gustina namotaja spoljašnjeg solenoida, $n_b = N_b / l$. Magnetski fluks kojim se obuhvata navojak spoljašnjeg namotaja je,

$$\Phi_{bb} = B_b S_b = \mu_0 n_b I_b b^2 \pi$$

dok je ukupno magnetsko obuhvatanje spoljašnjeg namotaja ovim fluksom,

$$\Psi_{bb} = N_b \Phi_{bb} = \mu_0 n_b N_b I_b b^2 \pi$$

Sopstvena induktivnost spoljašnjeg namotaja je:

$$L_b = \frac{\Psi_{bb}}{I_b} = \mu_0 n_b N_b b^2 \pi$$

Unutrašnji namotaj se obuhvata samo sa dijelom ukupnog magnetskog fluksa,

$$\Psi_{ab} = N_a B_b S_a = \mu_0 n_b N_a I_b a^2 \pi$$

Međusobna induktivnost između ova dva namotaja je,

$$M_{ab} = \frac{\Psi_{ab}}{I_b} = \mu_0 n_b N_a a^2 \pi$$

i identična je ranije izvedenom izrazu za međusobnu induktivnost, $M = M_{ab} = M_{ba}$.

Koeficijent magnetske sprege je, po definiciji, (3.34):

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_a L_b}}$$

Zamjenom nađenih izraza za sopstvene i međusobnu induktivnost, dobija se,

$$\boxed{k = \frac{a}{b}} \blacklozenge$$

3.6. ENERGIJA U MAGNETSKOM POLJU

U cilju analize dešavanja u magnetskom polju, sa aspekta energetskog bilansa, posmatraće se namotaj sa N navojaka gusto motanih na toroidno jezgro srednje dužine l i površine poprečnog presjeka S , izrađeno od neferomagnetskog materijala, $\mu_r=1$. Naponska jednačina takvog kola priključenog na naponski izvor vremenski promjenljive ems e je,

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (3.35)$$

Množeći jednačinu (3.35) sa strujom, dobija se:

$$ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} \quad (3.36)$$

Lijeva strana jednačine (3.36) opisuje snagu koju izvor električne energije predaje kolu. Ta snaga se očigledno troši jednim dijelom na snagu Džulovih gubitaka i drugim dijelom na snagu na račun koje se, u opisanom kolu, uspostavlja magnetsko polje unutar solenoida. Ukupna energija koja se preda magnetskom polju u vremenskom intervalu $[0, t]$ jeste:

$$W_m = \int_0^t Li \frac{di}{dt} dt = L \int_0^I idi = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Psi I}{2} \quad (3.37)$$

Do izraza za energiju akumulisanu u magnetskom polju, u funkciji veličina koje opisuju polje, moguće je doći pomoću izraza,

$$e = Ri + \frac{d\Psi}{dt} \quad (3.38)$$

u kom je indukovana ems prikazana preko magnetskog obuhvatanja. Na sličan način kao i ranije,

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

$$ei = Ri^2 + i \frac{d\Psi}{dt} \quad (3.39)$$

Sada je energija akumulirana u magnetskom polju,

$$W_m = \int_0^t i \frac{d\Psi}{dt} dt = \int_0^\Psi i d\Psi = \int_0^B HlS dB = \int_0^B \frac{B}{\mu_0} lS dB = \frac{lS}{\mu_0} \int_0^B B dB = \frac{B^2}{2\mu_0} Sl \quad (3.40)$$

ili

$$W_m = \int_0^t i \frac{d\Psi}{dt} dt = \int_0^\Psi i d\Psi = \int_0^B HlS dB = \int_0^H HlS\mu_0 dH = \mu_0 lS \int_0^H H dH = \frac{\mu_0 H^2}{2} Sl \quad (3.41)$$

Zapreminska gustina energije je:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{W_m}{Sl} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad (3.42)$$

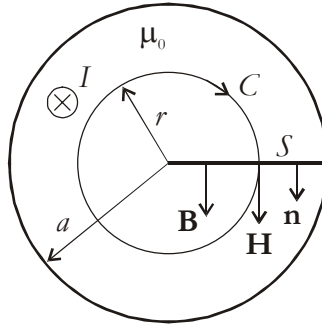
Ukupna energija magnetskog polja se dobija integracijom gornjeg izraza po zapremini prostora u kom polje postoji,

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_V \frac{\mu_0 H^2}{2} dV \quad (3.43)$$

Gornji izrazi koji su izvedeni za slučaj toroidnog namotaja i jezgra od neferomagnetskog materijala su opšti i mogu se primijeniti za bilo koji materijal i za bilo kakvo magnetsko polje pod uslovom da integracija zapreminske gustine energije obuhvati cio prostor u kom polje postoji.

Primjer p3.8. Izračunati podužnu unutrašnju induktivnost provodnika kružnog poprečnog presjeka poluprečnika a . Kroz provodnik teče struja I . Provodnik je od materijala relativne magnetske permeabilnosti $\mu_r=1$.

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE



Slika p3.8.

Primjenom Amperovog zakona na konturu C poluprečnika r , slika p3.8, dobija se,

$$H \cdot 2\pi r = \frac{I}{a^2 \pi} \cdot r^2 \pi$$

tako da je jačina magnetskog polja unutar provodnika, na rastojanju r od centra provodnika:

$$H = \frac{Ir}{2\pi a^2}$$

Zapreminska gustina energije magnetskog polja je, (3.42):

$$w_m = \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}$$

Ukupna magnetska energija akumulisana u provodniku je,

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi a^4} \int_0^a r^3 dr$$

gdje je l dužina kabla a elementarna zapremina je cilindar obima $2\pi r$, debljine dr , i dužine l .
 $dV = 2\pi r l dr$. Dakle,

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$$

Sa druge strane, magnetska energija je, (3.37),

$$W_m = \frac{LI^2}{2}$$

3. VREMENSKI PROMJENLJIVO ELEKTRIČNO I MAGNETSKO POLJE

tako da se izjednačavanjem dva poslednja izraza dobija tzv. unutrašnja induktivnost provodnika,

$$L = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

kao i njegova podužna induktivnost, koja ne zavisi od poluprečnika kabla:

$$\boxed{L' = \frac{\mu_0}{8\pi}} \blacklozenge$$