Aktuarska matematika

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2020-21

Literatura

Gerber, Hans U. *Life insurance mathematics*. (2013)

Ocjenjivanje

Kolokvijum 70 + projekat 30

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- X – s.v.
- $E[X] = \int X \, dP$
- $E[X \mid C] = \int X \, dP_{|C} = \int_C X \, dP_{|C}$
- Ako je $A \subset C$ i $X = \mathbb{1}_A$ onda je:

$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_A \mid C] &= \int_C \mathbb{1}_A \, dP_{|C} \\ &= \int_A dP_{|C} = P(A \mid C) = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{E[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_C]}{P(C)} \end{aligned}$$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- Ako je $X = \mathbb{1}_A$ ond je$E[X \mid C] = \dfrac{E[X\mathbb{1}_C]}{P(C)}$
- Ako je $X \neq \mathbb{1}_A$ možemo aproksimirati $X = \sum x_i \mathbb{1}_{A_i}$
- Svakako važi $E[X \mid C] = \dfrac{E[X\mathbb{1}_C]}{P(C)}$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

Konstruktivna definicija

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ – pod-σ-algebra
- $E[X \mid \mathcal{B}]$ je s.v. i to:
  - $\mathcal{B}$ mjerljiva s.v.
  - $\int_B E[X \mid \mathcal{B}] \, dP = \int_B X \, dP$ za svako $B \in \mathcal{B}$

Slučajno očekivanje u odnosu na s.v.

- Y – s.v.
- $\sigma(Y)$ – σ-algebra generisana s.v. Y (originali skupova)
- $E[X \mid Y] := E[X \mid \sigma(Y)]$

- Značenje uslovnog očekivanja?
- Kakve veze ima sa uslovnom vjerovatnoćom?
- Kakve veze ima sa očekivanjem uslovljenim događajem?

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- I dalje je:
  - $C \in \mathcal{A}$ događaj, $P(C) \neq 0$
  - $A \in \mathcal{A}$ događaj

- Neka je $Y = \mathbb{1}_C$
  - $\sigma(\mathbb{1}_C) = \{\emptyset, C, C^C, \Omega\}$

- $E[X \mid \mathbb{1}_C)]$ je $\sigma(\mathbb{1}_C)$-mjerljivo
  - $E[X \mid \mathbb{1}_C]$ je konstantno na C i C^C:

$$E[X \mid \mathbb{1}_C](\omega) = c_1,\ \omega \in C, \qquad E[X \mid \mathbb{1}_C](\omega) = c_2,\ \omega \in C^C$$

Dakle: $E[X \mid \mathbb{1}_C] = c_1 \mathbb{1}_C + c_2 \mathbb{1}_{C^C}$

Zašto? $\quad c1 =? \quad c2 =?$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

$c1 = ?$ $c2 = ?$

Koristeći jednakost: $E[X \mid \mathbb{1}_C] = c_1 \mathbb{1}_C + c_2 \mathbb{1}_{C^c}$

$$\int_C E[X \mid \mathbb{1}_C] \, dP = c_1 \int_C dP = c_1 P(C)$$

Koristeći definiciju uslovnog očekivanja

$$\int_C E[X \mid \mathbb{1}_C] \, dP = \int_C X \, dP$$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

Kombinujući prethodne jednakosti

$$c_1 = \frac{1}{P(C)} \int_C X \, dP = E[X \mid C]$$

Slično:

$$c_2 = E[X \mid C^C]$$

Zaključak:

$$E[X \mid \mathbb{1}_C] = E[X \mid C]\mathbb{1}_C + E[X \mid C^C]\mathbb{1}_{C^c}$$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

$E[\mathbb{1}_A \mid \mathbb{1}_C]$

Na osnovu prethodnog slajda:

$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_A \mid \mathbb{1}_C] &= E[\mathbb{1}_A \mid C]\mathbb{1}_C + E[\mathbb{1}_A \mid C^C]\mathbb{1}_{C^C} \\ &= P(A \mid C)\mathbb{1}_C + P(A \mid C^C)\mathbb{1}_{C^C} \end{aligned}$$

Kraj izleta.

Kamatni račun

- C – kapital, glavnica
- i – (godišnja) kamatna stopa, efektivna
- i je "cijena korištenja kapitala"...
- $C \quad \longrightarrow \quad C(1+i) \quad \longrightarrow \quad C(1+i)^2 \quad \longrightarrow \ldots$
- Kamata se obračunava na kraju godine (obračunskog perioda) tj *dekurzivno* (in arrears).
- $C(1+i)^k$ – vrijednost kapitala nakon k godina
- $(1+i)^k$ – akumulacioni faktor

Akumulacija kapitala, fond

- r_k – iznos koji se ulaže u fond na kraju svake godine
- i – kamatna stopa
- $C = F_0$ – početni kapital
  - $F_1 = F_0(1+i) + r_1$
  - $F_k = F_{k-1}(1+i) + r_k$
  - $$F_n = (1+i)^n F_0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} r_k$$

    Interpretacija?
  - $$F_n = F_0 + \sum_{k=1} r_k + \sum_{k=1}^{n} i_F k - 1$$

    Interpretacija?

Sadašnja vrijednost, diskontni faktor

- C_0 – početni kapital
- i – kamatna stopa
- $C_1 = C_0(1+i)$ vrijednost kapitala nakon jedne godine
- $v = \dfrac{1}{1+i}$ diskontni faktor.
- $C_0 = vC_1$ sadačnja vrijednost kapitala C_1!
- $C_n = (1+i)^n C_0, \qquad C_0 = v^n C_n$ Interpretacija?
- Važan koncept!

Nominalna kamatna stopa

- Nominalna (godiňja) kamatna stopa koja se obračunava m puta godišnje se označava sa $i^{(m)}$
- Akumulacioni faktor za svaki period dužine $1/m$ godine je $\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)$:

$$C \quad \longrightarrow \quad C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right) \longrightarrow C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 \longrightarrow \dots$$

- *Relativna kamatna stopa* je efektivna kamatna stopa za period dužine $\dfrac{1}{m}$: $\dfrac{i^{(m)}}{m}$
- Nakon jedne godine kapital C se uveća do: $C\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

Nominalna i efektivna godišnja kamatna stopa

- Ako je $i^{(m)}$ nominalna godišnja kamatna stopa, odgovarajuća efektivna dogišnja kamatna stopa i zadovoljava jednakost:

$$C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} = C(1+i)$$

- $i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} - 1$
- Ako je data efektivna godišnja kamatna stopa i onda je odgovarajuća *konformna* kamatna stopa za m-ti dio godine:

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}}.$$

Intenzitet kamate

Definicija

Intenzitet kamate (force of interest) : $\delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)}$

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} \Rightarrow \delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$$

Zašto?

Intenzitet kamate

Definicija

Intenzitet kamate (force of interest) : $\delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)}$

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} \Rightarrow \delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$$

Zašto?

$$\delta = \left.\Big((1+i)^x\Big)'_x\right|_{x=0}$$

Akumulacija kapitala i intenzitet kamate

Konstantni intenzitet kamate δ

- $e^{\delta} = 1 + i$
- Akumulacija nakon k godina $C(1+i)^k = Ce^{\delta k}$

Promjenljivi intenzitet kamate $\delta(t)$, neprekidni slučaj

- $F(0) = C$, početni kapital
- U trenutku t akumulirani kapital je:

$$F(t) = F(0) exp \left(\int_0^s \delta(s)\, ds \right)$$

- Princip konzistencije!

Neprekidna plaćanja

Rate of payment

$F(0) = C$, početni kapital

Intenzitet plaćanja $r(t)$

Ideja: U periodu od t do $t + dt$ u fond se uplati $r(t)dt$ novca.

$\delta = 0$ – nema kamaćenja: $dF(t) = r(t)d$

$$F(t) = C + \int_0^t r(s)ds$$

$\delta > 0$ – neprekidno kamaćenje: $dF(t) = F(t)\delta(t)dt + r(t)dt$

$$F(t) = C \cdot exp\left(\int_0^t \delta(s)\, ds\right) + \int_0^t exp\left(\int_s^t \delta(u)\, du\right) r(s)\, ds$$

Anticipativna plaćanja, diskontna stopa

- i godišnja kamatna stopa
- C_0 i C_1 kapital na početku i kraju godine
- $C_1 = C_0(1+i)$
- Diskontna stopa d je definisana jednakošću: $C_0 = C_1(1-d)$
- $\dfrac{1}{1-d} = 1+i$
- $d = \dfrac{i}{1+i} = 1 - v$
- $\dfrac{1}{d} = 1 + \dfrac{1}{i}$
- Anticipativni obračun kamate! Interpretacija?

Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$

- $i^{(m)}$ nominalna godišnja kamatna stopa
- C i C' kapital na početku i kraju perioda dužine $\frac{1}{m}$
- $C' = C\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$
- Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$ je definisana jednakošću:
  $C' = C\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)$

Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$

- $\dfrac{1}{1-\dfrac{d^{(m)}}{m}} = 1 + \dfrac{i^{(m)}}{m}, \qquad d^{(m)} = \dfrac{i^{(m)}}{1+\dfrac{i^{(m)}}{m}}$
- $\dfrac{1}{d^{(m)}} = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{i^{(m)}}$
- Iz posljednje jednakosti slijedi:

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta$$

Interpretacija?

Perpetuiteti

Beskonačni niz (jednakih) uplata

Anticipativni perpetuitet (perpetuity due)

- Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \ldots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

Dekurzivni perpetuitet (immediate perpetuity)

- Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{\infty}|}$:

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}$$

Perpetuiteti sa m godišnjih plaćanja

Anticipativni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od početka prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}$:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m} + \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{1}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{d^{(m)}}$$

Dekurzivni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od kraja prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a^{(m)}_{\overline{\infty}|}$:

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{3}{m}}}{m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

Neprekidni perpetuitet

- Neprekidna plaćanja počev od trenutka $t = 0$.
- Konstantan intenzitet plaćanja $r(t) = 1$.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\bar{a}_{\overline{\infty}|}$:

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t}\, dt = \frac{1}{\delta}$$

Standardni rastući perpetuitet

Anticipativni standardni rastući perpetuitet

- Godišnje uplate vrijednosti $1, 2, 3, \ldots$ redom počevši od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $(I\ddot{a})_{\overline{\infty|}}$.

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty|}} = 1 + 2v + 3v^2 + 4v^3 + \ldots = \frac{1}{(1-v)^2} = \frac{1}{d^2}$$

Dekurzivni standardni rastući perpetuitet

- Godišnje uplate vrijednosti $1, 2, 3, \ldots$ redom počevši od pokraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $(Ia)_{\overline{\infty|}}$.

$$(Ia)_{\overline{\infty|}} = v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + \ldots = \frac{v}{(1-v)^2} = \frac{1-d}{d^2}$$

Rastući perpetuiteti

Dokazi jednakosti sa prethodnog slajda?!

Rastući perpetuiteti sa m godišnjih uplata, koji rastu q puta godiňje: SAMI.

Neprekidni rastući perpetuiteti: SAMI.

Anticipativni annuitet (annuity due)

- n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\overline{n}|}$:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^n \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Dekurzivni annuitet (immediate annuity)

- n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{n}|}$:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}$$

Anuiteti sa više godišnjih uplata

- Analogno perpetuitetima se definišu anuiteti sa m jednakih uplata m puta godišnje.
- Sadašnje vrijednosti se označavaju sa: $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$ i $a^{(m)}_{\overline{n}|}$.

Rastući i opadajući anuiteti

- Prirodno se definišu i rastući anuiteti (analogno rastućim perpetuitetima)
- Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ i $(Ia)_{\overline{n}|}$.
- Razmatraju se i opadajući anuiteti sa uplatama $n, n-1, \ldots, 1$
- Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(D\ddot{a})_{\overline{n}|}$ i $(Da)_{\overline{n}|}$.

Ukupna vrijednost anuiteta

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \text{ i } s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} \text{ i } s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}$$

$$(I\ddot{s})_{\overline{n}|}, \quad (Is)_{\overline{n}|}, \quad (D\ddot{s})_{\overline{n}|}, \quad (Ds)_{\overline{n}|}, \ \ldots$$

Kamatni račun

- C – kapital, glavnica
- i – (godišnja) kamatna stopa, efektivna
- i je "cijena korištenja kapitala"...
- $C \quad \longrightarrow \quad C(1+i) \quad \longrightarrow \quad C(1+i)^2 \quad \longrightarrow \ldots$
- Kamata se obračunava na kraju godine (obračunskog perioda) tj *dekurzivno* (in arrears).
- $C(1+i)^k$ – vrijednost kapitala nakon k godina
- $(1+i)^k$ – akumulacioni faktor

Akumulacija kapitala, fond

- r_k – iznos koji se ulaže u fond na kraju svake godine
- i – kamatna stopa
- $C = F_0$ – početni kapital
  - $F_1 = F_0(1+i) + r_1$
  - $F_k = F_{k-1}(1+i) + r_k$
  - $$F_n = (1+i)^n F_0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} r_k$$

    Interpretacija?
  - $$F_n = F_0 + \sum_{k=1} r_k + \sum_{k=1}^{n} i_F k - 1$$

    Interpretacija?

Sadašnja vrijednost, diskontni faktor

- C_0 – početni kapital
- i – kamatna stopa
- $C_1 = C_0(1+i)$ vrijednost kapitala nakon jedne godine
- $v = \dfrac{1}{1+i}$ diskontni faktor.
- $C_0 = vC_1$ sadačnja vrijednost kapitala C_1!
- $C_n = (1+i)^n C_0, \quad C_0 = v^n C_n$ Interpretacija?
- Važan koncept!

Nominalna kamatna stopa

- Nominalna (godiňja) kamatna stopa koja se obračunava m puta godišnje se označava sa $i^{(m)}$
- Akumulacioni faktor za svaki period dužine $1/m$ godine je $\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)$:

$$C \quad \longrightarrow \quad C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right) \longrightarrow C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 \longrightarrow \dots$$

- *Relativna kamatna stopa* je efektivna kamatna stopa za period dužine $\dfrac{1}{m}$: $\dfrac{i^{(m)}}{m}$
- Nakon jedne godine kapital C se uveća do: $C\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

Nominalna i efektivna godišnja kamatna stopa

- Ako je $i^{(m)}$ nominalna godišnja kamatna stopa, odgovarajuća efektivna dogišnja kamatna stopa i zadovoljava jednakost:

$$C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = C(1+i)$$

- $i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$
- $i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}}.$

Intenzitet kamate

Definicija

Intenzitet kamate (force of interest) : $\delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)}$

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} \Rightarrow \delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$$

Zašto?

Intenzitet kamate

Definicija

Intenzitet kamate (force of interest) : $\delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)}$

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} \Rightarrow \delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$$

Zašto?

$$\delta = \left((1+i)^x\right)'_x \Big|_{x=0}$$

Akumulacija kapitala i intenzitet kamate

Konstantni intenzitet kamate δ

- $e^{\delta} = 1 + i$
- Akumulacija nakon k godina $C(1+i)^k = Ce^{\delta k}$

Promjenljivi intenzitet kamate $\delta(t)$, neprekidni slučaj

- $F(0) = C$, početni kapital
- U trenutku t akumulirani kapital je:

$$F(t) = F(0) exp \left(\int_0^s \delta(s)\, ds \right)$$

- Princip konzistencije!

Neprekidna plaćanja

Rate of payment

$F(0) = C$, početni kapital

Intenzitet plaćanja $r(t)$

Ideja: U periodu od t do $t + dt$ u fond se uplati $r(t)dt$ novca.

$\delta = 0$ – nema kamaćenja: $dF(t) = r(t)d$

$$F(t) = C + \int_0^t r(s)ds$$

$\delta > 0$ – neprekidno kamaćenje: $dF(t) = F(t)\delta(t)dt + r(t)dt$

$$F(t) = C \cdot exp\left(\int_0^t \delta(s)\,ds\right) + \int_0^t exp\left(\int_s^t \delta(u)\,du\right) r(s)\,ds$$

Anticipativna plaćanja, diskontna stopa

- i godišnja kamatna stopa
- C_0 i C_1 kapital na početku i kraju godine
- $C_1 = C_0(1+i)$
- Diskontna stopa d je definisana jednakošću: $C_0 = C_1(1-d)$
- $\dfrac{1}{1-d} = 1+i$
- $d = \dfrac{i}{1+i} = 1-v$
- $\dfrac{1}{d} = 1 + \dfrac{1}{i}$
- Anticipativni obračun kamate! Interpretacija?

Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$

- $i^{(m)}$ nominalna godišnja kamatna stopa
- C i C' kapital na početku i kraju perioda dužine $\frac{1}{m}$
- $C' = C\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$
- Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$ je definisana jednakošću:
  $C' = C\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)$

Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$

- $\dfrac{1}{1-\dfrac{d^{(m)}}{m}} = 1 + \dfrac{i^{(m)}}{m}, \qquad d^{(m)} = \dfrac{i^{(m)}}{1+\dfrac{i^{(m)}}{m}}$
- $\dfrac{1}{d^{(m)}} = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{i^{(m)}}$
- Iz posljednje jednakosti slijedi:

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta$$

Interpretacija?

Anticipativni perpetuitet (perpetuity due)

- Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \ldots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

Dekurzivni perpetuitet (immediate perpetuity)

- Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{\infty}|}$:

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}$$

Perpetuiteti sa m godišnjih plaćanja

Anticipativni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od početka prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}$:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m} + \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{1}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{d^{(m)}}$$

Dekurzivni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od kraja prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a^{(m)}_{\overline{\infty}|}$:

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{3}{m}}}{m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

Neprekidni perpetuitet

- Neprekidna plaćanja počev od trenutka $t = 0$.
- Konstantan intenzitet plaćanja $r(t) = 1$.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\bar{a}_{\overline{\infty|}}$:

$$\bar{a}_{\overline{\infty|}} = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t}\, dt = \frac{1}{\delta}$$

Standardni rastući perpetuitet

Anticipativni standardni rastući perpetuitet

- Godišnje uplate vrijednosti $1, 2, 3, \ldots$ redom počevši od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|}$.

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = 1 + 2v + 3v^2 + 4v^3 + \ldots = \frac{1}{(1-v)^2} = \frac{1}{d^2}$$

Dekurzivni standardni rastući perpetuitet

- Godišnje uplate vrijednosti $1, 2, 3, \ldots$ redom počevši od pokraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $(Ia)_{\overline{\infty}|}$.

$$(Ia)_{\overline{\infty}|} = v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + \ldots = \frac{v}{(1-v)^2} = \frac{1-d}{d^2}$$

Anticipativni annuitet (annuity due)

- n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\overline{n}|}$:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^n \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Dekurzivni annuitet (immediate annuity)

- n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{n}|}$:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}$$

Anuiteti sa više godišnjih uplata

- Analogno perpetuitetima se definišu anuiteti sa m jednakih uplata m puta godišnje.
- Sadašnje vrijednosti se označavaju sa: $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$ i $a^{(m)}_{\overline{n}|}$.

Rastući i opadajući anuiteti

- Prirodno se definišu i rastući anuiteti (analogno rastućim perpetuitetima)
- Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ i $(Ia)_{\overline{n}|}$.
- Razmatraju se i opadajući anuiteti sa uplatama $n, n-1, \ldots, 1$
- Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(D\ddot{a})_{\overline{n}|}$ i $(Da)_{\overline{n}|}$.

Ukupna vrijednost anuiteta

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \text{ i } s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} \text{ i } s^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}$$

$$(I\ddot{s})_{\overline{n}|}, \quad (Is)_{\overline{n}|}, \quad (D\ddot{s})_{\overline{n}|}, \quad (Ds)_{\overline{n}|}, \ \ldots$$

Uvodni pojmovi

(x) – Život starosti x (godina)

$T = T(x) = T_x$

- T je buduće trajanje života (x)
- T je slučajna veličina
- $T + x$ – starost u trenutku smrti
- $G(t) = P(T \leq t)$, $t \geq 0$ raspodjela
- Pretpostavke:
  - G je neprekidna funkcija
  - G ima gustinu
  - $g(t)dt \approx P(t < T < t + dt)$

Osnovne oznake

$$ {}_tq_x := G(t) = P(T \leq t) $$

Vjerovatnoća da će lice starosti x godina umrijeti u narednih t godina.

- Ako je $t = 1$ koristimo oznaku: ${}_1p_x = p_x$

$$ {}_tp_x := 1 - G(t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - {}_tq_x $$

Vjerovatnoća da će lice starosti x doživjeti narednih t godina.

- Ako je $t = 1$ koristimo oznaku: ${}_1q_x = q_x$

$$ {}_{s|t}q_x := P(s < T < s + t) = G(s + t) - G(s) = {}_{s+t}q_x - {}_tq_x $$

Vjerovatnoća da će lice starosti x doživjeti narednih s godina, a zatim umrijeti u sljedećih t godina.

Osnovne oznake

$$ {}_t q_x = G(t), \qquad {}_t p_x := 1 - G(t) $$

$$ {}_t q_{x+s} := P(T < t + s | T > s) = P(T - s < t | T - s > 0) $$

Uslovna vjerovatnoća da će lice starosti x godina koje je doživjelo narednih s godina, umrijeti u t godina nakon toga.

$$ {}_t p_{x+s} := P(T - s < t | T - s > s) = $$

Uslovna vjerovatnoća da će lice starosti x godina koje je doživjelo narednih s godina, doživjeti i t godina nakon toga.

Komentar o prethodnim oznakama

Zbir $\leftrightarrow$ uslovna vjerovatnoća

- ${}_tq_x = G(t) = P(T \le t) = P(T - 0 \le t \mid T > 0)$
- ${}_tq_x = P(\text{preos. trajanje} \le t \mid \text{preos. trajanje} > 0)$
- ${}_tq_{x+s} = P(T - s \le t \mid T - s > 0) = P(T \le t + s \mid T > s)$
- Slično za ${}_tp_{x+s}$

Da je T starost lica u trenutku smrti, onda bi bilo:

- ${}_tq_x := P(T < t + x | T > x)$
- ${}_tp_x := P(T > t + x | T > x)$
- Komplikovanje osnovnih pojmova...?

Neke jednakosti

${}_{s+t}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s}$

Dokaz?

${}_{s|t}q_x = {}_sp_x \cdot {}_tq_{x+s}$

Dokaz?

Očekivano trajanje života

$\mathring{e}_x = E[T]$

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= E[T] \\
&= \int_0^{+\infty} tg(t)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} (1 - G(t))\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} {}_t p_x \, dt
\end{aligned}$$

Dokaz treće jednakosti?

Intenzitet smrtnosti

Motivacija

$$ {}_{t}q_{x+s} := P(T < t+s | T > s) = P(s < T < t+s | T > s) $$

Na intervalu Δt

$$
\begin{aligned}
{}_{\Delta t}q_{x+t} &= P(t < T < t+\Delta t | T > t) \\
&= \frac{G(t+\Delta t) - G(t)}{1 - G(t)} \\
&= \frac{G(t+\Delta t) - G(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{1 - G(t)} \cdot \Delta t
\end{aligned}
$$

Aproksimacija (za "malo" Δt)

$$ {}_{\Delta t}q_{x+t} \approx \frac{G'(t)}{1 - G(t)} \cdot \Delta t = \frac{g(t)}{1 - G(t)} \cdot \Delta t $$

Intenzitet smrtnosti

Definicija

$\mu_{x+t} := \frac{g(t)}{1-G(t)}$

$$\begin{aligned}\mu_{x+t} &= \frac{g(t)}{1-G(t)} = -\frac{(1-G(t))'}{1-G(t)} \\ &= -\Big(\ln(1-G(t))\Big)' = -\Big(\ln({}_tp_x)\Big)'_t\end{aligned}$$

Reprezentacija ${}_tp_x$ preko μ_{x+t}

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds\right)$$

Intenzitet smrtnosti

Veza sa prethodnim pojmovima

$\mu_{x+t} := \frac{g(t)}{1-G(t)}$

Gustina g:

$$g(t) = \mu_{x+t} \cdot (1 - G(t)) = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

Očekivano trajanje života $\mathring{e}_x$

$$\mathring{e}_x = \int_0^{+\infty} t g(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t\, {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt$$

Ranije smo dokazali: $\mathring{e}_x = \int_0^{+\infty} {}_t p_x\, dt$.
Da li je onda: $t\, {}_t p_x \mu_{x+t} = {}_t p_x \ldots$?

Analitički izraz za distribuciju od T

- Realnost pretpostavke?

Cjelobrojno trajanje života K

Oznaka: $K := [T]$

$$P(K = k) = P(k \leq T < k + 1) = {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

Očekivano cjelobrojno trajanje života

$$e_x := \sum_{k=1}^{\infty} P(K \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x$$

- Lakše računanje
- Dovoljna je distribucija s.v. K
- Korisna aproksimacija: $\mathring{e}_x \approx e_x + 1/2$

$T = K + S$

Dio godine smrti do smrti:

$S := T - K$

Pretpostavka

Slučajne veličine S i K su nezavisne.

Posljedica pretpostavke

Postoji funkcija H takva da je ${}_u q_{x+k} = H(u) q_{x+k}$, $u \in [0, 1)$.

- Dokaz?
  (Posmatrati $P(S \leq u | K = k)$ i koristiti nezavisnost S i K)

Ako je $S \sim \mathcal{U}([0, 1))$ onda je:

- $H(u) = u$
- $E[S] = 1/2$
- $\mathring{e}_x = e_x + 1/2$

Diskretna verzija promjenljive S

$$S^{(m)} := \frac{1}{m}[mS + 1]$$

- Diskretizacija promjenljive S
- Korisno u praksi
- Nezavisnost K i S povlači nezavisnost K i $S^{(m)}$
- Ako je $S \sim \mathcal{U}([0,1))$ onda je $S^{(m)} \sim \mathcal{U}(\{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, 1\})$

Tehničke pretpostavke iz prakse

Ako su poznate vrijednosti p_{x+n} za $k \in \mathbb{N}_0$ onda ${}_k p_x$ možemo računati:

$$ {}_k p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1} $$

Pretpostavka 1: Linearnost ${}_u q_x$ za $u \in [0, 1)$

$$ {}_u q_x = u \cdot q_x $$

- Posljedica: $\mu_{x+u} = \dfrac{q_x}{1 - u q_x}$

Pretpostavka 2: Konstantno μ_{x+u} za $u \in [0, 1)$

Oznaka: $\mu_{x+\frac{1}{2}}$

$$ \mu_{x+\frac{1}{2}} = -\ln p_x; \qquad {}_u p_x = (p_x)^u. $$

Očekivanje i cijena

Očekivana dobit

- X – s.v. koja opisuje vrijednost nekog ugovora/igre
- $E[X]$ – je "prosječni dobitak"
- Primjer: $P(X = 2) = P(X = 0) = 0.5$, $E[X] = 1$
- $E[X]$ – je fer cijena ugovora (fair price)
  - Cijena manja od $E[X]$ je povoljna za kupca
  - Cijena veća od $E[X]$ je nepovoljna je nepovoljna za kupca
- Prosječna dobit je $E[X - E[X]] = 0$
- Problemi? Paradoksi?
- Bezrizična procjena; cijena rizika
- St. Petersburg paradox
- Funkcije korisnosti (utility functions) – $E[u(X)]$

Očekivanje i cijena

Očekivana sadašnja vrijednost

Ako se X realizuje u budućnosti (npr. za godinu dana) onda je fair cijena danas $E[vX]$

Neto jednokratna premija, miza

- Novčana svota koju osiguranik plaća za ugovor o osiguranju je *premija*
- U praksi se premija često plaća (više puta) godišnje
- *Jednokratna premija* se plaća jednom u trenutku sklapanja ugovora
- *Neto jednokratna premija (ili miza)* je fer cijena ugovora.
  - Ugovor o osiguranju je slučajna veličina
  - Očekivana sadašnja vrijednost ugovora je miza
  - Interpretacija?

Jednostavni tipovi osiguranja

Tipovi osiguranja

- Osiguranje života
  (Osiguranje kapitala za slučaj smrti)
- Osiguranje života na n godina
  (Privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti)
- Osiguranje doživljenja
  (Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja)
- Mješovito osiguranje
- Odloženo osiguranje
- ...

Pretpostavka konstantne kamatne stope

- Kamatna stopa $i = const.$
- Faktor diskontovanja $v = \frac{1}{1+i}$
- Očekivana sadašnja vrijednost

Oznake

Međunarodne aktuarske oznake

$$A_x, \quad A^1_{x:\overline{n}|}, \quad A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}, \ldots$$

Oznake za potrebe kursa

$$Z^q_\infty, \quad Z^q_n, \quad Z^p_n, \quad Z_n, \ldots$$

Neograničeno osiguranje života

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti

$$Z^q_\infty = v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_x := E[Z^q_\infty] &= E[v^{K+1}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_k p_x\, q_{x+k} \end{aligned}$$

Osiguranje života

Disperzija

$$Var[Z_{\infty}^{q}] = E\left[(Z_{\infty}^{q})^2\right] - E[Z_{\infty}^{q}]^2$$

"Računski ekvivalentno" sa A_x:

$$E\left[(Z_{\infty}^{q})^2\right] = E\left[(v^{K+1})^2\right] == E\left[(v^2)^{K+1}\right]$$

Intermezzo/podsjetnik

$X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih veličina

Kada je $E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$ **?**

Intermezzo/podsjetnik

$X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih veličina

Kada je $E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$ **?**

- Fubini?
- $S_n = X_1 + \ldots + X_n$
- $S_n \to S$ (pointwise)
- Teorema o monotonoj konvergenciji
  - S_n monotono neopadajući niz (pointwise)
- Teorema o dominantnoj konvergenciji
  - Postoji apsolutno integrabilna s.v. S' tako da je : $|S_n| < S'$

Osiguranje života na n godina

Term insurance of duration n

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti
ako se smrt dogodi u prvih n godina

$$Z_n^q = \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases} = \sum_{k=0}^{n} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A^1_{x:\overline{n}|} &:= E[Z_n^q] \\ &= \sum_{k=0}^{n} v^{k+1} P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k} \end{aligned}$$

Osiguranje života na n godina (ograničeno osiguranje)

Disperzija

$$Var[Z_n^q] = E\left[(Z_n^q)^2\right] - E[Z_n^q]^2$$

"Računski ekvivalentno" sa A_x zbog:

$$(Z_n^q)^2 = \begin{cases} (v^{K+1})^2, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (v^2)^{K+1}, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases}$$

Osiguranje doživljenja (na n godina)

Pure endowment

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju n godina
ako je osiguranik živ u tom trenutku

$$Z_n^p = \begin{cases} 0, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases} = \sum_{k=n}^{\infty} v^n \mathbb{1}_{K=k} = v^n \mathbb{1}_{K \geq n}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} := & \, E[Z_n^p] \\ = & \, E[v^n \mathbb{1}_{K \geq n}] \\ = & \, v^n P(K \geq n) \\ = & \, v^n {}_n p_x \end{aligned}$$

Osiguranje doživljenja (na n godina)

Disperzija

$$Var[Z_n^p] = E\left[(Z_n^p)^2\right] - E[Z_n^p]^2$$

- $Z_n^p = v^n \mathbb{1}_{K \geq n}$,
- $\mathbb{1}_{K \geq n} \sim \mathcal{B}({}_np_x)$

$$\begin{aligned} Var[Z_n^p] &= (v^n)^2 Var[\mathbb{1}_{K \geq n}] \\ &= v^{2n} {}_np_x(1 - {}_np_x) \\ &= v^{2n} {}_np_x {}_nq_x \end{aligned}$$

Mješovito osiguranje (na n godina)

Endowment

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti
ako osiguranik umre u toku prvih n godina;
u protivnom na kraju n-te godine.

$$\begin{aligned} Z_n &= \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases} \\ &= Z_n^q + Z_n^p \end{aligned}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &:= E[Z_n] = E[Z_n^q + Z_n^p] \\ &= A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \end{aligned}$$

Mješovito osiguranje (na n godina)

Disperzija

$$Var[Z] = E\left[(Z_n^q)^2\right] + E\left[(Z_n^p)^2\right] + 2Cov[Z_n^q Z_n^p]$$

- $Cov[Z_n^q Z_n^p] = E[Z_n^q Z_n^p] - E[Z_n^q]E[Z_n^p]$
- $Z_n^q Z_n^p = 0$ Zašto?
- $Cov[Z_n^q Z_n^p] = -A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$

$$Var[Z] = E\left[(Z_n^q)^2\right] + E\left[(Z_n^p)^2\right] - 2A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

Odloženo osiguranje života (za m godina)

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti
samo ako osiguranik ne umre u toku prvih m godina.

$$Z^q_{m,\infty} = \begin{cases} 0, & K < m \\ v^{K+1}, & K \geq m \end{cases} = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} {}_{m|}A_x := E[Z^q_{m,\infty}] &= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} P(K = k) \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k} \end{aligned}$$

Podsjetnik

- $A_{x+m} = E[v^{K-m+1} \mid K \geq m]$
- ${}_{m|}A_x = E[\sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}] = [v^{K+1} \mathbb{1}_{K \geq m}]$

$${}_{m|}A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

$$\begin{aligned} A_{x+m} &= E[v^{K-m+1} \mid K \geq m] \\ &= \frac{E[v^{K-m+1} \mathbb{1}_{K \geq m}]}{P(K \geq m)} \\ &= \frac{v^{-m}}{{}_m p_x} E[v^{K+1} \mathbb{1}_{K \geq m}] \\ &= \frac{{}_{m|}A_x}{v^m {}_m p_x} \end{aligned}$$

A_{x+m}

Po uzoru na ${}_t p_{x+m}$ i ${}_t q_{x+m}$ definišemo:

$$A_{x+m} := E[v^{K-m+1} \mid K \geq m]$$

Komentar

- $A_x = E[v^{K+1}] = E[v^{K+1} \mid T > 0] = E[v^{K-0+1} \mid K - 0 \geq 0]$
- $A_x = E[v^{\text{preos. cjelob. trajanje}+1} \mid \text{preos. cjelob. t.} \geq 0]$
- $A_{x+m} = E[v^{K-m+1} \mid K - m \geq 0] = E[v^{K-m+1} \mid K \geq m]$
- Pogrešno: $E[v^{K+1} \mid K \geq m]$

Odloženo osiguranje života (za m godina)

Veza ${}_{m|}A_x$ i A_{x+m}

- $A_{x+m} = E[v^{K-m+1} \mid K \geq m]$
- ${}_{m|}A_x = E[\sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}] = [v^{K+1} \mathbb{1}_{K \geq m}]$

$${}_{m|}A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

$$\begin{aligned} A_{x+m} &= E[v^{K-m+1} \mid K \geq m] \\ &= \frac{E[v^{K-m+1} \mathbb{1}_{K \geq m}]}{P(K \geq m)} \\ &= \frac{v^{-m}}{{}_m p_x} E[v^{K+1} \mathbb{1}_{K \geq m}] \\ &= \frac{{}_{m|}A_x}{v^m {}_m p_x} \end{aligned}$$

Rekurzivne formule

$$A_x = v\,q_x + v\,A_{x+1}\,p_x$$

$$\begin{aligned}
A_x &= E[v^{K+1}] \\
&= E[\mathbb{1}_{K=0} v^{K+1} + \mathbb{1}_{K>0} v^{K+1}] \\
&= vE[\mathbb{1}_{K=0}] + vE[v^{K}\mathbb{1}_{K>0}] \\
&= vP(K=0) + vE[v^{K}|K>0]P(K>0) \\
&= v\,q_x + vE[v^{K-1+1}|K\geq 1]P(K\geq 0) \\
&= v\,q_x + v\,A_{x+1}\,p_x
\end{aligned}$$

Rekurzivne formule

Interpretacije

$A_x = v q_x + v A_{x+1} p_x$

Očekivana vrijednost zbir sadašnjih vrijednosti

- Štete u slučaju smrti u prvoj godini
- Novog ugovora u slučaju doživljenja sljedeće godine

Rekurzivne formule

Interpretacije

$$A_x = vA_{x+1} + v(1 - A_{x+1})q_x$$

Zbir sadašnjih vrijednosti

- Novog ugovora sljedeće godine
- Očekivane doplate za štetu u slučaju smrti u prvoj godini

O drugom sabirku: očekivana doplata kao osiguranje života

$v(1 - A_{x+1})q_x$ – sadašnja vrijednost novog ugovora

- Osiguranje života na 1 godinu ($n = 1$)
- $vq_x = E[Z_1^q] = A^1_{x:\overline{1}|}$
- Osigurana suma je $1 - A_{x+1}$ (a ne 1 kao do sada)

Rekurzivne formule

Interpretacije

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k v(1 - A_{x+k+1}) q_{x+k}$$

- $A_x - vA_{x+1} = v(1 - A_{x+1}) q_x$ (prethodni slajd!)
- $A_{x+1} - vA_{x+2} = v(1 - A_{x+2}) q_{x+1}$
- ...
- $A_{x+k} - vA_{x+k+1} = v(1 - A_{x+k+1}) q_{x+k}$ ...

- Sumiranje jednakosti nakon množenja sa v^k!

Interpretacija: "zbir diskontovanih jednogodišnjih osiguranja"

- $v(1 - A_{x+k+1}) q_{x+k}$ – jednogodišnji ugovor (kao u prehodnom slajdu)
- A_x – neto premija osiguranja života
- $\sum_{k=0}^{\infty} v^k v(1 - A_{x+k+1}) q_{x+k}$ – zbir diskontovanih neto premija jednogodišnjih osiguranja

$$d A_{x+1} = (A_{x+1} - A_x) + v(1 - A_{x+1})q_x$$

Interpretacija?

- $v(1 - A_{x+1})q_x$ – fiktivni jednogodišnji ugovor
- $d A_{x+1}$ – zarada od kamate. Zašto/kako?
- $A_{x+1} - A_x$ – povećanje cijene ugovora?

Opšti tipovi osiguranja

- c_{k+1} – šteta u slučaju smrti u toku k-te godine
- $Z = c_{K+1} v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{K+1} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$

$$E[Z] = E[c_{K+1} v^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{K+1} v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k}$$

Opšti tipovi osiguranja

$c_0 = 0$

Veza sa odloženim osiguranjem

$$E[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_{k-1})_{k|}A_x$$

Veza sa ograničenim osiguranjem

Ako osiguranje traje n godina ($c_k = 0,\ k > n$):

$$E[Z] = c_n A^1_{x:\overline{n}|} + (c_{n-1} - c_n) A^1_{x:\overline{n-1}|} + \ldots + (c_1 - c_2) A^1_{x:\overline{1}|}$$

Interpretacije? Dokazi?

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ – data suma; $x_0 = y_0 = 0$

$$y_k = y_k - y_{k-1} + y_{k-1} - \ldots - y_1 + y_1 - b_0$$

$$y_k = \sum_{i=1}^{k} (y_i - y_{i-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^{n} x_i$$

Zašto?

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

$$
\begin{array}{c|lllll}
x_1 & y_1 - y_0 & & & & \\
x_2 & y_1 - y_0 & y_2 - y_1 & & & \\
x_3 & y_1 - y_0 & y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & & \\
\dots & \dots & & & & \\
x_n & y_1 - y_0 & y_2 - y_1 & y_2 - y_1 & \dots & y_n - y_{n-1}
\end{array}
$$

$$y_k - y_{k-1} \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{i=k}^{n} x_i$$

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

- Pretpostavimo $x_k \geq 0$, $y_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, y_k ograničen niz
- $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \leq +\infty$
- $X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq +\infty$
- $X_n = \sum_{k=n}^{\infty} x_k = X - \sum_{k=1}^{n-1} x_k$
  - Jer je $X_n = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{N} x_k = \lim\limits_{N\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{N} x_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k \right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} (X - \sum_{k=n}^{\infty} x_k) = X - X = 0$$

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

$S = \sum_{k=1}^{\infty}(y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^{\infty} x_i$

$$
\begin{aligned}
S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^{n} x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})(X_k - X_{n-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ((y_k - y_{k-1})X_k - (y_k - y_{k-1})X_{n-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})X_k = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^{\infty} x_i
\end{aligned}
$$

Iskoristili smo:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})X_{n-1} &= \lim_{n\to\infty} X_{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})\\ &= \lim_{n\to\infty} X_{n-1}y_n = 0\end{aligned}$$

Posljednja jednakost?

$E[Z] = \sum_{k=1}^{\infty}(c_k - c_{k-1})_{k|}A_x$

Primjena prethodnih razmatranja o sumiranju!

Vrijednost k se isplaćuje na kraju k-te godine ako osiguranik umre u toku te godine.

- $c_k = k$
- $(K+1)v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$ - sadašnja vrijednost
- $(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k}$ – jednokrata neto premija
- $(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}A_x$

Vrijednost k se isplaćuje na kraju k-te godine ako osiguranik umre u toku te godine, $k \leq n$.

- $c_k = k$
- $(K+1)v^{K+1}\mathbb{1}_{K \leq n} = \sum_{k=1}^{n}(k+1)v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$ - sadašnja vrijednost
- $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}{}_{k}p_x q_{x+k}$ – jednokrata neto premija
- $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}{}_{k|}A_x - n_{n|}A_x$
- $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = nA^{1}_{x:\overline{n}|} - A^{1}_{x:\overline{n-1}|} - A^{1}_{x:\overline{n-2}|} - \ldots - A^{1}_{x:\overline{1}|}$

Standardno opadajuće osiguranje

Vrijednost $n-k+1$ se isplaćuje na kraju k-te godine ako osiguranik umre u toku te godine, $k \leq n$.

- $c_k = n - k + 1$
- $(n-K)v^{K+1}\mathbb{1}_{K\leq n} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$ - sadašnja vrijednost
- $(Da)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}$ – jednokrata neto premija
- $(Da)^1_{x:\overline{n}|} = nA^1_{x:\overline{n}|} + A^1_{x:\overline{n-1}|} + A^1_{x:\overline{n-2}|} + \ldots + A^1_{x:\overline{1}|}$

Rastuća i opadajuća osiguranja

Rastuća osiguranja

Svako rastuće osiguranje čije štete formiraju aritmetički niz se može predstaviti kao (afina) transformacija standardnog rastućeg osiguranja.

Opadajuća osiguranja

Svako opadajuće osiguranje čije štete formiraju aritmetički niz se može predstaviti kao (afina) transformacija standardnog opadajućeg osiguranja.

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Neograničeno osiguranje života

Vrijednost 1 se isplaćuje u trenutku smrti.

Sadašnja vrijednost:

$$\overline{Z}^q_\infty = v^T$$

Neto jednokratna premija

$$\begin{aligned}\bar{A}_x := E[\overline{Z}^q_\infty] &= E[v^T] \\ &= \int_0^\infty v^t g(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt\end{aligned}$$

- $T = K + S = K + 1 + S - 1$
- K i S nezavisne
- $S \sim \mathcal{U}([0,1])$

$1 - S \sim \mathcal{U}([0,1])$:

$$P(1 - S \leq s) = P(S \geq 1 - s) = 1 - P(S \leq 1 - s) = s$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Veza $\bar{A}_x$ i A_x

$\delta = \ln(1+i)$

$E[v^{S-1}]$

$$E[v^{S-1}] = E[(1+i)^{1-S}] = \int_0^1 (1+i)^s \, ds$$
$$= \left. \frac{(1+i)^s}{\ln(1+i)} \right|_0^1 = \frac{i}{\delta}$$

$E[v^T]$

$$E[v^T] = E[v^{K+1+S-1}] = E[v^{K+1}]E[v^{S-1}] = \frac{i}{\delta} A_x$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Ograničeno osiguranje života

Vrijednost 1 se isplaćuje u trenutku smrti, ukoliko se smrt desi u prvih n godina, $n \in \mathbb{N}$.

Sadašnja vrijednost:

$$\overline{Z}_n^q = v^T \mathbb{1}_{T \leq n}$$

Neto jednokratna premija

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} := E[\overline{Z}_n^q] = E[v^T \mathbb{1}_{T \leq n}] = \int_0^n v^t \, {}_tp_x \mu_{x+t} \, dt$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Veza $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ i $A^{1}_{x:\overline{n}|}$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E[v^{K+1}\mathbb{1}_{K<n}]$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} &= E[v^{T}\mathbb{1}_{T\leq n}] \\
&= E[v^{K+1+S-1}\mathbb{T} \leq] \\
&= E[v^{K+1}\mathbb{1}_{K<n}v^{S-1}] \\
&= E[v^{K+1}\mathbb{1}_{K<n}]E[v^{S-1}] \\
&= A^{1}_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{i}{\delta}
\end{aligned}$$

Mješovito osiguranje života

Za dato $n \in \mathbb{N}$, vrijednost 1 se isplaćuje:

- u trenutku smrti, ukoliko se smrt desi u prvih n godina
- u trenutku n, ukoliko je osiguranik doživio n godina

Sadašnja vrijednost:

$$\overline{Z}_n = v^T \mathbb{1}_{T \leq n} + v^n \mathbb{1}_{T > n}$$

Neto jednokratna premija

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{x:\overline{n}|} &:= E[\overline{Z}_n] \\
&= E[v^T \mathbb{1}_{T \leq n} + v^n \mathbb{1}_{T > n}] \\
&= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \\
&= \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \\
&= A_{x:\overline{n}|} + \left(\frac{i}{\delta} - 1\right) \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

Posljednja jednakost?

Neograničeno opšte osiguranje

Vrijednost $c(t)$ se isplaćuje ako smrt nastupi u trenutku $t \in \mathbb{R}^+$.

Sadašnja vrijednost:

$$c(T)v^T$$

Jednokratna neto premija

$$E[c(T)v^T] = \int_0^\infty v^t c(t)\, {}_tp_x \mu_{x+t}\, dt$$

Opšte osiguranje sa isplatom štete na kraju godine smrti

- c_k – šteta u slučaju smrti u toku k-te godine
- $c_{K+1}v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{K+1}v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$ – sadašnja vrijednost
- $E[c_{K+1}v^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{K+1}v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k}$ – jednokratna neto premija

Da li postoji osiguranje sa isplatom štete na kraju godine smrti čija je jednokratna neto premija jednaka $E[c(T)v^T]$?

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Veza sa optštim osiguranjem sa isplatom štete na kraju godine smrti

$$c_{k+1} = E[c(k+S)v^{S-1} \mid K = k]$$

$$\begin{aligned} E[c(T)v^T] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[c(T)v^T \mid K = k] P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[c(k+S)v^{k+S} \mid K = k]_k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} E[c(k+S)v^{S-1} \mid K = k]_k p_x q_{x+k} \end{aligned}$$

Ako su K i S nezavisni i $S \sim \mathcal{U}((0,1))$:

$$c_{k+1} = E[c(k+S)v^{S-1}] = \int_0^1 c(k+u)(1+i)^{1-u}\, du$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Ograničena osiguranja

- $c(t) = 0$ za $t > n$ za neko $n \in \mathbb{N}$
- $E[c(T)v^T] = \int_0^n v^t c(t) {}_tp_x \mu_{x+t} \, dt$

Osigurana suma se povećava diskretno

$$c(t) = [t] + 1$$

Osigurana suma se povećava neprekidno

$$c(t) = t$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Rastuća osiguranja – diskretni rast

- $c(t) = [t] + 1$
- $(K+1)v^T$ – sadašnja vrijednost
- $(I\bar{A})_x := E[(K+1)v^T]$ – jednokratna neto premija
- $(I\bar{A})_x = E[(K+1)v^{K+1}]E[v^{S-1}] = \frac{i}{\delta}(IA)_x$
- Ograničeni slučaj
  - Analogno sa dosadašnjom teorijom
  - $(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Rastuća osiguranja – neprekidni rast

- $c(t) = t$
- Tv^T – sadašnja vrijednost
- $(\bar{I}\bar{A})_x := E[Tv^T]$ – jednokratna neto premija
- Ograničeni slučaj
  - Analogno sa dosadašnjom teorijom
  - $(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$

Na osnovu opšteg osiguranja:

$(\bar{I}\bar{A})_x = E[c_{K+1} v^{K+1}]$

$$
\begin{aligned}
c_{k+1} &= E[c(k+S)v^{S-1} \mid K = k] \\
&= \int_0^1 c(k+u)(1+i)^{1-u}\, du \\
&= \int_0^1 (k+u)(1+i)^{1-u}\, du \\
&= k\frac{i}{\delta} + \frac{i-\delta}{\delta^2}
\end{aligned}
$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Rastuća osiguranja – neprekidni rast

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}(IA)_x - \frac{i}{\delta}A_x + \frac{i-\delta}{\delta^2}A_x$$

$$\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{A})_x &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\delta}k + \frac{i-\delta}{\delta^2} \right) v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\delta}(k+1)v^{k+1} - \frac{i}{\delta}v^{k+1} + \frac{i-\delta}{\delta^2}v^{k+1} \right) {}_k p_x \, q_{x+k} \\
&= \frac{i}{\delta}(IA)_x - \frac{i}{\delta}A_x + \frac{i-\delta}{\delta^2}A_x
\end{aligned}$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Dokazaćemo zakonitost:

$$\frac{d\bar{A}_x}{dx} = (\delta + \mu_x)\bar{A}_x + \mu_x$$

- $\bar{A}_x = E[v^T]$
- $\bar{A}_{x+t} = E[v^{T-t} \mid T > t]$

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= E[v^T] \\
&= E\left[v^T \mid T \leq h\right] P(T \leq h) + E\left[v^T \mid T > h\right] P(T > h) \\
&= E\left[v^T \mid T \leq h\right] {}_h q_x + v^h E\left[v^{T-h} \mid T > h\right] {}_h p_x \\
&= E\left[v^T \mid T \leq h\right] {}_h q_x + v^h {}_h p_x \bar{A}_{x+h}
\end{aligned}
$$

$$\bar{A}_x = E\left[v^T \mid T \le h\right] {}_hq_x + v^h {}_hp_x \bar{A}_{x+h}$$

$$\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x = \bar{A}_{x+h} - E\left[v^T \mid T \le h\right] {}_hq_x - v^h {}_hp_x \bar{A}_{x+h}$$

$$\frac{\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x}{h} = \frac{(1 - v^h {}_hp_x)\bar{A}_{x+h}}{h} - \frac{E\left[v^T \mid T \le h\right] {}_hq_x}{h}$$

$$\frac{\bar{A}_{x+h}-\bar{A}_x}{h} = \frac{(1-v^h{}_hp_x)\bar{A}_{x+h}}{h} - \frac{E\left[v^T | T \leq h\right]{}_hq_x}{h},\ h \to 0+$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{E\left[v^T \mid T \leq h\right]{}_hq_x}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{P(T \leq h)}{h} E\left[v^T \mid T \leq h\right] \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{P(T \leq h)}{h} \frac{E\left[v^T \mathbb{1}_{T\leq h}\right]}{P(T \leq h)} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{\int_0^h v^h g(t)\, dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{\int_0^h g(t)\, dt}{=} \lim_{h\to 0+} \frac{{}_hq_x}{h}
\end{aligned}$$

Posljednja jednakost?

$$\frac{\bar{A}_{x+h}-\bar{A}_x}{h} = \frac{(1-v^h{}_hp_x)\bar{A}_{x+h}}{h} - \frac{E\left[v^T | T \leq h\right]{}_hq_x}{h},\ h \to 0+$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{E\left[v^T \mid T \leq h\right]{}_hq_t}{x} &= \lim_{h\to 0+} \frac{{}_hq_x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{\int_0^h g(t)\,dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{G(h) - G(0)}{h} \\
&= \frac{G'(0)}{1 - G(0)} \\
&= \mu_{x+0} = \mu_x
\end{aligned}$$

Jer je $G(0) = 0$.

$$\frac{\bar{A}_{x+h}-\bar{A}_x}{h} = \frac{(1-v^h{}_hp_x)\bar{A}_{x+h}}{h} - \frac{E\left[v^T | T\leq h\right]{}_hq_x}{h},\ h \to 0+$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{1-v^h{}_hp_x}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{1-v^h(1-{}_hq_x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{1-v^h}{h} + \lim_{h\to 0+} \frac{v^h{}_hq_x}{h} \\
&= -(v^h)'\Big|_{h=0} + 1\cdot\mu_x \\
&= -v^0 \cdot \ln v + \mu_x \\
&= \ln(1+i) + \mu_x = \delta + \mu_x
\end{aligned}$$

$$\frac{\bar{A}_{x+h}-\bar{A}_x}{h} = \frac{(1-v^h{}_hp_x)\bar{A}_{x+h}}{h} - \frac{E\left[v^T | T \leq h\right]{}_hq_x}{h}, \; h \to 0+$$

$$\lim_{h \to 0+} \bar{A}_{x+h} = \bar{A}_x$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x}{h} = \frac{d\bar{A}_x}{dx}$$

$$\frac{\bar{A}_{x+h}-\bar{A}_x}{h} = \frac{(1-v^h{}_hp_x)\bar{A}_{x+h}}{h} - \frac{E\left[v^T | T \leq h\right]{}_hq_x}{h},\ h \to 0+$$

$$\frac{d\bar{A}_x}{dx} = (\delta + \mu_x)\bar{A}_x + \mu_x$$

Anticipativni annuitet (annuity due)

- n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\overline{n}|}$:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Dekurzivni annuitet (immediate annuity)

- n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{n}|}$:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}$$

Anticipativni anuitet sa m godišnjih plaćanja

- $n \cdot m$ uplata: n godina, m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od početka prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$:

$$a^{(m)}_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{mp} \frac{1}{m} v^{t/m} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|}$$

Anuiteti sa m godišnjih plaćanja

Dekurzivni anuitet sa m godišnjih plaćanja

- $n \cdot m$ uplata: n godina, m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od kraja prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{n}|}^{(m)}$:

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{t=0}^{mp-1} \frac{1}{m} v^{t/m} = v^{1/m} \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$$

Standardni rastući i opadajući anuiteti

Standardni rastući anuitet

- Uplate vrijednosti $1, 2, \ldots, n$
- Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(I\ddot{a})_{\overline{n|}}$ i $(Ia)_{\overline{n|}}$.

Standardni opadajući anuiteti

- Uplatame vrijednosti $n, n-1, \ldots, 1$
- Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(D\ddot{a})_{\overline{n|}}$ i $(Da)_{\overline{n|}}$.

Ukupna vrijednost anuiteta

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \text{ i } s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} \text{ i } s^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}$$

$$(I\ddot{s})_{\overline{n}|}, \quad (Is)_{\overline{n}|}, \quad (D\ddot{s})_{\overline{n}|}, \quad (Ds)_{\overline{n}|}, \ \ldots$$

Řente – životni anuiteti

- Niz periodičnih uplata za vrijeme trajanja života
- Iznosi uplata su unaprijed određeni
- Broj isplata je slučajan: "anuitet sa slučajnim trajanjem"
- Očekivana sadašnja vrijednost $\longleftrightarrow$ jednokratna neto premija
- Životne rente – vrsta ugovora, osiguranik prima periodične uplate
- Periodične premije – osiguranik plaća osiguranje periodičnim uplatama

Anticipativna (neposredna) doživotna renta

Whole life annuity-due

Osiguranik prima uplate vrijednosti 1 na početku svake godine do kraja života (u trenucima 0, 1, ..., K).

Sadašnja vrijednost

$$\ddot{Y}_\infty = \sum_{k=0}^{K} v^k = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{1}_{K \geq k}$$

Jednokratna neto premija

$$\ddot{a}_x = E[\ddot{Y}_\infty] = E[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \sum_{k=0}^{K} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot {}_k p_x \, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x$$

Dekurzivna (neposredna) doživotna renta

Osiguranik prima uplate vrijednosti 1 na kraju svake godine do kraja života (u trenucima 1, ..., K).

Sadašnja vrijednost

$$Y_\infty = \sum_{k=1}^{K} v^k = a_{\overline{K}|} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{1}_{K \geq k} = \ddot{Y}_\infty - 1$$

Jednokratna neto premija

$$a_x = E[Y_\infty] = \sum_{k=1}^{K} a_{\overline{k}|} \cdot {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x = \ddot{a}_x - 1$$

Doživotne rente i doživotna osiguranja

$$\ddot{Y}_\infty = \sum_{k=0}^{K} v^k = \frac{1 - v^{K+1}}{1 - v}$$

- $\ddot{Y}_\infty = \dfrac{1 - Z_\infty^q}{d}$
- $\ddot{a}_x = \dfrac{1 - A_x}{d}$
- $1 = \ddot{a}_x d + A_x$ – Interpretacija?

Privremena (ograničena) anticipativna životna renta

Osiguranik, ukoliko je živ, prima uplate vrijednosti 1 na početku svake godine u periodu od n godina.

Sadašnja vrijednost

$$\ddot{Y}_n = \sum_{k=0}^{K\vee(n-1)} v^k = \sum_{k=0}^{n} v^k \mathbb{1}_{K\geq k} = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}\mathbb{1}_{K<n} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\mathbb{1}_{K\geq n} = \ddot{a}_{\overline{(K+1)\vee n}|}$$

Jednokratna neto premija

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[\ddot{Y}_n] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot {}_kp_x q_{x+k} + = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x = \ddot{Y}_n - 1$$

Privremena (ograničena) dekurzivna životna renta

Osiguranik, ukoliko je živ, prima uplate vrijednosti 1 na kraju svake godine u periodu od n godina.

Sadašnja vrijednost

$$
\begin{aligned}
Y_n &= \sum_{k=1}^{(K+1)\vee n} v^k = \sum_{k=1}^{n+1} v^k \mathbb{1}_{K\geq k} \\
&= a_{\overline{K+1}|}\mathbb{1}_{K<n} + a_{\overline{n}|}\mathbb{1}_{K\geq n} = a_{\overline{(K+1)\vee n}|} = \ddot{Y}_n - 1 + v^n \mathbb{1}_{K\geq n}
\end{aligned}
$$

Jednokratna neto premija

$$
a_{x:\overline{n}|} = E[Y_n] = \sum_{k=1}^{n} a_{\overline{k+1}|} \cdot {}_k p_x \, q_{x+k} + = \sum_{k=1}^{n} v^k \, {}_k p_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + {}_n p_x \, v^n
$$

Ograničene životne rente i osiguranja

$$\ddot{Y}_n = \sum_{k=0}^{K\vee(n-1)} v^k = \frac{1 - v^{(K+1)\vee n}}{1 - v}$$

- $Z_n^q = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k} = v^{(K+1)\vee n}$
- $\ddot{Y}_n = \dfrac{1 - Z_n^q}{d}$
- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}$

Odložena doživotna renta (za m godina)

Anticipativni slučaj

Počev of m-te godine od sad, osiguranik prima uplate vrijednosti 1 na kraju svake godine do kraja života (u trenucima m, m+1, ..., K).

Sadašnja vrijednost

$$\ddot{Y}_{m,\infty} = \sum_{k=m}^{K} v^k = \sum_{k=m}^{\infty} v^k \mathbb{1}_{K \geq k}$$

Jednokratna neto premija

$${}_{m|}\ddot{a}_x = E[\ddot{Y}_{m,\infty}] = \sum_{k=m}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

Odložena doživotna renta (za m godina)

Anticipativni slučaj

- $\ddot{a}_{x+m} = E[\ddot{a}_{\overline{K-m+1}|} \mid K \geq m]$
- ${}_{m|}\ddot{a}_x = {}_m p_x v^m \ddot{a}_{x+m}$
- ${}_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$

Interpretacije?

Dekurzivni slučaj

Analogno sa prethodnim: ${}_{m|}a_x = E\left[\sum_{k=m+1}^{K} v^k\right]$

Rekurzivne formule

$$\ddot{a}_x = 1 + v\ddot{a}_{x+1}p_x$$

1. dokaz: Direktno iz definicije $\ddot{a}_{x+1}$ (Slično kao rekurzivna formula za A_x.)

2. dokaz: Kombinujući jednakosti:

- $\ddot{a}_x = \dfrac{1 - A_x}{d} = \dfrac{1 - A_x}{1 - v}$
- $\ddot{a}_{x+1} = \dfrac{1 - A_{x+1}}{1 - v}$
- $A_x = v q_x + v A_{x+1} p_x$

Rekurzivne formule

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= \frac{1 - A_x}{1 - v} \\
&= \frac{1}{1 - v}(1 - v\,q_x - v\,A_{x+1}\,p_x) \\
&= \frac{1}{1 - v}(1 - v\,q_x - v(1 - (1 - v)\,\ddot{a}_{x+1}\,p_x) \\
&= \frac{1}{1 - v}(1 - v\,q_x - v\,p_x) + \frac{1}{1 - v}v(1 - v)\,\ddot{a}_{x+1}\,p_x \\
&= 1 + v\,\ddot{a}_{x+1}\,p_x
\end{aligned}
$$

Rente sa m godišnjih plaćanja

Doživotna renta, anticipativni slučaj

Osiguranik prima uplate vrijednosti $1/m$, m puta godišnje, do kraja života (u trenucima 0, $1/m$, $2/m$, ..., $K + S^{(m)}$).

- Sadašnja vrijednost i jednokratna neto premija se definišu na prirodan način
- $1 = \ddot{a}_x^{(m)} d^{(m)} + A_x^{(m)} \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}} A_x^{(m)}$
- $\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x^{(m)} - \beta(m)$
  - $\alpha(m) := \frac{di}{d^{(m)} i^{(m)}}$
  - $\beta(m) := \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)} i^{(m)}}$

Dekurzivni slučaj funkcioniše prirodno: $a_x^{(m)}$...

Rente sa m godišnjih plaćanja

Ograničena životna renta, anticipativni slučaj

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}^{(m)}_{x} - {}_{n}p_x v^n \ddot{a}^{(m)}_{x+n} \\
&= \alpha(m)\ddot{a}^{(m)}_{x} - \beta(m) - {}_{n}p_x v^n(\alpha(m)\ddot{a}^{(m)}_{x+n} - \beta(m)) \\
&= \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_{n}p_x v^n) \\
&= \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}(A^{(m)}_x - A_x) \\
&= \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \beta(m)A_x
\end{aligned}
$$

Dekurzivni slučaj na prirodan način: $a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} - \dfrac{1}{m} + \dfrac{{}_{n}p_x v^n}{m}$

Osiguranik prima uplate vrijednosti $r_0, r_1, \ldots$ u trenucima $0, 1, \ldots, K$.

Sadašnja vrijednost

$$\sum_{k=0}^{K} v^k r_k = \sum_{k=0}^{\infty} v^k r_k \mathbb{1}_{K \geq 1}$$

Jednokratna neto premija

$$E\left[\sum_{k=0}^{K} v^k r_k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k r_{k\,k} p_x \qquad (1)$$

Standardna rastuća životna renta

- $r_k = k + 1$
- Sadašnja vrijednost: $\sum_{k=0}^{K}(k+1)v^k$
- Jednokratna neto premija $(I\ddot{a})_x$:

$$\ddot{a}_x = d(I\ddot{a})_x + (IA)_x$$

(Jer je $\ddot{a}_{\overline{n}|} = d(I\ddot{a})_{\overline{n}|} + nv^n$, $n \leftrightarrow K+1$.)

Neprekidne životne rente

Opšti slučaj

- $r(t)$ – intenzitet plaćanja
- Sadašnja vrijednost, s.v.:

$$\int_0^T r(t)v^t \, dt$$

- Neto jednokratna premija:

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T r(t)v^t \, dt\right] &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t r(t)v^t \, dt\right) g(s) \, ds \\ &= \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} r(t)v^t g(s) \, ds \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} r(t)v^t \, {}_tp_x \, dt \end{aligned}$$

Neprekidna neograničena životna renta

- $c(t) = 1$
- Sadašnja vrijednost, s.v.:

$$\int_0^T v^t \, dt = \bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - v^T}{\delta}$$

- Neto jednokratna premija:

$$\bar{a}_x = E\left[\int_0^T v^t \, dt\right] = \int_0^{+\infty} v^t \, {}_t p_x \, dt = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}$$

- Zbog $\dfrac{d\bar{A}_x}{dx} = (\delta + \mu_x)\bar{A}_x + \mu_x$ važi:

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx} = \delta \bar{a}_x - 1 + \mu_x \bar{a}_x$$

- $\mathring{e}_x = E[T] = \int_0^{+\infty} {}_t p_x \, dt$
- $\bar{a}_x = E[\bar{a}_{\overline{T|}}]$
- $\bar{a}_x \neq \bar{a}_{\overline{E[T]|}} = \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x|}}$
- Zbog Jensenove nejednakosti:
  $\bar{a}_x < \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x|}}$

Neto premije

$SV(\cdot)$ – sadašnja vrijednost

L - sadašnja očekivana vrijednost guibtka

$$L = SV(\text{ štete, isplate }) - SV(\text{ premije, uplate })$$

- Jednokratne neto rente
- Periodične i konstantne neto rente
- Promjenljive rente

Neto premije

Princip ekvivalencije

$$E[L] = 0$$

- Princip ekvivalencije određuje jedinstvene:
  - Jednokratne neto premije (A_x, $A^1_{x:\overline{n|}}$, $A_{x:\overline{n|}}^{\ \ \ 1}$, ...)
  - Konstantne periodične neto premije

- Princip ekvivalencije ne odredjuje jedinstvene neto premije za
  - Promjenljive premije
  - Komplikovanije ugovore

Periodične neto premije

Neograničeno osiguranje života

- Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti
- PRemije vrijednost P_x na početku svake godine do kraja života (u trenucima 0, 1, ..., K).

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

Neto premija ($E[L] = 0$)

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{\overline{x}|}}$$

Periodične neto premije

Neograničeno osiguranje života

- Perpetuitet: $\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \ldots = \frac{1}{d}$
- $\ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^{K+1}\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d}v^{K+1}$
- $L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1}|} = v^{K+1}(1 + \frac{1}{d}P_x) - \frac{1}{d}P_x$
- $Var[L] = (1 + \frac{1}{d}P_x)^2 Var[v^{K+1}] > Var[v^{K+1}]$
    - Periodične rente su rizičnije od jednokratnih

$$P_x = \frac{d A_x}{1 - A_x}, \qquad \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{x}|}} = d + P_x$$

Periodične neto premije

Ograničeno osiguranje života

- Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti ako se smrt dogodi u prvih n godina
- Osiguranik, ukoliko je živ, plaća premije vrijednosti $P^1_{x:\overline{n}|}$ na kraju svake godine u periodu od n godina.

$$L = v^{K+1}\mathbb{1}_{K<n} - P^1_{x:\overline{n}|} a_{\overline{(K+1)\vee n}|}$$

Neto premija $(E[L] = 0)$

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Periodične neto premije

Mješovito osiguranje

- Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju n godina ako je osiguranik živ u tom trenutku
- Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti ako se smrt dogodi u prvih n godina
- Osiguranik, ukoliko je živ, plaća premije vrijednosti $P_{x:\overline{n}|}$ na kraju svake godine u periodu od n godina.

$$L = v^{K+1}\mathbb{1}_{K<n} + v^{n}\mathbb{1}_{K\geq n} - P_{x:\overline{n}|}\, a_{\overline{(K+1)\vee n}|}$$

Neto premija ($E[L] = 0$)

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} + P^{1}_{x:\overline{n}|}$$

Periodične neto premije

Odložena doživotna renta

- Počev od n-te godine od sad, osiguranik prima uplate vrijednosti 1 na kraju svake godine do kraja života (u trenucima n+1, ..., K).
- Osiguranik, ukoliko je živ, plaća premije vrijednosti P na kraju svake godine u periodu od n godina.

$$L = P a_{\overline{(K+1)\vee n}|} - \mathbb{1}_{K\geq n} v^n \ddot{a}_{\overline{K-n+1}|}$$

Neto premija ($E[L] = 0$)

$$P = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - p_n x v^n$$