EA
ETF
UCG

Konusne površi: dva zadatka

April 2013.

1. ZADATAK Sfera $x^2+y^2+z^2=9$ je osvijetljena svjetlošću čiji se izvor nalazi u tački $M(5,0,0)$. Naći oblik sjenke u ravni yOz.

Rješenje:

Zraci koji tangiraju sferu obrazuju neku konusnu površ. Ti zraci predstavljaju generatrise konusne površi, a presjek površi i ravni yOz je tražena sjenka.

Neka je l proizvoljan zrak koji tangira datu sferu, i neka je $\vec{s}=(m,n,p)$ njegov vektor pravca. Kako zrak l prolazi kroz tačku $M(5,0,0)$ njegova jednačina glasi:

$$l:\ \frac{x-5}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p},$$

odnosno u parametarskom obliku:

$$l:\ \begin{cases} x=5+mt \\ y=nt \\ z=pt \end{cases}.$$

Tačka presjeka zraka l i sfere zadovoljava i jednačinu prave i jednačinu sfere, pa mora važiti jednakost:

$$(5+mt)^2+(nt)^2+(pt)^2=9.$$

Poslije nešto sređivanja gornja jednakost glasi:

$$t^2(m^2+n^2+p^2)+10mt+16=0.$$

Svako rješenje gornje jednačine daje jednu presječnu tačku sfere i zraka l. Kako zrak l tangira sferu to gornja jednačina mora imati jedinstveno rješenje.

Dakle, mora važiti $D = 0$, odnosno: $(10m)^2 - 4 \cdot (m^2 + n^2 + p^2) \cdot 6 = 0$. Poslije jednostavnog sređivanja ove jednačine zaključujemo da koordinate vektora $\overrightarrow{s}$ zadovoljavaju jednakost:

$$9m^2 - 16n^2 - 16p^2 = 0. \tag{1}$$

S druge strane, ako je $A(x, y, z)$ proizvoljna tačka konusne površi možemo uzeti $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{MA}$, odnosno:

$$(m, n, p) = (x - 5, y, z).$$

Uvrštavajući ovo u jednačinu (1) dobijamo jednačinu konusne površi:

$$9(x - 5)^2 - 16y^2 - 16z^2 = 0.$$

Konačno, jednačina (ruba) sjenke u ravni $yOz : x = 0$ glasi:

$$\begin{cases} 9(x - 5)^2 - 16y^2 - 16z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

2. ZADATAK Odrediti jednačinu konusne površi koja je opisana oko sfera: $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ i $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$.

Rješenje:

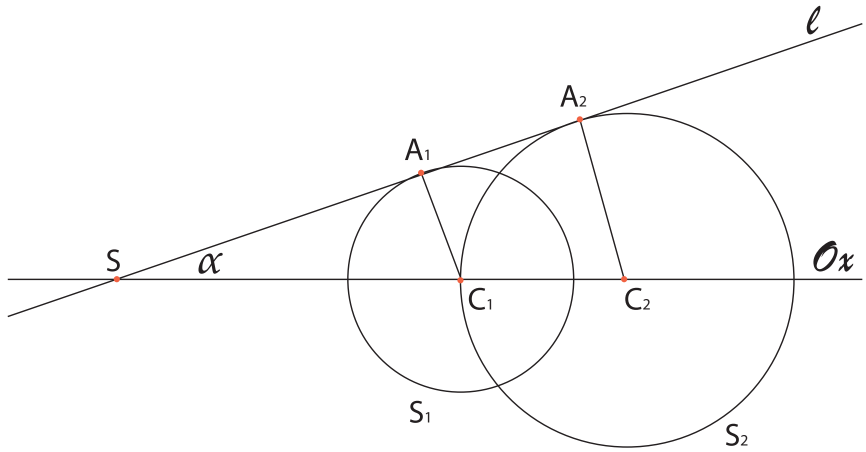
Poslije jednostavnih transformacija jednačine datih sfera se mogu zapisati u obliku: $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $S_2 : (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ odakle zaključujemo da su im centri u tačkama $C_1(0, 0, 0)$ i $C_2(2, 0, 0)$ redom i da su im poluprečnici $r_1 = 1$ i $r_2 = 2$ redom.

Prmijetimo da centar druge sfere pripada prvoj: $C_2 \in S_1$. Jasno je da centar tražene konusne površi pripada pravoj određenoj centrima. Lako se provjerava da je ta prava upravo Ox osa, pa, imajući u vidu položaj sfera, zaključujemo da vrh konusne površi S ima koordinate $(-a, 0, 0)$ za neko $a > 0$.

Neka je l proizvoljna direktrisa tražene konusne površi koja dodiruje sfere u tačkama A_1 i A_2 redom, a α ugao koji ta direktrisa zaklapa sa osom konusne površi tj. Ox osom (vidi sliku).

Uglovi $\measuredangle C_1A_1S$ i $\measuredangle C_2A_2S$ su pravi, pa su trouglovi $\triangle C_1A_1S$ i $\triangle C_2A_2S$ slični. Dakle, važi jednakost:

$$\frac{SC_1}{C_1A_1} = \frac{SC_2}{C_2A_2}.$$



Primijetimo da je $SC_1 = a$, $SC_2 = a + 2$, $C_1A_1 = r_1 = 1$ i $C_2A_2 = r_2 = 2$, pa gornju jednakost možemo zapisati u obliku:

$$\frac{a}{1} = \frac{a+2}{2},$$

odakle zaključujemo: $a = 2$. Dakle, koordinate tačke S su $(2, 0, 0)$ i važi $SC_1 = 2$ i $SC_2 = 4$.

Primjenjujući definiciju sinusa na trougao $\triangle C_1A_1S$ dobijamo da važi: $\sin\alpha = C_1A_1/SC_1 = 1/2$, pa zaključujemo da je $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Kada su nam poznati vektor pravca ose $\overrightarrow{s}$ i tjeme S konusne površi i ugao α između generatrise i ose konusne površi jednačinu te konusne površi možemo odrediti na sljedeći način:

Ako je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka konusne površi važi:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{SM}}{|\overrightarrow{s}| \cdot |\overrightarrow{SM}|}.$$

U našem slučaju je $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{i} = (1,0,0)$, a $\overrightarrow{SM} = (x+2, y, z)$, pa uvrštavanjem poznatih vrijednosti gornja jednakost postaje:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 \cdot (x+2) + 0 \cdot y + 0 \cdot z}{1 \cdot \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}}.$$

Jednostavnim transformacijama posljednje jednakosti dobijamo da je jednačina tražene konusne površi:

$$(x+2)^2 = 3y^2 + 3z^2.$$