ETF Matematika 2:

funkcije više promjenljivih i površi drugog reda

Zadaci za samostalni rad

ETF, UCG, Maj 2020.

1. Izračunati: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x + xy + y^2 + \sin(x^2y))e^{-xy}$.

2. Izračunati: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy^4 \sin\sqrt{\frac{\pi^2}{36} - xy}}}{x^4 + y^2}$.

3. Ispitati neprekidnost funkcije: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2y^4 + x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

4. Odrediti graničnu vrijednost funkcije $\dfrac{x^2 + y^2}{4x^2 + 4y^2 + \sin(x^2y^2)}$ u tački $(0,0)$.

5. Koristeći Hajneovu definiciju granične vrijednosti funkcije dokazati da funkcija $\dfrac{\cos(y-x)}{\cos(x+y)}$ nema graničnu vrijednost u tački $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

6. Date su glatke funkcije u i v. Izračunati $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ ako je: $w(x,y,z) = u(xy + z^2) + v(\operatorname{arctg}(x+y), \operatorname{arctg} z)$.

7. Ako je $F(x,y,z) = f(e^{-x^2} + e^{-y^2} + e^{-z^2}, g(x-y, y-z, z-x))$ izračunati $\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}$.

8. Funkcija $u(t)$ definisana je jednakošću $\ln(1 + u + t) = u$. Neka je v data glatka funkcija.

   Ako je $F(x,y) = v(u(x+y), x+y)$ izračunati $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

9. Data je glatka funkcija u. Funkcija $v(s,t)$ definisana je jednakošću $u(s-v) = v - t$.

   (a) Izračunati $\dfrac{\partial^2 v}{\partial s \partial t}$.

   (b) Ako je $u(x) = e^x$, dokazati da je $v(1,0) = 1$, a zatim izračunati $\dfrac{\partial^2 v}{\partial s \partial t}(1,0)$.

10. Funkcija $v(t)$ definisana je jednakošću $e^t + e^v = t$.

    (a) Izračunati $v''(t)$.

    (b) Ako je funkcija $w(x,y)$ definisana jednakošću: $v(x-w) = v(y+w)$ izračunati $\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

11. Funkcije $u(x,y)$ i $w(x)$ su zadate implicitno jednakostima $u^3 = 3u - 3xy$ i $w^3 = 3w - 3x$, redom. Ako je $z(x,y) = u(w(x), y)$ naći $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

12. Odrediti lokalne ekstremume funkcije $f(x, y) = xy(x + y)(1 + y)$.

13. Odrediti ekstremume funkcije $f(x, y) = \ln(4xz - y^2) - 2x^2 - z^2$.

14. Odrediti domen funkcije $f(x, y) = \sqrt{x + y} - 12x^3 - y$, a zatim:

    (a) odrediti lokalne ekstremume u unutrašnjosti domena,

    (b) odrediti uslovne ekstremume na granici domena.

15. Data je funkcija $z(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$.

    (a) Odrediti ekstremume funkcije z pod uslovom $x^2 - y^2 = 1$.

    (b) Odrediti lokalne ekstremume funkcije $w(x, y) = z(x^2, y^2)$.

16. Neka je $z(x, y) = \ln(1 + x + y)$ data funkcija, a $k : x^2 + y^2 = x$ data kružnica.

    (a) Odrediti uslovne ekstremume funkcije z na kružnici k.

    (b) Neka je F zatvorena figura ograničena kružnicom k i pravama $x = 1$ i $5x - 5y = -1$. Odrediti najmanju i najveću vrijednost funkcije z na skupu tačaka koje pripadaju figuri F.

17. Odrediti najmanju i najveću vrijednost funkcije $f(x, y) = (4x - 2x^2) \sin y + x^2 \sin y \cos y$ na (zatvorenom) pravougaoniku sa tjemenima u tačkama $(0, -\frac{\pi}{2})$, $(2, -\frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{\pi}{2})$, $(2, \frac{\pi}{2})$.

18. Data je funkcija $f(x, y) = e^x + e^y - e^{x+y}$.

    (a) Odrediti uslovne ekstremume funkcije f na krivoj $e^x - e^y = 1$.

    (b) Odrediti najmanju i najveću vrijednost funkcije f na duži sa krajnjim tačkama $M(\ln \frac{1}{2}, \ln \frac{1}{2})$ i $N(\ln 2, \ln 2)$

    (c) Odrediti najmanju i navjeću vrijednost funkcije na (zatvorenom) trouglu sa tjemenima $A(-1, -1)$, $B(-1, 1)$ i $C(1, -1)$.

19. Sfera S sadrži tačku $T(1, 2, 4)$ i dodiruje ravan $\alpha : x - y - 2z = 0$. Napisati jednačinu sfere S ako normala iz tačke T na ravan α sadrži jedan prečnik te sfere.

20. Sfera s_1 sa centrom u $C_1(1, 0, -1)$ dodiruje sferu s_2 sa centrom u $C_2(2, 2, 0)$. Neka su r_1 i r_2 poluprečnici datih sfera, pri čemu važi jednakost: $r_2 = 2r_1$. Napisati jednačine datih sfera.

21. Napisati jednačinu sfere koja sadrži tačke $M(1, -3, -1)$, $N(2, 3, -2)$ i $P(-3, -1, 1)$, ako je poznato da joj centar leži u ravni $\alpha : x + y + z = 3$.

22. Centar sfere koja sadrži tačku $A(1, 0, 2)$ leži na pravoj $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$. Napisati jednačinu te sfere ako je poznato da dodiruje ravan $\pi : 2x + -2y + z - 5 = 0$.

23. Napisati jednačinu sfere poluprečnika 3 s centrom u ravni $\alpha : x + z = 4$, koja pravu $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$ dodiruje u tački $T(0, -1, 1)$.

24. Date su paralelne prave $a : x = y + 3 = z$ i $b : x = y - 3 = z$. Odrediti jednačinu sfere kojoj centar leži u ravni $\pi : x - y - z = 0$, ako je poznato da sfera dodiruje prave a i b u tačkama A i B redom, tako da je AB prečnik tražene sfere.