

ETF Matematika 2: Zadaci za samostalni rad

Drugi dio semestra

ETF, UCG, Jun 2022.

1. Izračunati: a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(e^{x^2+y^2})}{|x|+|y|}$, b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^2+y^4} \cos(xy) - 1}{x^2+y^2}$.

2. Ispitati neprekidnost funkcije: $g(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(1-\cos y)}{(x-1)^2+y^2}, & (x, y) \neq (1, 0) \\ 1, & (x, y) = (1, 0) \end{cases}$.

3. Data je funkcija $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt[3]{\sin^4 x} - y\sqrt[3]{\sin^4 y}}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Da li postoji vrijednost parametra a za koju je funkcija g neprekidna? Obrazložiti i, ukoliko postoji, odrediti tu vrijednost.

4. Date su glatke funkcije f i g . Ako je

$$F(x, y, z) = f(xyz, g(x+z, y-z), g(x^3+y^3, x^3-y^3))$$

izračunati $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$.

5. Date su glatke funkcije y i z , a funkcija $x(t)$ je definisana jednakošću:

$$y(t+x, 1-t) = z(x+t).$$

Izračunati $x''(t)$.

6. Date su glatke funkcije u i v . Funkcija $z(x, y)$ definisana je jednakošću $u(x+y-z) = z$.

Ako je $w = v(1-z, u(1+z))$ odrediti $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

7. Funkcija $v(t)$ definisana je jednakošću $e^t + e^v = t$.

(a) Izračunati $v''(t)$.

(b) Ako je funkcija $w(x, y)$ definisana jednakošću: $v(x-w) = v(y+w)$ izračunati $\frac{\partial w}{\partial x}$.

8. Odrediti najmanju i najveću vrijednost funkcije:

$$f(x, y) = x(4 - 2x - x \sin y) \cos y$$

na (zatvorenom) pravougaoniku sa tjemena u tačkama $(0, -\pi)$, $(2, -\pi)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$.

9. Data je funkcija

$$z(x, y) = xy^2(2 - x - y)$$

- (a) Odrediti lokalne ekstremume date funkcije.
- (b) Naći najmanju i najveću vrijednost funkcije na figuri ograničenoj krivom $xy = 4$ i pravama $4x = 1$ i $4y = 1$.

10. Data je funkcija $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$

- (a) Odrediti uslovne ekstremume funkcije f pod uslovom $x^2 - xy + y^2 = 1$.
- (b) Odrediti najmanju i najveću u vrijednost funkcije $F(x, y) = f(x^2, y^2)$ na krugu $x^2 + y^2 \leq x$.

11. Odrediti ekstremume funkcije $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - \ln(4xy - z^2)$.

12. Direktrisa cilindrične površi je kružnica koja leži u presjeku ravni $-y + 2z = 0$ i sfere sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom $r = 4$. Odrediti jednačinu te površi ako joj je generatrisa paralelna sa duži sa krajnjim tačkama $A(0, -1, 2)$ i $B(0, 2, -4)$.

13. Napisati jednačinu kružnog cilindra poluprečnika 1 čija je osa u presjeku ravni: $\alpha : x + y = z$ i $\beta : x + z = 1$.

14. Date su ravni $\alpha : 2x + y - 2z - 2 = 0$ i $\beta : z = 1$. Odrediti jednačinu sfere koja dodiruje date ravni, a centar joj leži na pravoj $p : \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{2}$.

15. Napisati jednačinu sfere poluprečnika 3 koja sarži tačku $(-1, 1, 1)$, a centar joj leži na pravoj $p : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$.