ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

PODGORICA

VIŠA RAČUNARSKA ŠKOLA

MATEMATIKA U RAČUNARSTVU

MATERIJAL ZA II KOLOKVIJUM

ELEMENTI TEORIJE GREŠAKA

U okviru teorije grešaka, nakon definicija osnovnih pojmova izučavaćemo probleme određivanja greške u računanju složenih izraza u slučajevima kada su poznate greške osnovnih veličina u posmatranom složenom izrazu. Primjer takvog problema je računanje izraza $f=x+xy$ pri čemu su poznate približne vrijednosti veličina x i y i greške, odnosno odstupanja približnih vrijednosti od tačnih. Zadatak je sračunati približnu vrijednosti i grešku za izraz f. Druga klasa problema je slična prvoj, s tom razlikom što ne znamo tačne vrijednosti veličina x i y ali možemo da procijenimo koliko je maksimalno odstupanje približne vrijednosti od tačne.

Približan broj $\bar{x}$ je broj koji zamjenjuje tačan broj x i neznatno se razlikuje od njega. Na primjer razlomak 1/3 se ne može tačno zapisati sa konačnim brojem decimala, pa možemo kazati da je 0.333 približna vrijednost broja 1/3.

Greška se definiše kao odstupanje približne vrijednosti od tačne. Obilježavamo je sa e_x, gdje x u indeksu označava veličinu čiju grešku definišemo:

$$e_x = \bar{x} - x$$

Ukoliko nam tačna vrijednost nije poznata tada možemo definisati granicu apsolutne greške Δx odnosno **maksimalnu apsolutnu grešku** gdje pretpostavljamo da je:

$$\Delta x \geq |e| = |\bar{x} - x|$$

Za ovako definisanu granicu greške vrijedi:

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

odnosno kada poznajemo granicu apsolutne vrijednosti greške tada možemo utvrditi u kojem intervalu, oko približne vrijednosti, se nalazi nepoznata tačna vrijednost.

Relativna greška se definiše kao odnos greške i tačne vrijednosti.

$$r_x = \frac{e_x}{x} = \frac{\bar{x} - x}{x} \quad \text{za } x \neq 0$$

Možemo je tumačiti kao veličinu koja daje relativnu informaciju o iznosu greške, odnosno, ako je pomnožimo sa 100 dobićemo grešku izraženu u procentima tačne vrijednosti. Na primjer podatak e=1 nam ne govori mnogo. Ako je tačna vrijednost x=10, tada je to relativno velika greška, a ako je x=10000 tada je ta greška zanemarljiva. U prvom slučaju je relativna greška 0.1 odnosno 10% a u drugom 0.0001 odnosno 0.01%.

Analogno relativnog grešci definišemo i **maksimalnu relativnu grešku**, za slučaj gada je poznata granica greške Δx :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{|\overline{x}|} \text{ za } x \neq 0$$

U nastavku ćemo vidjeti kako se određuje tačnost rezultata ako je poznata tačnost početnih podataka, odnosno kako da uskladimo tačost početnih podataka (na približno isti broj značajnih mjesta) i kako da u procesu računanja održimo što veću tačnost.

Posmatrajmo nekoliko osnovnih izračunavanja i uticaj greške na rezultat.

Sabiranje i oduzimanje: Neka su $\overline{x}$ i $\overline{y}$ približne vrijednosti, x i y tačne, e_x i e_y greške a r_x i r_y relativne greške ovih veličina. Imamo da je:

$$\overline{x} + \overline{y} = x + e_x + y + e_y = x + y + e_x + e_y$$

odakle zaključujemo da je:

$$e_{x+y} = e_x + e_y$$

na sličan način može se dobiti i:

$$e_{x-y} = e_x - e_y$$

Relativne greške zbira i razlike biće:

$$r_{x+y} = \frac{e_{x+y}}{x+y} = \frac{e_x}{x+y} + \frac{e_y}{x+y} = r_x \frac{x}{x+y} + r_y \frac{y}{x+y}$$

$$r_{x-y} = r_x \frac{x}{x-y} - r_y \frac{y}{x-y}$$

Pretpostavimo sada da su zadate približne vrijednosti $\overline{x}$ i $\overline{y}$ i granice greške Δx, Δy kao i maksimalne relativne greške ε_x i ε_y. Imamo da je:

$$\overline{x} - \Delta x \le x \le \overline{x} + \Delta x \text{ i } \overline{y} - \Delta y \le y \le \overline{y} + \Delta y$$

sabirajući gornje nejednakosti dobijamo: $\overline{x} + \overline{y} - \Delta x - \Delta y \le x + y \le \overline{x} + \overline{y} + \Delta x + \Delta y$ odakle lako možemo zaključiti da je:

$$\Delta_{x+y} = \Delta x + \Delta y$$

Pomnožimo drugu nejednakost sa –1. Smjer nejednakosti se mijenja pa dobijamo:

$-\overline{y} + \Delta y \ge -y \ge -\overline{y} - \Delta y$, odnsono $-\overline{y} - \Delta y \le -y \le -\overline{y} + \Delta y$

sabirajući ovu nejednakost sa nejednakošću za promjenjivu x dobijamo:

$$\overline{x} - \overline{y} - \Delta x - \Delta y \le x - y \le \overline{x} - \overline{y} + \Delta x + \Delta y$$

odakle je:

$$\Delta_{x-y} = \Delta x + \Delta y$$

Dakle, granice greške se sabiraju i u slučaju zbira i u slučaju razlike brojeva.

Maksimalna relativna greška je:

$$\varepsilon_{x+y} = \varepsilon_x \frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}+\bar{y}|} + \varepsilon_y \frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}+\bar{y}|}$$

$$\varepsilon_{x-y} = \varepsilon_x \frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}-\bar{y}|} + \varepsilon_y \frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}$$

Ova zaključivanja lako možemo poopštiti na sumu više članova:

$$e_{\sum_{i=1}^{n} \pm x_i} = \sum_{i=1}^{n} \pm e_{x_i}$$

$$\Delta_{\sum_{i=1}^{n} \pm x_i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

pri čemu u sumi neka vrijednost x_i može biti uzeta sa znakom + ili -, greška e_{x_i} se uzima sa istim znakom, dok se granice greške Δx_i uvijek uzimaju sa pozitivnim predznakom.

Množenje: Neka su $\bar{x}$ i $\bar{y}$ približne vrijednosti, x i y tačne, e_x i e_y greške a r_x i r_y relativne greške ovih veličina. Imamo da je:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x + e_x)(y + e_y) = x \cdot y + x e_y + y e_x + e_x e_y$$

Kako su greške e_x i e_y male u odnosu na x i y to u prethodnom izrazu možemo zanemariti član $e_x e_y$, pa je tada:

$$e_{xy} = x \cdot e_y + y \cdot e_x$$

Relativna greška proizvoda biće:

$$r_{xy} = \frac{e_{xy}}{xy} = r_x + r_y$$

Ovaj rezultat se može poopštiti i na proizvod više od jednog činioca tako da vrijedi:

$$r_{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sum_{i=1}^{n} r_{x_i}$$

Dokažimo ovaj izraz:

Iz definicije relativne greške dobijamo:

$r_{x_i} = \frac{e_{x_i}}{x_i} = \frac{\overline{x}_i - x_i}{x_i} = \frac{\overline{x}_i}{x_i} - 1$, odakle je:

$$\overline{x}_i = x_i(1 + r_{x_i}) \qquad (*)$$

Sada imamo:

$$\prod_{i=1}^{n} \overline{x}_i = \prod_{i=1}^{n} x_i(1 + r_{x_i}) = \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 + r_{x_i})$$

drugi proizvod u poslednjem izrazu se može aproskimirati kao:

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + r_{x_i}) = 1 + \mathop{}\limits_{i=1}^{n} r_{x_i} + \mathop{}\limits_{\substack{i,j=1..n \\ i \neq j}} r_{x_i} r_{x_j} + \mathop{}\limits_{\substack{i,j,k=1..n \\ i \neq j, j \neq k, i \neq k}} r_{x_i} r_{x_j} r_{x_k} + \ldots + r_{x_1} r_{x_2} \ldots r_{x_n}$$

kako su relativne greške mnogo male vrijednosti u najvećem broju slučajeva, to možemo zanemariti sve sabirke u kojima se množe dvije ili više relativnih greški. Dobijamo:

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + r_{x_i}) \approx 1 + \mathop{}\limits_{i=1}^{n} r_{x_i}$$

sada konačno dobijamo:

$$\prod_{i=1}^{n} \overline{x}_i \approx \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n} r_{x_i}\right)$$

poredeći ovaj izraz sa izrazom (*) zaključujemo da je:

$$r_{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sum_{i=1}^{n} r_{x_i}$$

što je i trebalo dokazati.

Dijeljenje: Ako posmatramo izraz x / y dobijamo:

$$\frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \frac{x + e_x}{y + e_y} = \frac{x \cdot \left(1 + \frac{e_x}{x}\right)}{y \cdot \left(1 + \frac{e_y}{y}\right)} \approx x \cdot \left(1 + \frac{e_x}{x}\right) \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(1 - \frac{e_y}{y}\right) = \frac{x}{y} \cdot \left(1 + \frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y}\right) = \frac{x}{y} + \frac{e_x}{y} - \frac{x \cdot e_y}{y^2}$$

gdje smo kod trećeg znaka jednakosti iskoristili jednakost $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$ (ovdje je $\varepsilon = \frac{e_y}{y}$) koja vrijedi kada je ε mala veličina. Konačno dobijamo:

$$e_{x/y} = \frac{e_x}{y} - \frac{x \cdot e_y}{y^2} \text{ i } r_{x/y} = \frac{e_{x/y}}{x / y} = \frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y} = r_x - r_y$$

Za slučaj kada su nam zadate granice greške, mogu se izvesti sledeće formule:

$\Delta xy = |y|\Delta x + |x|\Delta y$, odnosno $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$ i

$\Delta(x/y) = \dfrac{\Delta x}{|y|} + \dfrac{|x|\Delta y}{|y|^2}$, odnosno $\varepsilon_{x/y} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

Primjer. Date su približna vrijednost promjenjive x $\bar{x} = 2$, greška u određivanju promjenjive x $e_x = 0.2$, približna vrijednost promjenjive y $\bar{y} = 6$ i relativna greška promjenjive y $r_y = 0.2$. Pronaći:

a) tačnu vrijednost promjenjive x

b) tačnu vrijednost promjenjive y

c) relativnu grešku promjenjive x

d) grešku promjenjive y

e) približnu vrijednost, grešku, tačnu vrijednost i relativnu grešku izraza $f = x + xy$

Rješenje:

a) $x = \bar{x} - e_x = 1.8$

b) $y = \bar{y} - e_y = \bar{y} - y \cdot r_y$ odakle je $y = \dfrac{\bar{y}}{1 + r_y} = 5$

c) $r_x = \dfrac{e_x}{x} = \dfrac{1}{9} \approx 0.111$

d) $e_y = \bar{y} - y = 1$

e) $\bar{f} = \bar{x} + \bar{x} \cdot \bar{y} = 14$,
$e_f = e_x + e_{xy} = e_x + ye_x + xe_y = 3$,
$f = \bar{f} - e_f = 11$,
$r_f = \dfrac{e_f}{f} = \dfrac{3}{11} \approx 0.273$

Primjer. Poznate su približne vrijednosti $\bar{x} = 3$ i $\bar{y} = 4$, kao i granica greške $\Delta x = 0.1$ i maksimalna relativna greška $\varepsilon_y = 0.05$. Naći:

a) maksimalnu relativnu grešku veličine x,

b) granicu greške veličine y,

c) približnu vrijednost, granicu greške i maksimalnu relativnu grešku izraza $f = \dfrac{x+y}{x}$

d) odrediti interval u kome se nalazi tačna vrijednost izraza f.

Rješenje:

a) $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta x}{|\bar{x}|} = \dfrac{1}{30} \approx 0.0333$

b) $\Delta y = |\bar{y}|\varepsilon_y = 0.2$

c) $\bar{f} = \dfrac{\bar{x}+\bar{y}}{\bar{x}} = \dfrac{7}{3} \approx 2.333$,

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{x+y} + \varepsilon_x = \varepsilon_x \frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}+\bar{y}|} + \varepsilon_y \frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}+\bar{y}|} + \varepsilon_x \approx 0.0762$$

$\Delta_f = |f| r_f \approx 0.178$

d) $\bar{f} - \Delta f \le f \le \bar{f} + \Delta f$, $2.08 \le f \le 2.59$