DIFERENCNE JEDNAČINE – REKURZIJE I REKURZIVNA IZRAČUNAVANJA

Neka je $\{S(n)\}$ niz brojeva, gdje sa brojem *n* obilježavamo indeks elementa u nizu.. **Rekurzivna relacija** (diferencna jednačina) na nizu $\{S(n)\}$ je izraz koji povezuje *n*-ti element tog niza sa prethodnih n_0 elemenata. Ako je domen za n=[0,1,2…] onda prvih n_0 elemenata nijesu definisani rekurzivnom relacijom već njihove vrijednosti predstavljaju početne uslove. Na primjer niz $S(n)$ možemo definisati kao:

$$S(0) = 1$$

$$S(n) = 2S(n-1) + 1$$

Prva jednačina predstavlja početni uslov, dok je drugom jednakošću definisana rekurzivna veza *n*-tog elementa niza sa prethodnim elementom (element sa indeksom *n* – 1). Sada možemo računati:

$$S(1) = 2S(0) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3,$$

$$S(2) = 2S(1) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \; ,$$

$$S(3) = 2S(2) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \ldots$$

Odnosno, za bilo koje *n* možemo naći *n*-ti element niza. Ukoliko odredimo dovoljan broj elemenata niza: 1,3,7,15,31,63,... možemo primijetiti da se svaki element niza može opisati sa: $S(n) = 2^{n+1} - 1$. Za ovaj niz, nerekurzivno definisan, kažemo da je rješenje posmatrane rekurzivne relacije, uz zadati početni uslov.

Posmatrajmo niz brojeva $S(n) = 3 \cdot 4^n$. Pokušajmo odrediti rekurzivnu relaciju koja opisuje taj niz. Imamo da je:

$S(n) = 3 \cdot 4^n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot 4$, a kako je $S(n-1) = 3 \cdot 4^{n-1}$ imamo: $S(n) = 4S(n-1)$, odnosno:

$$S(n) - 4S(n-1) = 0$$

Početni uslov određujemo računajući $S(0) = 3 \cdot 4^0 = 3 \cdot 1 = 3$, dakle pronašli smo rekurzivnu relaciju i početni uslov koji zajedno potpuno opisuju zadati niz.

Nešto složeniji zadatak je pronaći rekurzivnu relaciju koja opisuje niz:

$$S(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad (1)$$

Prvo ćemo ispisati vrijednosti $S(n-1)$ i $S(n-2)$:

$$S(n-1)=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$, odnosno

$$S(n-1)=6\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+4\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \qquad (2)$$

Na sličan način dobijamo da je:

$$S(n-2)=12\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+16\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \qquad (3)$$

Od jednačine (3) oduzmimo jednačinu (2) pomnoženu sa 2. Dobijamo:

$$S(n-2)-2S(n-1)=8\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$, odnosno:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=\frac{1}{8}S(n-2)-\frac{1}{4}S(n-1) \qquad (4)$$

Sada od jednačine (3) oduzmimo jednačinu (2) pomnoženu sa 4. Dobijamo:

$$S(n-2)-4S(n-1)=-12\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$, odnosno:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=-\frac{1}{12}S(n-2)+\frac{1}{3}S(n-1) \qquad (5)$$

Na desnu stranu jednačine (1) primijenimo jednačine (4) i (5), dobijamo:

$$S(n)=3\left(-\frac{1}{12}S(n-2)+\frac{1}{3}S(n-1)\right)+\left(\frac{1}{8}S(n-2)-\frac{1}{4}S(n-1)\right)$$

i konačno sređivanjem gornjeg izraza:

$$S(n)-\frac{3}{4}S(n-1)+\frac{1}{8}S(n-2)=0$$

Dakle dobili smo rekurzivnu relaciju, koja opisuje niz $S(n)$. Da bi niz bio potpuno definisan moramo zadati i dvije početne vrijednosti (rekurzivna relacija je drugog reda):

$$S(0)=3\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=4 \text{ i } S(1)=3\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

Posmatrajmo linearnu formu reda N:

$$L_N[S(n)] = C_0 S(n) + C_1 S(n-1) + C_2 S(n-2) + \ldots + C_N S(n-N)$$

gdje su C_0, C_1, C_2, ….C_N konstante, odnosno ne zavise od n.

Pod **linearnom rekurzivnom relacijom *N*-tog reda** podrazumijevamo relaciju oblika:

$C_0 S(n) + C_1 S(n-1) + C_2 S(n-2) + \ldots + C_N S(n-N) = f(n)$, odnosno:

$$L_N[S(n)] = f(n)$$

gdje je $f(n)$ neka funkcija definisana na skupu prirodnih brojeva.

Linearna rekurzivna relacija kod koje je $f(n) = 0$ za svako n zove se **homogena linearna relacija**. Ako ovaj uslov nije ispunjen relaciju nazivamo **nehomogenom**.

Vidjeli smo da rekurzivna relacija ne definiše jednoznačno niz brojeva već da su za potpuno definisanje niza neophodni i početni uslovi. Dakle postoje različiti nizovi koji zadovoljavaju datu rekurzivnu relaciju. Pod **opštim rješenjem** rekurzivne relacije podrazumijevamo skup svih nizova koji su rješenje date relacije. **Partikularno rješenje** je jedan element ovog skupa odnosno, njega dobijamo izdvajanjem jednog niza iz opšteg rješenja koji zadovoljava zadate početne uslove.

Dokazaćemo nekoliko važnih stavova koji će nam pomoći u traženju rješenja linearnih rekurzivnih relacija:

Stav 1. Ako je $S_1(n)$ jedno rješenje jednačine $L_N[S(n)] = 0$ tada je i niz $S_2(n) = A \cdot S_1(n)$, gdje je A proizvoljna konstanta, takođe rješenje navedene jednačine.

Dokaz ovog stava je trivijalan, svodi se na zamjenu izraza za $S_2(n)$ u jednačinu i kraćenje sa konstantom A ako je A različito od nule, a ako je A jednako nuli, tada se relacija odmah svodi na 0=0 što je tačno.

Stav 2. Ako su $S_1(n)$ i $S_2(n)$ rješenja jednačine $L_N[S(n)] = 0$, tada je i $S_3(n) = S_1(n) + S_2(n)$ takođe rješenje te jednačine.

Dokaz: Pretpostavke se svode na:

$C_0 S_1(n) + C_1 S_1(n-1) + \ldots + C_N S_1(n-N) = f(n)$ i

$$C_0 S_2(n) + C_1 S_2(n-1) + \ldots + C_N S_2(n-N) = f(n)$$

pa njihovim sabiranjem dobijamo:

$$C_0(S_1(n) + S_2(n)) + C_1(S_1(n-1) + S_2(n-1)) + \ldots + C_N(S_1(n-N) + S_2(n-N)) = f(n)$$

odnosno $C_0 S_3(n) + C_1 S_3(n-1) + \ldots + C_N S_3(n-N) = f(n)$, dakle $S_3(n)$ je stvarno rješenje posmatrane jednačine.

Stav 3. Ako je $S_p(n)$ jedno rješenje jednačine $L_N[S(n)] = f(n)$ i ako je $S_h(n)$ neko rješenje jednačine $L_N[S(n)] = 0$, tada je i $S_1(n) = S_p(n) + S_h(n)$ rješenje jednačine $L_N[S(n)] = f(n)$.

Dokaz se svodi, slično kao u prethodnom primjeru na uvrštavanje rješenja u odgovarajuće jednačine i sabiranje tako dobijenih jednačina.

Posmatrajmo sada linearnu homogenu rekurzivnu relaciju $L_N[S(n)] = 0$, i potražimo rješenja ove jednačine u obliku $S(n) = \lambda^n$ gdje je λ neka, zasad nepoznata, od nule različita konstanta. Uvrštavanjem dobijamo:

$$C_0\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \ldots + C_N\lambda^{n-N} = 0$$

Ovu jednačinu možemo skratiti sa λ^{n-N} i dobijamo:

$$C_0\lambda^N + C_1\lambda^{N-1} + \ldots + C_{N-1}\lambda + C_N = 0$$

Ova jednačina se naziva **karakteristična jednačina** posmatrane rekurzivne relacije. Da bi pretpostavljeno $S(n)$ bilo rješenje rekurzije, mora konstanta λ biti rješenje karakteristične jednačine. Poznato je da jednačina *N*-tog stepena ima *N* rješenja, koja nazivamo **karakterističnim vrijednostima**, označimo ih sa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, pa sada primjenom stavova 1 i 2 lako možemo dokazati da je svaki niz oblika:

$$S(n) = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + \ldots + A_N\lambda_N^n \qquad (6)$$

gdje su $A_1, A_2, \ldots, A_N$ proizvoljne konstante rješenje polazne jednačine. Može se dokazati da su ovim izrazom obuhvaćena sva moguća rješenja ukoliko se sve karakteristične vrijednosti međusobno razlikuju, prema tome, pod tim uslovima jednačina (6) predstavlja opšte rješenje posmatrane rekurzivne relacije.

Iz opšteg rješenja, uz zadate početne uslove, možemo dobiti partikularna rješenja, određivanjem konstanti $A_1, A_2, \ldots, A_N$ tako da početni uslovi budu zadovoljeni.

Primjer: Neka je data rekurzivna relacija $S(n) - 7S(n-1) + 12S(n-2) = 0$ sa početnim uslovima $S(0) = 4$ i $S(1) = 4$. Treba pronaći opšte rješenje date relacije a zatim partikularno rješenje koje zadovoljava postavljene uslove.

Rješenje: Prvo konstatujmo da je zadata relacija linearna i homogena a zatim odredimo karakterističnu jednačinu, analogno prethodno opisanom opštem slučaju. Dobijamo:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

Rješenja ove jednačine su:

$$\lambda_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}, \text{ odnosno } \lambda_1 = 4 \text{ i } \lambda_2 = 3$$

Sada je opšte rješenje posmatrane relacije (konstatujmo da je $\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$$S(n) = A_1 \cdot 4^n + A_2 \cdot 3^n$$

Partikularno rješenje, odnosno koeficijente A_1 i A_2 nalazimo iz početnih uslova:

$$S(0) = A_1 + A_2 = 4$$

$$S(1) = 4 \cdot A_1 + 3 \cdot A_2 = 4$$

Rješavanjem ovog sistema jednačina dobijamo $A_1 = 12$, $A_2 = -8$, pa je traženo rješenje rekurzivne relacije koje zadovoljava date početne uslove niz:

$$S(n) = 12 \cdot 4^n - 8 \cdot 3^n$$

Primjer: Riješiti diferencnu jednačinu $S(n) - 7S(n-2) + 6S(n-3) = 0$, uz početne uslove: $S(0) = 8$, $S(1) = 6$ i $S(2) = 22$.

Rješenje: Posmatrana diferencna jednačina je linearna, homogena, trećeg reda. Njena karakteristična jednačina je:

$$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$$

a karakteristične vrijednosti su: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = -3$.

S obzirom da su ove vrijednosti međusobno različite, opšte rješenje polazne jednačine je:

$$S(n) = A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot 2^n + A_3(-3)^n = A_1 + A_2 \cdot 2^n + A_3(-3)^n$$

Iskoristimo sada početne uslove za određivanje konstanti A_1, A_2 i A_3:

Iz $S(0) = 8$ dobijamo $A_1 + A_2 + A_3 = 8$

Iz $S(1) = 6$ dobijamo $A_1 + 2A_2 - 3A_3 = 6$

Iz $S(2) = 22$ dobijamo $A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 22$

Rješavanjem ovoga sistema jednačina dobićemo: $A_1 = 5$, $A_2 = 2$ i $A_3 = 1$.

Znači traženo rješenje polazne jednačine je niz:

$$S(n) = 5 + 2 \cdot 2^n + (-3)^n$$

Rješavanje nehomogenih rekurzivnih relacija

Na osnovu dokazanog stava 3 zaključujemo da se nehomogene linearne jednačine $L_N[S(n)] = f(n)$ mogu rješavati tako što pronađemo opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine $L_N[S(n)]$, i jedno partikularno rješenje nehomogene jednačine. Dokazuje se da je opšte rješenje nehomogene jednačine jednako sumi opšteg rješenja odgovarajuće homogene jednačine $S_H(n)$ i partikularnog rješenja nehomogene jednačine $S_P(n)$:

$$S(n) = S_H(n) + S_P(n)$$

Opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine se traži prethodno opisanim postupkom, a za dobijanje partikularnog rješenja nehomogene jednačine koristićemo se sledećim stavovima koje ćemo navesti bez dokaza:

1. Ako je $f(n) = c_0$ tada, ukoliko nijedna karakteristična vrijednost nije jednaka jedinici, postoji rješenje nehomogene relacije u obliku $S_P(n) = a$

2. Ako je $f(n) = c_0 + c_1 n$ tada, ukoliko nijedna karakteristična vrijednost nije jednaka jedinici, postoji rješenje nehomogene relacije u obliku $S_P(n) = a + b \cdot n$

3. Ako je $f(n) = c_0 \cdot (c_1)^n$ tada, ukoliko nijedna karakteristična vrijednost nije jednaka c_0, postoji rješenje nehomogene relacije u obliku $S_P(n) = a \cdot (c_0)^n$

U navedenim stavovima c_0, i c_1 su brojevi određeni desnom stranom zadate jednačine, dok si a i b nepoznate konstante koje određujemo zamjenom pretpostavljenog rješenja u zadatu nehomogenu jednačinu. Ova tri stava nam pomažu da u određenim slučajevima pronađemo partikularno rješenje nehomogene jednačine. Svi oni se mogu izvesti iz ovog, opštijeg, stava:

Neka je $f(n) = \sum_{k=1}^{M} P_{N_k}(n) \cdot (c_k)^n$ gdje su $P_{N_k}(n)$ polinomi stepena N_k po promjenjvoj *n*, i c_k proizvoljne vrijednosti pri čemu ne postoje *i* i *k* takvi da je $c_k = \lambda_i$, gdje je sa λ_i označena *i*-ta karakteristična vrijednost odgovarajuće nehomogene jednačine. Tada postoji partikularno rješenje nehomogene jednačine oblika: $S_P(n) = \sum_{k=1}^{M} Q_{N_k}(n) \cdot (c_k)^n$ gdje su $Q_{N_k}(n)$ polinomi stepena N_k po promjenjvoj *n*, čiji su koeficijenti nepoznati, a određujemo ih zamjenom partikularnog rješenja u nehomogenu jednačinu, i zahtijevajući da se jednačina svede na identitet.

Primjer: Riješiti diferencnu jednačinu $S(n) - 7S(n-2) + 10S(n-3) = 6 + 8 \cdot n$, uz početne uslove: $S(0) = 1$ i $S(1) = 2$.

Rješenje: Najprije rješavamo odgovarajuću homogenu jednačinu:

$$S(n) - 7S(n-2) + 10S(n-3) = 0.$$

Njena karakteristična jednačina je: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ a njena rješenja su: $\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = 2$. Opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine biće:

$$S_H(n) = A_1 \cdot 5^n + A_2 \cdot 2^n$$

Na osnovu prethodno iznesenih tvrđenja posebno (partikularno) rjesenje tražimo u obliku:

$$S_P(n) = a + b \cdot n$$

Uvrštavanjem u polaznu jednačinu dobijaju se koeficijenti *a* i *b*:

$$a + b \cdot n - 7(a + b(n-1)) + 10(a + b(n-2)) = 6 + 8 \cdot n$$

$$(4a - 13b) + (4b)n = 6 + 8n$$

Da bi gornji izraz bio tačan za svako *n* mora biti $4a - 13b = 6$ i $4b = 8$, odakle dobijamo $b = 2$ i $a = 8$. Dakle niz:

$$S_P(n) = 8 + 2n$$

je rješenje polazne nehomogene jednačine.

Sada opšte rješenje polazne, nehomogene, jednačine dobijamo kao sumu $S_H(n)$ i $S_P(n)$, odnosno:

$$S(n) = A_1 \cdot 5^n + A_2 \cdot 2^n + 8 + 2n$$

Sada ćemo iskoristiti početne uslove da bismo odredili konstante A_1 i A_2:

$S(0) = 1$ povlači $A_1 + A_2 + 8 = 1$

$S(1) = 2$ povlači $5A_1 + 2A_2 + 8 + 2 = 2$

Rješavanjem ovog sistema jednačina dobija se: $A_1 = 2$ i $A_2 = -9$ pa je traženo rješenje rekurzivne relacije niz:

$$S(n) = 2 \cdot 5^n - 9 \cdot 2^n + 8 + 2n$$