Diferencne jednačine

- pojam diferencne jednačine, primjer rekurzivno zadatog niza
- linearne homogene diferencne jednačine
- linearne nehomogene diferencne jednačine
- procedura dobijanja jednačine na osnovu zadatog niza

1. Data je diferencna jednačina: $S(n)-2S(n-1)=0$. a) pronaći opšte rješenje, b) pronaći rješenje koje odgovara početnom uslovu $S(0)=2$. c) odrediti $S(10)$ za rješenje pod b).

   a) $S(n)=A\cdot 2^n$ b) $S(n)=2\cdot 2^n$ c) $S(10)=2^{11}=2048$

2. Data je diferencna jednačina: $S(n)-4S(n-1)-5S(n-2)=0$. a) pronaći opšte rješenje, b) riješiti je uz početne uslove $S(0)=3$ i $S(1)=3$.

   a) $S(n)=A\cdot(-1)^n+B\cdot 5^n$ b) $S(n)=2\cdot(-1)^n+5^n$

3. Data je diferencna jednačina: $2S(n)+3S(n-1)=10n-11$. Riješiti je uz početni uslov $S(0)=2$.

   a) $S(n)=A\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n+2n-1$ b) $S(n)=3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n+2n-1$

4. Data je diferencna jednačina: $S(n)-5S(n-1)+6S(n-2)=4n-14$. a) naći opšte rješenje, b) riješiti je uz početne uslove $S(0)=1$ i $S(1)=6$.

   a) $S(n)=A\cdot 2^n+B\cdot 3^n+2n$ b) $S(n)=-2^n+2\cdot 3^n+2n$

5. Data je diferencna jednačina: $S(n)-5S(n-1)+6S(n-2)=\frac{12}{25}5^n$. a) naći opšte rješenje, b) naći partikularno rješenje koje zadovoljava početne uslove $S(0)=0$ i $S(1)=5$.

   a) $S(n)=A\cdot 2^n+B\cdot 3^n+2\cdot 5^n$ b) $S(n)=-2^n-3^n+2\cdot 5^n$

6. Naći opšte rješenje diferencne jednačine: $S(n)-5S(n-1)+6S(n-2)=6$.

   $S(n)=A\cdot 2^n+B\cdot 3^n+3$

7. Dat je niz $S(n)=(-1)^n+2^n+3*n-1$. Odrediti diferencnu jednačinu drugog reda koja jednoznačno opisuje zadati niz.

   $S(n)-S(n-1)-2S(n-2)=-6n+12$

Diferencne jednačine:

1. $S(n) - 2S(n-1) = 0$
   n^1 n^0

a) $n - 2 = 0$
$n = 2$
$S(n) = A \cdot 2^n$

b) $S(0) = 2 \Rightarrow A \cdot 2^0 = 2 \Rightarrow A = 2$

c) $S(10) = A \cdot 2^{10} = 2 \cdot 2^{10} = 2^{11}$

2. $S(n) - 4S(n-1) - 5S(n-2) = 0$

$S(0) = 3$
$S(1) = 3$

a) $n^2 - 4n - 5 = 0$

$n_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = -1, 5$

$n^2 - 4n - 5 = (n+1)(n-5)$

$n_1 = -1, \quad n_2 = 5$

$S(n) = A_1 \cdot (-1)^n + A_2 \cdot 5^n$

b) $S(0) = 3 \Rightarrow A_1 + A_2 = 3 \Rightarrow A_1 = 3 - A_2$
$S(1) = 3 \Rightarrow -A_1 + 5A_2 = 3$ ↵

$-(3 - A_2) + 5A_2 = 3 \Rightarrow -3 + 6A_2 = 3$

$6A_2 = 6 \Rightarrow \boxed{A_2 = 1}$

$\boxed{A_1 = 2}$

$S(n) = (-1)^n \cdot 2 + 5^n$

3. $2S(n) + 3S(n-1) = 10n - 11$

$S(0) = 2$

a) $2S(n) + 3S(n-1) = 0$

$n^1 \qquad n^0$

$2n + 3 = 0$

$n = -\frac{3}{2}$

$S_H(n) = \left(-\frac{3}{2}\right)^n \cdot A$

$S_p(n) = a + bn$

$2 \cdot (a + bn) + 3 \cdot (a + b(n-1)) = 10n - 11$

$2a + 2bn + 3a + 3bn - 3b = 10n - 11$

$5a - 3b = -11$

$5bn = 10n \Rightarrow \boxed{b = 2}$

$5a - 6 = -11$

$5a = -5$

$\boxed{a = -1}$

$S_p(n) = -1 + 2n$

$$\boxed{S(n) = S_H(n) + S_p(n) = A \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n + 2n - 1}$$

b) $S(0) = 2$

$S(0) = A - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{A = 3}$

$$\boxed{S(n) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n + 2n - 1}$$

4. $S(n) - 5S(n-1) + 6S(n-2) = 4n - 14$

a) Opšte rešenje

b) $S(0) = 1$

$S(1) = 6$

a) $S(n) = S_H(n) + S_p(n)$

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2, 3$

$r_1 = 2, \quad r_2 = 3$

$S_H(n) = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n$

$S_p(n) = an + b$

$an + b - 5 \cdot (a(n-1) + b) + 6 \cdot (a(n-2) + b) = 4n - 14$

$an + b - 5an + 5a - 5b + 6an - 12a + 6b = 4n - 14$

$2an + 2b - 7a = 4n - 14$

$\boxed{a = 2}$

$2b - 7 \cdot 2 = -14$

$2b - 14 = -14 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

$S_p = 2n$

$\boxed{S(n) = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n + 2n}$

$S(0) = 1$
$S(1) = 6$

$S(0) = A_1 + A_2 = 1$
$S(1) = 2A_1 + 3A_2 + 2 = 6$

$A_1 = 1 - A_2$
$2(1 - A_2) + 3A_2 = 4$
$2 - 2A_2 + 3A_2 = 4$
$\boxed{A_2 = 2}$

$A_1 = 1 - 2$
$\boxed{A_1 = -1}$

$\boxed{S(n) = -2^n + 2 \cdot 3^n + 2n}$

$$S(n) - 5S(n-1) + 6S(n-2) = \frac{12}{25} \cdot 5^n$$

a) Opšte rešenje;

b) Partikularno rešenje

$S(0) = 0$, $S(1) = 5$;

a) $S(n) - 5S(n-1) + 6S(n-2) = 0$

n^2 n^1 n^0

$$n^2 - 5n + 6 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2, 3$$

$n_1 = 2$, $n_2 = 3$

$$S_H(n) = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n$$

$$S_p(n) = a \cdot 5^n$$

$$a \cdot 5^n - 5a \cdot 5^{n-1} + 6 \cdot a \cdot 5^{n-2} = \frac{12}{25} \cdot 5^n$$

$$a \cdot 5^n - \frac{5a \cdot 5^n}{5} + \frac{6 \cdot a \cdot 5^n}{25} = \frac{12}{25} \cdot 5^n$$

$$25a - 25a + \frac{6a}{25} = \frac{12}{25} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$S_p(n) = 2 \cdot 5^n$$

$$\boxed{S(n) = S_H(n) + S_p(n) = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n + 2 \cdot 5^n}$$

b) $S(0) = 0$

$S(1) = 5$

$S(0) = A_1 + A_2 + 2$

$S(1) = 2A_1 + 3A_2 + 10$

$A_1 + A_2 + 2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2 - 2$

$2A_1 + 3A_2 + 10 = 5$

$2(-A_2 - 2) + 3A_2 + 10 = 5$

$-2A_2 - 4 + 3A_2 + 10 - 5 = 0$

$A_2 - 4 + 5 = 0$

$A_2 + 1 = 0$

$\boxed{A_2 = -1}$ $\boxed{A_1 = 1 - 2 = -1}$

$\boxed{S(n) = -2^n - 3^n + 2 \cdot 5^n}$

6. $S(n) - 5S(n-1) + 6S(n-2) = 6$

$S_H(n) = S(n) - 5S(n-1) + 6S(n-2) = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2, 3$

$S_H(n) = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n$

$S_p(n) = a$

$a - 5a + 6a = 6$

$2a = 6$

$\boxed{a = 3}$

$\boxed{S(n) = S_H(n) + S_p(n) = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n + 3}$

7. $S(n) = (-1)^n + 2^n + 3n - 1$

$S(n-1) = (-1)^{n-1} + 2^{n-1} + 3(n-1) - 1$

$S(n-2) = (-1)^{n-2} + 2^{n-2} + 3(n-2) - 1$

$2^{n-2} = X$

$(-1)^{n-2} = Y$

$S(n) - 3n + 1 = 4X + Y$

$S(n-1) - 3n + 4 = 2X - Y$
$S(n-2) - 3n + 7 = X + Y$ } $\oplus$

$3X = S(n-1) + S(n-2) - 6n + 11$

$X = \frac{1}{3}\left[S(n-1) + S(n-2) - 6n + 11\right]$

$Y = S(n-2) - 3n + 7 - X =$

$= S(n-2) - 3n + 7 - \frac{1}{3}\left[S(n-1) + S(n-2) - 6n + 11\right]$

X i Y u prvu jednačinu:

$S(n) - 3n + 1 = \frac{4}{3}\left[S(n-1) + S(n-2) - 6n + 11\right] +$

$+ S(n-2) - 3n + 7 - \frac{1}{3}\left[S(n-1) + S(n-2) - 6n + 11\right] =$

$= S(n-1) + S(n-2) - 6n + 11 + S(n-2) - 3n + 7 =$

$= S(n-1) + 2S(n-2) - 9n + 18$

$S(n) = S(n-1) + 2S(n-2) - 6n + 17$

$S(n) - S(n-1) - 2S(n-2) = -6n + 17$