NUMERIČKE METODE

U okviru ovog poglavlja izučavaćemo određene numeričke metode za rješavanje nekih konkretnih problema, kao što su računanje integrala i izvoda, interpolacija, aproksimacija i traženje nula funkcija.

Numerička integracija

Numerička integracija koristi se za određivanje približne vrijednosti određenog integrala zadate funkcije. Veliki broj integrala nema analitičko rješenje, pa ukoliko nam je potrebna njihova vrijednost, moramo je tražiti nekom numeričkom metodom. Često se javlja i situacija kada nam nije poznat analitički oblik funkcije koju treba integraliti, već su nam zadate njene vrijednosti u konačno mnogo tačaka posmatranog intervala integracije. Analiziraćemo numeročke metode određivanja određenog integrala sa konačnim realnim granicama (*a*,*b*) i podintegralnom funkcijom *f*(*x*) koja je realna funkcija jedne promjenljive.

Određeni integral, za slučaj funkcije koja uzima samo pozitivne vrijednosti, možemo tumačiti kao površinu ograničenu sa x-osom, vertikalnim pravim linijama za *x*=*a* i *x*=*b* i sa gornje strane funkcijom *f*(*x*). Pri traženju integrala funkcije *f*(*x*) u granicama od *a* do *b*:

$$\int_a^b f(x)dx$$

uzimaju se vrijednosti funkcije u *N*+1 tačaka: $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{N-1} < x_N = b$ raspoređenih između tačaka *a* i *b*. Vrijednosti funkcije u ovim tačkama obilježićemo sa $y_0, y_1, \ldots, y_N$, pri čemu je $y_i = f(x_i)$. Ovako definisan skup tačaka nazivamo podjelom intervala (*a*,*b*). Rastojanje između tačke x_i i tačke x_{i+1} obilježavaćemo sa $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Ukoliko su sve susjedne tačke na istom rastojanju, odnosno ako Δx_i ne zavisi od indeksa *i* tada podjelu nazivamo ravnomjernom i umjesto Δx_i pišemo samo Δx. Svi podaci vezani za podjelu intervala i vrijednosti funkcije u tačkama podjele najlakše se prikazuju tabelarno:

x	x_0	x_1	...	x_N
f(x)	y_0	y_1	...	y_N

Integral funkcije u granicama od *a* do *b* može se zapisati kao suma integrala po svim intervalima podjele intervala (*a*,*b*):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

Pravougaono prvavilo

Najjednostavnije metode numeričke integracije su metoda lijevih pravougaonika i metoda desnih pravougaonika. Često se nazivaju i donje i gornje pravougaono pravilo. One se još nazivaju i primitivne kvadratne formule. Ako je data podjela intervala (*a*,*b*) na *N* podintervala, približna vrijednost određenog integrala funkcije $f(x)$ u navedenim granicama računata donjim pravougaonim pravilom, odnosno metodom lijevih pravougaonika je:

$$\underline{I} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta x_i = y_0 \Delta x_0 + y_1 \Delta x_1 + \ldots + y_{N-1} \Delta x_{N-1}$$

Ako je podjela ravnomjerna tada se navedena formula svodi na:

$$\underline{I} = \Delta x \sum_{i=0}^{N-1} y_i = \Delta x \cdot (y_0 + y_1 + \ldots + y_{N-1})$$

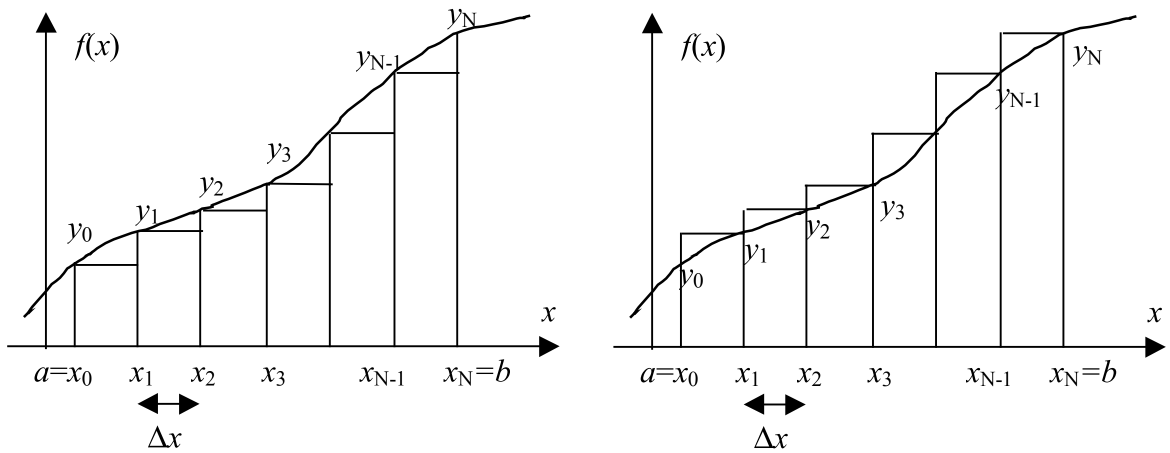
Određeni integral se računa metodom gornjeg pravougaonog pravila (desni pravougaonici) kao:

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^{N} y_i \Delta x_{i-1} = y_1 \Delta x_0 + y_2 \Delta x_1 + \ldots + y_N \Delta x_{N-1}$$

Pri čemu za ravnomjernu podjelu imamo:

$$\underline{I} = \Delta x \sum_{i=1}^{N} y_i = \Delta x \cdot (y_1 + y_2 + \ldots + y_N)$$

Ova dva metoda možemo predstaviti grafički (pretpostavljena je uniformna podjela intervala (a,b). Integral (površina ispod krive) se aproksimira sumom površina pravougaonika, kao na slici, pri čemu se za visinu i-tog pravougaonika uzima vrijednosti funkcije u lijevoj tački intervala kod donjeg pravougaonog pravila, odnosno vrijednost funkcije u desnoj tački intervala (gornje pravougaono pravilo). Drugim riječima kod primjene metoda pravougaonika (lijevih ili desnih) vrijednost funkcije na podintervalima se aproksimira konstantom.



a) Donje pravougaono pravilo b) Gornje pravougaono pravilo

Grafička predstava računanja integrala pravougaonim pravilom

Metod pravougaonog pravila kaže da za vrijednost integrala uzimamo aritmetičku sredinu ove dvije vrijednosti, odnosno:

$$I_P = \frac{\bar{I} + \underline{I}}{2}$$

Dok za slučaj monotone funkcije (funkcija koja ili stalno raste ili stalno opada) vrijedi da je greška učinjena primjenom parvougaonog pravila integracije:

$$e \leq \frac{|\bar{I} - \underline{I}|}{2}$$

Povećavanjem broja tačaka podjele N povećeva se i tačnost rezultata (uzimaju se uži pravougaonici). Da bismo odredili vrijednost integrala sa zadovoljavajućom tačnošću često se primjenjuje i sledeći metod: Sračunamo integral za jednu podjelu, sa N tačaka, a zatim ponovimo isti postupak za dvostruko gušću podjelu ($2N$ tačaka). Ukoliko se dobijene vrijednosti ne razlikuju mnogo (zavisno od željene tačnosti rezultata) zaključujemo da smo odredili vrijednost integrala. Ako je razlika previše velika, povećavamo dalje broj tačaka podjele na $4N$ i ponavljamo postupak, sve dok ne ostvarimo željenu tačnost.

Primjer: Data je funkcija $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Odrediti tačnu vrijednost integrala (analitički) ove funkcije u granicama od 0 do 1 a zatim naći približnu vrijednost integrala pomoću: metoda lijevih pravougaonika, metoda desnih pravougaonika i pravougaonim pravilom. Uzeti dvije podjele i to sa $N = 5$ i $N = 10$. Procijeniti učinjenu grešku u oba slučaja i uporediti je sa tačnom vrijednošću integrala.

Rješenje: Tačan vrijednost integrala ove funkcije je (dobijamo je koristeći se literaturom i tablicama integrala):

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$

Interval (0,1) dijelimo na 5 odnosno 10 podintervala jednake dužine, tako da je u prvom slučaju $\Delta x = 0.2$ a u drugom $\Delta x = 0.1$. Sračunajmo vrijednosti funkcije u tačkama podjele. Sa k ćemo označiti indeks tačke u podjeli.

k	0	1	2	3	4	5
x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1	0.962	0.862	0.735	0.610	0.5

Metod lijevih pravougaonika:

$$\underline{I} = \Delta x(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

$$\underline{I} = 0.2(1 + 0.962 + 0.862 + 0.735 + 0.610) = 0.8338$$

Metod desnih pravougaonika:

$$\bar{I} = \Delta x(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

$$\bar{I} = 0.2(0.962 + 0.862 + 0.735 + 0.610 + 0.5) = 0.7338$$

Paravougaono pravilo:

$$I_P = \frac{\bar{I} + \underline{I}}{2} = \frac{0.7338 + 0.8338}{2} = 0.7838$$

$$e \le \frac{|\bar{I} - \underline{I}|}{2} = \frac{|0.7338 - 0.8338|}{2} = 0.05$$

Vidimo da se vrijednost dobijena parvougaonim pravilom razlikuje od tačne vrijednosti za: $I_P - I = 0.7838 - 0.7854 = -0.0016$, pa je gornja procjena greške ispravna.

Posmatrajmo sada gušću podjelu:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$	1	0.990	0.962	0.917	0.862	0.800	0.735	0.671	0.610	0.552	0.5

Dobijamo:

$$\underline{I} = 0.1(1 + 0.990 + 0.962 + 0.917 + 0.862 + 0.8 + 0.735 + 0.671 + 0.610 + 0.552) = 0.810$$

$$\bar{I} = 0.1(0.990 + 0.962 + 0.917 + 0.862 + 0.8 + 0.735 + 0.671 + 0.610 + 0.552 + 0.5) = 0.785$$

$$I_P = \frac{\underline{I} + \bar{I}}{2} = (0.810 + 0.760)/2 = 0.785, \; e \le \frac{|0.760 - 0.810|}{2} = 0.025$$

Procjena greške je dobra i u ovom slučaju jer je $I_P - I = -0.0004$

Računanje integrala smo obavili za dvije podjele, pa možemo uporediti dobijene vrijednosti: $I_1 = 0.7838$ i $I_2 = 0.7850$, zaključiti da su one bliske, i da je integral sračunat sa tačnošću od najmanje dvije tačne decimale.

Trapezno pravilo

U slučaju primjene trapeznog pravila približna vrijednost posmatranog integrala nalazi se u obliku sume površina odgovarajućih trapeza, kao na donjoj slici. Uzmimo da je data ravnomjerna podjela intervala integracije na N podintervala. Za svaki podinterval (x_i, x_{i+1}) se integral funkcije na tom podintervalu aproksimira sa površinom pravouglog trapeza čiji je donji krak (odnosno visina) jednak Δx, lijeva osnovica ima dužinu y_i a desna y_{i+1}. Površina ovakovog trapeza je:

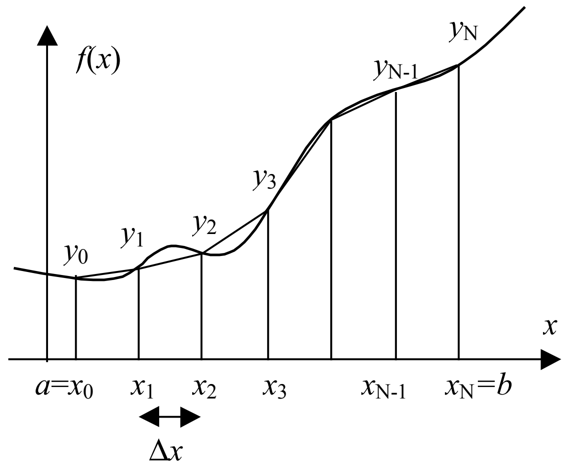
$$P_i = \Delta x \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

a integral dobijamo sabirajući sve ove elementarne površine. Dakle:

$$I_T = \Delta x \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + \frac{y_{N-1} + y_N}{2} \right)$$

$$I_T = \Delta x\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{N-1} + \frac{y_N}{2}\right)$$

Ovo je tzv. složena kvadratna formula, jer se površina trapeza konstruisanog na intervalu Δx računa kao polovina sume površina lijevog i desnog pravougaonika konstruisanog na istom intervalu.



Trapezno pravilo

Površina i-tog trapeza može se izračunati kao:

$$P_i = \Delta x \cdot \frac{f(a + i \cdot \Delta x) + f(a + (i+1) \cdot \Delta x)}{2}$$

Približna vrijednost ovako izračunatog integrala imala bi sledeći oblik:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{N-1} + \frac{y_n}{2}\right) = I_N$$

Primjer: Data je funkcija $f(x) = e^{-x^2}$. Naći približnu vrijednost određenog integrala ove funkcije u granicama (0,1) pomoću Trapeznog pravila. Uzeti da je N=10 (Δx=0.1).

Rješenje: Prvi korak je da odredimo podjelu i vrijednosti funkcije u tačkama podjele:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f(x)	1	0.990	0.961	0.914	0.852	0.779	0.698	0.613	0.527	0.444	0.368

Sada računamo:

$$I_T = 0.1\left(\frac{1}{2} + 0.99 + 0.961 + 0.914 + 0.852 + 0.779 + 0.698 + 0.613 + 0.527 + 0.445 + \frac{0.368}{2}\right) = 0.7463$$

Kao metod provjere ove vrijednosti, posmatrajmo šta će se desiti ako uzmemo dvostruko manje tačaka podjele. Tada je:

$$I_{T1} = 2\Delta x\left(\frac{y_0}{2} + y_2 + y_4 + y_8 + \frac{y_{10}}{2}\right) = 0.7444$$

Dakle približna vrijednost integrala se ne mijenja puno sa povećavanjem broja tačaka podjele (za I_{T1} 5 tačaka, a I_T 10 tačaka) pa možemo zaključiti da je vrijednost I_T tačna na najmanje dvije decimale.

Primjer: Širina rijeke je 20 m; rezultati mjerenja dubine na prelazu sa korakom od 2 m dati su u tabeli, pri čemu je x udaljenost od obale, a y odgovarajuća dubina izraženi u metrima. Treba odrediti površinu presjeka rijeke.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0.2	0.5	0.9	1.1	1.3	1.7	2.1	1.5	1.1	0.6	0.2

Rješenje: Primijenimo trapezno pravilo za računanje površine, odnosno određenog integrala funkcije $y(x)$ u granicama od 0 do 20. Iz tabele vidimo da je podjela intervala ravnomjerna sa $\Delta x = 2$, pa dobijamo:

$$S = 2\cdot\left(\frac{0.2}{2} + 0.5 + 0.9 + 1.1 + 1.3 + 1.7 + 2.1 + 1.5 + 1.1 + 0.6 + \frac{0.2}{2}\right) = 22m^2$$

Simpsonovo pravilo

Kod pravougaonog pravila, funkcija je aproksimirana konstantom na jednom podintervalu podjele, kod trapeznog, aproksimacija je vršena linearnom funkcijom, a Simpsonovo pravilo podrazumijeva interpolaciju polinomom drugog stepena. Neka je na intervalu (a,b) data ravnomjerna podjela na N podintervala gdje je N paran broj. Posmatrajmo tri uzastopne tačke podjele: x_i, x_{i+1} i x_{i+2}, odnosno dva uzastopna podintervala. U ovim tačkama funkcija ima vrijednosti y_i, y_{i+1} i y_{i+2}. Pronađimo sada kvadratnu funkciju koja prolazi kroz ove tri tačke funkcije. Kao što će biti pokazano u jednom od narednih poglavlja takva funkcija dobija se kao:

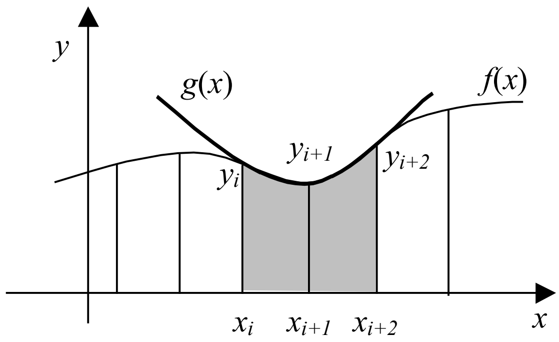
$$g(x) = y_i\frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})} + y_{i+1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})} + y_{i+2}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}$$

Iskoristimo činjenicu da je podjela ravnomjerna, odnosno da je $x_i - x_{i+1} = -\Delta x$, $x_{i+1} - x_{i+2} = -\Delta x$ i $x_i - x_{i+2} = -2\Delta x$. Dobijamo:

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{1}{2\Delta x^2}&(y_i(x^2 - x(x_{i+1} + x_{i+2}) + x_{i+1}x_{i+2}) + \\ &-2y_{i+1}(x^2 - x(x_i + x_{i+2}) + x_i x_{i+2}) + y_{i+2}(x^2 - x(x_i + x_{i+1}) + x_i x_{i+1})) \end{aligned}$$

Integracijom ove funkcije u granicama od x_i do x_{i+2} dobijamo da je:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} g(x)dx = \frac{\Delta x}{6}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})$$



Simpsonovo pravilo za numeričku integraciju

Na slici je prikazan opisani postupak. Integral funkcije na posmatranim intervalima aproksimiramo sa osjenčenom površinom ispod krive g(x).

Integral u granicama od a do b funkcije $f(x)$ možemo dobiti sabirajući $N/2$ integrala ovog oblika (za svaki par intervala po jedan integral), i dobijamo aproksimaciju integrala po Simpsonovom pravilu:

$$I_S = \frac{\Delta x}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3 + y_3 + 4y_4 + y_5 + \ldots + y_{N-2} + y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N)$$

odnosno:

$$I_S = \frac{\Delta x}{3}(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \ldots + 2y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N)$$

Primjer: Prethodno pomenuti zadatak računanja površine presjeka rijeke riješiti primjenom Simpsonovog pravila

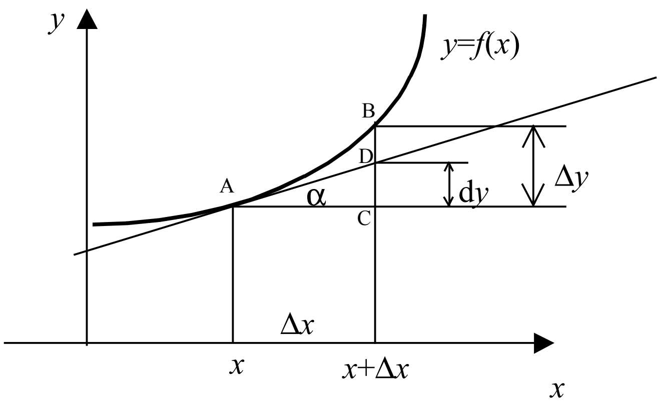
Rješenje: Prvo konstatujmo da je broj podintervala paran, pa možemo primijeniti Simpsonovo pravilo:

$$S = \frac{2}{3} \cdot \left(0.2 + 4 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.9 + 4 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.3 + 4 \cdot 1.7 + 2 \cdot 2.1 + 4 \cdot 1.5 + 2 \cdot 1.1 + 4 \cdot 0.6 + 0.2\right) = 21.9m^2$$

Numeričko diferenciranje (metod konačnih razlika)

Posmatrajmo geometrijsku interpretaciju prvog izvoda i diferencijala funkcije:

Na slici je nacrtana funkcija $f(x)$, njena tangenta u tački x, i posmatrana je tačka $x + \Delta x$. Veličinu Δx nazivamo priraštajem argumenta, veličinu Δy priraštajem funkcije. Prvi izvod funkcije u tački x jednak je tangensu ugla α.



Vidi se da je u opštem slučaju d$y \neq \Delta y$. Priraštaj funkcije Δy jednak je dužini BC, i nazivamo ga konačnom razlikom prvog reda funkcije $f(x)$ u tački x:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

Na osnovu konačne razlike prvog reda možemo aproksimirati izvod funkcije u tački x. Imamo da je:

$$f'(x) = \mathrm{tg}(\alpha) = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{\Delta x}, \text{ odnosno } \quad dy = f'(x)\Delta x$$

Dakle, diferencijal funkcije jednak je priraštaju ordinate tangente funkcije u tački x. Međutim, za veoma malo Δx priraštaj funkcije, Δy, i diferencijal funkcije, dy, su bliske veličine. U tom slučaju važi približna jednakost:

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Definišu se i konačne razlike višeg reda. Na primjer konačna razlika drugog reda ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y = \Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta(f(x)) = \Delta(f(x+\Delta x) - f(x)) = \\ = \big(f(x+\Delta x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\big) - \big(f(x+\Delta x) - f(x)\big) = \\ = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)\end{aligned}$$

Može se dokazati da se za veoma malo Δx važi približna vrijednost drugog izvoda funkcije $f(x)$ u tački x može aproksimirati sa:

$$f''(x) \approx \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}$$

U opštem slučaju, izvod n-tog reda funkcije $f(x)$ u tački x aproksimira se konačnim razlikama n-tog reda $\Delta^n y$ kao:

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

pri čemu konačnu razliku *n* tog reda dobijamo kao: $\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y)$.

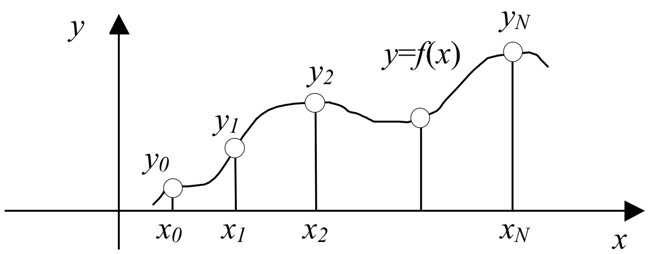
Primjer Data je funkcija $f(x) = x^2 + 2x + 2$. Odrediti njen prvi i drugi izvod u tački *x*=0 primjenom konačnih razlika uz Δx=01.

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(0+0.1) - f(0)}{0.1} = \frac{(0.1^2 + 2\cdot 0.1 + 2) - (0^2 + 2\cdot 0 + 2)}{0.1} = 2.1$$

$$f''(x) \approx \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2\cdot f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} = \frac{f(0+0.2) - 2\cdot f(0+0.1) + f(0)}{0.01} = 2$$

Interpolacija funkcija (Lagranžeov interpolacioni polinom)

Ukoliko ne poznajemo analitički izraz neke funkcije, već imamo samo podatke o njenim vrijednostima u nekim tačkama, postavlja se problem dobijanja vrijednosti funkcije i za one vrijednosti argumenta koje nijesu date u tabeli. Isti problem se može formulisati i ukoliko je funkcija data preko veoma složene formule nepodobne za izračunavanje vrijednosti.



Interpolacija funkcija

Da bi se odredila vrijednost funkcije *f*(*x*) koja je zadata preko tačaka (x_i, y_i) $i = 0,1,\ldots,N$ traži se neka funkcija *g*(*x*) koja je jednostavna za izračunavanje i čija je vrijednost u tački x_i ista kao i vrijednost funkcije *f*(*x*). Tačke (x_i, y_i) nazivamo čvorovima interpolacije. Kada je *g*(*x*) polinom, interpolacija se naziva polinomna. Obradićemo jedan od metoda interpolacije funkcije polinomom.

Lagranžov interpolacioni polinom formira se za proizvoljan raspored čvorova interpolacije. Neka su tačke x_i, $i = 0,1,\ldots,N$ međusobno različite i neka su y_i vrijednosti funkcije *f*(*x*) u tim tačkama. Tada se Lagranžov interpolacioni polinom *N*-tog reda može napisati u obliku:

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \left(y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{N} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

Dokažimo da je za tačku $x = x_m$ vrijednost polinoma $P_N(x_m) = y_m$, za $m = 0,1,\ldots,N$ odnosno da posmatrani polinom prolazi kroz svaki čvor interpolacije.

Posmatrajmo proizvod $\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N}\frac{x_m-x_k}{x_i-x_k}$. Ukoliko je $m\neq i$ tada u posmatranom proizvodu postoji činilac (x_m-x_m) koji je jednak nuli, pa je tada i čitav proizvod jednak nuli. Ako je $m=i$ tada se svaki član proizvoda svodi na: $\frac{x_i-x_k}{x_i-x_k}$, odnosno jednak je jedinici, pa je i čitav proizvod jednak jedinici. Dakle u izrazu za Lagranžeov polinom sve vrijednosti y_i se množe sa nulom osim vrijednosti y_m koja se množi jedinicom. Prema tome je $P(x_m)=y_m$, što je i trebalo dokazati.

Primjer: Za funkciju datu sledećom tabelom odrediti Lagranžeov interpolacioni polinom:

i	0	1	2
x_i	0	0.5	1
y_i	1	0.8	0.5

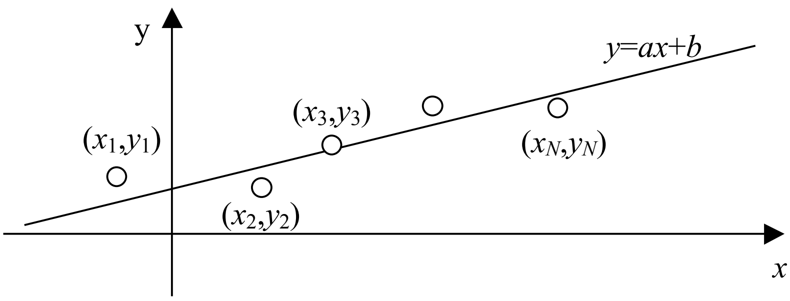
Rješenje:

$$P_2(x)=1\cdot\frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)}+0.8\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)}+0.5\frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)}=-0.2x^2-0.3x+1$$

Linearna aproksimacija

Pod aproksimacijom funkcije $f(x)$ podrazumijevaćemo funkciju $g(x)$, koja ima osobinu da njene vrijednosti ne odstupaju “mnogo” od vrijednosti funkcije f u svim tačkama x. Aproksimacija je bolja što je ostupanje manje. Ukoliko je funkcija $g(x)$ linearna funkcija odnosno $g(x)=a\cdot x+b$, gdje su a i b konstante, tada aproksimaciju nazivamo linearnom.

Posmatraćemo samo slučajeve kada je funkcija $f(x)$ data preko svojih vrijednosti y_i za N tačaka x_i, $i=1,2,\dots,N$, i izvesti formulu kako da takvu funkciju na najbolji mogući način aproksimiramo linearnom funkcijom, $g(x)=a\cdot x+b$ odnosno pravom linijom na grafiku.



Linearna aproksimacija

Koeficijenti a i b dobijaju se na sledeći način:

Označimo sa ε_i grešku koja je načinjena aproksimacijom vrijednosti funkcije y_i u tački x_i sa vrijednošću $g(x_i)=a\cdot x_i+b$, za $i=1,2,\dots,N$, to jest stavimo $\varepsilon_i=y_i-a\cdot x_i-b$.

Ukupnu grešku aproksimacije označimo sa ε^2 i sračunajmo je kao sumu kvadrata svih grešaka.

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a \cdot x_i - b)^2$$

Vrijednosti greške kvadriramo da bismo se oslobodili njihovog znaka, jer nama je od interesa da smanjimo veličinu greške, bila ona pozitivna ili negativna. Potražimo vrijednosti *a* i *b* tako da ukupna greška bude minimalna.

Poznato je da se ekstremne vrijednosti funkcije dvije promjenjive (veličina ε^2 zavisi od *a* i od *b*) pronalaze rješavanjem sistema jednačina:

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a} = 0 \ , \ \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial b} = 0$$

odnosno:

$$-2\sum_{i=1}^{N} (y_i - a \cdot x_i - b)x_i = 0 \, , \ -\sum_{i=1}^{N} (y_i - a \cdot x_i - b) = 0$$

što možemo napisati kao:

$$a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{N} x_i + b \cdot N = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

Ovaj sistem ima jedinstveno rješenje i ono je sigurno minimum ukupne greške. Naime, greška je uvijek pozitivna, neprekidna funkcija, a od bilo koje aproksimacije možemo naći još goru, prema tome, ona nema maksimuma. Stoga je jedina njena ekstremna vrijednost minimum i vrijednosti *a* i *b* za koje se taj minimum dostiže dobijaju se rješavanjem navedenog sistema.

Ovaj sistem može se napisati kao:

$$Aa + Bb = C$$
$$A_1 a + B_1 b = C_1$$

gdje je:

$$A = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_N}^2$$

$$B = x_1 + x_2 + \ldots + x_N$$

$$C = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_N y_N$$

$$A_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_N = B$$

$B_1 = N$

$C = y_1 + y_2 + ... + y_N$

Primjer Funkciju $f(x)$ čije su vrijednosti date u tabeli aproksimirati linearnom funkcijom.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	0	3	6	7

Rješenje: Odredimo prvo koeficijente sistema jednačina:

$$A = \sum_{i=1}^{5} x^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15$$

$$B = \sum_{i=1}^{5} x = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$$

$$C = \sum_{i=1}^{5} xy = (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 3 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 = 37$$

$$A_1 = B = 5$$

$$B_1 = N = 5$$

$$C_1 = \sum_{i=1}^{5} y = -1 + 0 + 3 + 6 + 7 = 15$$

Formirajmo sada sistem jednačina i riješimo ga:

$$\begin{aligned} Aa + Bb &= C \qquad & 15a + 5b &= 37 \\ A_1 a + B_1 b &= C_1 \qquad & 5a + 5b &= 15 \end{aligned}$$

$$a = 2.2$$
$$b = 0.8$$

Sada konačno imamo da je funkcija:

$$y = ax + b$$
$$y = 2.2x + 0.8$$

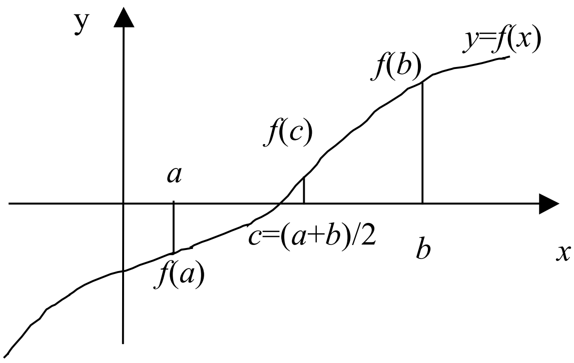
najbolja linearna aproksimacija zadate funkcije.

Određivanje nula funkcije

Rješavanje jednačina tipa $f(x) = 0$ gdje je $f(x)$ proizvoljan funkcija svodi se na određivanje one vrijednosti promjenjive x za koju funkcija f uzima vrijednost 0. U velikom broju slučajeva, to nije moguće uraditi analitički, pa moramo koristiti približne, numeričke metode. Jedan od metoda za određivanje nula funkcije $f(x)$ je uraditi metod polovljenja intervala. Navedimo bez dokaza stav:

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu (a,b), i ako važi $f(a)\cdot f(b)<0$, onda $f(x)$ ima bar jednu nulu u (a,b).

Pretpostavimo da je $f(a)<0$, $f(b)>0$, i zatim odredimo tačku $c=(a+b)/2$. Ako je $f(c)<0$, zamijenimo $a = c$, a ako je $f(c)>0$, zamijenimo $b = c$. Na taj način, polazeći od intervala (a,b) u kojem funkcija ima nulu, dolazimo do drugog, upola kraćeg, intervala (a,c) ili (b,c) u kojem funkcija, prema navedenom stavu, ima nulu. Postupak se ponavlja dok ne dobjemo željenu tačnost, tj. $|a-b|<\varepsilon$.



Određivanje nule funkcije metodom polovljenja intervala

Primjer: Metodom polovljenja naći rješenje jednačine x^4+5x-3 koje se nalazi na intervalu (0, 1) sa greškom manjom od 0.01.

Rješenje: Odredimo prvo polazne veličine:

$a=0$, $f(a)=f(0)=-3$ $b=1$, $f(b)=f(1)=3$

Sada počinjemo sa postupkom polovljenja intervala:

Polovina intervala	Vrijednost $f(c)$	Nove vrijednosti a i b	
$c=(a+b)/2=0.5$	$f(c)=-0.4375<0$ pa je $a=c$	$a=0.5, b=1$	$\lvert a-b\rvert >0.01$
$c=(0.5+1)/2=0.75$	$f(c)=1.0664>0$ pa je $b=c$	$a=0.5, b=0.75$	$\lvert a-b\rvert >0.01$
$c=(0.5+0.75)/2=0.625$	$f(c)=0.2776>0$ pa je $b=c$	$a=0.5, b=0.625$	$\lvert a-b\rvert >0.01$
$c=(0.5+0.625)/2=0.5625$	$f(c)=-0.0874<0$ pa je $a=c$	$a=0.5625, b=0.625$	$\lvert a-b\rvert >0.01$
$c=(0.5625+0.625)/2=0.5938$	$f(c)=0.0933>0$ pa je $b=c$	$a=0.5625, b=0.5938$	$\lvert a-b\rvert >0.01$
$c=(0.5625+0.5938)/2=0.5781$	$f(c)=0.0022>0$ pa je $b=c$	$a=0.5625, b=0.5781$	$\lvert a-b\rvert <0.01$

Zaključujemo da je $x=0.5781$ rješenje ove jednačine sa greškom manjom od 0.01. Upola manju grešku možemo dobiti ukoliko za nulu funkcije proglasimo sredinu poslednjeg određenog intervala: $x=0.5703$.