Numerika i Statistika

- Numerička integracija (parvougaono, trapezno i simpsonovo pravilo)
- Lagranžeov interpolacioni polinom, Apriksimacija linearnom funkcijom
- Konačne razlike, numeričko diferenciranje
- Srednja vrijednost, varijansa i standardna devijacija skupa podataka i slučajnih promj

1. Data je funkcija $f(x) = x^2$. Odrediti njen integral u granicama od 0 do 1 i to
   a) analitički
   b) primjenom pravouugaonih pravila, gornjeg i donjeg
   c) primjenom trapeznog pravila
   d) primjenom Simpsonovog pravila. ne

   U dijelu zadatka pod b,c i d uzeti da je $\Delta x = 0.25$. Odrediti kolika je greška, a kolika relativna greška učinjena primjenom navedenih numeričkih metoda za slučajeve pod b,c i d. U dijelu zadatka pod a određena je tačna vrijednost integrala.
2. Funkcija $f(x)$ je data tabelarno. Odrediti njen integral u granicama od 0 do 3:
   a) primjenom pravouugaonih pravila, gornjeg i donjeg
   b) primjenom trapeznog pravila
   c) primjenom Simpsonovog pravila.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
f(x)	1	1	-2	0	1	2	3

3. Funkcija $f(x)$ je data tabelarno. Izvršiti aproksimaciju ove funkcije Lagranžeovim polinomom.

x	0	1	2	3
f(x)	1	0	-1	2

4. Funkciju $f(x)$ čije su vrijednosti date u tabeli aproksimirati linearnom funkcijom

x	-1	0	1	2	3
f(x)	-1	0	+3	6	7

   Prikazati grafički aproksimaciju i stvarne vrijednosti funkcije.
5. Data je funkcija $f(x) = x^2+2x+2$. Odrediti njen prvi i drugi izvod u tački x=0 i to.
   a) analitički (tačna vrijednost)
   b) primjenom konačnih razlika uz $\Delta x = 0.1$

   Odrediti kolika je greška a kolika relativna greška učinjena primjenom približnog metoda.
6. Za funkciju $f(x)$ iz zadatka 2 odrediti približnu vrijednost prvog izvoda u tački $x = 1$
7. Diferencijalnu jednačinu $y'' + 2y' - y = x + 2$ transformisati u diferencnu primjenjujući aproksimaciju izvoda konačnim razlikama. Uzeti $\Delta x = 0.1$.
8. Mjerenjem napona na izlazu električnog kola dobijene su sledeće vrijednosti:

Redni broj mjerenja	1	2	3	4	5
Vrijednost napona (V)	11	10	10,5	10	8,5

   odrediti srednju vrijednost napona, varijansu i standardnu devijaciju.
9. Slučajne promjenjive x i y imaju raspodjele vjerovatnoća.

x	-2	-1	0	1	2
p(x)	0,4	0,05	0,1	A	0,04

y	-2	-1	0	1	2
p(y)	0,05	0,05	0,8	0,05	0,05

   a) odrediti vrijednost konstante **A** za promjenjivu **x**.
   b) naći matematičko očekivanje, varijansu i standardnu devijaciju slučajnih promjenjivih **x** i **y**.
10. Ispit je položili 66 studenata. U tabeli je dat broj studenata koji su osvojili određenu ocjenu. Posmatrajući ocjenu na ispitu kao slučajnu promjenjivu **x** odrediti njenu raspodjelu vjerovatnoća, matematičko očekivanje, varijansu i standardnu devijaciju.

Ocjena	6	7	8	9	10
Broj studenata	7	12	33	9	5

Нумерика и статистика:

1. $f(x) = x^2$

$(0,1)$

a) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

б) Правоугаона правила

$$\underline{I} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta x_i$$
$$\Delta x_i = 0.25$$
$$\Rightarrow \underline{I} = \Delta x_i (y_0 + \dots + y_{N-1})$$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$y = f(x) = x^2$	0	0.0625	0.25	0.5625	1

$$\underline{I} = 0.25(\overset{y_0}{0} + \overset{y_1}{0.0625} + \overset{y_2}{0.25} + \overset{y_3}{0.5625}) = 0.2188$$

$$\overline{I} = \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i y_i = \Delta x_i (y_1 + \dots + y_N)$$

$$\overline{I} = 0.25(\overset{y_1}{0.0625} + \overset{y_2}{0.25} + \overset{y_3}{0.5625} + \overset{y_4}{1}) = 0.4688$$

ц) Трапезно правило:

$$I_T = \Delta x\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1} + \frac{y_N}{2}\right) =$$
$$= \Delta x\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2}\right) = 0.25\left(\frac{0}{2} + 0.0625 + 0.25 + 0.5625 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 0.3438$$

д) Симсоново правило:

$$I_S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$I_S = \frac{\Delta x}{3}(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4) = \frac{0.25}{3}(0 + 4\cdot 0.0625 + 2\cdot 0.25 + 4\cdot 0.5625 + 1)$$
$$= 0.33$$

Грешке:

- Тачна вредност интеграла $\frac{1}{3}$

$\leftarrow$ Не

1) $e_{\underline{I}} = \underline{I} - I = 0.2188 - 0.333 = -0.1146$

$r_{\underline{I}} = \frac{e_{\underline{I}}}{I} = -0.3437$

2) $e_{\bar{I}} = \bar{I} - I = 0.4688 - 0.3333 = 0.1354$

$r_{\bar{I}} = \frac{e_{\bar{I}}}{I} = 0.0313$

3) $e_{I_T} = I_T - I = 0.3438 - 0.3333 = 0.0105$

$r_{I_T} = \frac{e_{I_T}}{I} = \frac{0.0105}{0.3333} = 0.0315$

4) $e_{I_S} = I_S - I = 0.5156 - 0.3333 = 0.1823$

$r_{I_S} = \frac{e_{I_S}}{I} = 0.547$

2. а) $\left.\begin{array}{l} \underline{I} = \Delta x(y_0 + \dots + y_{N-1}) \\ \Delta x = 0.5 \\ N = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{I} = 0.5(1+1-2+0+1+2) = 1.5$

$\bar{I} = \Delta x(y_1 + \dots + y_N) = 0.5(1-2+0+1+2+3) = 0.5 \cdot 5 = 2.5$

б) $I_T = \Delta x\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \frac{y_6}{2}\right)$

$= 0.5 \cdot (0.5 + 1 - 2 + 0 + 1 + 2 + 1.5) = 0.5 \cdot 4 = 2$

ц) $I_S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$

$= \frac{0.5}{3}(1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3)$

$= \frac{0.5}{3} \cdot 14 = 2.3333$

3. $P_N = \sum_{i=0}^{N} y_i \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{N} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \right) = P_N(x)$

$$P_N = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 0 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} +$$

$$+ (-1) \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} =$$

$$= -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6} + \frac{x(x-1)(x-3)}{2} + 2 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{6} =$$

$$= \frac{-(x-1)(x-2)(x-3) + 3x(x-1)(x-3) + 2x(x-1)(x-2)}{6} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-3)(-x+2+3x) + 2x(x-1)(x-2)}{6} =$$

$$= \frac{2(x-1)(x-3)(x+1) + 2x(x-1)(x-2)}{6} =$$

$$= \frac{2(x-1)((x-3)(x+1) + x^2-2x)}{6} = \frac{(x-1)(x^2+x-3x-3+x^2-2x)}{3} =$$

$$= \frac{(x-1)(2x^2-4x-3)}{3} = \frac{2x^3-4x^2-3x-2x^2+4x+3}{3} =$$

$$= \frac{2x^3-6x^2+x+3}{3} = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1$$

4. $g(x) = ax + b$

$\varepsilon = y_i - ax_i - b$, $\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2$

$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial b} = 0$

$$\left.\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b) x_i = 0 \quad (1) \\ 2 \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = 0 \quad (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \sum_{i=1}^{N} a x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} b x_i \quad \ldots (1)$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = \sum_{i=1}^{N} a x_i + \sum_{i=1}^{N} b \quad \text{---} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} Aa + Bb = C \\ A_1 a + B_1 b = C_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \quad A_1 = B$$

$$B = \sum_{i=1}^{N} x_i \quad B_1 = N$$

$$C = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \quad C_1 = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$A = \sum_{i=1}^{5} x^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15$$

$$B = \sum_{i=1}^{5} x = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$$

$$C = \sum_{i=1}^{5} xy = (-1)(-1) + 0 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 37$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 = B = 5 \\ B_1 = N = 5 \\ C_1 = (-1) + 0 + 3 + 6 + 7 = 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(x) = ax + b$$

$$\left.\begin{array}{l}Aa+Bb=C\\ A_1a+B_1b=C_1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}15a+5b=37\\ 5a+5b=15 \;/:5\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}15a+5b=37\\ a+b=3\end{array} \Rightarrow$$

$$\ulcorner a=3-b \lrcorner \Rightarrow \left.\begin{array}{l}15(3-b)+5b=37\\ a+b=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}45-10b=37\\ a+b=3\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}10b=8, \quad b=0.8\\ a=3-b=2.2\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{g(x)=2.2x+0.8}$$

$g(0)=0.8 \quad f(0)=0$

$g(-1)=-1.4 \quad f(-1)=-1$

$g(1)=3 \quad f(1)=3$

$g(2)=5.2 \quad f(2)=6$

$g(3)=7.4 \quad f(3)=7$

5. $f(x) = x^2 + 2x + 2$

$x = 0$, $\Delta x = 0.1$

а) $f'(x) = 2x + 2 = 2\cdot 0 + 2 = 2$

$f''(x) = 0$

б) $$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(0+0.1) - f(0)}{0.1} =$$

$$= \frac{0.1^2 + 2\cdot 0.1 + 2 - 2}{0.1} = \frac{0.01 + 0.2}{0.1} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$$

$$f''(x) = \frac{[f(x+\Delta x+\Delta x) - f(x+\Delta x)] - [f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x^2} =$$

$$= \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} =$$

$$= \frac{f(0+2\cdot 0.1) - 2f(0+0.1) + f(0)}{0.01} =$$

$$= \frac{0.2^2 + \cancel{2\cdot 0.2} + 2 - 2\cdot 0.1^2 - \cancel{2\cdot 2\cdot 0.1} - \cancel{4} + \cancel{2}}{0.01} = 2$$

$e_{f'} = 2.1 - 2 = 0.1 \Rightarrow r_{f'} = \frac{0.1}{2.1} = 0.0476$

$e_{f''} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow r_{f''} = \frac{0}{2} = 0$

$$6.\quad f'(1) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1+0.5) - f(1)}{0.5} =$$

$$= \frac{(1.5)^2 + 2 \cdot 1.5 + 2 - 1 - 2 - 2}{0.5} = 4.5$$

$$f''(1) = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(0.5)^2} =$$

$$= \frac{f(1+2\cdot 0.5) - 2f(1+0.5) + f(1)}{0.25} =$$

$$= \frac{f(2) - 2f(1.5) + f(1)}{0.25} =$$

$$= \frac{4+4+2-2\cdot(1.5^2+3+2)+1+2+2}{0.25} = 2$$