Furijeovi redovi

- ✓ Periodičnost, osnovni period i osnovna učestanost
- ✓ Kompleksni Furijeov red, amplitudski spektar

1. Date su funkcije:

   a) $f_0(x) = 5$

   b) $f_1(x) = x^2$

   c) $f_2(x) = \sin(2x)$

   d) $f_3(x) = 1 + \cos(8\pi x)$

   e) $f_4(x) = \sin(2\pi x) + \cos(3\pi x) + \cos(5\pi x)$

odrediti da li su periodične, ako jesu, koji im je osnovni period i osnovna učestanost?

2. Za funkciju $f(t) = 2 + \cos(2t) - \sin(5t)$ odrediti njen osnovni period T i pronaći koeficijente razvoja funkcije u kompleksni Furijeov red. Nacrtati amplitudski spektar.

3. Poznato je da je funkcija $f(t)$ periodična sa periodom π. Takođe su poznati i koeficijenti kompleksnog Furijeovog reda ove funkcije: $F_0 = 1$, $F_1 = 4$, $F_{-1} = 4$, $F_2 = 2j$, $F_{-2} = -2j$. Ostali koeficijenti su jednaki nuli. nacrtati amplitudski spektar a zatim odrediti vremenski oblik funkcije $f(t)$.

4. Dati su koeficijenti kompleksnog Furijeovog reda realne funkcije $f(t)$, koja je periodična sa osnovnim periodom $T = \pi$: $F_0 = 0$, $F_1 = 2$, $F_n = 0$ za $n > 1$. Odrediti vrijednosti koeficijenata sa negativnim indeksom, nacrtati amplitudski spektar i pronaći fremenski oblik funkcije $f(t)$.

Фуријеови редови:

1. а) $f_0(x) = 5$

нује периодична

$f_0(t) = f_0(t+T) \Rightarrow$ периодична ф-ја са периодом T, $T>0$

б) $f_1(x) = x^2$

$f_1(x+T) = f(x) \rightarrow$ није периодична

ц) $f_2(x) = \sin(2x)$

$$\omega_0 = 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$f_2(x+T) = f_2(x)$$

$$f_2(x+\pi) = f_2(x)$$

$$f_2(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x)$$

д) $f_3(x) = 1 + \cos(8\pi x)$

$$\omega_0 = 8\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$$ периодична

е) $f_4(x) = \sin(2\pi x) + \cos(3\pi x) + \cos(5\pi x)$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_{01} = 2\pi \\ \omega_{02} = 3\pi \\ \omega_{03} = 5\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} T_1 = \frac{2\pi}{\omega_{01}} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 = \frac{15}{15}, \frac{30}{15}, \frac{45}{15}, \dots \\ T_2 = \frac{2\pi}{\omega_{02}} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3} = \frac{10}{15}, \frac{20}{15}, \frac{30}{15}, \dots \\ T_3 = \frac{2\pi}{\omega_{03}} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}, \frac{12}{15}, \frac{18}{15}, \dots \end{array}$$

$\boxed{\frac{30}{15} \text{ односно } 2 \rightarrow \text{основни период}}$

2. $f(t) = 2 + \cos(2t) - \sin(5t)$

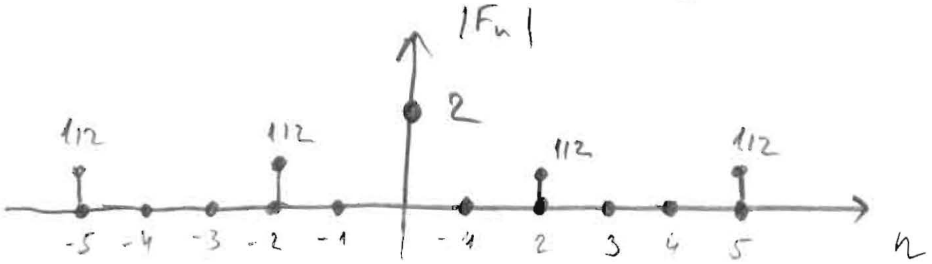
$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad (\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi,$ итд.$)$

$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{5} \quad \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{10\pi}{5}, \frac{12\pi}{5},\right.$ итд.$\left.\right)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ основни период 2π тј. $\frac{10\pi}{5}$.

$$f(t) = 2 + \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2} - \frac{e^{j5t} - e^{-j5t}}{2j} = 2 + \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t} - \frac{1}{2j}e^{j5t} + \frac{1}{2j}e^{-j5t} =$$

$$= \underbrace{2}_{F_0} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{j2t}}_{F_2} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-j2t}}_{F_{-2}} + \underbrace{\frac{j}{2}e^{j5t}}_{F_5} - \underbrace{\frac{j}{2}e^{-j5t}}_{F_{-5}}$$



3. $T = \pi$

$F_0 = 1$

$F_1 = 4$

$F_{-1} = 4$

$F_2 = 2j$

$F_{-2} = -2j$

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j2nt}$$

$$f(t) = F_0 \cdot e^{j\cdot 2\cdot 0\cdot t} + F_1 \cdot e^{j\cdot 2\cdot 1\cdot t} + F_{-1} \cdot e^{j\cdot 2\cdot(-1)\cdot t} + F_2 \cdot e^{j\cdot 2\cdot 2\cdot t} + F_{-2} \cdot e^{j\cdot 2\cdot(-2)\cdot t}$$

$$f(t) = 1 + 4e^{j2t} + 4e^{-j2t} + 2je^{j4t} - 2je^{-j4t}$$

$f(t) = 1 + 4(e^{j2t} + e^{-j2t}) + 2j(e^{j4t} - e^{j4t}) =$

$= 1 + 8\cos(2t) - 4\sin(4t)$

4. $T = \pi$

$F_0 = 0$

$F_1 = 2$

$F_n = 0$ za $n > 1$

$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$; $F_1 = 2 \Rightarrow F_{-1} = 2$

$F_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \\ F_{-1} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(t) = 0 + F_1 e^{j\omega_0 t} + F_{-1} e^{-j\omega_0 t} =$$

$= 2e^{j2t} + 2e^{-j2t} = 2(e^{j2t} + e^{-j2t})$

$f(t) = 4 \cdot \cos(2t)$