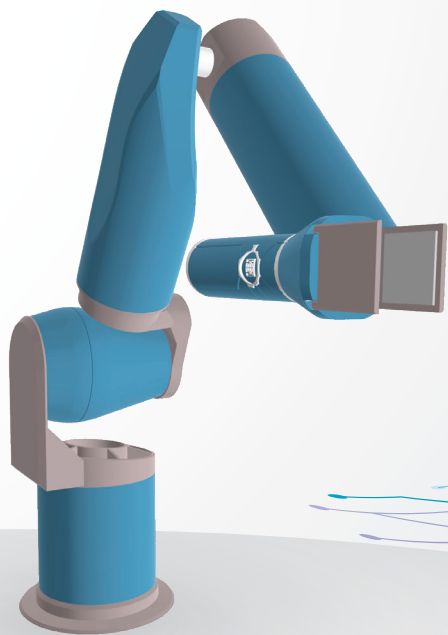


Kosta Jovanović, Nikola Knežević

ROBOTIKA

Zbirka rešenih zadataka



AKADEMSKA MISAO
Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet

Kosta Jovanović, Nikola Knežević

Robotika

Zbirka rešenih zadataka

Akadska misao
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet
Beograd 2021.

Kosta Jovanović, Nikola Knežević

ROBOTIKA
Zbirka rešenih zadataka

Recenzenti

Prof. dr Veljko Potkonjak

Prof. dr Mirko Raković

Nastavno-naučno veće Elektrotehničkog fakulteta odobrilo je objavljivanje ove nastavne literature odlukom broj 179/4 od 18.03.2021. godine.

Izdavači

Akadska misao, Beograd
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

Grafički dizajn
Dragana Ilić

Lektor
Isidora Dimitrijević

Štampa
Akadska misao, Beograd

Tiraž
200 primeraka

ISBN 978-86-7466-876-4

Predgovor

„Robotika – zbirka rešenih zadataka“ je nastavna literatura koja obrađuje osnovne teme iz oblasti robotike kroz prikaz rešenih zadataka. Po svojoj strukturi i sadržaju, zbirka prati osnovni univerzitetski kurs u oblasti robotike. Konkretno, na Univerzitetu u Beogradu - Elektrotehničkom fakultetu, zbirka je namenjena predmetu Robotika i automatizacija čiju sadržinu prati. Opšte, zbirka se može koristiti i kao pomoćna literatura za studente drugih srodnih fakulteta tehničkog usmerenja i visokih tehničkih škola. Takođe, zbirka se može koristiti od strane inženjera u početnim fazama karijere u cilju uvida u osnovne principe rada robota i rešenje tipičnih problema i zadataka koji se javljaju u industrijskoj robotici.

Sadržaj Zbirke je podeljen u sledećih devet poglavlja: Osnovni pojmovi, konfiguracije i primene, Direktna kinematika – homogena transformacije, Direktna kinematika – DH notacija i kinematika industrijskih robota, Inverzna kinematika, Diferencijalna kinematika – Jakobijan, Dinamika, Planiranje trajektorije, Pogonski i senzorski sistemi robota, Upravljanje. Sadržaj zbirke prati tipične tematske celine koje se javljaju u udžbenicima za predmete robotike na relevantnim svetskim univerzitetima.

U Beogradu, mart 2021. godine

Autori: Kosta Jovanović i Nikola Knežević

Sadržaj:

Osnovni pojmovi, konfiguracije i primene.....	1
Direktna kinematika – homogene transformacije.....	11
Direktna kinematika – DH notacija i kinematika industrijskih robota	37
Inverzna kinematika	61
Diferencijalna kinematika – Jakobijan	87
Dinamika	109
Planiranje trajektorije	141
Pogonski i senzorski sistemi robota.....	167
Upravljanje	181

1

Osnovni pojmovi, konfiguracije i primene

Savladavanjem problematike prikazane u ovom poglavlju, čitalac će biti osposobljen da razume i koristi osnovne pojmove u robotici. Takođe, zadaci iz ovog poglavlja ukazuju na značaj predstavljanja položaja robota pomoću unutrašnjih (generalisanih) i spoljašnjih (funkcionalnih) koordinata, pojmove kinematičkih singulariteta, redundanse kod robota, osnovne koordinatne sisteme koji se definišu da olakšaju programiranje i upravljanje robotima, kao i na pojmove ponovljivosti, tačnosti i rezolucije u svetlu robotskih sistema. Poglavlje daje i uvid u osnovne konfiguracije industrijskih robota, njihove tipične karakteristike i primene.

Zadatak 1

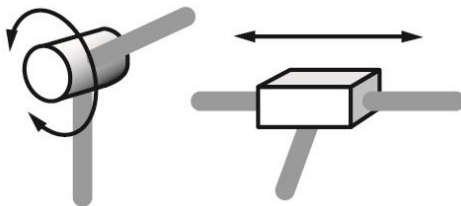
Objasniti pojam stepena slobode između dva kruta tela – kinematičkog para. Koliko stepeni slobode najčešće imaju zglobovi robota i zašto?

Rešenje:

Kinematički par – podrazumeva dva međusobno povezana pokretna tela.

Broj stepeni slobode – broj mogućih nezavisnih kretanja dva tela (broj parametara da se jednoznačno definiše međusobni položaj dva tela).

Zglobovi robota najčešće imaju samo jedan stepen slobode u skladu sa danas najčešće korišćenim aktuatorima robota, koji realizuju kretanje samo po jednoj osi – obrtno/rotaciono (električni motori) ili translatorno kretanje (hidraulički i pneumatski aktuatori).



Slika 1 – Primer rotacionog (levo) i translatornog (desno) zgloba.

Zadatak 2

Objasniti pojam unutrašnjih (generalisanih) koordinata/stepeni slobode i spoljašnjih (funkcionalnih) koordinata/stepeni slobode robota. Objasniti pojam direktne i inverzne kinematike robota. Koliko zglobova najčešće imaju industrijski roboti i zašto?

Rešenje:

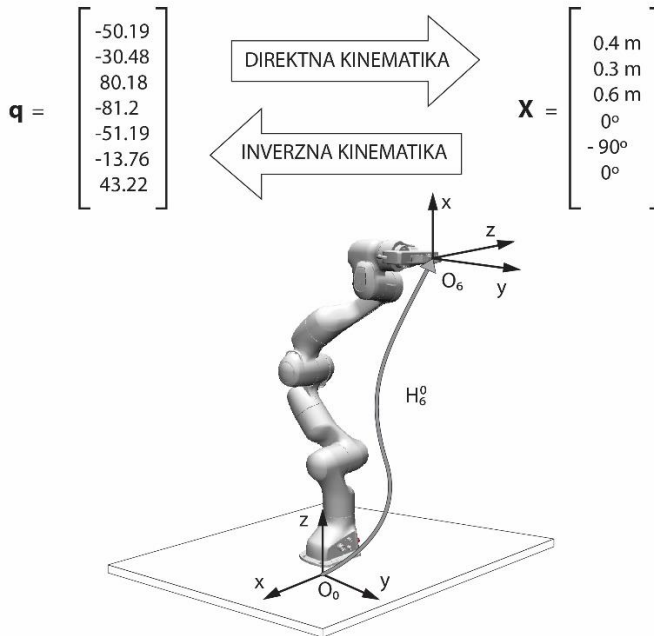
Unutrašnje (generalisane) koordinate $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ određuju međusobni položaj susednih segmenata robota, odnosno pozicije zglobova, i govore o unutrašnjoj konfiguraciji robota. Spoljašnje (funkcionalne) koordinate predstavljaju poziciju završnog uređaja robota u odnosu na spoljašnji nepokretni koordinatni sistem. U opštem slučaju položaj završnog uređaja se definiše sa šest parametara, odnosno koordinata od kojih prve tri opisuju poziciju, a druge tri orijentaciju

$$\mathbf{X} = (x, y, z, \theta, \varphi, \psi).$$

Ukoliko je poznato kretanje unutrašnjih koordinata $\mathbf{q}(t)$, izračunavanje kretanja završnog uređaja u spoljašnjim koordinatama $\mathbf{X}(t)$ naziva se rešavanjem problema direktne kinematike.

Ukoliko je poznato kretanje završnog uređaja u spoljašnjim koordinatama $\mathbf{X}(t)$, izračunavanje odgovarajućeg kretanja unutrašnjih koordinata $\mathbf{q}(t)$ naziva se rešavanjem problema inverzne kinematike. Problem inverzne kinematike je komplikovaniji za rešavanje od problema direktne kinematike jer zahteva rešavanje nelinearnih trigonometrijskih jednačina i često nije jednoznačno rešiv.

Industrijski roboti najčešće imaju šest stepeni slobode (zglobova). Razlog za to je što se pozicija tela u prostoru opisuje sa šest parametara (spoljašnje koordinate). Na ovaj način moguće je podesiti poziciju i orijentaciju završnog uređaja na proizvoljan način.



Slika 2 – Primer preslikavanja između unutrašnjih (generalisanih) i spoljašnjih (funkcionalnih) koordinata.

Zadatak 3

Objasniti pojam kinematičkog singulariteta robota. Objasniti na koje načine se mogu izbeći kinematički singulariteti.

Rešenje:

Singularne pozicije (kinematički singulariteti) robota su oni položaji u kojima robot gubi mogućnost kontrole jednog od funkcionalnih stepeni slobode. Najveća verovatnoća dostizanja singulariteta se ostvaruje u položajima kada se završni uređaj nalazi na obodima radnog prostora robota.

Kinematički singulariteti se mogu izbeći pažljivim planiranjem kretanja (trajektorija zglobova) i upotrebom redundantnih kinematičkih konfiguracija.

Zadatak 4

Objasniti pojam kinematičke redundanse robota. Objasniti potrebu za upotrebom redundantnih robota.

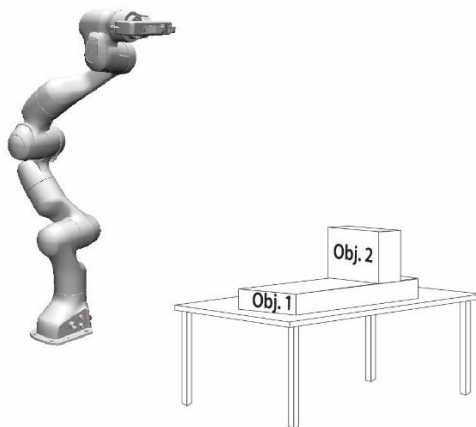
Rešenje:

Za robota kažemo da je kinematički redundantan u odnosu na neki zadatak ukoliko robot ima više upravljivih stepeni slobode (unutrašnjih koordinata) nego što mu je potrebno za izvršavanje tog zadatka. Drugim rečima, ako je broj unutrašnjih koordinata n , veći od broja m spoljašnjih koordinata završnog uređaja potrebnih za izvršavanje nekog zadatka, gde je $m \leq 6$, kažemo da je robot redundantan sa stepenom redundanse $n - m$. Isti robot može da bude redundantan za jedan zadatak, a neredundantan za neki drugi zadatak.

Redundantni roboti se koriste za izvršavanje zadataka da bi se postigla veća brzina pokreta, da bi se izbegle pozicije mogućih singulariteta, radi lakše manipulacije – izbegavanja prepreka u radnom prostoru, ali i ostvarivanja potreba za rešavanjem optimalnih kriterijuma u rešavanju inverzne kinematike (minimizacije vremena izvršavanja, brzine kretanja pojedinih zglobova, utroška energije, itd).

Zadatak 5

Na Slici 3 je prikazan industrijski robot i objekat koji se nalazi na radnom stolu, a koji je predmet manipulacije od strane robota. Ucrtati tipične koordinatne sisteme koji se koriste za definisanje kretanja robota i relativno kretanje robota u odnosu na spoljašnju sredinu.



Slika 3 – Radno okruženja robota.

Rešenje:

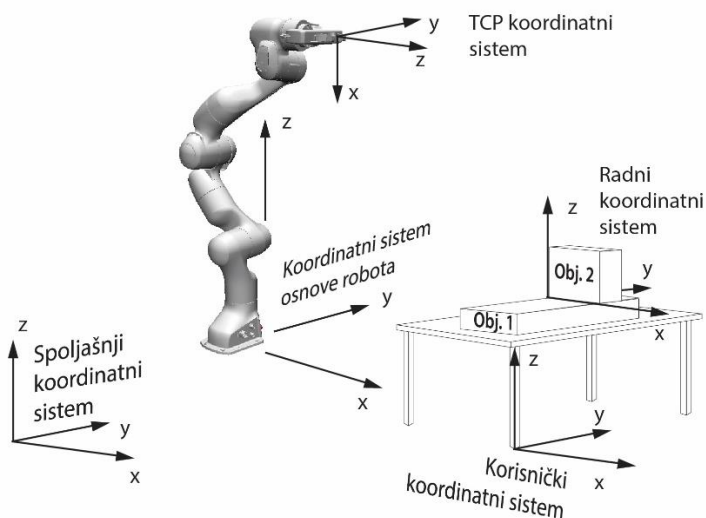
Spoljašnji koordinatni sistem (engl. *world coordinates*) – nepokretni koordinatni sistem koji uglavnom predstavlja poziciju robotske ćelije. Ovaj koordinatni sistem je na vrhu hijerarhije i ostali koordinatni sistemi se definišu u odnosu na ovaj koordinatni sistem.

Koordinatni sistem osnove robota (engl. *base coordinates*) – koordinatni sistem koji predstavlja poziciju baze robota i jedinstven je za svakog robota u robotskoj ćeliji. Koordinatni sistem osnove robota je nepokretan i ne menja se tokom upotrebe robota prilikom izvršavanju zadataka.

Koordinatni sistem završnog uređaja robota – TCP (engl. *Tool Center Point*) – koordinatni sistem koji definiše centar završnog uređaja. Moguće je definisati više TCP koordinatnih sistema za istog robota. Svaki robot poseduje bar jedan TCP koji definiše poziciju i orijentaciju prirubnice robota. Položaj koordinatnog sistema završnog uređaja se definiše u odnosu na ovaj koordinatni sistem.

Korisnički koordinatni sistem (engl. *user coordinate system*) – koordinatni sistem koji se može definisati po potrebi korisnika na nekoj strateškoj lokaciji unutar robotske ćelije kako bi se pozicije u prostoru zadavale u odnosu na tu karakterističnu poziciju i time olakšalo programiranje robota.

Radni koordinatni sistem (engl. *object coordinate system*) – koordinatni sistem koji uglavnom predstavlja objekat kojim se manipuliše ili definiše poziciju radnog stola/palete/mašine odakle robot preuzima objekte kojima manipuliše.



Slika 4 – Radno okruženje robota sa ucrtanim koordinatnim sistemima.

Zadatak 6

Objasniti pojmove ponovljivosti, tačnosti i rezolucije industrijskih robota.

Rešenje:

Ponovljivost (engl. *Reapetability*) – sposobnost robota da se vrati u ranije zapamćenu tačku radnog prostora predstavljenu izmerenim odnosno snimljenim unutrašnjim koordinatama koje odgovaraju toj tački u prostoru. Mera ponovljivosti je odstupanje završnog uređaja od ranije postignute i zapamćene pozicije (maksimalna sfera koja obuhvata sva odstupanja od ranije tačke).

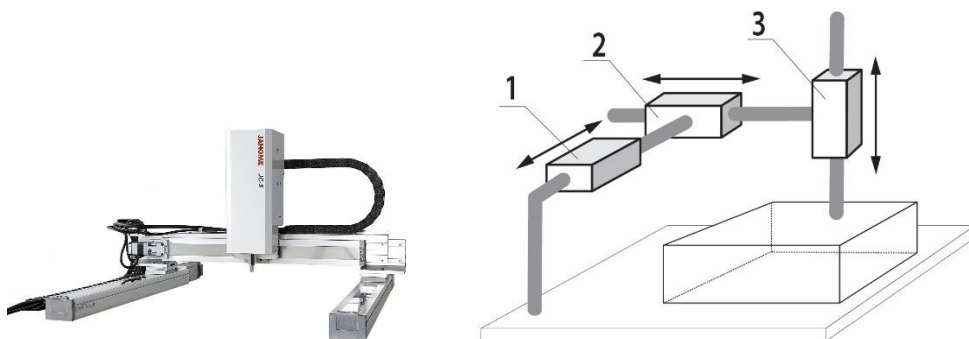
Tačnost (engl. *Accuracy*) – odstupanje od komandovanog položaja u spoljašnjim koordinatama (položaja u kome prethodno nisu snimljene unutrašnje koordinate robota). Za razliku od ponovljivosti, tačnost se može popraviti kalibracijom.

Rezolucija (engl. *Resolution*) – najmanje pomeranje robota koje se može zadati.

Zadatak 7

Nacrtati funkcionalnu šemu robota Dekartove konfiguracije. Skicirati radni prostor ove minimalne konfiguracije. Navesti osnovne prednosti, nedostatke i tipične primere primene ove konfiguracije robota.

Rešenje:



Slika 5 – Robot Dekartove konfiguracije (levo) i njegova minimalna funkcionalna šema (desno)
(preuzeto sa: <http://www.pae.com.my/JC-3-Series>).

Robot Dekartove konfiguracije (koriste se još nazivi kartezijski – engl. *Cartesian*, i portabilni – *Gantry*) realizovan je pomoću tri translatorsna zglobova, pri čemu su ose translacije međusobno normalne. U pogledu geometrije ova konfiguracija ima najjednostavniju spregu između unutrašnjih i spoljašnjih koordinata. Svaka unutrašnja koordinata jednoznačno određuje jednu od tri spoljašnje koordinate koje definišu poziciju završnog uređaja, pa je i rešavanje inverznog kinematičkog

problema jednostavno, a kretanje zglobova intuitivno. Ovakva struktura pruža veoma dobru mehaničku krutost i može da opslužuje veliki radni prostor. Osnovni nedostatak ovog manipulatora je otežan pristup objektu koji je predmet manipulacije, odnosno nedostatak fleksibilnosti u smislu prenamene robota (promene zadatka ili lokacije u prostoru).

Najčešća upotreba ove konfiguracije je za manipulaciju teških predmeta i predmeta velikih dimenzija, zbog čega se često koristi u magacinima i skladištima. Zbog velike krutosti i velikog radnog prostora, koriste se i kao merne mašine.

Zadatak 8

Nacrtati minimalnu konfiguraciju SCARA robota. Skicirati radni prostor ove minimalne konfiguracije. Navesti osnovne prednosti, nedostatke i tipične primere primene ove konfiguracije robota.

Rešenje:



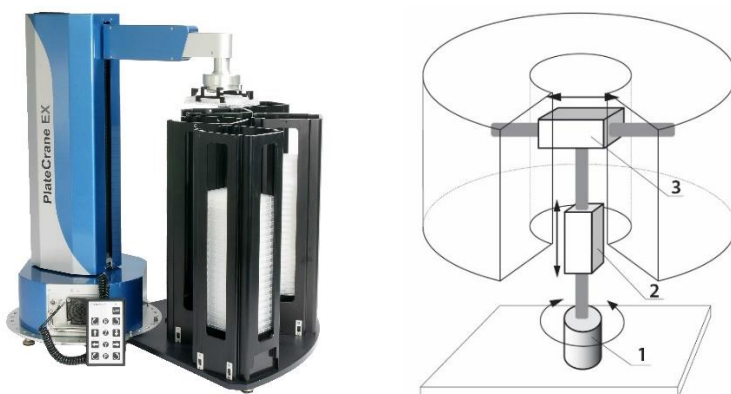
Slika 6 – SCARA robot (levo) i njegova minimalna funkcionalna šema (desno) (preuzeto sa: <https://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots/irb-910sc>).

Robot SCARA konfiguracije sastoji se od dva rotaciona zgloba i jednog translatorskog, kod koje su sve ose rotacije i translacije paralelne. Skraćenica SCARA potiče od engl. *Selective Compliance Assembly Robot Arm*. Ovakva konfiguracija poseduje veliku krutost pri vertikalnom opterećenju dok može biti popustljiva pri horizontalnim opterećenjima, što je čini pogodnom za zadatke vertikalnog sklapanja i pakovanja. Prva dva rotaciona zgloba pozicioniraju završni uređaj u xy -ravni dok je istovremeno translatorski zglob zadužen za pozicioniranje završnog uređaja po z -osi, pa se odlikuju i velikom brzinom rada. Nedostatak SCARA konfiguracije je ograničena nosivost i ograničeno kretanje (radni prostor) duž z -ose. SCARA robote odlikuje i nedostatak fleksibilnosti u smislu prenamene robota za druge zadatke. Najčešća upotreba ove konfiguracije je u već navedenim zadacima montaže, kao i lake i brze manipulacije objektima bez promene nagiba u horizontalnoj ravni kao što je to često potreba u elektronskoj industriji.

Zadatak 9

Nacrtati minimalnu konfiguraciju Cilindričnog robota. Skicirati radni prostor ove minimalne konfiguracije. Navesti osnovne prednosti, nedostatke i tipične primere primene ove konfiguracije robota.

Rešenje:



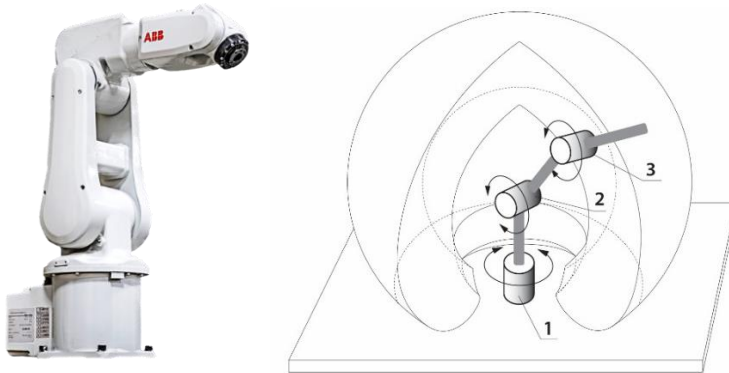
Slika 7 – Cilindrični robot (levo) i njegova minimalna funkcionalna šema (desno) (preuzeto sa: <https://analyticalscience.wiley.com/doi/10.1002/gitlab.4177>).

Robot cilindrične konfiguracije sastoji se od jednog rotacionog zgloba i dva translaciona (translacija duž ose rotacije prvog zgloba praćena, translacijom duž ose normalne na prethodnu translaciju). Cilindrični robot se u odnosu na robota Dekartove konfiguraciju razlikuje u prvom zglobu kinematičkog lanca koji je rotacioni, te umesto Dekartovog zglobovi ovog robota formiraju cilindrični koordinatni sistem. Prednost ove konfiguracije se ogleda u zadacima koji se opisuju u cilindričnim koordinatama gde tada svaki stepen slobode odgovara spoljašnjoj (funkcionalnoj) koordinati. Nedostatak ove konfiguracije je nemogućnost promene nagiba u horizontalnoj ravni.

Najčešća upotreba ove konfiguracije je u zadacima manipulacije objektima i opsluživanja mašina u mašinskoj industriji koji ne zahtevaju promenu nagiba predmeta u horizontalnoj ravni.

Zadatak 10

Nacrtati minimalnu konfiguraciju antropomorfog robota. Skicirati radni prostor ove minimalne konfiguracije. Navesti osnovne prednosti, nedostatke i tipične primere primene ove konfiguracije robota.

Rešenje:

Slika 8 – Antropomorfni robot (levo) i njegova minimalna funkcionalna šema (desno) (preuzeto sa: <https://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots/irb-120>).

Antropomorfna konfiguracija je realizovana pomoću tri rotaciona zgloba gde su ose rotacije drugog i trećeg zgloba paralelne i normalne na osu rotacije prvog zgloba. Inspiracija za ovu konfiguraciju je kinematička struktura čovekove ruke kako bi industrijski roboti bili sposobni za izvršavanje što više zadataka koje ljudska ruka realizuje. Samim tim, prva dva zgloba su jako blizu i često se nazivaju „ramenom”, dok se treći naziva „laktom”. Drugi i treći segment robota tako čine nadlakticu i podlakticu. Roboti ovakve konfiguracije se odlikuju jako dobrim mogućnostima pozicioniranja i manipulacije u prostoru čak i u prisustvu prepreka, odnosno fleksibilnošću kretanja. Nedostatak antropomorfne konfiguracije u odnosu na ostale minimalne konfiguracije je kompleksna veza između unutrašnjih i spoljašnjih koordinata, pa samim tim i rešavanje problema inverzne kinematike, ali i izrazito dinamičko sprezanje između osa.

Zbog svoje fleksibilnosti, antropomorfna konfiguracija se dominantno koristi u industriji sa preko 60% udela među svim konfiguracijama. Česta upotreba ove konfiguracije je u svim zadacima u kojima menja čoveka: zavarivanje, farbanje, manipulacija, itd.

Zadatak 11

Navesti 10 tipičnih primena robota u industriji.

Rešenje:

Montaža/sklapanje, Elektrolučno zavarivanje, Tačkasto zavarivanje, Farbanje prskanjem, Opsluživanje mašina, Paletiranje i pakovanje, Završne obrade materijala (brušenje, poliranje, itd), Lepljenje, Pečatanje i označavanje, Kontrola kvaliteta.

Zadatak 12

Navesti 10 tipičnih parametara pomoću kojih se vrši izbor industrijskog robota.

Rešenje:

Primena – u zavisnosti od planiranog zadatka i samim tim potrebne vrste završnog uređaja (hvataljka, pištolj za farbanje prskanjem, baklja za zavarivanje, itd). Završni uređaji mogu biti vrlo jednostavni (poput magneta), pa sve do kompleksnih (sa više stepeni slobode, mehanizmom koji obezbeđuje mehaničku popustljivost, sa dodatnim sensorima, ulazima i izlazima). Često isti robot može koristiti više različitih završnih uređaja.

Broj upravljivih osa / stepeni slobode – najčešće od 3 do 7, zavisno od kompleksnosti geometrije zadatka za koji je namenjen.

Oblast rada robota (radni prostor) – prostor koji robot može da opsluži, odnosno u kome može da izvrši potrebni zadatak.

Kinematička konfiguracija – raspored i tip minimalne konfiguracije. Npr, za potrebe brze manipulacije lakih predmeta na ograničenom prostoru u horizontalnoj ravni se tipično koriste roboti SCARA konfiguracije.

Maksimalno opterećenje – koje završni uređaj može da ponese, tj. sa kojim može da manipuliše uz ponovljivost propisanu u tehničkim karakteristikama.

Brzina/ubrzanje – najčešće od interesa je definisana maksimalna brzina kretanja završnog uređaja robota, ali može biti od interesa i ograničenje po pojedinim osama u cilju što bržeg izvršavanja zadatka.

Tačnost – maksimalno odstupanje od željenog zadatog položaja u radnom prostoru.

Ponovljivost – sposobnost robota da zadatak radi na isti način (ukoliko robot ima visok faktor ponovljivosti, a malu tačnost, to se može nadomestiti eliminacijom offset-a).

Kontrola kretanja – način na koji se može zadavati kretanje robota. Neki roboti mogu imati mogućnost kinestetičkog zadavanja kretanja, gde operater rukom vodi završni uređaj robota i pamti ostvarene pozicije kreirajući potrebnu sekvencu kretanja, koju robot zatim reprodukuje u automatskom režimu.

Vrsta pogona – električni ili hidraulički (ređe pneumatski), u zavisnosti od namene robota i radnog okruženja.

2

Direktna kinematika – homogene transformacije

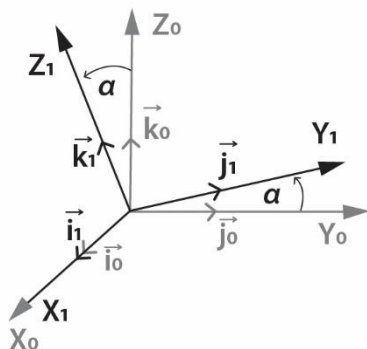
Izvršavanje zadatka pomoću robota podrazumeva relativno kretanje i pozicioniranje robota, odnosno alata robota u odnosu na objekte koji su predmet akcije robota. U ovom poglavlju, čitalac će se upoznati sa osnovnim matematičkim aparatom pomoću koga se mogu opisati ovi relativni položaji, kao i položaj tela u trodimenzionom prostoru uopšte. Specifično, kroz pojam homogenih transformacija čitaocu se pruža mogućnost da sagleda doprinos pomeranja pojedinih zglobova robota na poziciju i orijentaciju završnog uređaja robota u prostoru.

Zadatak 13

Dva koordinatna sistema imaju isti koordinatni početak. Tipično kretanje zgloba robota dovodi do rotacije ostatka kinematičkog lanca robota nakon tog zgloba i promene orijentacije koordinatnog sistema segmenta koji je zarotiran za ugao za koji se zglob pomerio. Izvesti matricu elementarne rotacije kojom se tačke iz zarotiranog koordinatnog sistema preslikavaju u inicijalni koordinatni sistem, pretpostaviti da je rotacija izvršena oko x -ose za ugao α . Napisati i matricu elementarne rotacije oko y -ose za ugao β , kao i matricu elementarne rotacije oko z -ose za ugao γ .

Rešenje:

a) Rotacija oko x -ose:



Slika 9 – Elementarna rotacija za ugao α oko x -ose.

Proizvoljna tačka P u prostoru se može predstaviti vektorom \vec{p} u koordinatnom sistemu $O_0-x_0y_0z_0$, pri čemu se taj vektor može izraziti kao:

$$\vec{p}_0 = p_{0x}\vec{i}_0 + p_{0y}\vec{j}_0 + p_{0z}\vec{k}_0.$$

Isti vektor \vec{p} se može izraziti u koordinatnom sistemu $O_1-x_1y_1z_1$:

$$\vec{p}_1 = p_{1x}\vec{i}_1 + p_{1y}\vec{j}_1 + p_{1z}\vec{k}_1.$$

Bilo da je vektor \vec{p} izražen u $O_0-x_0y_0z_0$ ili $O_1-x_1y_1z_1$ koordinatnom sistemu reč je o istom vektoru. Na osnovu toga se može pisati:

$$p_{0x} = \vec{p}_0 \cdot \vec{i}_0 = \vec{p}_1 \cdot \vec{i}_0,$$

$$p_{0x} = p_{1x}\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_0 + p_{1y}\vec{j}_1 \cdot \vec{i}_0 + p_{1z}\vec{k}_1 \cdot \vec{i}_0,$$

dok se na sličan način može pokazati da važi:

$$p_{0y} = p_{1x} \vec{i}_1 \vec{j}_0 + p_{1y} \vec{j}_1 \vec{j}_0 + p_{1z} \vec{k}_1 \vec{j}_0,$$

$$p_{0z} = p_{1x} \vec{i}_1 \vec{k}_0 + p_{1y} \vec{j}_1 \vec{k}_0 + p_{1z} \vec{k}_1 \vec{k}_0.$$

Ovi izrazi se mogu napisati i u matricnom obliku:

$$\vec{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \vec{p}_1,$$

gde se matrica R naziva matricom rotacije, a R_0^1 definiše relativno ugaono odstupanje koordinatnih sistema $O_0 - x_0 y_0 z_0$ i $O_1 - x_1 y_1 z_1$.

Generalni oblik matrice rotacije se može napisati u formi:

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} \vec{i}_1 \vec{i}_0 & \vec{j}_1 \vec{i}_0 & \vec{k}_1 \vec{i}_0 \\ \vec{i}_1 \vec{j}_0 & \vec{j}_1 \vec{j}_0 & \vec{k}_1 \vec{j}_0 \\ \vec{i}_1 \vec{k}_0 & \vec{j}_1 \vec{k}_0 & \vec{k}_1 \vec{k}_0 \end{bmatrix}.$$

Ukoliko se posmatra rotacija oko jedne ose, matrica rotacije se naziva elementarna matrica rotacije.

Na Slici 9 je prikazana rotacija koordinatnog sistema $O_0 - x_0 y_0 z_0$ oko x -ose za ugao α .

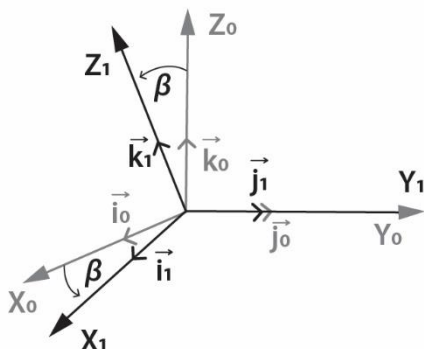
Ako se pogleda generalni oblik matrice rotacije, može se zaključiti da će za ovaj slučaj neki od članova matrice biti jednaki nuli, i to tačno oni gde jedinični ortovi zaklapaju ugao od 90° . Ostali članovi će imati vrednosti skalarnog proizvoda dva posmatrana orta.

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} |\vec{i}_1||\vec{i}_0|\cos(0) & 0 & 0 \\ 0 & |\vec{j}_1||\vec{j}_0|\cos(\alpha) & |\vec{k}_1||\vec{j}_0|\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \\ 0 & |\vec{j}_1||\vec{k}_0|\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) & |\vec{k}_1||\vec{k}_0|\cos(-\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{x,\alpha}.$$

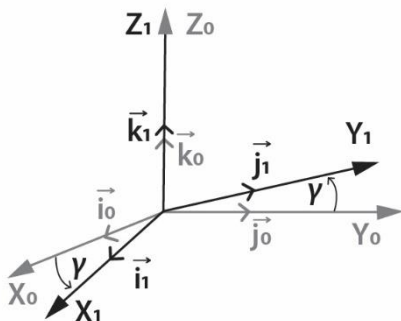
Na sličan način, kao i u prethodnom primeru, može se izračunati matrica elementarne transformacije za rotaciju oko y -ose za ugao β , odnosno matrica elementarne rotacije oko z -ose za ugao γ .

b) Rotacija oko y -ose:


 Slika 10 – Elementarna rotacija za ugao β oko y -ose.

$$\mathbf{R}_{y,\beta} = \begin{bmatrix} |\vec{i}_1||\vec{i}_0|\cos(-\beta) & 0 & |\vec{k}_1||\vec{i}_0|\cos(\frac{\pi}{2}-\beta) \\ 0 & |\vec{j}_1||\vec{j}_0|\cos(0) & 0 \\ |\vec{i}_1||\vec{k}_0|\cos(\frac{3\pi}{2}-\beta) & 0 & |\vec{k}_1||\vec{k}_0|\cos(-\beta) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}.$$

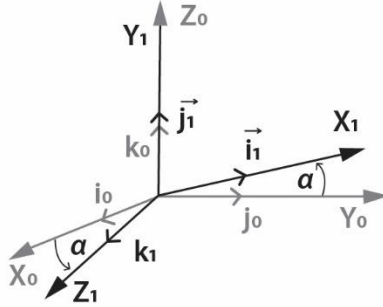
 c) Rotacija oko z -ose:

 Slika 11 – Elementarna rotacija za ugao γ oko z -ose.

$$\mathbf{R}_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} |\vec{i}_1||\vec{i}_0|\cos(-\gamma) & |\vec{j}_1||\vec{i}_0|\cos(\frac{3\pi}{2}-\gamma) & 0 \\ |\vec{i}_1||\vec{j}_0|\cos(\frac{\pi}{2}-\gamma) & |\vec{j}_1||\vec{j}_0|\cos(-\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & |\vec{k}_1||\vec{k}_0|\cos(0) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 14

Odrediti matricu rotacije za relativnu razliku položaja dva koordinatna sistema prikazana na Slici 12, ako je ugao $\alpha = 45^\circ$.



Slika 12 – Relativna rotacija dva koordinatna sistema.

Rešenje:

Iz prethodnog zadatka se može videti da kolone matrice rotacije predstavljaju projekcije ortova koordinatnog sistema $O_1-x_1y_1z_1$ na sistem $O_0-x_0y_0z_0$.

$$\vec{i}_1 = \begin{bmatrix} |\vec{i}_1||\vec{i}_0|\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \\ |\vec{i}_1||\vec{j}_0|\cos(\alpha) \\ |\vec{i}_1||\vec{k}_0|\cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{i}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{j}_1 = \begin{bmatrix} |\vec{j}_1||\vec{i}_0|\cos(\frac{\pi}{2}) \\ |\vec{j}_1||\vec{j}_0|\cos(\frac{\pi}{2}) \\ |\vec{j}_1||\vec{k}_0|\cos(0) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{j}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{k}_1 = \begin{bmatrix} |\vec{k}_1||\vec{i}_0|\cos(-\alpha) \\ |\vec{k}_1||\vec{j}_0|\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ |\vec{k}_1||\vec{k}_0|\cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 15

Vektor \vec{p} je rotiran oko z -ose za 30° , a zatim je rotiran oko x -ose za 45° . Izračunati matricu rotacije koja izvršava transformacije pomenutim redosledom ako se:

- Rotacije izvršavaju oko osa trenutnih koordinatnih sistema dobijenih rotacijama,
- Rotacije izvršavaju oko fiksnih osa inicijalnog koordinatnog sistema.

Rešenje:

- a) Rotacije se izvršavaju oko trenutnih odnosno tekućih osa:

$$\vec{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{p}_0 = \mathbf{R}_{z, \frac{\pi}{6}} \vec{p}_1,$$

$$\vec{p}_1 = \mathbf{R}_1^2 \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_1 = \mathbf{R}_{x, \frac{\pi}{4}} \vec{p}_2,$$

$$\vec{p}_0 = \mathbf{R}_{z, \frac{\pi}{6}} \mathbf{R}_{x, \frac{\pi}{4}} \vec{p}_2.$$

Kada se određene rotacije predstave i raspišu pomoću elementarnih matrica rotacije, dobija se da je matrica ukupne rotacije:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{z, \frac{\pi}{6}} \mathbf{R}_{x, \frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

- b) Rotacije se izvršavaju oko fiksnih osa tako što se posmatra prvo rotacija oko z -ose kao posebna rotacija:

$$\vec{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{p}_0 = \mathbf{R}_{z, \frac{\pi}{6}} \vec{p}_1.$$

Zatim, kako je potrebno da se izvrši naredna rotacija oko nepokretnog koordinatnog sistema, prvo je potrebno vratiti koordinatni sistem u prvobitno stanje (rotacijom oko

z -ose za -30°), a potom izvršiti rotaciju oko x -ose za 45° , pa konačno izvršiti ponovo rotaciju oko z -ose za 30° .

$$\vec{p}_1 = R_{z, -\frac{\pi}{6}} R_{x, \frac{\pi}{4}} R_{z, \frac{\pi}{6}} \vec{p}_2,$$

$$\vec{p}_0 = R_0^1 R_1^2 \vec{p}_2 = R_{z, \frac{\pi}{6}} R_{z, -\frac{\pi}{6}} R_{x, \frac{\pi}{4}} R_{z, \frac{\pi}{6}} \vec{p}_2,$$

$$\vec{p}_0 = R_{x, \frac{\pi}{4}} R_{z, \frac{\pi}{6}} \vec{p}_2,$$

$$R = R_{x, \frac{\pi}{4}} R_{z, \frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Zadatak 16

Odrediti matricu rotacije između dva koordinatna sistema sa istim koordinatnim početkom, koji su dobijeni uzastopnim rotacijama koje odgovaraju ZXZ rotacijama sfernog zgloba redom za uglove φ , θ i ψ .

Rešenje:

Ukoliko se sferni zglob definiše uzastopnim rotacijama oko osa ZXZ, da bi se izračunala matrica transformacije, potrebno je izvršiti rotaciju oko z -ose za ugao φ , zatim oko novonastale x -ose za ugao θ , i na kraju oko novonastale z -ose za ugao ψ .

$$R = R_{z, \varphi} R_{x, \theta} R_{z, \psi},$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

$$r_{11} = \cos(\varphi) \cos(\psi) - \cos(\theta) \sin(\varphi) \sin(\psi),$$

$$r_{12} = -\cos(\varphi) \sin(\psi) - \cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\varphi),$$

$$r_{13} = \sin(\varphi) \sin(\theta),$$

$$r_{21} = \sin(\varphi) \cos(\psi) + \cos(\theta) \cos(\varphi) \sin(\psi),$$

$$r_{22} = \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(\psi),$$

$$r_{23} = -\cos(\phi) \sin(\theta),$$

$$r_{31} = \sin(\theta) \sin(\psi),$$

$$r_{32} = \sin(\theta) \cos(\psi),$$

$$r_{33} = \cos(\theta).$$

Zadatak 17

Prodiskutovati inverzno rešenje - određivanje Ojlerovih uglova redosleda rotacija ZYZ na osnovu matrice rotacije kada važi da je $\sin(\theta) = 0$.

Rešenje:

Prvo je potrebno odrediti matricu rotacije za Ojlerove uglove ZYZ, na sličan način kao u Zadatku 16:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{z,\psi}.$$

Ako se matrica \mathbf{R} predstavi u obliku:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

tada su vrednosti pojedinačnih elemenata:

$$r_{11} = \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(\psi),$$

$$r_{12} = -\cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\psi),$$

$$r_{13} = \cos(\phi) \sin(\theta),$$

$$r_{21} = \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\psi) + \cos(\phi) \sin(\psi),$$

$$r_{22} = -\sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi),$$

$$r_{23} = \sin(\phi) \sin(\theta),$$

$$r_{31} = -\sin(\theta) \cos(\psi),$$

$$r_{32} = \sin(\theta) \sin(\psi),$$

$$r_{33} = \cos(\theta).$$

Upoređivanjem matrica može se zaključiti kako se mogu izračunati vrednosti uglova.

Ugao ϕ se može dobiti na sledeći način: $\phi = \arctg \left(\frac{r_{23}}{r_{13}} \right)$.

Ugao θ se može dobiti na sledeći način: $\theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}}{r_{33}}\right)$.

Ukoliko se uzme pozitivan znak korena, ugao θ je iz opsega $(0, \pi)$. Tada ugao ψ možemo izračunati kao:

$$\psi = \arctg\left(\frac{r_{32}}{-r_{31}}\right).$$

Ukoliko se uzme negativan znak korena, tj. ugao θ je iz opsega $(-\pi, 0)$ dobijamo da važi sledeće:

$$\begin{aligned}\phi &= \arctg\left(\frac{-r_{23}}{-r_{13}}\right), \\ \theta &= \arctg\left(\frac{-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}}{r_{33}}\right), \\ \psi &= \arctg\left(\frac{-r_{32}}{r_{31}}\right).\end{aligned}$$

Kada je $\sin(\theta) = 0$ oba rešenja gube smisao. U tom slučaju moguće je odrediti samo zbir ili razliku uglova ϕ i ψ . Tačnije, ako je $\theta = 0$ ili π , uzastopne rotacije se vrše oko osa trenutnih koordinatnih sistema koje su paralelne. Ovim se dobija ekvivalentan uticaj uglova ϕ i ψ na rotaciju.

Odatle sledi da se željena zakrenutost hvataljke može postići bilo kojom kombinacijom uglova rotacije u zglobovima 4 i 6, odnosno bio kojom kombinacijom uglova ϕ i ψ , za koje je ispunjen uslov da je njihov zbir jednak željenom uglu zakretanja hvataljke.

Zadatak 18

Jedna od uobičajenih reprezentacija orijentacije koordinatnog sistema je pomoću uglova valjanja-propinjanja-skretanja (engl. *Roll-Pitch-Yaw*). Prodiskutovati inverzno rešenje – određivanje uglova valjanja-propinjanja-skretanja na osnovu matrice rotacije kada važi da je $\cos(\theta) = 0$.

Rešenje:

Kao i u prethodnim zadacima potrebno je prvo naći matricu rotacije za posmatrani skup rotacija:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\psi}.$$

Opet, ukoliko se matrica \mathbf{R} predstavi u opštem obliku, može se doći do inverznog rešenja:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

$$r_{11} = \cos(\phi)\cos(\theta),$$

$$r_{12} = \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi),$$

$$r_{13} = \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi),$$

$$r_{21} = \sin(\phi)\cos(\theta),$$

$$r_{22} = \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\psi),$$

$$r_{23} = \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) - \cos(\phi)\sin(\psi),$$

$$r_{31} = -\sin(\theta),$$

$$r_{32} = \cos(\theta)\sin(\psi),$$

$$r_{33} = \cos(\theta)\cos(\psi).$$

Ukoliko je ugao θ iz opsega $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dobija se:

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right),$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right).$$

Ako se sada posmatra ugao θ iz opsega $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, dobija se:

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-r_{21}}{-r_{11}}\right),$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-r_{32}}{-r_{33}}\right).$$

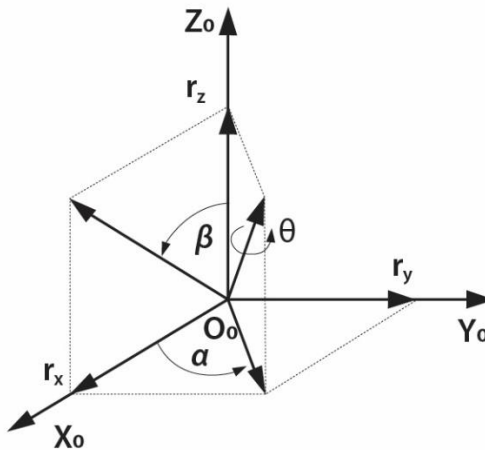
Ako važi da je $\cos(\theta) = 0$, onda je ugao $\theta = \frac{\pi}{2}$ ili $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Zadatak 19

Dokazati da je rotaciona matrica, koja odgovara rotaciji za ugao θ oko proizvoljne ose r data sledećim izrazom:

$$R(\theta, r) = \begin{bmatrix} r_x^2(1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta) & r_x r_y(1 - \cos(\theta)) - r_z \sin(\theta) & r_x r_z(1 - \cos(\theta)) + r_y \sin(\theta) \\ r_x r_y(1 - \cos(\theta)) + r_z \sin(\theta) & r_y^2(1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta) & r_y r_z(1 - \cos(\theta)) - r_x \sin(\theta) \\ r_x r_z(1 - \cos(\theta)) - r_y \sin(\theta) & r_y r_z(1 - \cos(\theta)) + r_x \sin(\theta) & r_z^2(1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Rešenje:



Slika 13 – Rotacija koordinatnog sistema oko proizvoljne ose za ugao θ .

Osu proizvoljno definisanog orta r najpre treba poklopiti sa nekom od koordinatnih osa, zatim je potrebno izvršiti rotaciju za posmatrani ugao θ , i na kraju vratiti osu r u svoj prvobitni položaj. Ukoliko ort r treba poklopiti sa z -osom, potrebno je prvo izvršiti rotaciju oko z -ose za ugao $-\alpha$, zatim je potrebno izvršiti rotaciju oko y -ose za ugao $-\beta$, čime se proizvoljna osa rotacija poklapa sa koordinatnom z -osom. Zatim je potrebno izvršiti rotaciju oko z -ose za posmatrani ugao θ i vratiti proizvoljno definisanu osu u prvobitni položaj.

Ova matrica se dobija kombinacijom sukcesivno navedenih rotacija:

$$\mathbf{R}(\theta, r) = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\theta) \mathbf{R}_y(-\beta) \mathbf{R}_z(-\alpha).$$

Takođe, znamo vrednost matrica elementarnih rotacija $\mathbf{R}_z(\alpha)$ i $\mathbf{R}_y(\beta)$:

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}.$$

Zatim je moguće odrediti pomoćnu matricu rotacije \mathbf{R}_2 :

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} r_{211} & r_{212} & r_{213} \\ r_{221} & r_{222} & r_{223} \\ r_{231} & r_{232} & r_{233} \end{bmatrix},$$

$$r_{211} = \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \sin(\theta),$$

$$r_{212} = -\cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\theta) - \sin(\alpha) \cos(\theta),$$

$$r_{213} = \cos(\alpha) \sin(\beta),$$

$$r_{221} = \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta) + \cos(\alpha) \sin(\theta),$$

$$r_{222} = -\sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\theta) + \cos(\alpha) \cos(\theta),$$

$$r_{223} = \sin(\alpha) \sin(\beta),$$

$$r_{231} = -\sin(\beta) \cos(\theta),$$

$$r_{232} = \sin(\beta) \sin(\theta),$$

$$r_{233} = \cos(\beta).$$

Zatim je moguće odrediti novu pomoćnu matricu rotacije \mathbf{R}_3 :

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_y(-\beta),$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} r_{311} & r_{312} & r_{313} \\ r_{321} & r_{322} & r_{323} \\ r_{331} & r_{332} & r_{333} \end{bmatrix},$$

$$r_{311} = \cos(\alpha) \cos^2(\beta) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\theta) + \cos(\alpha) \sin^2(\beta),$$

$$r_{312} = -\cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\theta) - \sin(\alpha) \cos(\theta),$$

$$r_{3_{13}} = \sin(\beta)(-\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\sin(\theta) + \cos(\alpha)\cos(\beta)),$$

$$r_{3_{21}} = \sin(\alpha)\cos^2(\beta)\cos(\theta) + \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\theta) + \sin(\alpha)\sin^2(\beta),$$

$$r_{3_{22}} = -\sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\theta) + \cos(\alpha)\cos(\theta),$$

$$r_{3_{23}} = \sin(\beta)(-\sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\theta) - \cos(\alpha)\sin(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)),$$

$$r_{3_{31}} = -\sin(\beta)\cos(\beta)\cos(\theta) + \cos(\beta)\sin(\beta),$$

$$r_{3_{32}} = \sin(\beta)\sin(\theta),$$

$$r_{3_{33}} = \sin^2(\beta)\cos(\theta) + \cos^2(\beta).$$

Konačno, moguće je odrediti željenu matricu rotacije:

$$\mathbf{R}(\theta, r) = \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_z(-\alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

Sada je potrebno svaki element ove matrice svesti na oblik dat u postavci zadatka.

$$\sin(\alpha) = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}},$$

$$\sin(\beta) = \frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}, \quad \cos(\beta) = \frac{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}.$$

Izjednačavanjem navedenih izraza sa odgovarajućim izrazima u postavci zadatka, dobija se:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \cos^2(\alpha)(\cos^2(\beta)\cos(\theta) + \sin^2(\alpha) - \cos(\theta)) + \cos(\theta) \\ &= \cos^2(\alpha)\sin^2(\beta)(1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta) \\ &= r_x^2(1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= \sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin^2(\beta)(1 - \cos(\theta)) - \cos(\beta)\sin(\theta) \\ &= r_x r_y(1 - \cos(\theta)) - r_z \sin(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= \cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\beta)(1 - \cos(\theta)) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\theta) \\ &= r_x r_z(1 - \cos(\theta)) + r_y \sin(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{21} &= \sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin^2(\beta)(1 - \cos(\theta)) + \cos(\beta)\sin(\theta) \\ &= r_x r_y(1 - \cos(\theta)) + r_z \sin(\theta), \end{aligned}$$

$$r_{22} = \sin^2(\alpha)\sin^2(\beta)(1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta) = r_y^2(1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta),$$

$$r_{23} = \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta) (1 - \cos(\theta)) - \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\theta) \\ = r_y r_z (1 - \cos(\theta)) - r_x \sin(\theta),$$

$$r_{31} = \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta) (1 - \cos(\theta)) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\theta) \\ = r_x r_z (1 - \cos(\theta)) - r_y \sin(\theta),$$

$$r_{32} = \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta) (1 - \cos(\theta)) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\theta) \\ = r_y r_z (1 - \cos(\theta)) + r_x \sin(\theta),$$

$$r_{33} = \cos(\theta) + \cos^2(\beta)(1 - \cos(\theta)) = r_z^2(1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta).$$

Zadatak 20

Izračunati rezultujuću matricu homogene transformacije H koja predstavlja sledeći skup transformacija nad koordinatnim $O-xyz$ sistemom:

- Rotacija oko z -ose za ugao θ_i ,
- Translacija duž z -ose za d_i ,
- Translacija duž x -ose za a_i ,
- Rotacija oko x -ose za ugao α_i .

Odrediti poziciju i orijentaciju koordinatnih sistema nakon navedenih transformacija?

Rešenje:

$$H_1 = Rot_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = Tran_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = Tran_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_4 = Rot_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukupna matrica transformacije se može izračunati na sledeći način:

$$H = H_1 H_2 H_3 H_4 = Rot_{z,\theta_i} Tran_{z,d_i} Tran_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i},$$

$$H = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

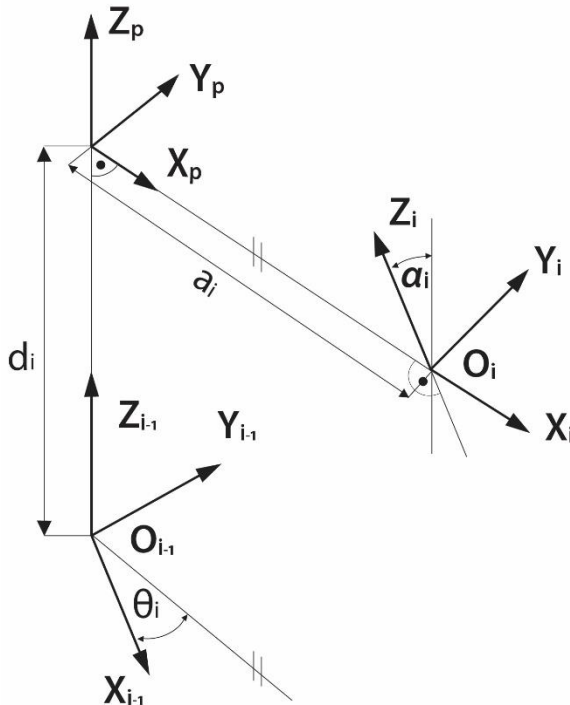
Ova homogena matrica je veoma bitna u robotici zato što predstavlja ukupnu transformaciju definisanu DH notacijom između dva koordinatna sistema.

Pozicija i orijentacija koordinatnog sistema će se promeniti prema Slici 14.

Može se videti na osnovu matrica prikazanih iznad, da matrice homogene transformacije imaju određenu blokovsku strukturu:

$$H_A^B = \begin{bmatrix} R_A^B & d_A^B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gde matrica R_A^B predstavlja matricu rotacije dimenzije 3×3 između dva posmatrana koordinatna sistema, a vektor d_A^B dimenzije 3×1 predstavlja rastojanje koordinatnih početaka ta dva koordinatna sistema. Poslednja vrsta je uvek ista, pri čemu njena prva tri člana predstavljaju vektor perspektive, dok poslednji član predstavlja faktor skaliranja.



Slika 14 – Transformacija koordinatnog sistema $O-xyz$ nakon primene traženih transformacija.

Zadatak 21

Dat je vektor $r = [25 \ 10 \ 20]^T$. Ako je on prvo transliran duž x -ose za 8 jedinica, zatim duž y -ose za 5 jedinica, i na kraju duž z -ose za 0 jedinica, izračunati novi vektor:

- \vec{r}_T ukoliko se translacije vrše oko osa trenutnih koordinatnih sistema dobijenih transformacijama,
- \vec{r}_F ukoliko se translacije vrše oko fiksnih osa inicijalnog koordinatnog sistema.

Rešenje:

a) Translacije se vrše oko osa trenutnih koordinatnih sistema dobijenih transformacijama:

$$\mathbf{H}_T = \mathbf{H}_{x,8}\mathbf{H}_{y,5}\mathbf{H}_{z,0},$$

$$\mathbf{H}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Translacije se vrše oko fiksnih osa inicijalnog koordinatnog sistema, ali zapravo ne postoji translacija duž z -ose, u ovom delu primera je nećemo razmatrati. Vektor je prvo transliran duž x -ose za 8 jedinica: $\mathbf{H}' = \mathbf{H}_{x,8}$.

Kako se vektor translira oko stacionarnih osa za drugu translaciju potrebno je poništiti dejstvo prve translacije, translirati sistem zatim duž y -ose pa vratiti dejstvo prve translacije:

$$\mathbf{H}'' = \mathbf{H}_{x,-8}\mathbf{H}_{y,5}\mathbf{H}_{x,8}.$$

Sada se može odrediti ukupna transformacija kao:

$$\mathbf{H}_F = \mathbf{H}'\mathbf{H}'' = \mathbf{H}_{x,8}\mathbf{H}_{x,-8}\mathbf{H}_{y,5}\mathbf{H}_{x,8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako ne postoji rotacija koordinatnih sistema, dobija se ista matrica homogenih transformacija, bilo da se one vrše oko trenutnih (tekućih) ili fiksnih osa.

U oba slučaja će vektor imati istu vrednost nakon pomenutih transformacija, i to:

$$\vec{r}_T = \vec{r}_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 22

Dat je vektor brzine, predstavljen u odnosu na koordinatni sistem $O_A-x_Ay_Az_A$:

$$\vec{v}_A = [10 \quad 20 \quad 30]^T.$$

Ako znamo matricu homogene transformacije koja preslikava vrednosti iz koordinatnog sistema $O_B-x_By_Bz_B$ u koordinatni sistem $O_A-x_Ay_Az_A$:

$$\mathbf{H}_A^B = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 11 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odrediti vektor brzine \vec{v}_B u koordinatnom sistemu $O_B-x_By_Bz_B$.

Rešenje:

Vektor brzine \vec{v}_A se može predstaviti u koordinatnom sistemu $O_B-x_By_Bz_B$ na sledeći način:

$$\vec{v}_A = \mathbf{R}_A^B \vec{v}_B.$$

odnosno matrica homogene transformacije se može prikazati u sledecem obliku:

$$\mathbf{H}_A^B = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_A^B & \mathbf{d}_A^B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu navedenog:

$$\vec{v}_A = \mathbf{R}_A^B \vec{v}_B \Rightarrow \mathbf{R}_A^{BT} \vec{v}_A = \vec{v}_B,$$

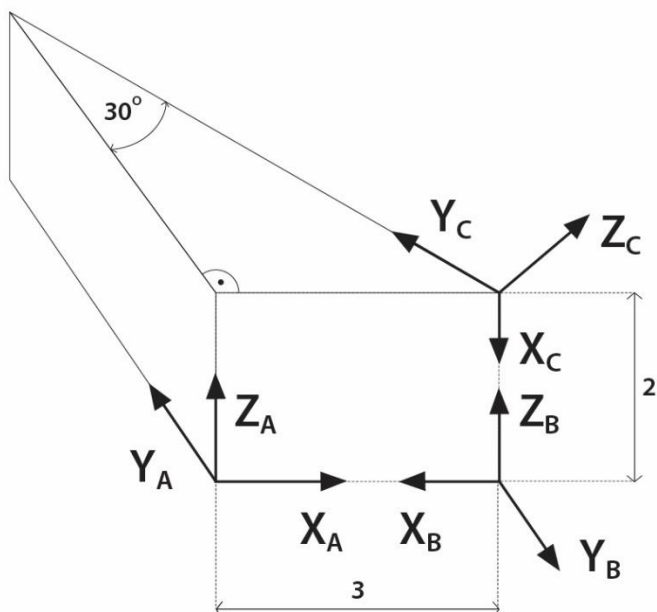
$$\vec{v}_B = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.66 \\ 12.32 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Ovo rešenje se može objasniti time što se vektor brzine neke tačke može predstaviti kao slobodan vektor, odnosno on je određen svojim smerom i

amplitudom. Operator rotacije prikazan iznad ne utiče na promenu amplitude, dok ostvaruje promenu komponenti vektora tako da on bude prikazan pravilno u $O_B-x_By_Bz_B$ koordinatnom sistemu.

Zadatak 23

Na Slici 15 je prikazan relativni odnos između koordinatnih sistema $O_A-x_Ay_Az_A$, $O_B-x_By_Bz_B$ i $O_C-x_Cy_Cz_C$. Naći vrednosti matrica homogenih transformacija H_A^B , H_A^C , H_B^C , i H_C^A .



Slika 15 – Relativni odnos između tri koordinatna sistema.

Rešenje:

Da bi se izračunala matrica homogena transformacije potrebno je utvrditi koje elementarne transformacije su izvršene nad prikazanim koordinatnim sistemima.

$$H_A^B = Tran_{x,3} Rot_{z,180^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(180^\circ) & -\sin(180^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(180^\circ) & \cos(180^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_A^B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_B^C = \text{Tran}_{z,2} \text{Rot}_{z,-150^\circ} \text{Rot}_{y,90^\circ},$$

$$\mathbf{H}_B^C = \begin{bmatrix} \cos(-150^\circ) & -\sin(-150^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(-150^\circ) & \cos(-150^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_B^C = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0 & -0.866 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da bi se izračunala matrica homogene transformacije \mathbf{H}_A^C , moguće je iskoristiti prethodno izračunate matrice:

$$\mathbf{H}_A^C = \mathbf{H}_A^B \mathbf{H}_B^C,$$

$$\mathbf{H}_A^C = \mathbf{H}_A^B \mathbf{H}_B^C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0 & -0.866 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_A^C = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 & 3 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na kraju, poslednja matrica homogene transformacije se izračunava kao:

$$\mathbf{H}_C^A = \text{Tran}_{x,2} \text{Rot}_{x,30^\circ} \text{Tran}_{z,-3} \text{Rot}_{y,-90^\circ},$$

$$\mathbf{H}_C^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_C^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -0.5 & 0.866 & 0 & 1.5 \\ 0.866 & 0.5 & 0 & -2.598 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

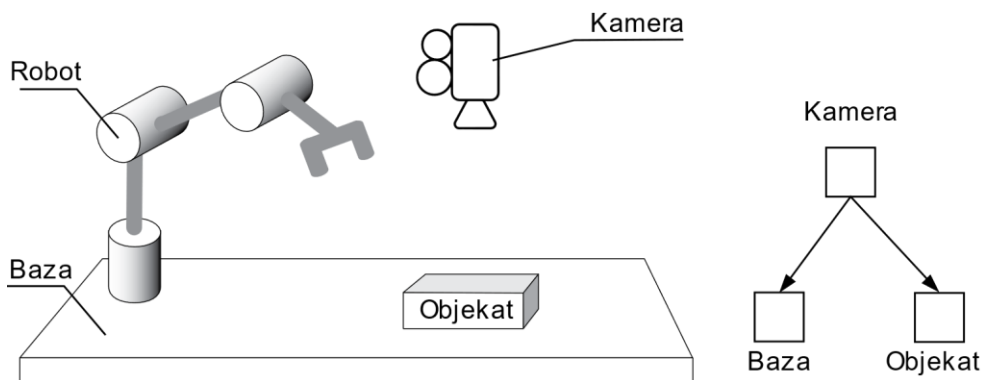
Zadatak 24

Na Slici 16 je prikazana robotska ćelija sa sistemom vizije. Zadavanje kretanja robota se vrši na osnovu informacija koje robot dobije od sistema vizije. Potrebno je da robot svoj završni uređaj postavi u horizontalni položaj kako bi ostvario ispravno hvatanje predmeta. Date su dve matrice homogene transformacije:

$$H_C^O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gde su C, O i B koordinatni sistemi kamere, objekta i baze robota, respektivno. Odrediti:

- Poziciju centra objekat u odnosu na koordinatni sistem baze robota,
- Matricu orijentacije ako robot treba da podigne objekat „odozgo“.



Slika 16 – Robotska ćelija sa sistemom vizije.

Rešenje:

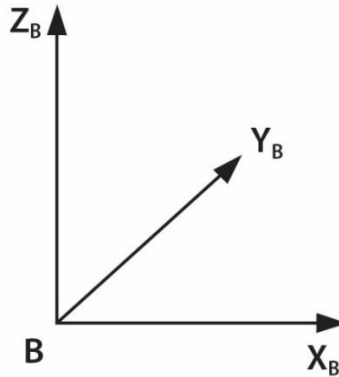
Za početak, moguće je analizirati date matrice homogene transformacije:

$$H_C^O = \begin{bmatrix} x_O & y_O & z_O \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_C \\ y_C \\ z_C' \end{matrix}$$

$$\mathbf{H}_C^B = \begin{matrix} x_B & y_B & z_B \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{matrix} \end{matrix}$$

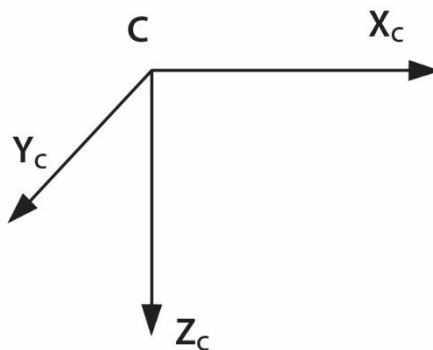
Na osnovu transformacionih matrica može se zaključiti da je koordinatni početak O_O od koordinatnog početka O_C udaljen za $[1 \ 10 \ 9]^T$, dok je koordinatni početak O_B udaljen od koordinatnog početka O_C za $[-10 \ 20 \ 10]^T$.

Ako se pretpostavi da je koordinatni sistem baze postavljen tako da mu je koordinatni sistem u bazi robota, a ose x i y paralelne sa ivicama stola, onda je on orijentisan kao na Slici 17:



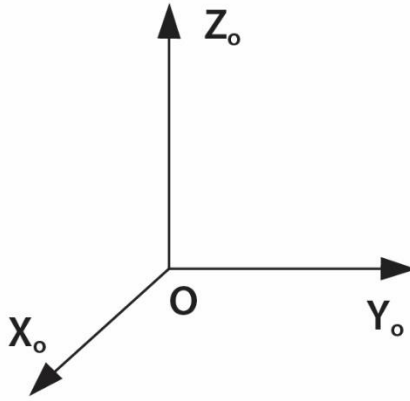
Slika 17 – Orijehtacija koordinatnog sistema sa koordinatnim početkom O_B .

Zatim, posmatranjem matrice H_C^B se može zaključiti da su ose x_B i x_C isto orijentisane, dok su ose y_B i y_C , kao i ose z_B i z_C suprotno orijentisane. Konačno, se dobija da je orijentacija koordinatnog sistema C kao na Slici 18:



Slika 18 – Orijehtacija koordinatnog sistema sa koordinatnim početkom O_C .

Na kraju, posmatranjem matrice H_C^O , zaključuje se da su ose x_O i y_C isto orijentisane, kao i ose y_O i x_C , dok su ose z_O i z_C suprotno orijentisane. Na osnovu ovih zapažanja se dobija orijentacija koordinatnog sistema O kao na Slici 19:



Slika 19 – Orijehtacija koordinatnog sistema sa koordinatnim početkom O_o .

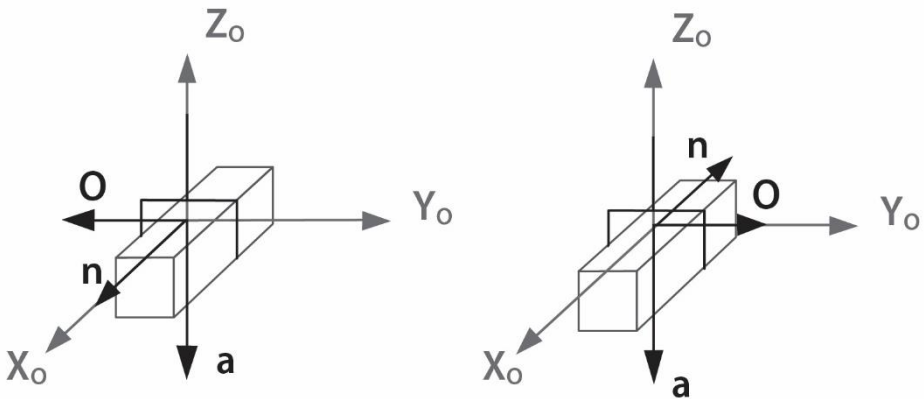
- a) Da bi se odredila pozicija centra objekta u odnosu na bazni koordinatni sistem, potrebno je naći matricu homogene transformacije H_B^O :

$$H_B^O = H_B^C H_C^O = (H_C^B)^{-1} H_C^O,$$

$$H_B^O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_B^O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- b) Ukoliko je potrebno da robot podigne predmet „odozgo”, postoje dva načina za izvršenje ovog zadatka kao što je prikazano na Slici 20. U oba slučaja koordinatni sistem objekta je fiksiran.



Slika 20 – Orijentacija hvataljke prilikom hvatanja predmeta.

Posmatrajući slike može se zaključiti da su rotacione matrice definisane na sledeći način:

$$1) R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ o \\ a \end{matrix}, \quad 2) R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ o \\ a \end{matrix}.$$

Zadatak 25

Naći članove matrice homogene transformacije H koji nedostaju. Nacrtati koordinatni sistem pre i posle transformacije.

$$H = \begin{bmatrix} 0.707 & ? & 0 & 2 \\ ? & 0 & 1 & 4 \\ ? & -0.707 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje:

Izgled matrice homogene transformacije se može rekonstruisati tako da postigne očekivanu formu.

Ukoliko je izvršena samo jedna rotacija nad posmatranim koordinatnim sistemom, element matrice homogene transformacije h_{21} mora biti jednak 0. Analizom matrice rotacije se iz matrice homogene transformacije može zaključiti da važi:

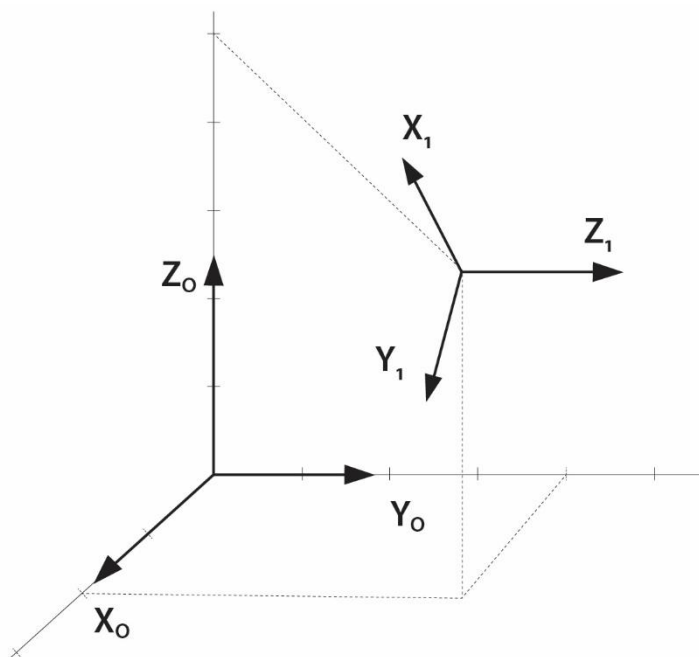
$$h_{11} = \sin(\pi/4), \quad h_{23} = -\sin(\pi/4),$$

odakle može zaključiti da su i ostala dva elementa:

$$h_{12} = \cos(\pi/4) = 0.707, \quad h_{31} = \cos(\pi/4) = 0.707.$$

Izgled kompletne matrice H je:

$$H = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0.707 & -0.707 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix}$$



Slika 21 – Relativni odnos dva koordinatna sistema.

Napomena: Na ovako postavljenu matricu homogene transformacije moguće je naći više rešenja koja zadovoljavaju uslove zadatka.

Zadatak 26

Na slici 22 je prikazana robotska ćelija za paletiranje. Odrediti matrice homogenih transformacija između:

- koordinatnog sistema kutije u odnosu na koordinatni sistem palete H_3^1 ,
- koordinatnog sistema kutije u odnosu na koordinatni sistem kamere H_2^1 ,
- koordinatnog sistema robota u odnosu na koordinatni sistem kutije H_1^0 .

Pokazati da važi $H_2^0 = H_2^1 H_1^0$.

b) Matrica homogene transformacije koordinatnog sistema kutije u odnosu na koordinatni sistem kamere je data sa H_2^1 .

Skup transformacija koji je potrebno primeniti se može odrediti na osnovu slike:

$$H_2^1 = Tran_{x,2} Tran_{z,-1.5} Rot_{z,180}^\circ,$$

$$H_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Matrica homogene transformacije koordinatnog sistema robota u odnosu na koordinatni sistem kutije je data sa H_1^0 .

Skup transformacija koji je potrebno primeniti se može odrediti na osnovu slike:

$$H_1^0 = Tran_{z,-1.5} Tran_{x,1.5} Rot_{z,180}^\circ,$$

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Konačno, potrebno je pokazati da važi:

$$H_2^0 = H_2^1 H_1^0,$$

$$H_2^0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukoliko se primene potrebne transformacije između koordinatnog sistema baze robota i kamere, dobija se:

$$H_2^0 = Tran_{z,3} Tran_{x,-1} Rot_{x,180}^\circ,$$

$$H_2^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ovim je dokazano da važi da je $H_2^0 = H_2^1 H_1^0$.

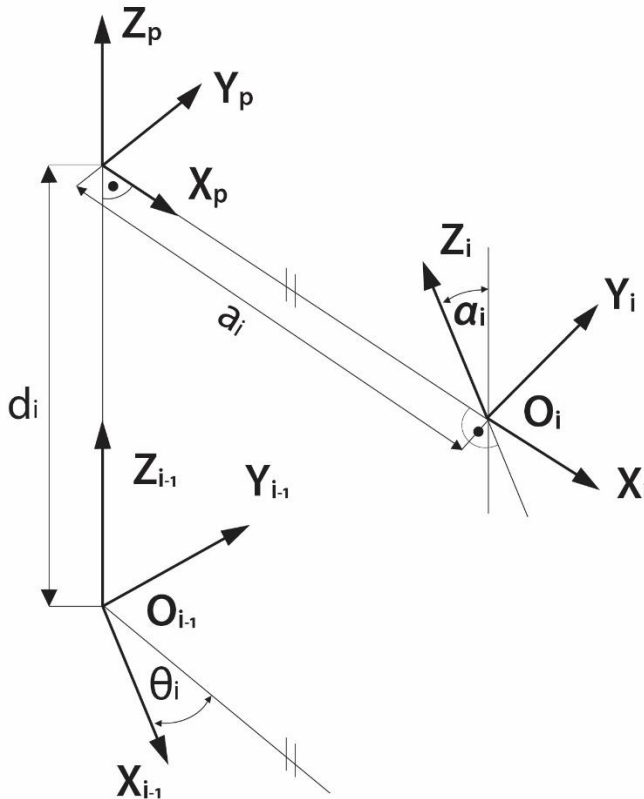
3

Direktna kinematika – DH notacija i kinematika industrijskih robota

Iako se geometrija robota može opisati na različite načine, za ovu namenu se uobičajeno koristi konvencija koju su uveli Denavit i Hartenberg (DH notacija). Kroz rešavanje zadataka u ovom poglavlju, čitalac će se upoznati sa ovim pristupom definisanja geometrije tipičnih robotskih konfiguracija koje se koriste u industriji, ali i razumeti zašto je ova konvencija pogodna za opisivanje kinematike robota.

Zadatak 27

Ako su data dva proizvoljna desna Dekartova koordinatna sistema sa koordinatnim počecima O_{i-1} i O_i , kao na Slici 23, takva da x -osa koordinatnog sistema sa koordinatnim počeckom O_i , seče i normalna je na z -osu koordinatnog sistema sa koordinatnim počeckom O_{i-1} . Napisati matricu homogene transformacije između ova dva koordinatna sistema sa Slike 23.



Slika 23 – Relativni položaj dva koordinatna sistema kod kojih je osa x_i normalna i seče osu z_{i-1} .

Rešenje:

Da bi se koordinatni sistem sa koordinatnim počeckom O_{i-1} poklopio sa koordinatnim sistemom sa koordinatnim počeckom O_i , potrebno je izvesti niz transformacija. Radi lakšeg nalaženja pravog skupa transformacija, postavljen je pomoćni koordinatni sistem na mestu gde x -osa koordinatnog sistema O_{i-1} seče z -osu koordinatnog sistema O_{i-1} .

Na početku je potrebno da se odredi transformacija od koordinatnog sistema $O_{i-1}-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ do pomoćnog koordinatnog sistema. Ovo se postiže najpre rotacijom za ugao θ_i oko z_{i-1} -ose, a zatim translacijom za d_i duž z_{i-1} -ose.

$$\mathbf{H}_1 = Rot_{z_{i-1}, \theta_i} Tran_{z_{i-1}, d_i} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nakon toga, potrebno je odrediti matricu homogene transformacije od pomoćnog koordinatnog sistema do koordinatnog sistema $O_i-x_iy_iz_i$. Ovo se postiže najpre translacijom za a_i duž x -ose pomoćnog koordinatnog sistema, a zatim rotacijom za ugao α_i oko tekuće x -ose pomoćnog koordinatnog sistema.

$$\mathbf{H}_2 = Tran_{x_p, a_i} Rot_{x_p, \alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

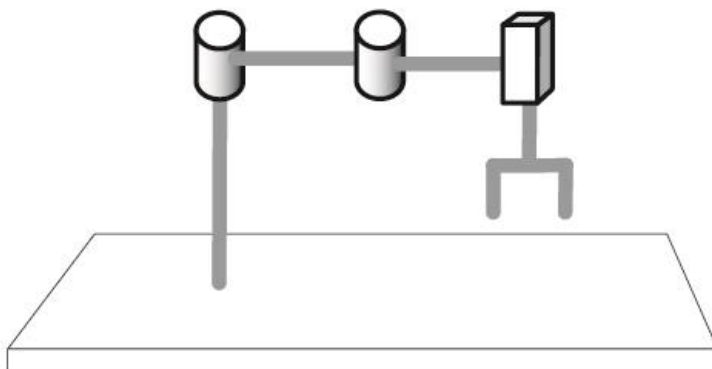
$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Celokupna matrica homogene transformacije se dobija spajanjem prethodne dve transformacije:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\alpha_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 28

Označiti ose koordinatnih sistema za opisivanje kinematike robota sa Slike 24 u skladu sa DH notacijom. Ukoliko je kod izbora pojedinih koordinatnih sistema moguće izabrati više rešenja, obrazložiti izbor.



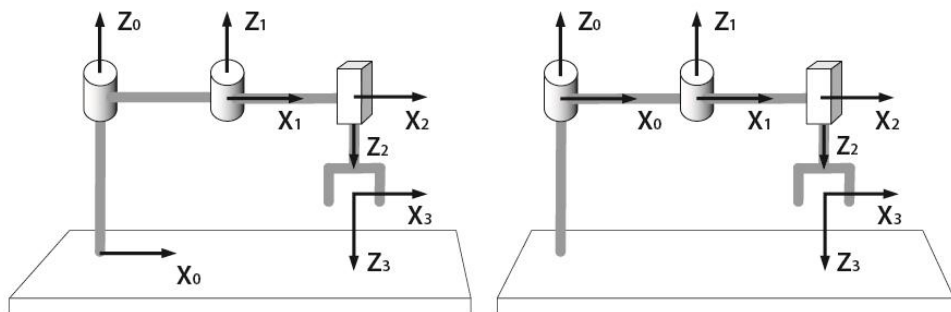
Slika 24 – Minimalna konfiguracija SCARA robota

Rešenje:

Procedura za pravilno pozicioniranje koordinatnih sistema prema DH notaciji sastoji se iz nekoliko koraka. Pre svega, potrebno je identifikovati ose svih zglobova, kao i njihov tip (rotacioni ili translatorni). Kada su ose rotacije, odnosno translacije locirane, ose z_0, z_1, \dots, z_{n-1} treba postaviti tako da se poklapaju sa njima. Bazni koordinatni sistem postaviti bilo gde na osi prvog zgloba z_0 . Nakon postavljanja osa svih zglobova robota – z_0 do z_{n-1} , postavljaju se x -ose. Osa x_i se postavlja duž zajedničke normale osa z_i i z_{i-1} . Ukoliko se ose z_i i z_{i-1} seku, osa x_i se postavlja u pravcu normale na ravan određenu osama z_i i z_{i-1} . Ukoliko su ose z_i i z_{i-1} paralelne, osa x_i se može postaviti na bilo koju od beskonačno mnogo zajedničkih normala osa z_i i z_{i-1} . U ovom slučaju, najčešće se bira osa x_i tako da prolazi kroz centar $i + 1$ -og zgloba. Na taj način su određene z -ose i x -ose, a samim tim i koordinatni počeci O_i u preseku osa z_i i x_i . Osu y_i potrebno je postaviti u koordinatnom početku O_i tako da ose x_i , y_i i z_i formiraju desni Dekartov koordinatni sistem. Na kraju, koordinatni sistem završnog uređaja se po pravilu postavlja tako da osa z_n bude paralelna sa osom z_{n-1} , a osa x_n normalna na osu z_{n-1} .

Ukoliko se ova pravila primene na konfiguraciju prikazanoj na slici, moguće je na dva načina postaviti koordinatne sisteme. U prvom slučaju je bazni koordinatni

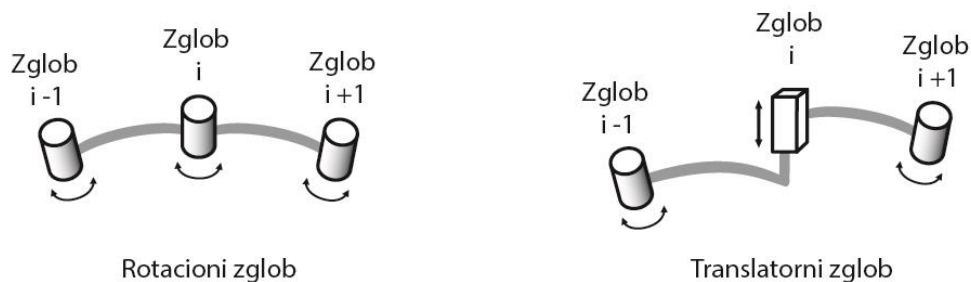
sistem postavljen u bazi robota, dok se u drugom slučaju bazni koordinatni sistem nalazi u centru prvog zgloba. Mogućnost za različito rešenje potiče od toga što je bazni koordinatni sistem moguće postaviti bilo gde na z_0 osi.



Slika 25 – SCARA minimalna konfiguracija sa ucrtanim koordinatnim sistemima prema DH notaciji.

Zadatak 29

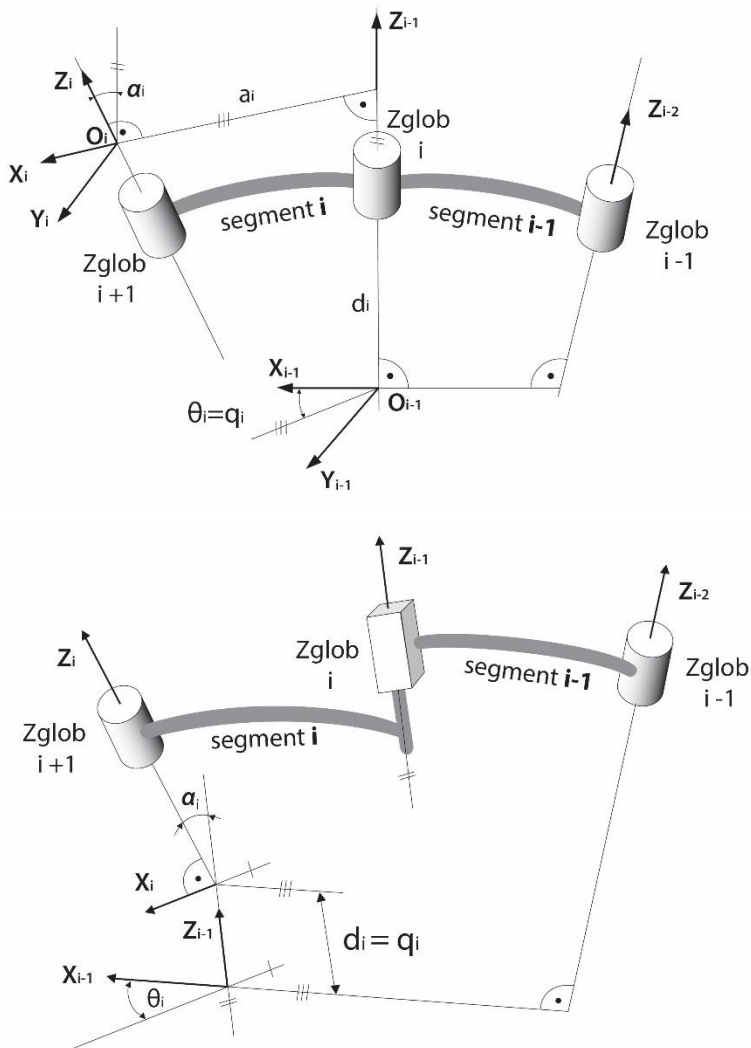
Objasniti značenje DH parametara između dva koordinatna sistema koji se nalaze na susednim segmentima robotskog mehanizma sa Slike 26.



Slika 26 – Primer dva segmenta robota povezanih rotacionim (levo) i translatorskim (desno) zglobovom.

Rešenje:

Da bi se međusobni položaj dva koordinatna sistema, koji pripadaju susednim segmentima robotskog manipulatora, mogao opisati pomoću transformacije iz Zadatka 20, potrebno je obezbediti da dati koordinatni sistemi zadovoljavaju dva uslova: $x_i \perp z_{i-1}$ i x_i seče z_{i-1} .



Slika 27 – Primer rotacionog (gore) i translatornog (dole) zgloba sa ucrtanim koordinatnim sistemima i obeleženim DH parametrima.

Potrebno je razmatrati dva slučaja, ukoliko je i -ti zglob rotacioni ili translatorni.

a) Rotacioni zglob (slika gore).

Ose rotacije zglobova $i + 1$, i i $i - 1$ su označene sa z_i , z_{i-1} i z_{i-2} , a pri tome se mimoilaze u prostoru. Duž zajedničke normale osa z_i i z_{i-1} se postavlja x_i -osa. Rastojanje između osa z_{i-1} i z_i duž zajedničke normale x_i je određeno sa a_i . Osu y_i biramo tako da sa osama x_i i z_i obrazuje desni koordinatni sistem. Tada koordinatni sistemi O_{i-1} i O_i predstavljaju dva koordinatna sistema čiji je međusobni položaj moguće predstaviti pomoću DH notacije. Kako se može

zaključiti iz rešenja Zadatka 20, položaj između dva koordinatna sistema je određen pomoću 4 parametra θ_i , d_i , a_i i α_i , u skladu sa DH notacijom:

- θ_i je parametar koji određuje ugao od ose x_{i-1} do ose x_i meren u ravni normalnoj na osu z_{i-1} ,
- d_i je parametar koji određuje rastojanje od koordinatnog početka O_{i-1} do mesta preseka ose x_i i ose z_{i-1} mereno duž z_{i-1} ,
- a_i je parametar koji određuje rastojanje od ose z_{i-1} do ose z_i , mereno duž ose x_i ,
- α_i je parametar koji određuje ugao između ose z_{i-1} do ose z_i , meren u ravni normalnoj na osu x_i .

U slučaju rotacionog zgloba i , parametar θ_i predstavlja vrednost unutrašnje koordinate q_i , dok su ostali parametri DH notacije konstantni.

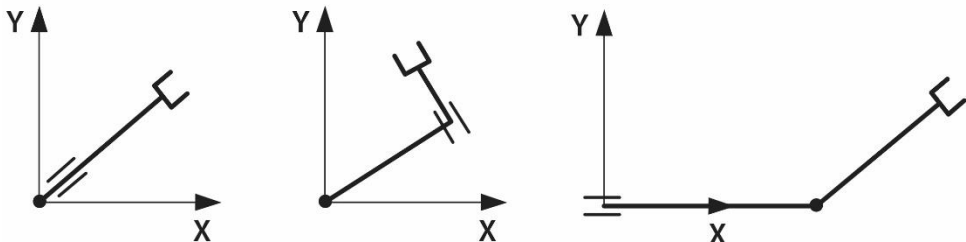
b) Translatorski zglob (slika dole).

DH parametre θ_i , d_i , a_i i α_i je moguće odrediti na sličan način i u slučaju translatorskog zgloba. Položaj samog translatorskog zgloba nije toliko bitan jer će on na isti način pomerati ostatak sistema koji se nalazi posle njega u kinematičkom lancu. Koordinatni sistemi se postavljaju u pravcu izduživanja translatorskog zgloba. Osa x_i se postavlja tako da bude u istom ili suprotnom smeru u odnosu na vektor $\vec{z}_{i-1} \times \vec{z}_i$ (normalna na ravan koju ove dve ose obrazuju).

U ovom slučaju, parametar d_i odgovara vrednosti unutrašnje koordinate zgloba i , dok su ostali parametri DH notacije konstantne vrednosti.

Zadatak 30

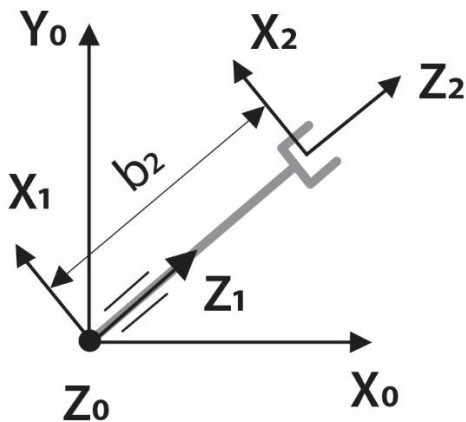
Za robotske manipulatore prikazane na Slici 28 odrediti tablicu DH parametara. Rotacioni zglobovi su označeni krugovima, a translatorski šinama.



Slika 28 – Manipulatori sa rotacionim i translatorskim zglobovima realizovani na različite načine.

Rešenje:

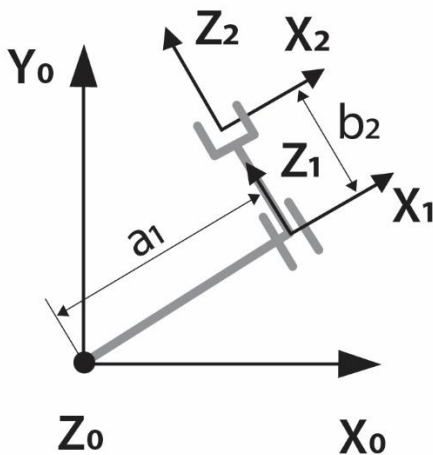
a)



Slika 29 – Robot RT konfiguracije sa obeleženim koordinatnim sistemima po DH notaciji.

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	$\pi/2$
2	0	$q_2 + b_2$	0	0

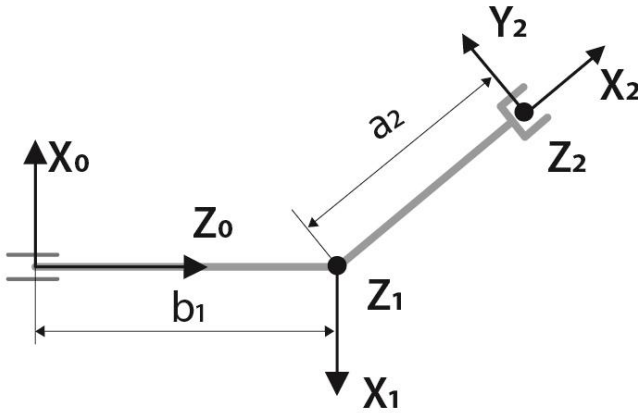
b)



Slika 30 – Robot RT konfiguracije sa obeleženim koordinatnim sistemima po DH notaciji.

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	a_1	$-\pi/2$
2	0	$q_2 + b_2$	0	0

c)

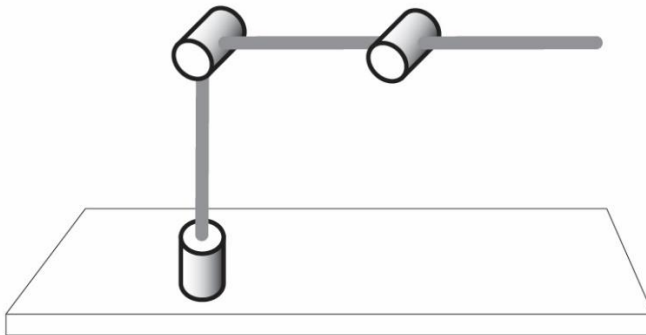


Slika 31 – Robot TR konfiguracije sa obeleženim koordinatnim sistemima po DH notaciji.

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$-\pi/2$	$q_1 + b_1$	0	$\pi/2$
2	q_2	0	a_2	0

Zadatak 31

Na Slici 32 je prikazana robotska ruka sa tri stepena slobode antropomorfne konfiguracije. Ose rotacija prva dva zgloba su međusobno normalne, dok su ose rotacija drugog i trećeg zgloba međusobno paralelne. Usvojiti koordinatne sisteme segmenata u skladu sa DH notacijom i napisati tabelu DH parametara. Napisati matricu homogene transformacije između koordinatnog sistema osnove i završnog uređaja ovog robota.

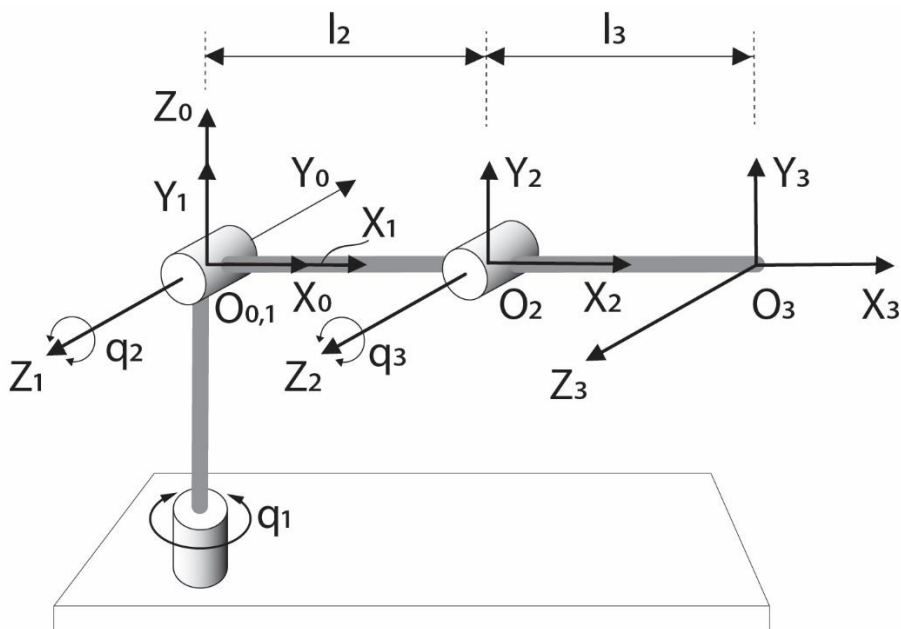


Slika 32 – Antropomorfna minimalna konfiguracija

Rešenje:

Na početku je korisno primeniti da prikazana konfiguracija predstavlja antropomorfnu minimalnu konfiguraciju koja predstavlja osnovnu minimalnu konfiguraciju za veliku većinu industrijskih robota.

Da bi se DH parametri ispravno odredili, potrebno je postaviti koordinatne sisteme na odgovarajući način. Prvo je potrebno postaviti z ose tako da se poklapaju sa osama rotacije svih zglobova. Osu x_0 možemo postaviti proizvoljno na z_0 -osi.



Slika 33 – Antropomorfna minimalna konfiguracija sa ucrtanim koordinatnim sistemima prema DH notaciji.

Zatim, x_1 -osu treba postaviti u tački preseka osa z_i i z_{i-1} tako da bude normalna na ravan koju one formiraju. Smer se može izabrati proizvoljno, pa je smer usvojen tako da se poklapa sa x_0 -osom. Sledeću, x_2 -osu treba postaviti tako da prolazi kroz O_1 (z_1 i z_2 su paralelne). Na ovaj način parametar d_i ima vrednost 0, a i parametar α_i je jednak 0 zato što su z_1 i z_2 paralelne.

Za kraj je potrebno postaviti koordinatni sistem završnog uređaja. Osa z_3 se postavlja da bude paralelna sa z_2 -osom, dok se x_3 -osa postavlja da bude normalna na z_2 -osu.

Tabela DH parametara:

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	$\pi/2$
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

Ukupna matrica homogene transformacije od baze do završnog uređaja robota data je sa:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0^1 \mathbf{H}_1^2 \mathbf{H}_2^3,$$

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1)\cos(\alpha_1) & \sin(\theta_1)\sin(\alpha_1) & a_1\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1)\cos(\alpha_1) & -\cos(\theta_1)\sin(\alpha_1) & a_1\sin(\theta_1) \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2)\cos(\alpha_2) & \sin(\theta_2)\sin(\alpha_2) & a_2\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2)\cos(\alpha_2) & -\cos(\theta_2)\sin(\alpha_2) & a_2\sin(\theta_2) \\ 0 & \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2\cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2\sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3)\cos(\alpha_3) & \sin(\theta_3)\sin(\alpha_3) & a_3\cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3)\cos(\alpha_3) & -\cos(\theta_3)\sin(\alpha_3) & a_3\sin(\theta_3) \\ 0 & \sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & l_3\cos(q_3) \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & l_3\sin(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu prethodnih matrica homogenih transformacija, moguće je izračunati ukupnu matricu homogene transformacije:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & 0 & h_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gde su elementi matrice \mathbf{H} :

$$h_{11} = \cos(q_2 + q_3)\cos(q_1),$$

$$h_{12} = -\sin(q_2 + q_3)\cos(q_1),$$

$$h_{13} = \sin(q_1),$$

$$h_{14} = \cos(q_1)(l_3\cos(q_2 + q_3) + l_2\cos(q_2)),$$

$$h_{21} = \cos(q_2 + q_3)\sin(q_1),$$

$$h_{22} = -\sin(q_2 + q_3)\sin(q_1),$$

$$h_{23} = -\cos(q_1),$$

$$h_{24} = \sin(q_1)(l_3\cos(q_2 + q_3) + l_2\cos(q_2)),$$

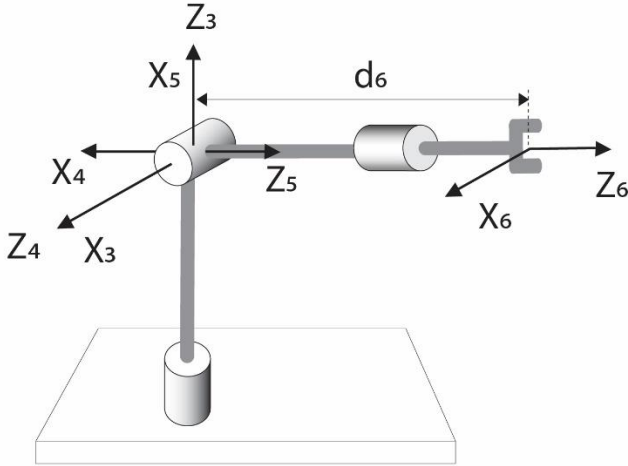
$$h_{31} = \sin(q_2 + q_3),$$

$$h_{32} = \cos(q_2 + q_3),$$

$$h_{34} = l_3\sin(q_2 + q_3) + l_2\sin(q_2).$$

Zadatak 32

Na Slici 34 je prikazan sferni zglob. Zglobovi su numerisani od 4 pa na dalje, jer se ovakva struktura uglavnom montira nakon mehanizma neke od minimalnih konfiguracija koje imaju tri stepena slobode. Odrediti DH parametre, kao i ukupnu matricu homogene transformacije od zgloba 4 do hvataljke.



Slika 34 – Funkcionalna šema sfernog zgloba.

Rešenje:

Kao i u prethodnim zadacima, neophodno je na početku postaviti koordinatne sisteme na odgovarajući način. Postavljaju se z -ose (z_3 , z_4 i z_5) tako da se poklapaju sa osama rotacije zglobova 4, 5 i 6. Prvu x -osu postavljamo tako da se nalazi na prvom z -osi ali u centru drugog zgloba. Drugu i treću x -osu (x_4 i x_5) potrebno je postaviti tako da budu normalne na ravan koju obrazuju prva i druga z -osa (z_3 i z_4), odnosno ose z_4 i z_5 . Konačno, koordinatni sistem hvataljke potrebno je postaviti kao i u prethodnom zadatku. Osa z se usvaja da bude paralelna sa prethodnom z -osom, dok je potrebno da x -osa hvataljke bude normalna na prethodnu z -osu.

Na osnovu toga se mogu odrediti DH parametri:

	θ_i	d_i	a_i	α_i
4	q_4	0	0	$-\pi/2$
5	q_5	0	0	$\pi/2$
6	q_6	d_6	0	0

Ukupna matrica homogene transformacije se može izračunati kao:

$$H = H_3^4 H_4^5 H_5^6,$$

$$H_3^4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & 0 & -\sin(q_4) & 0 \\ \sin(q_4) & 0 & \cos(q_4) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_4^5 = \begin{bmatrix} \cos(q_5) & 0 & \sin(q_5) & 0 \\ \sin(q_5) & 0 & -\cos(q_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_5^6 = \begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gde su elementi matrice \mathbf{H} :

$$h_{11} = \cos(q_4) \cos(q_5) \cos(q_6) - \sin(q_4) \sin(q_6),$$

$$h_{12} = -\cos(q_6) \sin(q_4) - \cos(q_4) \cos(q_5) \sin(q_6),$$

$$h_{13} = \cos(q_4) \sin(q_5),$$

$$h_{14} = d_6 \cos(q_4) \sin(q_5),$$

$$h_{21} = \cos(q_4) \sin(q_6) + \cos(q_5) \cos(q_6) \sin(q_4),$$

$$h_{22} = \cos(q_4) \cos(q_6) - \cos(q_5) \sin(q_4) \sin(q_6),$$

$$h_{23} = \sin(q_4) \sin(q_5),$$

$$h_{24} = d_6 \sin(q_4) \sin(q_5),$$

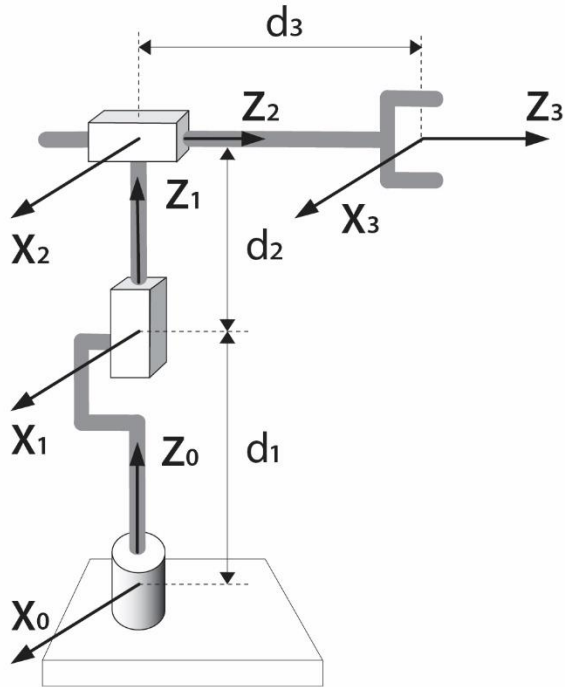
$$h_{31} = -\cos(q_6) \sin(q_5),$$

$$h_{32} = \sin(q_5) \sin(q_6),$$

$$h_{33} = \cos(q_5), \quad h_{34} = d_6 \cos(q_5).$$

Zadatak 33

Naći jednačine direktne kinematike koje opisuju poziciju hvataljke robota u odnosu na koordinatni sistem osnove robota za cilindričnu konfiguraciju sa Slike 35.



Slika 35 – Funkcionalna šema cilindričnog robota sa ucrtanim koordinatnim sistemima po DH notaciji.

Rešenje:

Najpre je potrebno postaviti koordinatne sisteme na odgovarajuće pozicije za određivanje DH parametara.

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	0	0
2	0	$q_2 + d_2$	0	$-\pi/2$
3	0	$q_3 + d_3$	0	0

Na osnovu ove tablice DH parametara izračunavamo matricu homogene transformacije od baze robota do hvataljke robota:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0^1 \mathbf{H}_1^2 \mathbf{H}_2^3,$$

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\sin(q_1) & -(q_3 + d_3) \sin(q_1) \\ \sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & (q_3 + d_3) \cos(q_1) \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz homogene matrice transformacije se može zaključiti kako izgledaju jednačine direktne kinematike:

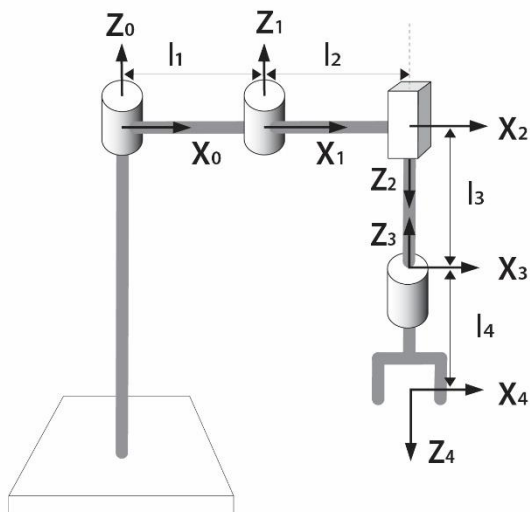
$$x = -(q_3 + d_3) \sin(q_1),$$

$$y = (q_3 + d_3) \cos(q_1),$$

$$z = d_1 + d_2 + q_2.$$

Zadatak 34

Naći jednačine direktne kinematike koje opisuju poziciju hvataljke robota u odnosu na koordinatni sistem osnove robota za SCARA robota sa Slike 36.



Slika 36. – Funkcionalna šema SCARA robota sa ucrtanim koordinatnim sistemima prema DH notaciji.

Rešenje:

Postupak za određivanje jednačine direktne kinematike je identičan kao i u prethodnom zadatku.

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	l_1	0
2	q_2	0	l_2	π
3	0	$q_3 + l_3$	0	$-\pi$
4	q_4	$-l_4$	0	π

Pojedinačne matrice homogenih transformacija su definisane na sledeći način:

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & \sin(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & -\cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & q_3 + l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & \sin(q_4) & 0 & 0 \\ \sin(q_4) & -\cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & 0 & h_{24} \\ 0 & 0 & -1 & -l_3 - l_4 - q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gde su elementi matrice \mathbf{H} :

$$h_{11} = \cos(q_1 + q_2 + q_4), \quad h_{12} = \sin(q_1 + q_2 + q_4),$$

$$h_{14} = l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos(q_1),$$

$$h_{21} = \sin(q_1 + q_2 + q_4),$$

$$h_{22} = -\cos(q_1 + q_2 + q_4),$$

$$h_{24} = l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_1 \sin(q_1),$$

$$h_{34} = -l_3 - l_4 - q_3.$$

Zadatak 35

Na slici iz Zadatka 24, prikazana je robotska ćelija sa sistemom vizije. Ukoliko je robot SCARA konfiguracije kao iz prethodnog zadatka, i ako važe sve relacije iz Zadatka 24, odrediti vrednosti u zglobovima SCARA konfiguracije (q_1, q_2, q_3) potrebne da robot dođe 15cm iznad objekta. Dužine segmenata: $l_0 = 50\text{cm}$, $l_1 = l_2 = 30\text{cm}$, $l_3 = l_4 = 10\text{cm}$. Prikazana konfiguracija na Slici 16 se nalazi u poziciji tako da je $(q_1, q_2, q_3) = (0,0,0)$ rad.

Rešenje:

U Zadatku 24 izračunat je položaj objekta u odnosu na bazu robota, koji je određen vektorom $[11 \ 10 \ 1]^T$. Pošto se u zadatku zahteva da se robot pozicionira 15cm iznad objekta, zahtevani položaj je tada $[11 \ 10 \ 16]^T$.

Iz Zadatka 34 se može zaključiti kakva je relacija između pozicije završnog uređaja i unutrašnjih koordinata.

$$x = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2),$$

$$y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2),$$

$$z = l_0 - (l_4 + l_3 + d_3).$$

Ako se u prikazane jednakosti uvrste brojne vrednosti za ovaj zadatak dobija se:

$$11 = 30 \cos(q_1) + 30 \cos(q_1 + q_2),$$

$$10 = 30 \sin(q_1) + 30 \sin(q_1 + q_2),$$

$$16 = 50 - (10 + 10 + d_3).$$

Iz poslednje jednakosti se može dobiti vrednost treće unutrašnje koordinate:

$$d_3 = 14.$$

Ako se prve dve jednakosti kvadriraju i saberu, dobija se:

$$121 = 900\cos^2(q_1) + 1800 \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) + 900\cos^2(q_1 + q_2),$$

$$100 = 900\sin^2(q_1) + 1800 \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) + 900\sin^2(q_1 + q_2),$$

$$221 = 900 + 1800 \cos(q_2) + 900.$$

Iz navedenih jednakosti se dobija vrednost kosinusa ugla q_2 :

$$\cos(q_2) = -0.8772.$$

Da bi se izračunala vrednost ugla q_2 , potrebno je videti na koji način se i sinus ugla menja kako bi se obuhvatile sve moguće vrednosti:

$$\sin(q_2) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(q_2)}.$$

Odakle se sada dobija:

$$q_2 = \text{atan2}(\sin(q_2), \cos(q_2)), \quad q_2 = \pm 28.7^\circ.$$

Ukoliko se sada uvrsti dobijena vrednost za q_2 u prvu jednakost, može se izračunati i vrednost pozicije prvog zgloba q_1 :

$$10 = 30 \sin(q_1) + 30 \sin(\pm 28.7^\circ),$$

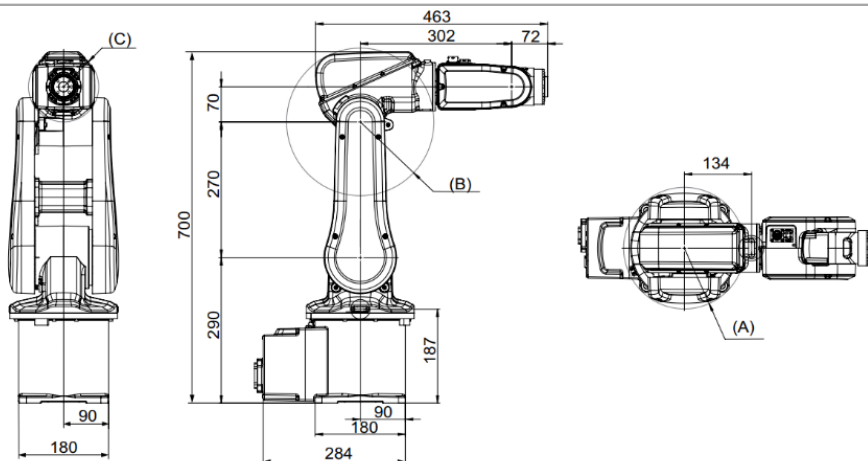
$$\sin(q_1) = \frac{10 \pm 14.4038}{30},$$

$$\sin(q_1)_1 = 0.8135, \quad \sin(q_1)_2 = -0.1468,$$

$$q_{1_1} = 54.4393^\circ, \quad q_{1_2} = -8.4415^\circ.$$

Zadatak 36

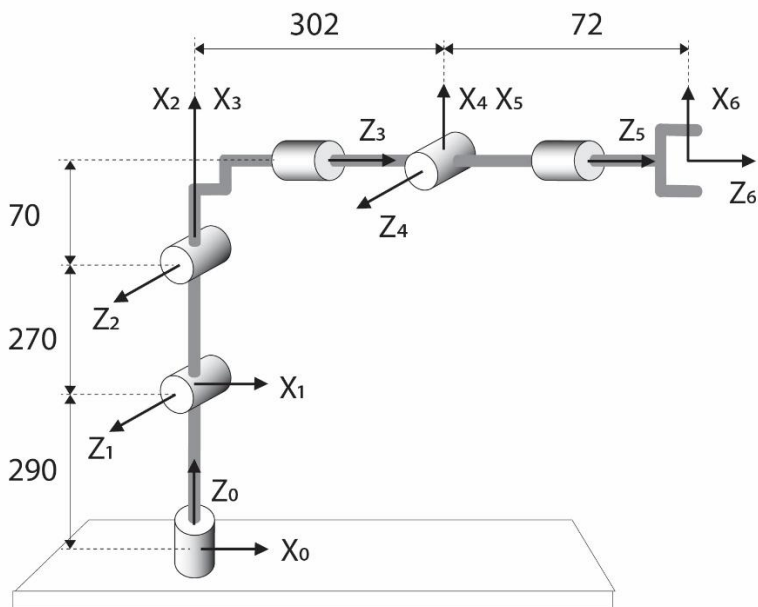
Za industrijskog robota ABB IRB 120 prikazanog na Slici 37, a koji predstavlja tipičnu antropomorfnu konfiguraciju industrijskog robota sa 6 stepeni slobode, odrediti DH parametre i izračunati na koji način vrednosti unutrašnjih koordinata utiču na poziciju završnog uređaja. Za vrednosti unutrašnjih zglobova $q_1 = 0$ rad, $q_2 = \pi/4$ rad, $q_3 = \pi/3$ rad, $q_4 = 0$ rad, $q_5 = \pi/2$ rad i $q_6 = -\pi/6$ rad odrediti poziciju i orijentaciju završnog uređaja.



Slika 37 – Skica ABB IRB 120 robota sa ucrtanim dimenzijama (preuzeto sa: <https://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots/irb-120>).

Rešenje:

Sa prikazane slike može se ustanoviti dužina segmenata robota, kao i način na koji su postavljeni zglobovi. Ovakva robotska konfiguracija se sastoji iz antropomorfne minimalne konfiguracije i sfernog zgloba.



Slika 38 – Funkcionalna šema ABB IRB 120 robota sa ucrtanim koordinatnim sistemima prema DH notaciji.

Kada je određena funkcionalna šema robota i obeleženi koordinatni sistemi u skladu sa DH notacijom, može se popuniti tablica DH parametara:

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	290	0	$\pi/2$
2	$q_2 + \pi/2$	0	270	0
3	q_3	0	70	$\pi/2$
4	q_4	302	0	$-\pi/2$
5	q_5	0	0	$\pi/2$
6	q_6	72	0	0

Na osnovu ove tablice moguće je izračunati ukupnu matricu homogene transformacije od baze robota do završnog uređaja. U ovoj matrici se u prva tri elementa krije informacija o poziciji završnog uređaja:

$$\begin{aligned}
 x_{ABB} = & 72 \sin(q_1) \sin(q_4) \sin(q_5) - 270 \cos(q_1) \sin(q_2) \\
 & + 302 \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) - 70 \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \\
 & - 70 \cos(q_1) \cos(q_3) \sin(q_2) - 302 \cos(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & + 72 \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_5) \\
 & - 72 \cos(q_1) \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & - 72 \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_3) \sin(q_5) \\
 & - 72 \cos(q_1) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_5),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{ABB} = & 302 \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1) - 302 \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & - 270 \sin(q_1) \sin(q_2) - 70 \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \\
 & - 70 \cos(q_3) \sin(q_1) \sin(q_2) - 72 \cos(q_1) \sin(q_4) \sin(q_5) \\
 & + 72 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_1) \\
 & - 72 \cos(q_5) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & - 72 \cos(q_2) \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) \sin(q_5) \\
 & - 72 \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_5),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_{ABB} = & 270 \cos(q_2) + 70 \cos(q_2) \cos(q_3) + 302 \cos(q_2) \sin(q_3) \\
 & + 302 \cos(q_3) \sin(q_2) - 70 \sin(q_2) \sin(q_3) \\
 & + 72 \cos(q_2) \cos(q_5) \sin(q_3) + 72 \cos(q_3) \cos(q_5) \sin(q_2) \\
 & + 72 \cos(q_2) \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_5) \\
 & - 72 \cos(q_4) \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5) + 290.
 \end{aligned}$$

Za date vrednosti unutrašnjih koordinata, pozicija i orijentacija završnog uređaja data je sa:

$$x = -406.243 \text{ mm},$$

$$y = 0 \text{ mm},$$

$$z = 777.146 \text{ mm},$$

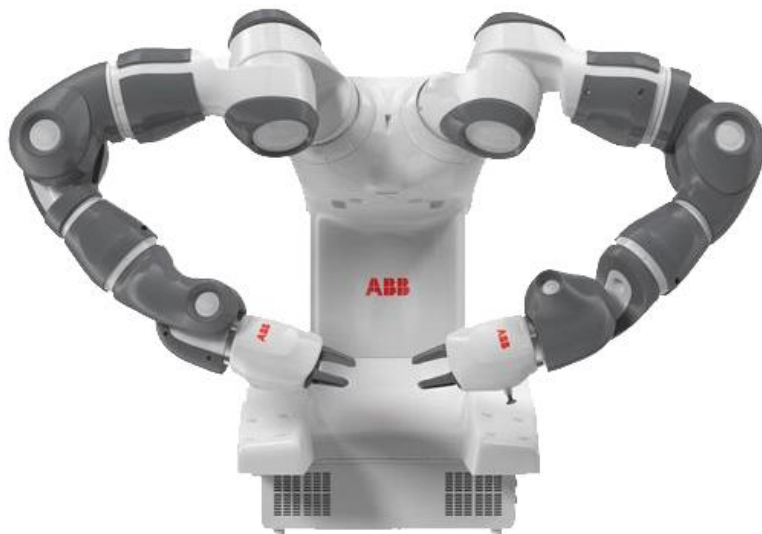
$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad},$$

$$\varphi = 0 \text{ rad},$$

$$\psi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}.$$

Zadatak 37

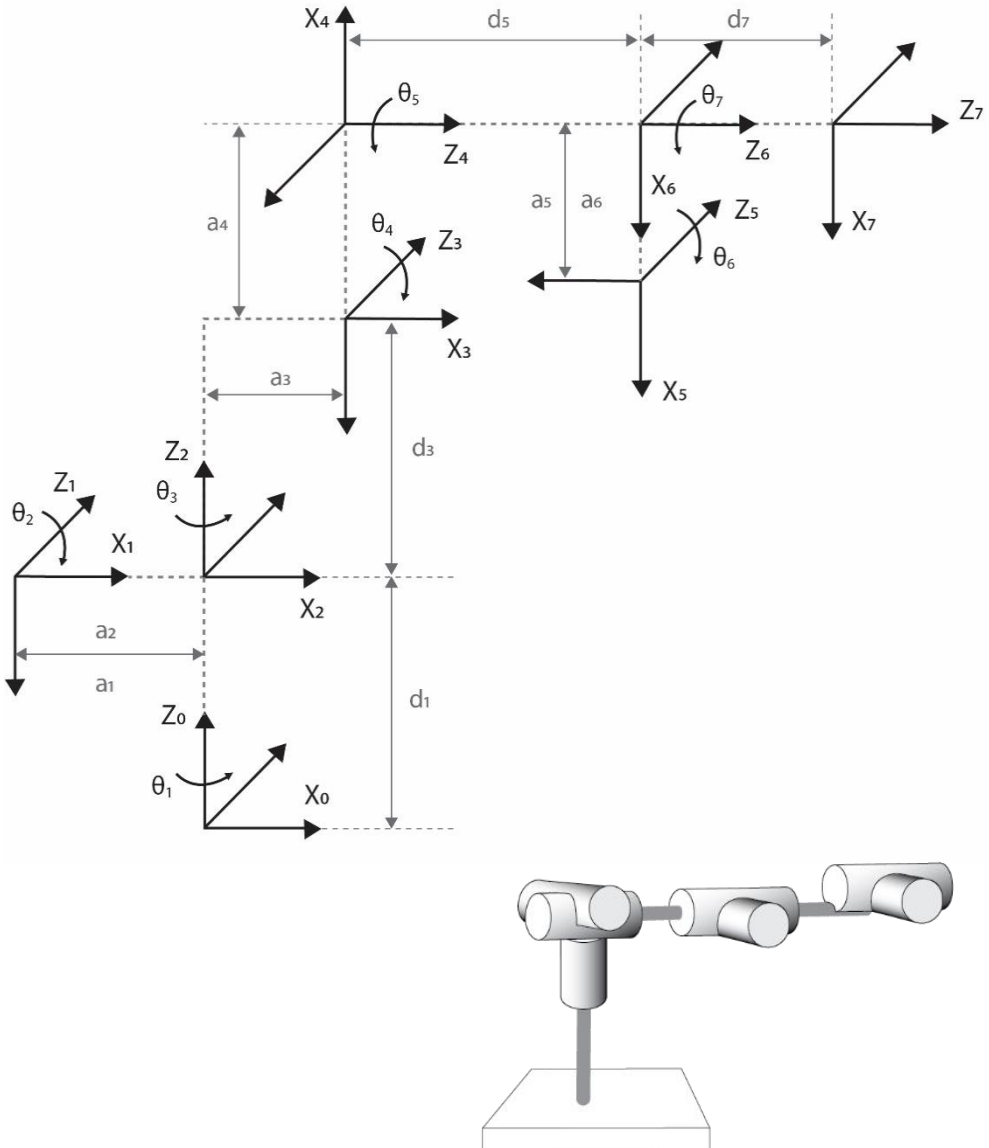
Dat je dvoručni robotski manipulator ABB YuMi, prikazan na Slici 39. Odrediti rastojanje između završnog uređaja desne ruke (1) i završnog uređaja leve (2), ukoliko se obe ruke robota nalaze u neutralnom položaju koji je definisan kao $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7) = (0, -130, 30, 0, 40, 0, \pm 135)^\circ$, gde se za desnu ruku uzima predznak minus za poziciju poslednjeg zgloba, a za levu predznak plus. Dimenzije neophodne za definisanje geometrije robota su $d_1 = 166$, $a_1 = -30$, $d_2 = 0$, $a_2 = 30$, $d_3 = 251.5$, $a_3 = 40.5$, $d_4 = 0$, $a_4 = 40.5$, $d_5 = 256$, $a_5 = 27$, $d_6 = 0$, $a_6 = 27$, $d_7 = 36$, $a_7 = 0$ mm. Rastojanje između baza leve i desne ruke je $2l = 300$ mm.



Slika 39 – ABB YuMi dvoručni kolaborativni robot (preuzeto sa: <https://new.abb.com/products/robotics/collaborative-robots/irb-14000-yumi>).

Rešenje:

Na Slici 40 je prikazan YuMi robot sa ucrtanim koordinatnim sistemima i funkcionalnom šemom za levu ruku.



Slika 40 – Funkcionalna šema jedne ruke ABB YuMi robota (desno) i relativni odnos koordinatnih sistema prema DH notaciji (levo).

Iz priloženih šema se može odrediti tablica DH parametara:

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	a_1	$-\pi/2$
2	q_2	0	a_2	$\pi/2$
3	q_3	d_3	a_3	$-\pi/2$
4	$q_4 - \pi/2$	0	a_4	$-\pi/2$
5	$q_5 + \pi$	d_5	a_5	$-\pi/2$
6	q_6	0	a_6	$\pi/2$
7	q_7	d_7	0	0

S obzirom da je desna ruka robota identična levoj, DH parametri će biti isti. Leva i desna ruka se nalaze na nepokretnom torzou, na međusobnoj udaljenosti $2l$. Pre nego što se krene u izračunavanje celokupne homogene matrice leve i desne ruke, potrebno je iz centra između dve robotske ruke, izvršiti dodatnu transformaciju u jednom slučaju duž x ose za dužinu l , a u drugom slučaju za $-l$.

Sada se dobijaju dve matrice homogene transformacije \mathbf{H}_B^1 i \mathbf{H}_B^2 . Da bi se dobila matrica homogene transformacije \mathbf{H}_1^2 , potrebno je naći inverznu matricu \mathbf{H}_B^1 i pomnožiti je sa matricom \mathbf{H}_B^2 :

$$\mathbf{H}_1^2 = \mathbf{H}_B^1{}^{-1} \mathbf{H}_B^2 = \mathbf{H}_1^B \mathbf{H}_B^2.$$

Kada se uvrste sve brojne vrednosti, dobija se:

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 116.08 \\ -1 & 0 & 0 & -220.54 \\ 0 & 0 & 1 & 167.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rastojanje između dva koordinatna sistema, kada je poznata matrica homogene transformacije između njih, moguće je odrediti kao:

$$d_{1,2} = \sqrt{116.08^2 + (-220.54)^2 + 167^2} = 300.0024 \text{ mm.}$$

4

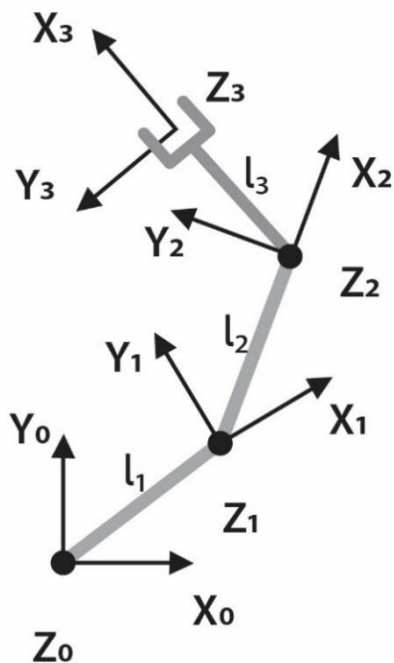
Inverzna kinematika

Planiranje izvršavanja nekog zadatka pomoću robota se svodi na planiranje kretanja, odnosno pozicioniranje njegovog završnog uređaja. Međutim, kako se kretanje robota vrši na nivou zglobova, potrebno je odrediti koje konfiguracije (položaji zglobova) odgovaraju svakoj od željenih pozicija i orijentacija završnog uređaja. Iako čovek ovaj kompleksan problem rešava nesvesno i lako, ovo je jedan od najtežih zadataka kod robota. Ovo poglavlje prikazuje primere različitih pristupa u rešavanju tog zadatka na tipičnim konfiguracijama industrijskih robota.

Zadatak 38

Odrediti jednačine inverzne kinematike za manipulator sa tri segmenta u istoj ravni, prikazan na Slici 41. Dužine segmenata su redom l_1 , l_2 i l_3 . Zadatak rešiti:

- a) algebarskim pristupom,
- b) geometrijskim pristupom.



Slika 41 – Trosegmentni ravanski manipulator.

Rešenje:

a) Algebarski pristup.

U prethodnom poglavlju je pokazano na koji način, polazeći od konfiguracije robota i korišćenjem DH parametara, je moguće odrediti jednačine direktne kinematike, kao polazne tačke i za inverzni problem.

Tablica DH parametara za ravanski manipulator sa tri segmenta:

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

Ukupna matrica homogene transformacije se onda može dobiti na sledeći način:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0^1 \mathbf{H}_1^2 \mathbf{H}_2^3,$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & 0 & h_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gde su elementi matrice \mathbf{H} :

$$h_{11} = \cos(q_1 + q_2 + q_3), \quad h_{12} = -\sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$h_{14} = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$h_{21} = \sin(q_1 + q_2 + q_3), \quad h_{22} = \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$h_{24} = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3).$$

Potrebno je naći jednačine inverzne kinematike, odnosno za poznatu poziciju i orijentaciju završnog uređaja, neophodno je odrediti vrednosti unutrašnjih koordinata koje će rezultovati postizanjem zadate pozicije i orijentacije završnog uređaja.

Opšti oblik matrice homogenih transformacija za ravanski manipulator je:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & x \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Upoređivanjem se može zaključiti da važi:

$$x = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$\phi = q_1 + q_2 + q_3.$$

Ukoliko se ϕ uvrsti u jednakosti za x i y dobija se:

$$x - l_3 \cos(\phi) = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2),$$

$$y - l_3 \sin(\phi) = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2).$$

U ovim jednačinama poznate su sa leve strane znaka jednakosti, a nepoznate sa desne. Radi jednostavnijeg praćenja uvodi se da je $x' = x - l_3 \cos(\phi)$ i $y' = y - l_3 \sin(\phi)$.

Kvadriranjem i sabiranjem novodobijenih jednačina dobija se:

$$x'^2 + y'^2 = l_1^2 + 2l_1l_2 \cdot \cos(q_2) + l_2^2,$$

pri čemu su korišćene jednakosti $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ i $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$.

Sada se može izraziti nepoznata vrednost q_2 u jednačini:

$$\cos(q_2) = \frac{x'^2 + y'^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}.$$

Da bi rešenje postojalo, desna strana jednačine mora da ima vrednost između -1 i +1, na osnovu čega sledi:

$$\sin(q_2) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(q_2)}.$$

Sada se može izraziti vrednost za ugao q_2 kao:

$$q_2 = \arctg\left(\frac{\sin(q_2)}{\cos(q_2)}\right).$$

Da bi se odredila vrednost za ugao q_1 , potrebno je jednačine napisati u drugom obliku:

$$x' = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2),$$

$$x' = l_1 \cos(q_1) + l_2 (\cos(q_1)\cos(q_2) - \sin(q_1)\sin(q_2)),$$

$$x' = \cos(q_1)(l_1 + l_2 \cos(q_2)) - \sin(q_1)(l_2 \sin(q_2)),$$

$$x' = k_1 \cos(q_1) + k_2 \sin(q_1),$$

gde je:

$$k_1 = l_1 + l_2 \cos(q_2),$$

$$k_2 = l_2 \sin(q_2).$$

Na sličan način se može napisati i jednačina za y u drugom obliku:

$$y' = k_1 \sin(q_1) + k_2 \cos(q_1).$$

Ako se sada usvoji da je $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ i $\gamma = \arctg\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$, može se napisati da važi:

$$k_1 = r \cos(\gamma),$$

$$k_2 = r \sin(\gamma).$$

Izraze za x i y je sada moguće napisati u obliku:

$$\frac{x'}{r} = \cos(\gamma)\cos(q_1) - \sin(\gamma)\sin(q_1),$$

$$\frac{y'}{r} = \cos(\gamma)\sin(q_1) + \sin(\gamma)\cos(q_1),$$

odnosno:

$$\frac{x'}{r} = \cos(\gamma + q_1),$$

$$\frac{y'}{r} = \sin(\gamma + q_1).$$

Odakle se može zaključiti da važi:

$$\gamma + q_1 = \arctg\left(\frac{y'/r}{x'/r}\right) = \arctg\left(\frac{y'}{x'}\right),$$

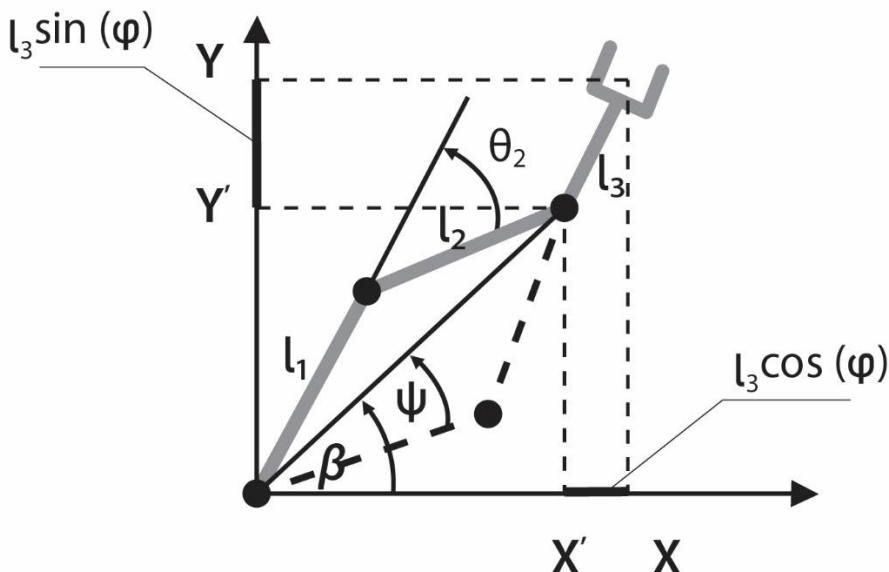
odnosno:

$$q_1 = \arctg\left(\frac{y'}{x'}\right) - \gamma = \arctg\left(\frac{y'}{x'}\right) - \arctg\left(\frac{k_2}{k_1}\right).$$

Na kraju, vrednost q_3 se može dobiti kao:

$$q_3 = \phi - q_2 - q_1.$$

b) Geometrijski pristup.



Slika 42 – Trosegmentni ravanski manipulator predstavljen u formi pogodnoj za rešavanje geometrijskim pristupom.

Kod geometrijskog pristupa za pronalaženje inverzne kinematike, potrebno je razložiti problem na nekoliko geometrijskih problema. Za mnoge manipulatore kod kojih važi da je $a_i = 0$ ili $\pm 90^\circ$, ovo se može uraditi na prilično jednostavan način. Na Slici 42 je prikazan trosegmentni ravanski manipulator. Dužina koju zaklapaju prvi i drugi segment se može izračunati iz Pitagorine teoreme i iznosi:

$$c^2 = x'^2 + y'^2.$$

Ukoliko se sada posmatra trougao koji čine stranice l_1 , l_2 i c , može se pomoću kosinusne teoreme dobiti jednakost:

$$c^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2\cos(180 - q_2),$$

odnosno:

$$x'^2 + y'^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\cos(q_2).$$

Odakle se može naći:

$$\cos(q_2) = \frac{x'^2 + y'^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}.$$

Da bi posmatrani trougao postojao, rastojanje od $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ mora da bude manje i jednako od sume dužina segmenata $l_1 + l_2$. Ako se pretpostavi da je ovaj uslov zadovoljen i da posmatrani trougao postoji, jednačina ima rešenje ukoliko se q_2 nalazi između 0 i -180 stepeni. Drugo moguće rešenje je ono koje je prikazano isprekidanom linijom i simetrično je na prvo rešenje, a glasi $q_2' = -q_2$.

Ukoliko je potrebno da se dobije vrednost za q_1 , potrebno je posmatrati uglove β i ψ , gde je ugao β dat sa:

$$\beta = \arctg\left(\frac{y'}{x'}\right).$$

Ako se sada još jednom primeni kosinusna teorema na trougao za ugao ψ , dobija se:

$$\cos(\psi) = \frac{x'^2 + y'^2 - l_1^2}{2l_1\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Da bi se očuvala geometrijska postavka, mora da važi uslov $0 < \psi < 180^\circ$. U tom slučaju važi:

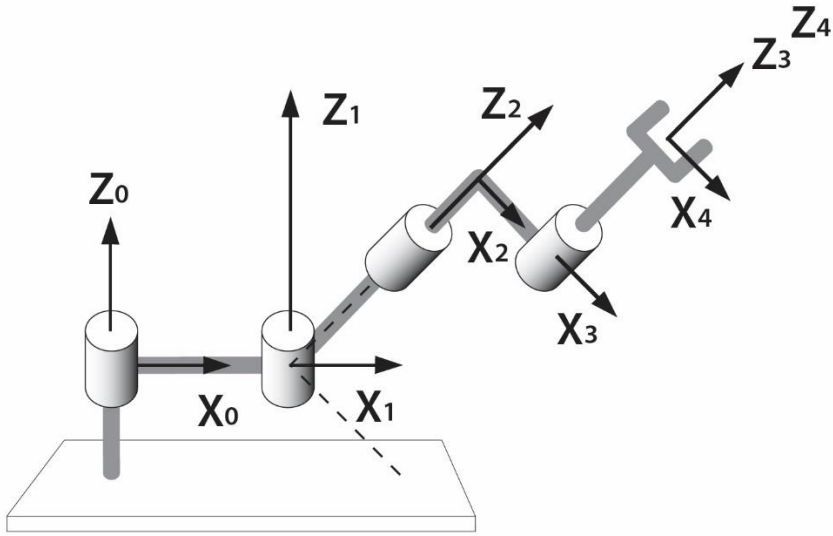
$$q_1 = \beta \pm \psi,$$

pri čemu se uzima znak plus kada je $q_2 < 0$, odnosno znak minus kada je $q_2 > 0$.

Konačno, važi da je $\phi = q_1 + q_2 + q_3$, odakle se može izračunati q_1 .

Zadatak 39

Manipulator sa četiri rotaciona zgloba prikazan je na Slici 43. Nenulti parametri geometrije robota u skladu sa DH notacijom su $a_1 = 1$, $d_2 = 2$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $a_3 = \sqrt{2}$ i $d_4 = \sqrt{2}$, a mehanizam je prikazan tako da su njegove unutrašnje koordinate $[0 \ 90 \ 90 \ 0]^T$ rad. Svaki zglob može da ima vrednost iz opsega $\pm 180^\circ$. Naći sve moguće vrednosti za unutrašnju koordinatu q_3 tako da je pozicija završnog uređaja $[1.1 \ 1.5 \ 3.07]^T$ m.



Slika 43 – Funkcionalna šema manipulatora sa ucrtanim koordinatnim sistemima prema DH notaciji.

Rešenje:

Kada se za manipulator sa Slike 43 pomoću DH parametara dobiju jednačine direktne kinematike, može se odrediti veza između unutrašnjih i spoljašnjih koordinata:

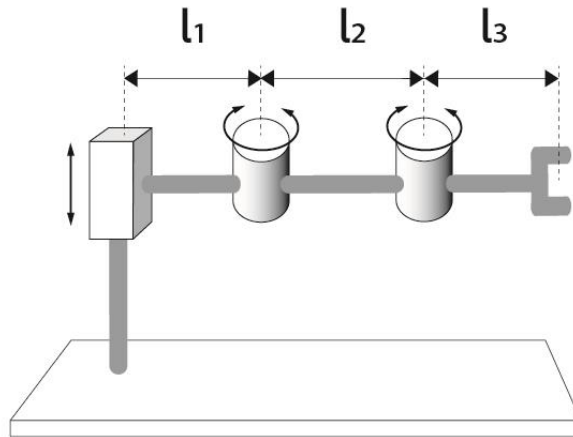
$$\begin{aligned}
 x &= \sin(q_1 + q_2) + \cos(q_2) - \sin(q_1 + q_2)\sin(q_3) + \sqrt{2}\cos(q_1 + q_2)\cos(q_3), \\
 y &= \sin(q_1) - \cos(q_1 + q_2) + \cos(q_1 + q_2)\sin(q_3) + \sqrt{2}\sin(q_1 + q_2)\cos(q_3), \\
 z &= \sin(q_3) + 3.
 \end{aligned}$$

Iz prethodnih izraza jednostavno je odrediti vrednost unutrašnje koordinate q_3 koja će zadovoljiti prethodni uslov:

$$\begin{aligned}
 3.707 &= \sin(q_3) + 3, \\
 \sin(q_3) &= 0.707, \\
 q_3 &= \arcsin(0.707), \\
 q_3 &= \pm 45^\circ.
 \end{aligned}$$

Zadatak 40

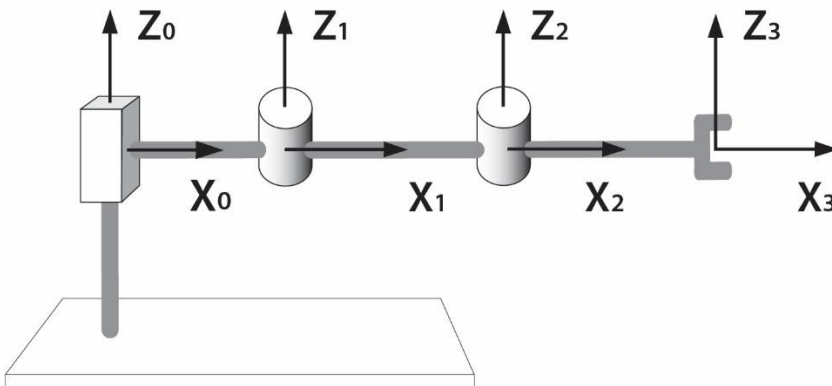
Na Slici 44 je data minimalna robotska konfiguracija TRR, gde R označava rotacioni, a T translatorni zglob robota. Odrediti rešenje inverznog kinematičkog problema. Nacrtati konfiguraciju robota ukoliko je pozicija završnog uređaja $x = 0.5$ m, $y = 0$ m i $z = 0.2$ m. Dužine segmenata su $l_1 = 0.2$ m i $l_2 = l_3 = 0.3$ m.



Slika 44 – Funkcionalna šema TRR manipulatora.

Rešenje:

Funkcionalna šema robota sa ucrtanim koordinatnim sistemima data je na Slici 45:



Slika 45 – Funkcionalna šema TRR manipulatora sa ucrtanim koordinatnim sistemima prema DH notaciji.

Iz priložene funkcionalne šeme moguće je odrediti tablicu DH parametara, a samim tim i jednačine direktne kinematike:

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

$$x = l_1 + l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3),$$

$$y = l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3),$$

$$z = q_1.$$

Kako nije moguće upravljati orijentacijom završnog uređaja već samo pozicijom, potrebno je posmatrati inverzni problem kinematike za pozicioniranje robota u prostoru.

Iz jednačine direktne kinematike može se odmah videti da je vrednost unutrašnje koordinate q_1 direktno određena spoljašnjom koordinatom z :

$$q_1 = z.$$

Ukoliko se sada izrazi za x i y napišu u nešto drugačijem obliku, kvadriraju i saberu, dobija se:

$$x - l_1 = l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3),$$

$$y = l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3),$$

$$(x - l_1)^2 = l_2^2 \cos^2(q_2) + 2l_2 l_3 \cos(q_2) \cos(q_2 + q_3) + l_3^2 \cos^2(q_2 + q_3),$$

$$y^2 = l_2^2 \sin^2(q_2) + 2l_2 l_3 \sin(q_2) \sin(q_2 + q_3) + l_3^2 \sin^2(q_2 + q_3),$$

$$(x - l_1)^2 + y^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos(q_3),$$

$$\cos(q_3) = \frac{(x - l_1)^2 + y^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}.$$

Iz navedenih izraza se može izraziti $\sin(q_3) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(q_3)}$, odnosno:

$$q_3 = \arctg\left(\frac{\sin(q_3)}{\cos(q_3)}\right).$$

Ukoliko se opet izrazi za x i y napišu u drugačijem obliku, kao u Zadatku 38, dobija se:

$$x - l_1 = k_1 \cos(q_2) + k_2 \sin(q_2),$$

$$y = k_1 \sin(q_2) + k_2 \cos(q_2),$$

pri čemu je $k_1 = l_2 + l_3 \cos(q_3)$, a $k_2 = l_3 \sin(q_3)$.

Ako se sada usvoji da je $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ i $\gamma = \arctg\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$, može se napisati da važi:

$$k_1 = r \cos(\gamma),$$

$$k_2 = r \sin(\gamma).$$

Izraze za x i y sada je moguće napisati u obliku:

$$\frac{x - l_1}{r} = \cos(\gamma) \cos(q_2) - \sin(\gamma) \sin(q_2),$$

$$\frac{y}{r} = \cos(\gamma) \sin(q_2) + \sin(\gamma) \cos(q_2),$$

odnosno:

$$\frac{x - l_1}{r} = \cos(\gamma + q_2),$$

$$\frac{y}{r} = \sin(\gamma + q_2).$$

Sada je moguće zaključiti da važi:

$$\gamma + q_2 = \arctg\left(\frac{y/r}{(x - l_1)/r}\right) = \arctg\left(\frac{y}{x - l_1}\right),$$

odnosno:

$$q_2 = \arctg\left(\frac{y}{x - l_1}\right) - \gamma = \arctg\left(\frac{y}{x - l_1}\right) - \arctg\left(\frac{k_2}{k_1}\right).$$

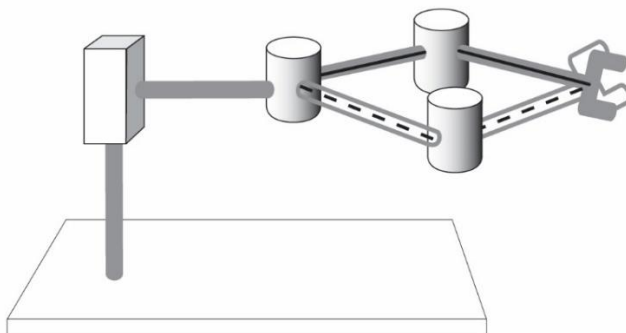
Kada se u izvedene izraze uvrsti pozicija završnog uređaja i kinematički parametri robota, dobija se da su vrednosti unutrašnjih koordinata:

$$q_1 = 0.2 \text{ m},$$

$$q_{2,I} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}, \quad q_{2,II} = \frac{\pi}{3} \text{ rad},$$

$$q_{3,I} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}, \quad q_{3,II} = -\frac{2\pi}{3} \text{ rad}.$$

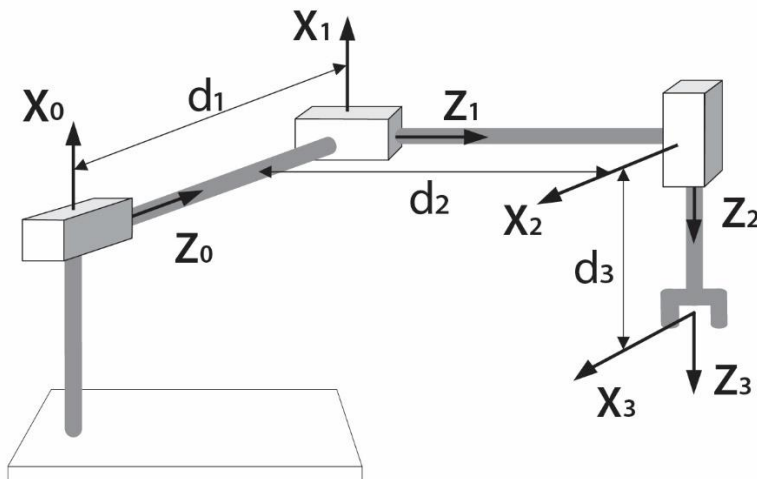
Kako postoje dva moguće rešenja, robot se može naći u dve različite konfiguracije prikazane na Slici 46:



Slika 46 – Konfiguracije u kojima se robot može naći nakon rešenja inverzne kinematike.

Zadatak 41

Rešiti inverzni kinematički problem za robota Dekartove konfiguracije. Funkcionalna šema robota je data na Slici 47.



Slika 47 – Funkcionalna šema robota Dekartove konfiguracije sa ucrtanim koordinatnim sistemima prema DH notaciji.

Rešenje:

Tablica DH parametara za ovu minimalnu konfiguraciju je:

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	d_1	0	-90
2	90	d_2	0	-90
3	0	d_3	0	-90

Na osnovu tablice DH parametara sledi matrica homogene transformacije:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ -1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Konačno, na osnovu matrice homogene transformacije se lako određuju vrednosti unutrašnjih koordinata (pozicija zglobova):

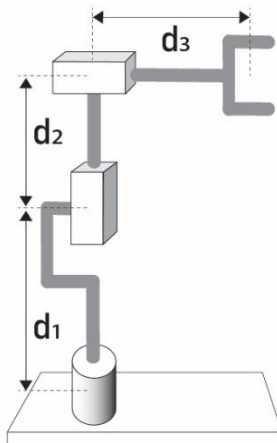
$$d_1 = z,$$

$$d_2 = y,$$

$$d_3 = -x.$$

Zadatak 42

Rešiti inverzni kinematički problem za cilindričnu konfiguraciju prikazanu na Slici 48. Dužine svih segmenata su $d_1 = d_2 = d_3 = 1$.



Slika 48 – Minimalna konfiguracija Cilindričnog robota.

Rešenje:

U prethodnom poglavlju u Zadatku 33 rešen je direktan kinematički problem za cilindričnu konfiguraciju robota i dobijene su zavisnost spoljašnjih koordinata od unutrašnjih:

$$x = -\sin(q_1)(q_3 + 1),$$

$$y = \cos(q_1)(q_3 + 1),$$

$$z = q_2 + 2.$$

Iz poslednje jednačine može se odmah dobiti izraz za q_2 :

$$q_2 = z - 2.$$

Ako se kvadriraju i saberu prve dve jednakosti, dobija se:

$$x^2 + y^2 = \sin^2(q_1)(q_3 + 1)^2 + \cos^2(q_1)(q_3 + 1)^2,$$

$$x^2 + y^2 = (q_3 + 1)^2,$$

$$q_3 + 1 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$q_3 = \sqrt{x^2 + y^2} - 1.$$

Sada, ukoliko se uvrsti poznata vrednost q_3 u izraz za x i y , dobija se:

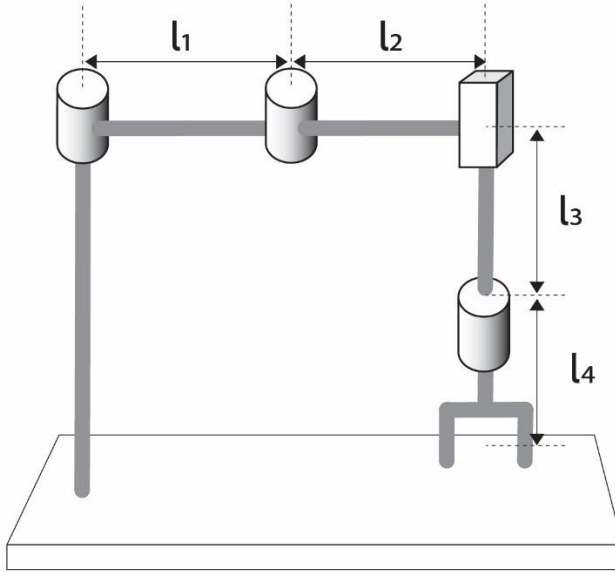
$$\sin(q_1) = \frac{-x}{q_3 + 1},$$

$$\cos(q_1) = \frac{y}{q_3 + 1},$$

$$q_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{-x}{q_3 + 1}}{\frac{y}{q_3 + 1}}\right).$$

Zadatak 43

Rešiti inverzni kinematički problem za SCARA robota prikazanog na Slici 49. Dužine segmenata su $l_1 = l_2 = 1$ i $l_3 = l_4 = 0.2$.



Slika 49 – Funkcionalna šema SCARA robota.

Rešenje:

Iz zadatka 34 može se videti kako izgledaju jednačine direktne dinamike za SCARA robota čija je konfiguracija prikazana na slici:

$$x = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2),$$

$$y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2),$$

$$z = l_4 - l_3 - d_3,$$

$$\phi = q_1 + q_2 + q_3.$$

Lako se zaključuje da unutrašnja koordinata d_3 doprinosi samo promeni pozicije završnog uređaja po z -osi, pa je odatle moguće izračunati tu veličinu:

$$d_3 = l_4 - l_3 - z.$$

Ako se sada malo bolje pogledaju jednačine koje preostaju, može se zaključiti da se zapravo radi o istom skupu jednačina kao kod ravanskog manipulatora sa tri segmenta, kod koga treći segment ima dužinu nula. Rešenje ostatka zadatka se svodi na Zadatak 38.

Ukoliko se kvadriraju i saberu izrazi za x i y , dobija se:

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + 2l_1l_2\cos(q_2) + l_2^2,$$

$$\cos(q_2) = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} = B,$$

$$\sin(q_2) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(q_2)} = A,$$

$$q_2 = \arctg\left(\frac{A}{B}\right).$$

Opet kao i u Zadatku 38 izraze za x i y je potrebno napisati u nešto drugačijem obliku, pa se može dobiti da je:

$$x = k_1\cos(q_1) + k_2\sin(q_1),$$

$$y = k_1\sin(q_1) + k_2\cos(q_1),$$

pri čemu je $k_1 = l_1 + l_2\cos(q_2)$, a $k_2 = l_2\sin(q_2)$.

Ako se sada usvoji da je $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ i $\gamma = \arctg\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$, može se napisati da važi:

$$k_1 = r\cos(\gamma),$$

$$k_2 = r\sin(\gamma).$$

Izraze za x i y sada je moguće napisati u obliku:

$$\frac{x}{r} = \cos(\gamma)\cos(q_1) - \sin(\gamma)\sin(q_1),$$

$$\frac{y}{r} = \cos(\gamma)\sin(q_1) + \sin(\gamma)\cos(q_1),$$

odnosno:

$$\frac{x}{r} = \cos(\gamma + q_1),$$

$$\frac{y}{r} = \sin(\gamma + q_1).$$

Odakle je moguće zaključiti da važi:

$$\gamma + q_1 = \arctg\left(\frac{y/r}{x/r}\right) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right),$$

odnosno:

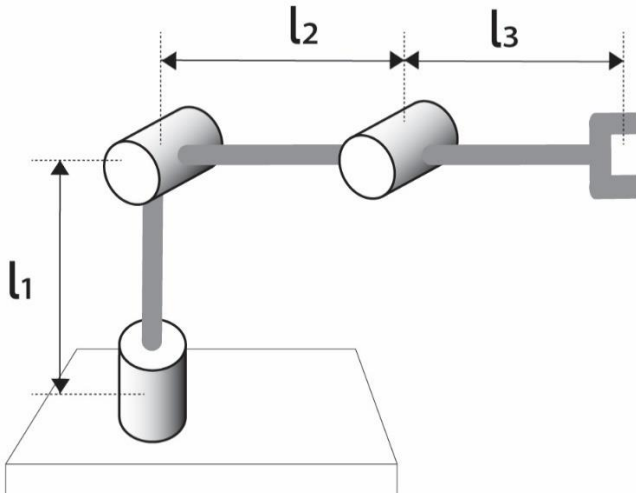
$$q_1 = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \gamma = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \arctg\left(\frac{k_2}{k_1}\right).$$

Konačno, vrednost q_4 se može dobiti kao:

$$q_4 = \phi - q_2 - q_1.$$

Zadatak 44

Rešiti inverzni kinematički problem za antropomorfnu minimalnu konfiguraciju robota prikazanog na Slici 50. Dužine segmenata su l_1 , l_2 i l_3 .



Slika 50 – Antropomorfna minimalna konfiguracija.

Rešenje:

Na osnovu rešenja Zadatka 31 moguće je videti kako izgledaju jednačine direktne kinematike za antropomorfnu konfiguraciju:

$$x = \cos(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)),$$

$$y = \sin(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)),$$

$$z = l_3 \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_2).$$

Ukoliko se kvadriraju i saberu izrazi za x , y i z , dobija se:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l_3^2 + 2l_2l_3\cos(q_3) + l_2^2,$$

$$\cos(q_3) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}.$$

Da bi rešenje postojalo, desna strana izraza mora da bude u opsegu od -1 do +1, pa odatle mora da važi:

$$\sin(q_3) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(q_3)}.$$

Odnosno dobija se:

$$q_3 = \arctg\left(\frac{\sin(q_3)}{\cos(q_3)}\right).$$

Ukoliko se izraz za x pomnoži sa $\sin(q_1)$, a izraz za y sa $\cos(q_1)$, dobija se:

$$x \sin(q_1) = \cos(q_1)\sin(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)),$$

$$y \cos(q_1) = \sin(q_1)\cos(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)).$$

Ako se prethodni izrazi oduzmu, dobija se:

$$x \sin(q_1) - y \cos(q_1) = 0.$$

Na osnovu prethodnog izraza može se odrediti položaj prvog zgloba:

$$q_1 = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi.$$

Ukoliko se izrazi za x i y kvadriraju i saberu, dobija se:

$$x^2 + y^2 = (l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3))^2.$$

Na osnovu prethodnog izraza i izraza za z dobija se sistem jednačina:

$$\begin{aligned} l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3) &= \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \\ l_3 \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_2) &= z, \end{aligned}$$

pri čemu su nepoznate sistema $\sin(q_2)$ i $\cos(q_2)$.

Nakon rešavanja sistema dobija se:

$$\begin{aligned} \sin(q_2) &= \frac{z(l_2 + l_3 \cos(q_3)) \mp \sqrt{x^2 + y^2} l_3 \sin(q_3)}{l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos(q_3)}, \\ \cos(q_2) &= \frac{\pm \sqrt{x^2 + y^2} (l_2 + l_3 \cos(q_3)) + z l_3 \sin(q_3)}{l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos(q_3)}. \end{aligned}$$

Iz prethodnih izraza moguće je izračunati:

$$q_2 = \arctg \left(\frac{\sin(q_2)}{\cos(q_2)} \right).$$

Kako $\sin(q_3)$ može imati dve vrednosti, onda će postojati i više rešenja za vrednost ugla q_2 , i to ukoliko je $\sin(q_3) = \sqrt{1 - \cos(q_3)^2}$:

$$\begin{aligned} q_{2,I} &= \arctg \left(\frac{z(l_2 + l_3 \cos(q_3)) - \sqrt{x^2 + y^2} l_3 \sin(q_3)}{\sqrt{x^2 + y^2} (l_2 + l_3 \cos(q_3)) + z l_3 \sin(q_3)} \right), \\ q_{2,II} &= \arctg \left(\frac{z(l_2 + l_3 \cos(q_3)) + \sqrt{x^2 + y^2} l_3 \sin(q_3)}{-\sqrt{x^2 + y^2} (l_2 + l_3 \cos(q_3)) + z l_3 \sin(q_3)} \right), \end{aligned}$$

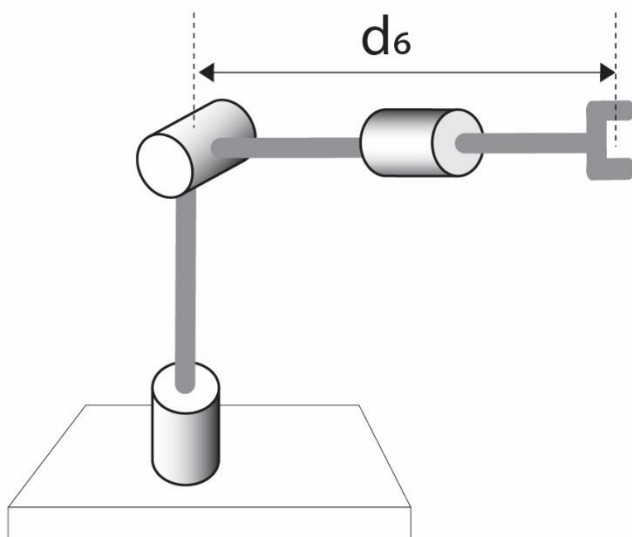
a ukoliko je $\sin(q_3) = -\sqrt{1 - \cos(q_3)^2}$:

$$\begin{aligned} q_{2,III} &= \arctg \left(\frac{z(l_2 + l_3 \cos(q_3)) - \sqrt{x^2 + y^2} l_3 \sin(q_3)}{\sqrt{x^2 + y^2} (l_2 + l_3 \cos(q_3)) + z l_3 \sin(q_3)} \right), \\ q_{2,IV} &= \arctg \left(\frac{z(l_2 + l_3 \cos(q_3)) + \sqrt{x^2 + y^2} l_3 \sin(q_3)}{-\sqrt{x^2 + y^2} (l_2 + l_3 \cos(q_3)) + z l_3 \sin(q_3)} \right). \end{aligned}$$

Potrebno je napomenuti da se prilikom izbora znaka + ili – kod odabira vrednosti za $\sin(q_3)$ bira jedno od dva rešenja, „lakat na gore” ili „lakat na dole”. Ovim se može jasno videti da rešenje inverznog kinematičkog problema nema uvek jedinstveno rešenje.

Zadatak 45

Rešiti inverzni kinematički model za ZYZ Ojlerov zglob prikazan na Slici 51.



Slika 51 – Funkcionalna šema Ojlerovog ZYZ zgloba.

Rešenje:

Ojlerov zglob koji se postavlja na kraj minimalne konfiguracije ima za cilj da promeni orijentaciju završnog uređaja. Samim tim Ojlerov zglob utiče samo na promenu matrice rotacije između minimalne konfiguracije robota i završnog uređaja.

Opšti oblik matrice rotacije je:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

dok matrica rotacije za ZYZ Ojlerov zglob ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= \cos(q_4)\cos(q_5)\cos(q_6) - \sin(q_4)\sin(q_6), \\
 r_{12} &= -\cos(q_4)\cos(q_5)\sin(q_6) - \sin(q_4)\cos(q_6), \\
 r_{13} &= \cos(q_4)\sin(q_5), \\
 r_{21} &= \sin(q_4)\cos(q_5)\cos(q_6) + \cos(q_4)\sin(q_6), \\
 r_{22} &= -\sin(q_4)\cos(q_5)\sin(q_6) + \cos(q_4)\cos(q_6), \\
 r_{23} &= \sin(q_4)\sin(q_5), \\
 r_{31} &= -\sin(q_5)\cos(q_6), \\
 r_{32} &= \sin(q_5)\sin(q_6), \\
 r_{33} &= \cos(q_5).
 \end{aligned}$$

Ugao q_4 se može dobiti na sledeći način: $q_4 = \arctg\left(\frac{r_{23}}{r_{13}}\right)$.

Ugao q_5 se može dobiti na sledeći način: $q_5 = \arctg\left(\frac{\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}}{r_{33}}\right)$.

Ugao q_6 se može dobiti na sledeći način: $q_6 = \arctg\left(\frac{r_{32}}{-r_{31}}\right)$.

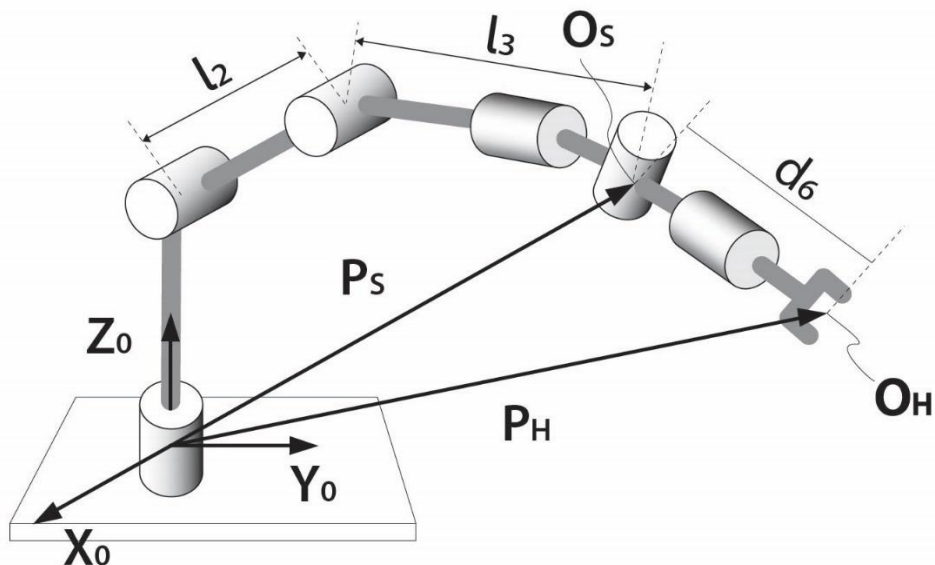
Ukoliko pak za oblast rešenja za q_5 izaberemo opseg $(-\pi, 0)$, rešenja tada imaju oblik:

$$\begin{aligned}
 q_4 &= \arctg\left(\frac{-r_{23}}{-r_{13}}\right), \\
 q_5 &= \arctg\left(\frac{-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}}{r_{33}}\right), \\
 q_6 &= \arctg\left(\frac{-r_{32}}{r_{31}}\right).
 \end{aligned}$$

Zadatak 46

Rešiti inverzni kinematički problem za manipulator sa 6 stepeni slobode koji se sastoji od minimalne antropomorfne konfiguracije i sfernog Ojlerovog zgloba, čija je funkcionalna šema prikazana na Slici 52. Dužina segmenata manipulatora je $l_2 = 0.3$ m, $l_3 = 0.2$ m i $d_6 = 0.1$ m. Završni uređaj se nalazi u takvom položaju da matrica homogene transformacije ima sledeći oblik:

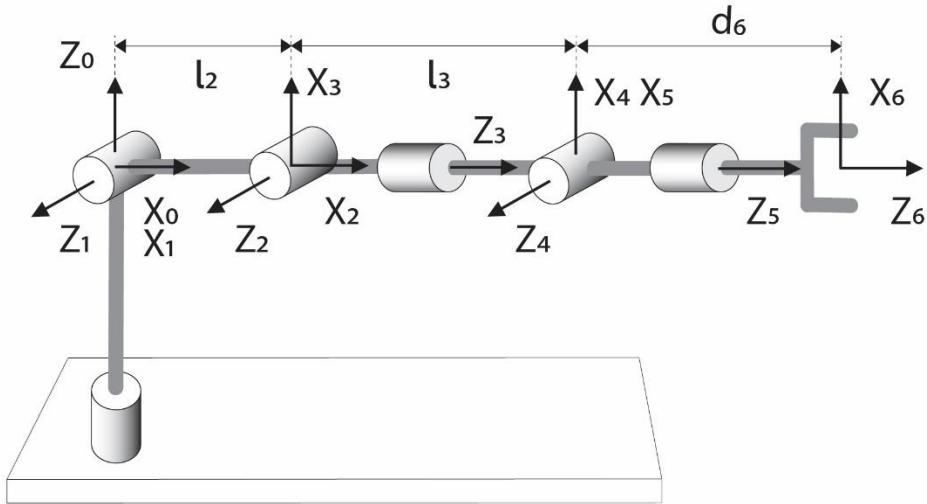
$$H_0^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 52 – Funkcionalna šema antropomorfnog robota sa Ojlerovim zglobom.

Rešenje:

Ukoliko se na početku za ovakav manipulator postave koordinatni sistemi po pravilima DH notacije, dobija se:



Slika 53 – Funkcionalna šema antropomorfnog robota sa Ojlerovim zglobovima sa ucrtanim koordinatnim sistemima prema DH notaciji.

Može se primetiti da se ose rotacije zglobova, koji čine sferni zglob, seku u jednoj tački O_S u centru petog zgloba. Ujedno ova tačka predstavlja i centar sfernog zgloba. Takođe, pozicija ove tačke ne zavisi od pozicija u zglobovima 4, 5 i 6, već njena pozicija zavisi isključivo od pozicija u zglobovima 1, 2 i 3. Na osnovu toga, problem inverzne kinematike za manipulator prikazan na Slici 53 moguće je podeliti na dva problema, problem inverzne pozicije i problem inverzne orijentacije.

Kako je postavkom zadatka poznata pozicija i orijentacija završnog uređaja, kao i kinematički parametri manipulatora, moguće je odrediti poziciju tačke O_S u odnosu na bazni koordinatni sistem robota:

$$\overline{O_S O_6} = d_6 \mathbf{R} \mathbf{k} = d_6 \mathbf{R} [0 \quad 0 \quad 1]^T,$$

pri čemu je \mathbf{R} matrica rotacije završnog uređaja, a vektor \mathbf{k} predstavlja ort ose z_6 , odakle se pozicija tačke dobija kao:

$$\mathbf{p}_S = \mathbf{p}_H - d_6 \mathbf{R} \mathbf{k},$$

odnosno, ukoliko se uvrste brojne vrednosti, dobija se:

$$\mathbf{p}_S = \begin{bmatrix} p_{Sx} \\ p_{Sy} \\ p_{Sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{Hx} - d_6 r_{13} \\ p_{Hy} - d_6 r_{23} \\ p_{Hz} - d_6 r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 - 0.1 \cdot 1 \\ 0 - 0.1 \cdot 0 \\ 0.3 - 0.1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}.$$

Sada je moguće primeniti rešenje problema inverzne kinematike antropomorfne minimalne konfiguracije (Zadatak 44) za poziciju \mathbf{p}_S i odrediti vrednosti q_1 , q_2 i q_3 , koji će ostvariti željenu poziciju.

Ukoliko se zadate brojne vrednosti primene dobija se:

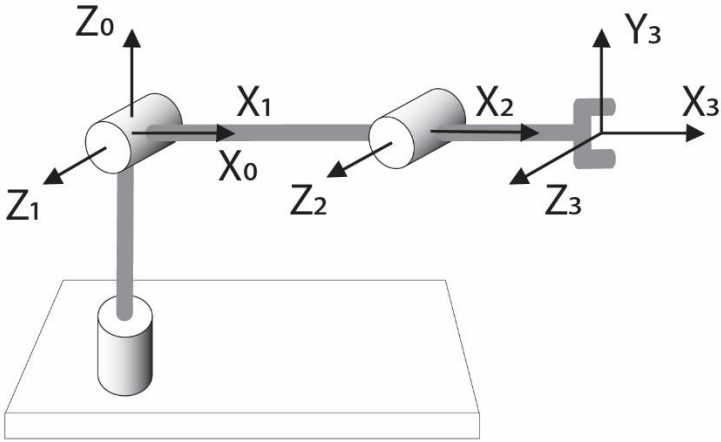
$$\begin{aligned} q_{1,I} &= 0 \text{ rad}, & q_{1,II} &= -\pi \text{ rad}, \\ q_{2,I} &= 0.3948 \text{ rad}, & q_{2,II} &= \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \\ q_{2,III} &= \frac{\pi}{2} \text{ rad}, & q_{2,IV} &= 2.7468 \text{ rad}, \\ q_{3,I} &= \frac{\pi}{2} \text{ rad}, & q_{3,II} &= -\frac{\pi}{2} \text{ rad}. \end{aligned}$$

Treba naglasiti da postoje četiri moguća rešenja:

$$(q_{1,I}, q_{2,I}, q_{3,I}), (q_{1,I}, q_{2,III}, q_{3,II}), (q_{1,II}, q_{2,II}, q_{3,I}), (q_{1,II}, q_{2,IV}, q_{3,II}).$$

Ovim je završen prvi problem određivanja inverzne pozicije. Za rešavanje problema inverzne orijentacije moguće je iskoristiti rešenje inverznog problema za Ojlerov sferni zglob (Zadatak 45).

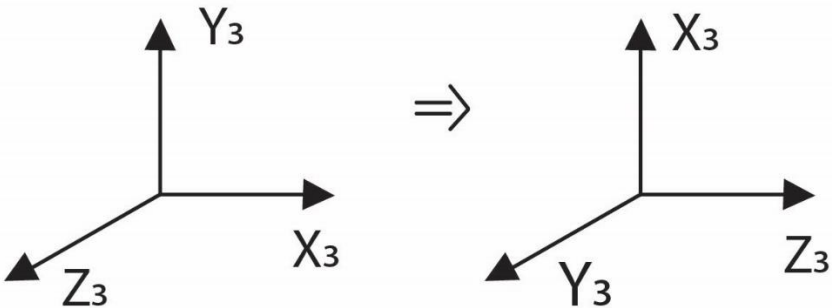
Pre nego što se direktno primeni rešenje iz Zadatka 45 potrebno je primetiti da orijentacija završnog uređaja kod minimalne antropomorfne konfiguracije nije ista kao orijentacije trećeg koordinatnog sistema u konfiguraciji manipulatora sa 6 stepeni slobode (Slika 55).



Slika 54 – Funkcionalna šema antropomorfne minimalne konfiguracije.

Sa Slike 54 se može zaključiti da je neophodno izvršiti dodatne rotacija koordinatnog sistema hvataljke minimalne antropomorfne konfiguracije kako bi se prilagodila matrica rotacije za direktnu primenu inverznog problema Ojlerovog zgloba:

$$R^* = R_{y, \frac{\pi}{2}} R_{z, \frac{\pi}{2}}$$



Slika 55 – Prikaz orijentacije završnog uređaja minimalne konfiguracije i početnog koordinatnog sistema Ojlerovog zgloba.

Ukoliko se na osnovu problema inverzne pozicije sada odrede jednačine direktne kinematike i orijentacija završnog uređaja minimalne antropomorfne konfiguracije, dobija se:

$$\mathbf{H}_{antropmorfna} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{R}_{antropmorfna} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada je moguće izračunati matricu rotacije od baznog do trećeg koordinatnog sistema kao:

$$\mathbf{R}_0^3 = \mathbf{R}_{antropmorfna} \mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ukoliko je poznata matrica rotacije završnog uređaja i matrica rotacije \mathbf{R}_0^3 , moguće je odrediti matricu rotacije koja potiče od Ojlerovog zgloba na sledeći način:

$$\mathbf{R}_3^6 = (\mathbf{R}_0^3)^{-1} \mathbf{R} = (\mathbf{R}_0^3)^T \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primenom rešenja iz Zadatka 45 na matricu rotacije Ojlerovog zgloba dobija se:

$$q_{4,I} = q_{4,II} = 0 \text{ rad,}$$

$$q_{5,I} = q_{5,II} = 0 \text{ rad,}$$

$$q_{6,I} = q_{6,II} = 0 \text{ rad.}$$

Ovim je završen problem rešavanja inverzne orijentacije.

Ukoliko se dobijene vrednosti unutrašnjih koordinata uvrste u jednačine direktne kinematike, dobiće se matrica homogene transformacije koja je zadata postavkom zadatka.

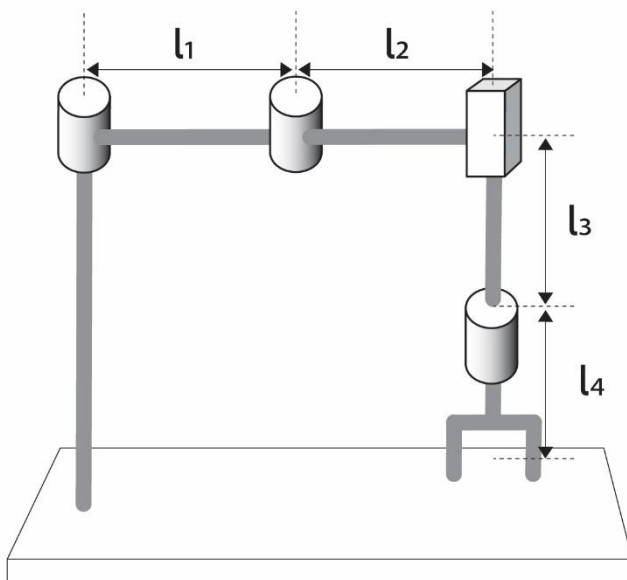
5

Diferencijalna kinematika – Jakobijan

Osim preračunavanja statičkih pozicija završnog uređaja i odgovarajućeg pozicioniranja zglobova robota, za izvršavanje zadatka je najčešće potrebno razmotriti kretanje odnosno preslikavanje brzina kretanja njegovih zglobova (unutrašnjih/generalisanih koordinata) na brzinu spoljašnjih (funktionalnih) koordinata robota. Ovo preslikvanje se vrši pomoću Jakobijan matrice. Rešavanjem zadataka u ovom poglavlju, čitalac će dobiti uvid u značaj Jakobijan matrice, čijom se analizom, osim direktnog preslikavanja brzina između unutrašnjih i spoljašnjih koordinata, može analizirati i dostizanje, odnosno blizina singularnih položaja robota. Takođe, čitalac će rešavanjem zadataka steći uvid na koji način se mogu pronaći približna rešenja inverznog kinematičkog problema kada jednoznačno rešenje ne postoji, ali i kako se mogu definisati dodatni kriterijumi optimalnosti u slučaju velikog broja rešenja inverznog problema kinematike (kinematičke redundanse).

Zadatak 47

Analitičkom metodom izračunati Jakobijan matricu koja preslikava kretanje pojedinih zglobova u kretanje završnog uređaja za industrijskog robota SCARA konfiguracije prikazanog na Slici 56.



Slika 56 – Funkcionalna šema SCARA robota.

Rešenje:

Koristeći se rezultatom iz Zadatka 34, mogu se napisati sledeće relacije:

$$x = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2),$$

$$y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2),$$

$$z = l_4 - l_3 - q_3,$$

$$\phi = q_1 + q_2 + q_4.$$

Veza između linearne i ugaone brzine hvataljke ($\dot{\mathbf{p}}$ i $\boldsymbol{\omega}$) i brzine zglobova robota $\dot{\mathbf{q}}$, može se napisati kao:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_L \dot{\mathbf{q}},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_U \dot{\mathbf{q}},$$

gde J_L povezuje brzine zglobova sa linearnom brzinom završnog uređaja, dok J_U povezuje brzine zglobova sa ugaonom brzinom završnog uređaja. Gore navedene izraze moguće je napisati i u matičnom obliku, i to:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},$$

pri čemu vektor $\dot{\mathbf{X}}$ označava ukupni vektor brzine hvataljke robota u spoljašnjim koordinatama u zavisnosti od brzine zglobova robota $\dot{\mathbf{q}}$. Matrica kojom se povezuje kretanje završnog uređaja robota i zglobova robota zove se Jakobijevom matricom ili Jakobijanom, i označava se sa $\mathbf{J}(\mathbf{q})$.

U opštem slučaju izraz za brzinu hvataljke po x–osi u spoljašnjim koordinatama dat je sa:

$$\dot{x} = J_{11}\dot{q}_1 + J_{12}\dot{q}_2 + J_{13}\dot{q}_3 + \dots + J_{1n}\dot{q}_n,$$

gde je n broj zglobova robota. Na sličan način se mogu izraziti i brzine ostalih spoljašnjih koordinata.

Odgovarajući elementi Jakobijan matrice se mogu naći tako što se izrazi dobijeni direktnom kinematikom diferenciraju po svakoj unutrašnjoj koordinati:

$$J_{11} = \frac{\partial x}{\partial q_1}, J_{12} = \frac{\partial x}{\partial q_2}, J_{13} = \frac{\partial x}{\partial q_3}, \dots, J_{1n} = \frac{\partial x}{\partial q_n}.$$

Odnosno, potrebno je izvršiti parcijalnu diferencijaciju svih spoljašnjih koordinata po svim unutrašnjim koordinatama da bi se dobila kompletna Jakobijan matrica:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & \dots & J_{1n} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & \dots & J_{2n} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & \dots & J_{3n} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & \dots & J_{4n} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & \dots & J_{5n} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & \dots & J_{6n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial z}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \phi}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi}{\partial q_2} & \frac{\partial \phi}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial \phi}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \theta}{\partial q_1} & \frac{\partial \theta}{\partial q_2} & \frac{\partial \theta}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial \theta}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \psi}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi}{\partial q_2} & \frac{\partial \psi}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial q_n} \end{bmatrix}.$$

Sada je potrebno odrediti parcijalni izvod spoljašnjih koordinata SCARA robota po svim unutrašnjim koordinatama:

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2), \quad \frac{\partial x}{\partial q_2} = -l_2 \sin(q_1 + q_2),$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial q_4} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2), \quad \frac{\partial y}{\partial q_2} = l_2 \cos(q_1 + q_2),$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial q_4} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial q_2} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_3} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial q_4} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_1} = 1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial q_2} = 1,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial q_4} = 1.$$

Na osnovu navedenih parcijalnih izvoda, moguće je napisati konačnu vrednost Jakobijana:

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) & 0 & 0 \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 48

Numeričkom metodom izračunati Jakobijan matricu koja preslikava kretanje pojedinih zglobova u kretanje završnog uređaja za industrijskog robota SCARA konfiguracije prikazanog na Slici 56.

Rešenje:

Ukoliko nije moguće, ili je suviše komplikovano naći analitički model robota, a samim tim i analitički odrediti Jakobijan, moguće je primeniti numeričku metodu za određivanje Jakobijana.

Kao što je u prethodnom zadatku napomenuto, kretanje zglobova doprinosi i linearnom i ugaonom kretanju hvataljke, pa je Jakobijan matricu moguće posmatrati i u sledećem obliku:

$$J = \begin{bmatrix} J_{L1} & J_{L2} & \dots & J_{Ln} \\ J_{U1} & J_{U2} & \dots & J_{Un} \end{bmatrix},$$

pri čemu svaki od elemenata J_{Li} i J_{Ui} predstavlja vektor kolonu dimenzije 3×1 . Može se zaključiti da prvi deo kolone odgovara doprinosu i -tog zgloba linearnom, a drugi deo ugaonom kretanju završnog uređaja.

Doprinos kretanja translatorsnog zgloba na kretanje završnog uređaja je definisan kao:

$$\begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ui} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

pri čemu je \mathbf{z}_{i-1} osa translacije i -tog zgloba robota. Ovakav rezultat je intuitivan jer translatorno pomeranje zgloba doprinosi istom takvom translatorsnom pomeraju ostatka mehanizma koji se nalazi iza njega u kinematičkom lancu, pa i samog završnog uređaja.

Doprinos kretanja rotacionog zgloba na kretanje završnog uređaja se može definisati na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ui} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,H} \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix},$$

gde je z_{i-1} osa rotacije i -tog zgloba robota, a $r_{i-1,H}$ rastojanje od ose rotacije do koordinatnog sistema završnog uređaja. Može se zaključiti da će rotacija zgloba doprinosti linearnom kretanju (linearnoj brzini) završnog uređaja na sledeći način:

$$J_{Li} \cdot \dot{q}_i = \omega_i \times r_{i-1,H} = (z_{i-1} \times r_{i-1,H}) \cdot \dot{q}_i,$$

dok će rotacionom kretanju doprinosti samom svojom rotacionom brzinom.

Ukoliko se ose rotacije i translacije postavle na odgovarajući način, moguće je odrediti sve potrebne parametre za numeričko izračunavanje Jakobijana.

Prvo je potrebno odrediti z -ose svih zglobova robota SCARA konfiguracije:

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad z_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zatim je potrebno odrediti pozicije koordinatnih početaka u odnosu na bazni koordinatni sistem kako bi bilo moguće odrediti odgovarajuća rastojanja od osa rotacije pojedinog zgloba do završnog uređaja (pozicije je moguće odrediti iz matrica homogene transformacije):

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{O}_1 &= \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{O}_2 &= \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{O}_3 &= \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_3 \end{bmatrix}, & \mathbf{O}_4 &= \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_3 - l_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sada je potrebno razmatrati redom doprinose pojedinačnih zglobova na kretanje završnog uređaja:

Zglob 1 – rotacioni zglob:

$$\begin{bmatrix} J_{L1} \\ J_{U1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \times (\overline{\mathbf{O}_0 \mathbf{O}_4}) \\ z_0 \end{bmatrix},$$

$$J_{L1} = z_0 \times (\overline{\mathbf{O}_0 \mathbf{O}_4}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_3 - l_4 \end{bmatrix},$$

$$J_{L1} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{U1} = \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zglob 2 – rotacioni zglob:

$$\begin{bmatrix} J_{L2} \\ J_{U2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \times (\overline{\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_4}) \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix},$$

$$J_{L2} = \mathbf{z}_1 \times (\overline{\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_4}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_3 - l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{U2} = \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zglob 3 – translatorni zglob:

$$\begin{bmatrix} J_{L3} \\ J_{U3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$J_{L3} = \mathbf{z}_2 \times (\overline{\mathbf{O}_2 \mathbf{O}_4}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad J_{U3} = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zglob 4 – rotacioni zglob:

$$\begin{bmatrix} J_{L4} \\ J_{U4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_3 \times (\overline{\mathbf{O}_3 \mathbf{O}_4}) \\ \mathbf{z}_3 \end{bmatrix},$$

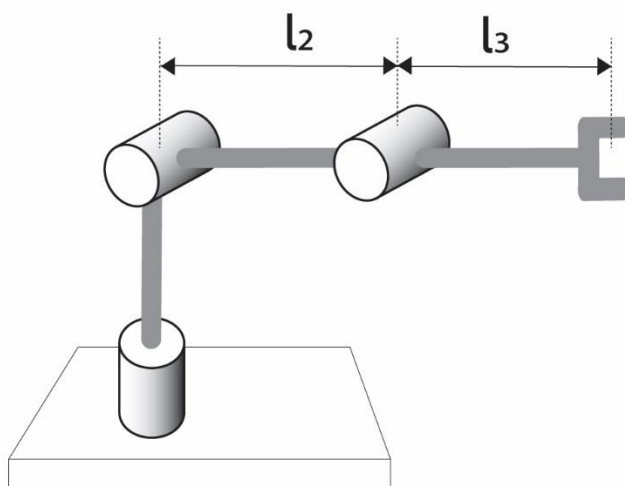
$$J_{L4} = \mathbf{z}_3 \times (\overline{\mathbf{O}_3 \mathbf{O}_4}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J_{U4} = \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je moguće napisati kompletnu Jakobijan matricu na sledeći način:

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) & 0 & 0 \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 49

Analitičkom metodom izračunati Jakobijan matricu koja preslikava kretanje pojedinih zglobova u kretanje završnog uređaja za industrijskog robota antropomorfne konfiguracije prikazanog na Slici 57.



Slika 57 – Funkcionalna šema antropomorfnog robota.

Rešenje:

Ukoliko se iskoristi rešenje Zadataka 31 moguće je dobiti jednačine direktne kinematike:

$$x = \cos(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)),$$

$$y = \sin(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)),$$

$$z = l_3 \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_2).$$

Diferenciranjem datih jednačina kinematike po svim unutrašnjim koordinatama dobijaju se elementi Jakobijan matrice:

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = -\sin(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)),$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_2} = \cos(q_1)(-l_3 \sin(q_2 + q_3) - l_2 \sin(q_2)),$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_3} = \cos(q_1)(-l_3 \sin(q_2 + q_3)),$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = \cos(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)),$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_2} = \sin(q_1)(-l_3 \sin(q_2 + q_3) - l_2 \sin(q_2)),$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_3} = \sin(q_1)(-l_3 \sin(q_2 + q_3)),$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_2} = l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_3} = l_3 \cos(q_2 + q_3).$$

Iz gore navedenih izraza možemo napisati kompletnu Jakobijan matricu:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix},$$

$$J_{11} = -\sin(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)),$$

$$J_{12} = \cos(q_1)(-l_3 \sin(q_2 + q_3) - l_2 \sin(q_2)),$$

$$J_{13} = \cos(q_1)(-l_3 \sin(q_2 + q_3)),$$

$$J_{21} = \cos(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)),$$

$$J_{22} = \sin(q_1)(-l_3 \sin(q_2 + q_3) - l_2 \sin(q_2)),$$

$$J_{23} = \sin(q_1)(-l_3 \sin(q_2 + q_3)),$$

$$J_{31} = 0,$$

$$J_{32} = l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2),$$

$$J_{33} = l_3 \cos(q_2 + q_3).$$

Zadatak 50

Numeričkom metodom izračunati Jakobijan matricu koja preslikava kretanje pojedinih zglobova u kretanje završnog uređaja za industrijskog robota antropomorfne konfiguracije prikazanog na Slici 57.

Rešenje:

Prema postupku iz Zadatka 48, potrebno je odrediti z-ose, odnosno ose rotacije i pozicije koordinatnih sistema zglobova robota, gde su ose rotacije date sa:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

U skladu sa Slikom 57, pozicije koordinatnih sistema su definisani kao:

$$\mathbf{o}_0 = \mathbf{o}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{o}_2 = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1) \cos(q_2) \\ l_2 \sin(q_1) \cos(q_2) \\ l_2 \sin(q_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{o}_3 = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1) \cos(q_2) + l_3 \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_2 \sin(q_1) \cos(q_2) + l_3 \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}.$$

Sada je moguće posmatrati doprinose svakog zgloba na kretanje završnog uređaja. Kako je ovo konfiguracija sa tri stepena slobode, moguće je uticati samo na poziciju završnog uređaja ali ne i na orijentaciju. Prema tome, potrebno je i dovoljno razmatrati samo doprinos zglobova linearnom kretanju:

Zglob 1 – rotacioni zglob:

$$\mathbf{J}_{L1} = \mathbf{z}_0 \times (\overline{\mathbf{o}_0 \mathbf{o}_3}),$$

$$\mathbf{J}_{L1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1) \cos(q_2) + l_3 \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_2 \sin(q_1) \cos(q_2) + l_3 \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{L1} = \begin{bmatrix} -\sin(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)) \\ \cos(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zglob 2 – rotacioni zglob:

$$J_{L2} = \mathbf{z}_1 \times (\overline{\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_3}),$$

$$J_{L2} = \begin{bmatrix} \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1) \cos(q_2) + l_3 \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_2 \sin(q_1) \cos(q_2) + l_3 \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix},$$

$$J_{L2} = \begin{bmatrix} -\cos(q_1)(l_3 \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_2)) \\ -\sin(q_1)(l_3 \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_2)) \\ l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2) \end{bmatrix}.$$

Zglob 3 – rotacioni zglob:

$$J_{L3} = \mathbf{z}_2 \times (\overline{\mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3}) = \begin{bmatrix} \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3 \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_3 \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix},$$

$$J_{L3} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_1) \\ -l_3 \sin(q_2 + q_3) \sin(q_1) \\ l_3 \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix}.$$

Kompletna Jakobijan matrica ima sledeći oblik:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix},$$

$$J_{11} = -\sin(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)),$$

$$J_{12} = \cos(q_1)(-l_3 \sin(q_2 + q_3) - l_2 \sin(q_2)),$$

$$J_{13} = \cos(q_1)(-l_3 \sin(q_2 + q_3)),$$

$$J_{21} = \cos(q_1)(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)),$$

$$J_{22} = \sin(q_1)(-l_3 \sin(q_2 + q_3) - l_2 \sin(q_2)),$$

$$J_{23} = \sin(q_1) \cdot (-l_3 \sin(q_2 + q_3)),$$

$$J_{31} = 0,$$

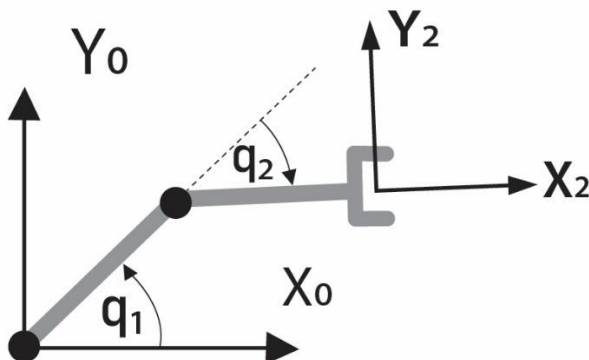
$$J_{32} = l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2),$$

$$J_{33} = l_3 \cos(q_2 + q_3).$$

Zadatak 51

Na Slici 58 je prikazan manipulator sa 2 stepena slobode čije su dužine segmenata $l_1 = l_2 = 0.5\text{m}$.

- Odrediti komponente brzine završnog uređaja \dot{x} i \dot{y} u koordinatnom sistemu baze robota $O_0-x_0y_0z_0$ i u koordinatnom sistemu završnog uređaja $O_2-x_2y_2z_2$, za zadate brzine kretanja zglobova \dot{q}_1 i \dot{q}_2 .
- Odrediti brzine zglobova \dot{q}_1 i \dot{q}_2 za zadate brzine kretanja završnog uređaja $\dot{x} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $\dot{y} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ u sledeća tri položaja robota, gde se završni uređaj nalazi na x -osi koordinatnog sistema osnove:
 - $q_1 = 60^\circ$, $q_2 = -120^\circ$,
 - $q_1 = 30^\circ$, $q_2 = -60^\circ$,
 - $q_1 = 5^\circ$, $q_2 = -10^\circ$.
- Odrediti pozicije singulariteta.



Slika 58 – Ravanski manipulator sa dva stepena slobode.

Rešenje:

- Najpre je potrebno odrediti komponente brzine završnog uređaja \dot{x} i \dot{y} u koordinatnom sistemu baze robota $O_0 - x_0y_0z_0$ i u koordinatnom sistemu završnog uređaja $O_2 - x_2y_2z_2$, za zadate brzine kretanja zglobova \dot{q}_1 i \dot{q}_2 . Potrebno je izračunati Jakobijan matricu koja će dati vezu između unutrašnjih i spoljašnjih koordinata.

Ukoliko se za manipulator sa dva stepena slobode u jednoj ravni odrede DH parametre, moguće je naći ukupnu matricu homogene transformacije od baze robota do završnog uređaja.

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0

Iz tablice DH parametara se dobija odgovarajuća matrica homogene transformacije:

$$H_0^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za izračunavanje Jakobijan matrice sada je potrebno odrediti parcijalne izvode spoljašnjih koordinata po svim unutrašnjim koordinatama:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q_1} &= -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2), & \frac{\partial x}{\partial q_2} &= -l_2 \sin(q_1 + q_2), \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} &= l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2), & \frac{\partial y}{\partial q_2} &= l_2 \cos(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

Veza između brzina u spoljašnjim i unutrašnjim koordinatama data je sa:

$$\dot{X} = J\dot{q}.$$

Zamenom dobijenih vrednosti matrica brzina unutrašnjih i spoljašnjih koordinata, kao i Jakobijan matrice, dobija se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix},$$

$$\dot{x} = (-l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2))\dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2)\dot{q}_2,$$

$$\dot{y} = (l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2))\dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)\dot{q}_2,$$

Dobijena brzina je iskazana u globalnom koordinatnom sistemu, odnosno u baznom koordinatnom sistemu. Da bi se brzina završnog uređaja prikazala u koordinatnom sistemu hvataljke, potrebno je vektor brzine zarotirati za vrednost rotacione matrice koja preslikava rotaciju od baze do završnog uređaja. Ona je data sa:

$$R_0^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) & 0 \\ \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Brzina po z osi je jednaka nuli zbog konstrukcije samog robota koji nema mogućnost da se kreće po z osi. Brzina završnog uređaja prikazana u $O_2-x_2y_2z_2$ je data kao:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) & 0 \\ \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \cos(q_1 + q_2) - \dot{y} \sin(q_1 + q_2) + \dot{z} \cdot 0 \\ \dot{x} \sin(q_1 + q_2) + \dot{y} \cos(q_1 + q_2) + \dot{z} \cdot 0 \\ \dot{x} \cdot 0 + \dot{y} \cdot 0 + \dot{z} \cdot 1 \end{bmatrix}.$$

$$\dot{x}_2 = (-l_1 \sin(2q_1 + q_2) - l_2 \sin(2q_1 + 2q_2))\dot{q}_1 - l_2 \sin(2q_1 + 2q_2)\dot{q}_2,$$

$$\dot{y}_2 = (l_1 \cos(2q_1 + q_2) + l_2 \cos(2q_1 + 2q_2))\dot{q}_1 + l_2 \cos(2q_1 + 2q_2)\dot{q}_2,$$

$$\dot{z}_2 = 0.$$

b) U ovom delu zadatka potrebno je odrediti brzine zglobova \dot{q}_1 i \dot{q}_2 za zadate brzine kretanja završnog uređaja $\dot{x} = 1 \frac{m}{s}$ i $\dot{y} = 0 \frac{m}{s}$ u sledeća tri položaja robota gde se završni uređaj nalazi na x-osi koordinatnog sistema osnove:

- 1) $q_1 = 60^\circ$, $q_2 = -120^\circ$,
- 2) $q_1 = 30^\circ$, $q_2 = -60^\circ$,
- 3) $q_1 = 5^\circ$, $q_2 = -10^\circ$.

Ukoliko je poznato kretanje u spoljašnjim koordinatama, odnosno brzina završnog uređaja, pritom je potrebno preračunati brzinu u zglobovima, onda važi izraz:

$$\dot{X} = J\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = J^{-1}\dot{X}.$$

Ukoliko je Jakobijan matrica kvadratnog oblika i nije singularna, odnosno broj spoljašnjih koordinata je jednak broju unutrašnjih koordinata, moguće je jednoznačno odrediti inverznu Jakobijan matricu:

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \cdot \text{adj}(J),$$

$$\det(J) = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21},$$

$$\begin{aligned} \det(J) &= -l_1 l_2 \sin(q_1) \cos(q_1 + q_2) - l_2^2 \sin(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2) \\ &\quad + l_1 l_2 \sin(q_1 + q_2) \cos(q_1) + l_2^2 \sin(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2), \end{aligned}$$

$$\det(J) = l_1 l_2 \sin(q_2),$$

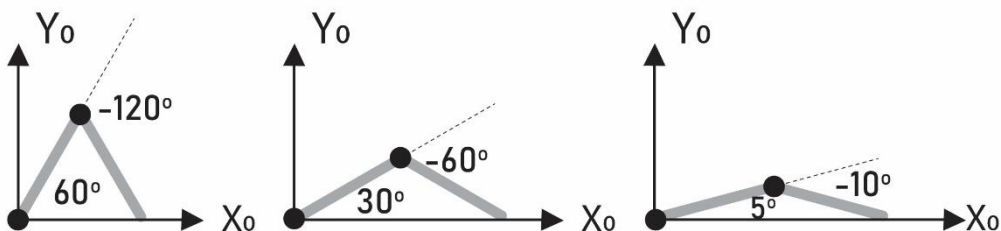
$$\text{adj}(J) = \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix},$$

$$\text{adj}(J) = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) & -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

Posle sređivanja dobija se:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{l_2 \cos(q_1 + q_2)}{l_1 l_2 \sin(q_2)} & \frac{l_2 \sin(q_1 + q_2)}{l_1 l_2 \sin(q_2)} \\ \frac{-l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2)}{l_1 l_2 \sin(q_2)} & \frac{-l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2)}{l_1 l_2 \sin(q_2)} \end{bmatrix}.$$

Ukoliko se sada zamene brojne vrednosti za sva tri slučaja dobijaju se brzine u zglobovima koje su potrebne da bi se realizovalo zadato kretanje.



Slika 59. Robot sa dva stepena slobode u tri različite konfiguracije.

1) $q_1 = 60^\circ, q_2 = -120^\circ$

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{X},$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{0.2165} \begin{bmatrix} 0.25 & -0.4330 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.1547 \\ 2.3095 \end{bmatrix}.$$

2) $q_1 = 30^\circ, q_2 = -60^\circ$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.2165} \begin{bmatrix} 0.4330 & -0.25 \\ -0.8660 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3) $q_1 = 5^\circ, q_2 = -10^\circ$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.0434} \begin{bmatrix} 0.4981 & 0.0436 \\ -0.9962 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.4770 \\ 22.9539 \end{bmatrix}.$$

Može se primetiti da se iz slučaja u slučaj robot kreće ka singularnom položaju (opružen položaj duž x -ose). Kada se robot nađe u singularom položaju, on gubi jedan stepen slobode, u ovom slučaju neće biti moguće pomeriti robota po x -osi. Takođe se može zaključiti da prilaskom robota ka singularnoj poziciji, brzina u

zglobovima raste za istu zahtevanu brzinu u spoljašnjim koordinatama, što je karakteristika blizine singularnih položaja.

c) Singularitete je moguće naći ukoliko se odrede pozicije robota za koje će determinanta Jakobijan matrice biti jednaka nuli. Odnosno, tada Jakobijan matrica nema potpun rang:

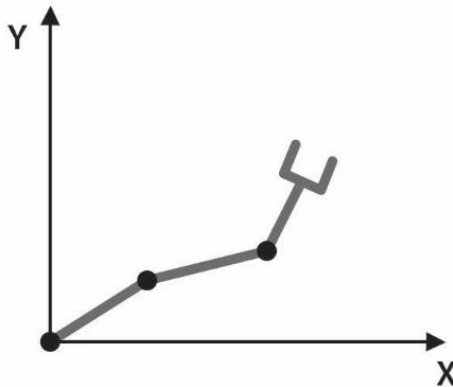
$$\det(\mathbf{J}) = l_1 l_2 \sin(q_2) = 0.$$

Determinanta će biti jednaka nuli ako važi da je:

$$\sin(q_2) = 0 \Rightarrow q_2 = k\pi.$$

Zadatak 52

Naći položaje singulariteta planarnog manipulatora sa tri segmenta čiji su svi zglobovi rotacioni.



Slika 60. Planarni manipulator sa tri stepena slobode.

Rešenje:

Slično kao i kod planarnog manipulatora sa dva segmenta, moguće je odrediti poziciju i orijentaciju završnog uređaja u zavisnosti od pozicija zglobova robota:

$$x = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$\psi = q_1 + q_2 + q_3.$$

Iz gornjih izraza parcijalnom diferencijacijom moguće je odrediti Jakobijan matricu:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu su elementi Jakobijan matrice dati sa:

$$J_{11} = -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) - l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{12} = -l_2 \sin(q_1 + q_2) - l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{13} = -l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{21} = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{22} = l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{23} = l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3).$$

Za određivanje singulariteta potrebno je odrediti za koje pozicije robota Jakobijan matrica gubi pun rang, odnosno kada je njena determinanta jednaka nuli:

$$\det(J) = J_{11}J_{22}J_{33} + J_{12}J_{23}J_{31} + J_{13}J_{21}J_{32} - (J_{11}J_{23}J_{32} + J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{22}J_{31}),$$

$$\det(J) = l_1 l_2 \sin(q_2) = 0.$$

Determinanta će biti jednaka nuli ako važi:

$$\sin(q_2) = 0 \Rightarrow q_2 = k\pi.$$

Zadatak 53

Za planarnu konfiguraciju sa tri segmenta paralelnih osa rotacije zglobova iz prethodnog zadatka odrediti brzine kretanja zglobova \dot{q}_1 , \dot{q}_2 i \dot{q}_3 tako da robot ostvari željeno kretanje završnog uređaja datog sa komponentama brzine $\dot{x} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\dot{y} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, i da se pritom minimizuje Euklidska razlika brzina zglobova. Dužine segmenata su: $l_1 = l_2 = l_3 = 0.5 \text{ m}$, a pozicije zglobova u tački od interesa: $q_1 = 30^\circ$, $q_2 = 45^\circ$ i $q_3 = 60^\circ$.

Rešenje:

U ovom zadatku broj stepeni slobode kojima je potrebno upravljati je manji nego broj stepeni slobode koji poseduje manipulator. To znači da je manipulator redundantan, odnosno broj jednačina koje opisuju direktnu kinematiku je veći od broja nepoznatih koje opisuju sistem, te je teorijski moguće odrediti beskonačan broj rešenja. Jedan način za izbor rešenja jeste minimizacija Euklidske norme brzine kretanja zglobova robota.

Rešenje se može dobiti metodom Lagražovih multiplikatora:

$$\Lambda(\dot{q}) = (\dot{q})^T \dot{q} + \lambda^T (J\dot{q} - \dot{X}),$$

$$\text{gde je } \lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2].$$

Izraz će biti minimalan kada je $\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} = 0$, i u tom slučaju je:

$$2\dot{q} + J^T \lambda = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$\dot{q} = \frac{-J^T \lambda}{2}.$$

Ukoliko važi da je:

$$\dot{X} = J\dot{q} = J \frac{-J^T \lambda}{2},$$

posle sređivanja se dobija:

$$\lambda = -2(JJ^T)^{-1} \dot{X},$$

pod pretpostavkom da $(JJ^T)^{-1}$ postoji.

Ukoliko se poslednji izraz uvrsti u izraz za \dot{q} dobija se:

$$\dot{q} = J^T (JJ^T)^{-1} \dot{X},$$

$$\dot{q} = J_D^{PS} \cdot \dot{X},$$

pri čemu se $J^T (JJ^T)^{-1}$ naziva desnim pseudoinverznim Jakobijanom i obeležava se sa J_D^{PS} .

Kada se sve brojne vrednosti zamene u gornji izraz, dobija se brzina zglobova koja će zadovoljiti prethodne uslove:

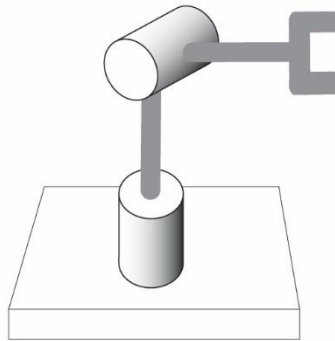
$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix},$$

pri čemu je Jakobijan matrica ovog manipulatora prikazana u Zadatku 52.

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1.7794 \\ -2.1311 \\ -3.2546 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Zadatak 54

Za konfiguraciju sa dva stepena slobode prikazanu na Slici 61, odrediti brzine zglobova \dot{q}_1 i \dot{q}_2 tako da se minimizuje odstupanje od željenog kretanja završnog uređaja datog sa $\dot{x} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\dot{y} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $\dot{z} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dužine segmenata su $l_1 = l_2 = 0.5 \text{ m}$, a pozicije zglobova u trenutku u kome se minimizuje odstupanje su $q_1 = 30^\circ$ i $q_2 = 45^\circ$.



Slika 61 – Robot sa dva stepena slobode.

Rešenje:

U ovom slučaju broj stepeni slobode zadatka koji robot izvršava je veći od broja stepeni koje možemo direktno da upravljamo, pa se može desiti da ne postoji $\dot{\mathbf{q}}$ koje će obezbediti željeno kretanje.

Shodno tome potrebno je minimizovati srednju kvadratnu grešku praćenja zadatog kretanja. Neka je vektor $\dot{\mathbf{q}}^*$ onaj set brzina unutrašnjih koordinata za koji je srednja kvadratna greška:

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}^2 = (\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* - \dot{\mathbf{X}})^T(\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* - \dot{\mathbf{X}}),$$

minimalna. Ukoliko se prethodni izraz razvije, dobija se:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^*)^T(\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^*) - 2(\dot{\mathbf{X}})^T\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* + \dot{\mathbf{X}}^T\dot{\mathbf{X}}.$$

Da bi se greška minimizovala, gornji izraz je potrebno diferencirati i izjednačiti sa nulom:

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}^{*T}(\mathbf{J}^T\mathbf{J})\dot{\mathbf{q}}^*) - \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(2\dot{\mathbf{X}}^T\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^*) = 0,$$

odakle se nakon sređivanja dobija:

$$(\mathbf{J}^T\mathbf{J})\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{J}^T\dot{\mathbf{X}},$$

odnosno:

$$\dot{\mathbf{q}}^* = (\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}^T\dot{\mathbf{X}},$$

pod uslovom da $(\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1}$ postoji. Pritom se $(\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}^T$ naziva levim pseudo inverznim Jakobijanom i skraćeno se zapisuje kao \mathbf{J}_L^{PS} .

Za prikazan manipulator Jakobijan matrica je data sa:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_2 \cos(q_2) \sin(q_1) & -l_2 \cos(q_1) \sin(q_2) \\ l_2 \cos(q_1) \cos(q_2) & -l_2 \sin(q_1) \sin(q_2) \\ 0 & l_2 \cos(q_2) \end{bmatrix}.$$

Kada uvrstimo sve brojne vrednosti u gornje izraze dobija se brzina zglobova robota koja će u datom trenutku da obezbedi minimalno odstupanje od željenog kretanja zadatog u spoljašnjim (funktionalnim) koordinatama:

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} 0.6563 \\ -3.6742 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}.$$

6

Dinamika

Da bi se ostvarilo željeno kretanje robota i/ili savladalo neko statičko opterećenje kome je robot izložen, potrebno je odrediti kolike momente, odnosno sile treba ostvariti u pogonima robota. Sa druge strane, potrebno je predvideti kretanje robota ukoliko se primene odgovarajući pogonski momenti odnosno sile. Odgovore na ova pitanja, koji se nalaze u modelima dinamike robota, čitalac može naći u zadacima ovog poglavlja. Osim ovde navedenog inverznog i direktnog problema dinamike, u zadacima se primenom Njutn-Ojlerovog i Lagranžovog pristupa procenjuju inercijalni efekti, brzinski efekti (centripetalni i Koriolisov) i efekti gravitacije kod robota koji su često i predmet izračunavanja kod naprednih upravljačkih algoritama robota.

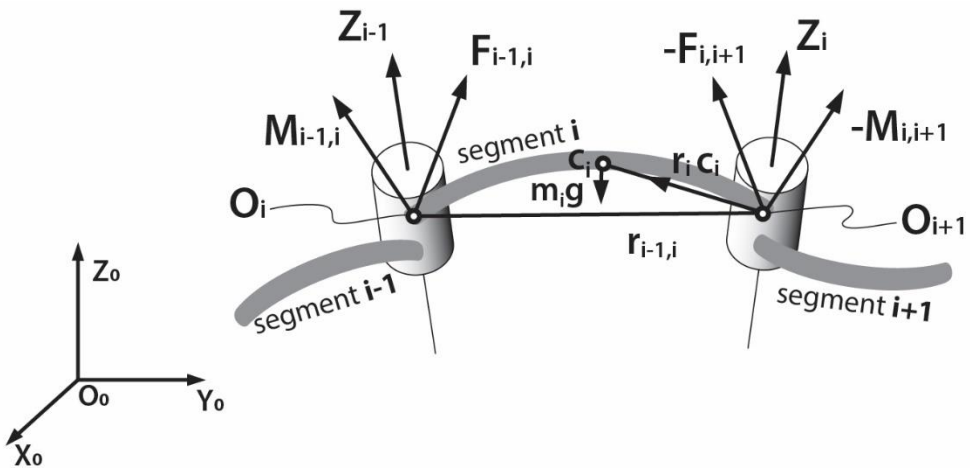
Zadatak 55

Odrediti statičko opterećenje pogona u zglobovima robota usled gravitacije za proizvoljan položaj minimalne konfiguracije:

- a) SCARA robota,
- b) Cilindričnog robota,
- c) Antropomorfnog robota.

Rešenje:

Na početku je potrebno razmotriti koje sile i momenti deluju na segmente manipulatora koji je statičan i na kojeg ne deluju nikakvi spoljašnji uticaji. Jedino opterećenje koje će se pojaviti u zglobovima jeste ono od same težine manipulatora. U opštem slučaju, na i -ti segment robota deluju sile i momenti kao što je prikazano na Slici 62.



Slika 62 – Sile i momenti koji deluju na i -ti segment.

Kako je posmatrani sistem u ravnoteži, može se opisati sa dve vektorske jednačine: $\Sigma F_i = 0$ i $\Sigma M_i = 0$. Odnosno:

$$\Sigma F_i = 0 \Rightarrow F_{i-1,i} - F_{i,i+1} + m_i g = 0,$$

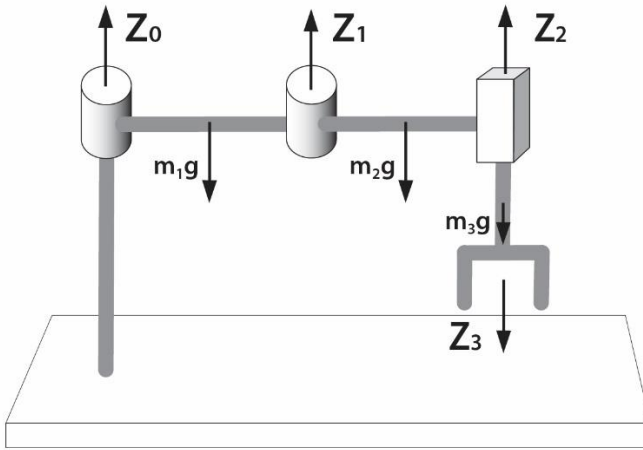
$$\Sigma M_i = 0 \Rightarrow M_{i-1,i} - M_{i,i+1} - (r_{i-1,i} + r_{i,c_i}) \times F_{i-1,i} + (-r_{i,c_i}) \times (-F_{i,i+1}) = 0.$$

Kako na manipulator ne deluju nikakve spoljašnje sile i momenti (ne postoji kontakt sa okolinom), može se smatrati da važi da je $M_{n,n+1} = 0$ i $F_{n,n+1} = 0$.

Moment koji će se usled gravitacionog dejstva javiti u zglobu moguće je zatim odrediti kao:

- $\tau_i = \mathbf{z}_{i-1}^T \cdot \mathbf{F}_{i-1,i}$ – za translatorsni zglob.
- $\tau_i = \mathbf{z}_{i-1}^T \cdot \mathbf{M}_{i-1,i}$ – za rotacioni zglob.

a) SCARA robot



Slika 63. Funkcionalna šema SCARA robota sa dejstvom gravitacije.

Kako manipulator nije u kontaktu sa okolinom važi da je $\mathbf{M}_{3,4} = 0$ i $\mathbf{F}_{3,4} = 0$.

Sada je potrebno postaviti jednačine ravnoteže za sve zglobove minimalne konfiguracije i izračunati odgovarajuće sile i momente koji deluju na zglobove robota usled njegove težine.

1) Prvi segment:

$$\Sigma \mathbf{F}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{0,1} - \mathbf{F}_{1,2} + m_1 \mathbf{g} = 0$$

$$\Sigma \mathbf{M}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_{0,1} - \mathbf{M}_{1,2} - (\mathbf{r}_{0,1} + \mathbf{r}_{1,c_1}) \times \mathbf{F}_{0,1} + (-\mathbf{r}_{1,c_1}) \times (-\mathbf{F}_{1,2}) = 0$$

2) Drugi segment:

$$\Sigma \mathbf{F}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{1,2} - \mathbf{F}_{2,3} + m_2 \mathbf{g} = 0$$

$$\Sigma \mathbf{M}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_{1,2} - \mathbf{M}_{2,3} - (\mathbf{r}_{1,2} + \mathbf{r}_{2,c_2}) \times \mathbf{F}_{1,2} + (-\mathbf{r}_{2,c_2}) \times (-\mathbf{F}_{2,3}) = 0$$

3) Treći segment:

$$\Sigma \mathbf{F}_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{2,3} + m_3 \mathbf{g} = 0$$

$$\Sigma \mathbf{M}_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_{2,3} - (\mathbf{r}_{2,3} + \mathbf{r}_{3,c_3}) \times \mathbf{F}_{2,3} = 0$$

Pre nego što se iz prikazanih jednačina izračunaju potrebne sile i momenti, potrebno je odrediti vektore koji određuju rastojanja od centra zglobova do centra mase segmenta, kao i rastojanja od jednog do drugog zgloba.

$$\mathbf{r}_{0,1} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,2} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 + q_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,c_1} = \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \cos(q_1) \\ -\frac{l_1}{2} \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{2,c_2} = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \cos(q_1 + q_2) \\ -\frac{l_2}{2} \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{3,c_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_3 + q_3}{2} \end{bmatrix}.$$

Pri čemu je uzeta pretpostavka da su segmenti manipulatora homogeni i da se centar mase svakog segmenta nalazi na njegovoj sredini.

Iz jednačina prikazanih za treći zglob se može odrediti:

$$\mathbf{F}_{2,3} = -m_3 \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{2,3} = (\mathbf{r}_{2,3} + \mathbf{r}_{3,c_3}) \times \mathbf{F}_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_3 + q_3}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odakle se dobija opterećenje trećeg zgloba:

$$\tau_3 = \mathbf{z}_2^T \cdot \mathbf{F}_{2,3} = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 g \end{bmatrix} = m_3 g.$$

Ukoliko se sada vrednosti sila i momenata koje deluju na treći zglob uvrste u jednačine ravnoteže za drugi zglob dobija se:

$$\mathbf{F}_{1,2} = \mathbf{F}_{2,3} - m_2 \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_2 + m_3)g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \mathbf{M}_{2,3} + (\mathbf{r}_{1,2} + \mathbf{r}_{2,c_2}) \times \mathbf{F}_{1,2} - (-\mathbf{r}_{2,c_2}) \times (-\mathbf{F}_{2,3}),$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \cos(q_1 + q_2) \\ \frac{l_2}{2} \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_2 + m_3)g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \cos(q_1 + q_2) \\ \frac{l_2}{2} \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{(m_2 + 2m_3)l_2 \sin(q_1 + q_2)g}{2} \\ -(m_2 + 2m_3)l_2 \cos(q_1 + q_2)g \\ \frac{2}{0} \end{bmatrix}.$$

Odakle se dobija opterećenje drugog zgloba:

$$\tau_2 = \mathbf{z}_1^T \cdot \mathbf{M}_{1,2} = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{(m_2 + 2m_3)l_2 \sin(q_1 + q_2)g}{2} \\ -(m_2 + 2m_3)l_2 \cos(q_1 + q_2)g \\ \frac{2}{0} \end{bmatrix} = 0.$$

Ukoliko se sada uvrste dobijene sile i momenti za drugi zglob u jednačine prvog zgloba, dobija se:

$$\mathbf{F}_{0,1} = \mathbf{F}_{1,2} - m_1 \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_2 + m_3)g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_1 + m_2 + m_3)g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{0,1} = \mathbf{M}_{1,2} + (\mathbf{r}_{0,1} + \mathbf{r}_{1,c_1}) \times \mathbf{F}_{0,1} - (-\mathbf{r}_{1,c_1}) \times (-\mathbf{F}_{1,2}),$$

$$\mathbf{M}_{0,1} = \begin{bmatrix} \frac{(m_2 + 2m_3)l_2 \sin(q_1 + q_2)g}{2} \\ -(m_2 + 2m_3)l_2 \cos(q_1 + q_2)g \\ \frac{2}{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \cos(q_1) \\ \frac{l_1}{2} \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_1 + m_2 + m_3)g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \cos(q_1) \\ \frac{l_1}{2} \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m_2 + m_3)g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gde je:

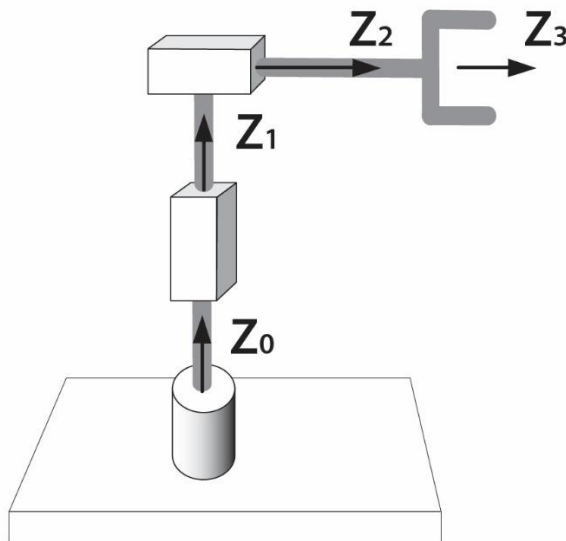
$$M_1 = \frac{g(l_1 \sin(q_1)(m_1 + 2m_2 + 2m_3) + l_2 \sin(q_1 + q_2)(m_2 + 2m_3))}{2},$$

$$M_2 = \frac{-g(l_1 \cos(q_1)(m_1 + 2m_2 + 2m_3) + l_2 \cos(q_1 + q_2)(m_2 + 2m_3))}{2}.$$

Odakle se može dobiti opterećenje prvog zgloba usled delovanja gravitacije:

$$\tau_1 = \mathbf{z}_0^T \cdot \mathbf{M}_{0,1} = 0.$$

b) Cilindrični robot



Slika 64 – Minimalna konfiguracija cilindričnog robota.

Kao i za prethodni slučaj, manipulator nije u kontaktu sa okolinom.

Jednačine ravnoteže su identične kao i u prethodnom slučaju pa nema potrebe pisati ih iz početka. Jedina stvar koja se razlikuje jeste konstrukcija robota, odnosno rastojanja između zglobova, kao i rastojanja između zglobova i centra mase segmenata. Takođe, vektori rotacije/translacije zglobova su orijentisani na u skladu sa konfiguracijom robota:

$$\mathbf{r}_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 + q_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{2,3} = \begin{bmatrix} (l_3 + q_3)\cos(q_1) \\ (l_3 + q_3)\sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,c_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{2,c_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_2 + q_2}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{3,c_3} = \begin{bmatrix} -\frac{(l_3 + q_3)\cos(q_1)}{2} \\ -\frac{(l_3 + q_3)\sin(q_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ukoliko se sada krene od jednačina za poslednji zglob, dobija se:

$$\mathbf{F}_{2,3} = -m_3\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{2,3} = (\mathbf{r}_{2,3} + \mathbf{r}_{3,c_3}) \times \mathbf{F}_{2,3} = \begin{bmatrix} \frac{l_3 + q_3}{2}\cos(q_1) \\ \frac{l_3 + q_3}{2}\sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{2,3} = \begin{bmatrix} \frac{g(l_3 + q_3)m_3\sin(q_1)}{2} \\ -\frac{g(l_3 + q_3)m_3\cos(q_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sada se može odrediti opterećenje trećeg zgloba usled dejstva gravitacije kao:

$$\tau_3 = \mathbf{z}_2^T \cdot \mathbf{F}_{2,3} = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3g \end{bmatrix} = 0.$$

Ako se sada dobijene sile i momenti uvrste u jednačine ravnoteže drugog zgloba, dobija se:

$$\mathbf{F}_{1,2} = \mathbf{F}_{2,3} - m_2\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_2 + m_3)g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \mathbf{M}_{2,3} + (\mathbf{r}_{1,2} + \mathbf{r}_{2,c_2}) \times \mathbf{F}_{1,2} - (-\mathbf{r}_{2,c_2}) \times (-\mathbf{F}_{2,3}),$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \mathbf{M}_{2,3} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2 + q_2}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_2 + m_3)g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2 + q_2}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3g \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{2,3}.$$

Iz prethodnih izraza moguće je odrediti opterećenje drugog zgloba:

$$\tau_2 = \mathbf{z}_1^T \cdot \mathbf{F}_{1,2} = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_2 + m_3)g \end{bmatrix} = (m_2 + m_3)g.$$

Iz jednačina ravnoteže za prvi zglob moguće je dobiti sledeće:

$$\mathbf{F}_{0,1} = \mathbf{F}_{1,2} - m_1\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_1 + m_2 + m_3)g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{0,1} = \mathbf{M}_{1,2} + (\mathbf{r}_{0,1} + \mathbf{r}_{1,c_1}) \times \mathbf{F}_{0,1} - (-\mathbf{r}_{1,c_1}) \times (-\mathbf{F}_{1,2}),$$

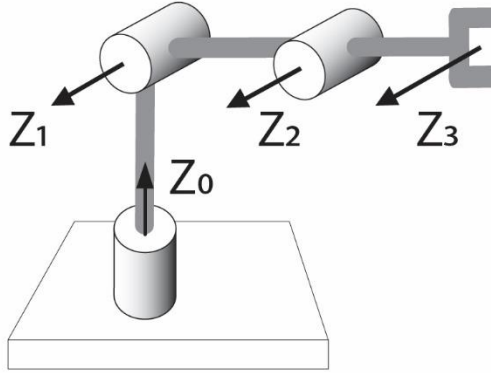
$$\mathbf{M}_{0,1} = \mathbf{M}_{1,2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_1 + m_2 + m_3)g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m_2 + m_3)g \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{1,2}.$$

Moguće je odrediti opterećenje prvog zgloba kao:

$$\tau_1 = \mathbf{z}_0^T \cdot \mathbf{M}_{0,1} = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{g(l_3 + q_3)m_3 \sin(q_1)}{2} \\ -\frac{g(l_3 + q_3)m_3 \cos(q_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

c) Antropomorfní robot

Kao i u prethodnim slučajevima, manipulator nije u kontaktu sa okolinom i važe sve opšte jednačine ravnoteže u zglobovima. Karakteristična su rastojanja između zglobova, rastojanja između zglobova i centara mase segmenata, kao i orijentacija osa rotacije.



Slika 65 – Funkcionalna šema antropomorfnog robota.

$$\mathbf{r}_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,2} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1) \cos(q_2) \\ l_2 \sin(q_1) \cos(q_2) \\ l_2 \sin(q_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{2,3} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_2 \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_2 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,c_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{2,c_2} = \begin{bmatrix} -\frac{l_2 \cos(q_1) \cos(q_2)}{2} \\ -\frac{l_2 \sin(q_1) \cos(q_2)}{2} \\ -\frac{l_2 \sin(q_2)}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{3,c_3} = \begin{bmatrix} -\frac{l_2 \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3)}{2} \\ -\frac{l_2 \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3)}{2} \\ -\frac{l_2 \sin(q_2 + q_3)}{2} \end{bmatrix}.$$

U skladu sa postupkom na primeru prethodna dva robota, ako se izvedeni izrazi uvrste u jednačine ravnoteže, dobija se:

$$\mathbf{F}_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{2,3} = \begin{bmatrix} \frac{gl_3m_3\cos(q_2 + q_3)\sin(q_1)}{2} \\ -\frac{gl_3m_3\cos(q_2 + q_3)\cos(q_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau_3 = \mathbf{z}_2^T \cdot \mathbf{M}_{2,3} = [0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{gl_3m_3\cos(q_2 + q_3)\sin(q_1)}{2} \\ -\frac{gl_3m_3\cos(q_2 + q_3)\cos(q_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau_3 = \frac{gl_3m_3\cos(q_2 + q_3)\cos(q_1)}{2},$$

$$\mathbf{F}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_2 + m_3)g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} M_{1,2,1} \\ M_{1,2,2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau_2 = \mathbf{z}_1^T \cdot \mathbf{M}_{1,2} = [0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} M_{1,2,1} \\ M_{1,2,2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

gde je:

$$M_{1,2,1} = \frac{g\sin(q_1)(l_2m_2\cos(q_2) + 2l_2m_3\cos(q_2) + l_3m_3\cos(q_2 + q_3))}{2},$$

$$M_{1,2,2} = -\frac{g\cos(q_1)(l_2m_2\cos(q_2) + 2l_2m_3\cos(q_2) + l_3m_3\cos(q_2 + q_3))}{2}.$$

Opterećenje drugog zgloba se može napisati kao:

$$\tau_2 = \frac{g\cos(q_1)(l_2m_2\cos(q_2) + 2l_2m_3\cos(q_2) + l_3m_3\cos(q_2 + q_3))}{2},$$

$$\mathbf{F}_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_1 + m_2 + m_3)g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{0,1} = \begin{bmatrix} M_{0,1_1} \\ M_{0,1_2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau_1 = \mathbf{z}_0^T \cdot \mathbf{M}_{0,1} = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} M_{0,1_1} \\ M_{0,1_2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

gde je :

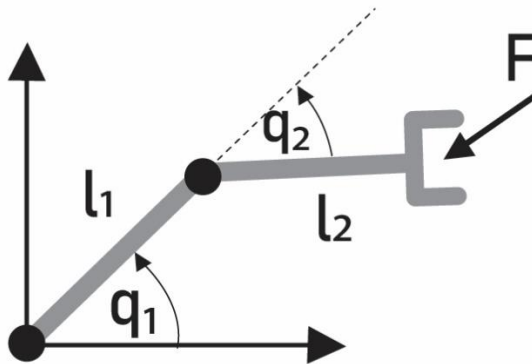
$$M_{0,1_1} = \frac{g \sin(q_1)(l_2 m_2 \cos(q_2) + 2l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3))}{2},$$

$$M_{0,1_2} = -\frac{g \cos(q_1)(l_2 m_2 \cos(q_2) + 2l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3))}{2}.$$

Iz prethodnih primera se može zaključiti da, ukoliko je vektor momenta gravitacionih opterećenja kolinearan sa osom zgloba, dato opterećenje se u potpunosti mora kompenzovati pomoću aktuatora. Ukoliko je vektor momenta gravitacionih opterećenja normalan na osu zgloba, dato opterećenje će se kompenzovati kroz mehaničku strukturu robota i motori neće morati da ga kompenzuju. Ako je položaj vektora opterećenja između ova dva slučaja i zaklapa neki ugao (različit od $k\pi/2$, gde je k ceo broj) sa osom zgloba, jedan deo opterećenja će primiti sama konstrukcija, dok će se ostatak kompenzovati kroz odgovarajući pogonski momenat ili silu.

Zadatak 56

Na Slici 66 je prikazan planarni manipulator sa dva rotaciona zgloba čije su dužine segmenata l_1 i l_2 . Ukoliko na završni uređaj deluju sila i moment predstavljeni šestokomponentnim vektorom F_{ext} , odrediti potrebne pogonske momente koji će kompenzovati dejstvo sile i momenta u funkciji pozicija zglobova robota i F_{ext} .



Slika 66 – Ravanski manipulator sa dva stepena slobode na koga deluje sila F .

Rešenje:

Pretpostavimo da se robot nalazi u stanju mirovanja u trenutku kada na njegov završni uređaj deluje opterećenje F_{ext} . Pogonske momente koji uravnotežavaju ovo opterećenje označićemo sa τ_F .

Kako bismo našli relaciju između spoljašnjeg opterećenja koje deluje na manipulator i pogonskih momenata, potrebno je uvesti princip virtuelnog rada i virtuelnog pomeraja. Virtuelni pomeraj u zglobovima δq_i izaziva linearno δX_H i ugaono $\delta \Phi_H$ virtuelno pomeranje završnog uređaja. Ukoliko se pretpostavi da je robotski mehanizam bez težine (ne posmatramo uticaj gravitacije), i da na manipulator u kontaktu sa okolinom deluje moment $-M_{n,n+1}$ i sila $-F_{n,n+1}$, pri čemu je pogonski moment u zglobovima koji uravnotežuje opterećenje τ_{F_i} , onda je moguće definisati virtuelni rad na sledeći način:

$$\delta w = \tau_{F_1} \delta q_1 + \tau_{F_2} \delta q_2 + \dots + \tau_{F_n} \delta q_n + (-F_{n,n+1})^T \delta X_H + (-M_{n,n+1})^T \delta \Phi_H.$$

Ukoliko je sistem u ravnoteži, virtuelni rad je jednak nuli, odnosno:

$$\delta w = \tau_F^T \delta q - F_{ext}^T \delta X = 0.$$

Kako promenljive $\delta \mathbf{q}$ i $\delta \mathbf{X}$ nisu nezavisne, već važi relacija $\delta \mathbf{X} = \mathbf{J} \delta \mathbf{q}$, prethodni izraz moguće je napisati u sledećem obliku:

$$\delta \mathbf{w} = \boldsymbol{\tau}_F^T \delta \mathbf{q} - \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{J} \delta \mathbf{q} = (\boldsymbol{\tau}_F - \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{ext}) \delta \mathbf{q} = 0.$$

Kako je virtuelni pomeraj različit od nule, da bi prethodna jednakost bila tačna, mora važiti da je:

$$\boldsymbol{\tau}_F = \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{ext}.$$

Ako sada uzmemo u obzir geometriju robota sa Slike 66, Jakobijan matrica ovakvog manipulatora je data sa:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukoliko potom uvrstimo Jakobijan matricu u prethodni izraz, dobijamo potrebne momente za kompenzaciju spoljašnje sile i momenta:

$$\boldsymbol{\tau}_F = \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{ext},$$

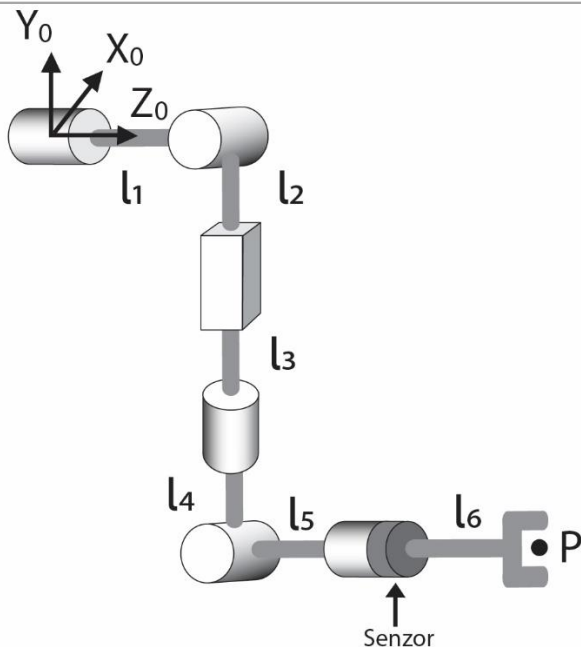
$$\boldsymbol{\tau}_F = \begin{bmatrix} -F_x(l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2)) + F_y(l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2)) + M_z \\ -F_x l_2 \sin(q_1 + q_2) + F_y l_2 \cos(q_1 + q_2) + M_z \end{bmatrix}.$$

Zadatak 57

Na Slici 67 je prikazan robot sa šest stepeni slobode, gde je treći zglob translatorni, a ostali rotacioni. U konfiguraciji robota kao na slici, na završni uređaj robota deluje statička sila F (momenti interakcije su zanemarljivi). Robot poseduje senzore sile/momenta u svakom zglobu pomoću kojih može da meri dejstvo sile/momenta pri kontaktu. Senzori sile/momenta u prva tri zgloba pokazuju merenja: $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 100\text{Nm}$ i $\tau_3 = 50\text{N}$. Odrediti

- Silu \mathbf{F} koja deluje u tački P,
- Očitavanja sa senzora sile i momenta kada bi on bio montiran između sfernog zgloba robota i završnog uređaja kao na slici.

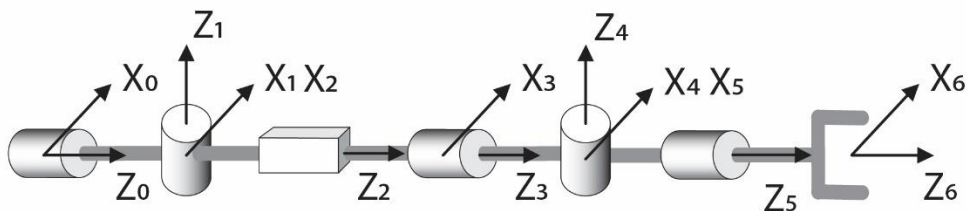
Dužine segmenata su $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = 0.1\text{ m}$.



Slika 67. Funkcionalna šema robota sa 6 stepeni slobode.

Rešenje:

a) Da bismo odredili silu kontakta u tački P, moramo na početku odrediti Jakobijan matricu preslikavanja od koordinatnog sistema baze robota do tačke P. Kako bismo to uradili neophodno je da postavimo DH parametre manipulatora i da izračunamo matricu homogene transformacije od baze robota do završnog uređaja. Funkcionalna šema robota u nultom položaju sa ucrtanim koordinatnim sistemima data je na Slici 68.



Slika 68 – Funkcionalna šema robota sa 6 stepeni slobode sa ucrtanim koordinatnim sistemima prema DH notaciji.

Tablica DH parametara za ovakav manipulator je:

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	$-\pi/2$
2	q_2	0	0	$\pi/2$
3	0	$q_3 + l_2 + l_3$	0	0
4	q_4	l_4	0	$-\pi/2$
5	q_5	0	0	$\pi/2$
6	q_6	$l_5 + l_6$	0	0

Kada se izračuna matrica homogene transformacije od baze robota do završnog uređaja, moguće je odrediti poziciju i orijentaciju završnog uređaja, čijom se diferencijacijom može odrediti odgovarajuću Jakobijan matricu. Kako na završni uređaj ne deluje nikakav moment, možemo posmatrati samo linearni deo. Prema tome, odgovarajuća Jakobijan matrica, za konfiguraciju u kojoj se robot nalazi, se može napisati u sledećem obliku:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & -1 \\ -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eksterna sila koja deluje na završni uređaj se može odrediti kao:

$$\mathbf{F}_{ext} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 3.3333 & 0.6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ 366.6667 \end{bmatrix} \text{ N.}$$

b) Senzor sile i momenta se nalazi montiran između sfernog zgloba i završnog uređaja robota na rastojanju l_6 (Slika 69). Ukoliko znamo kontaktnu silu i moment koji se ostvaruju na mestu kontakta, potrebno je taj vektor sile i momenta transformisati u koordinatni sistem senzora kako bi se dobile vrednosti očitavanja sa senzora.

Transformacija vektora sile i momenta između dva koordinatna sistema i i j je data matricom:

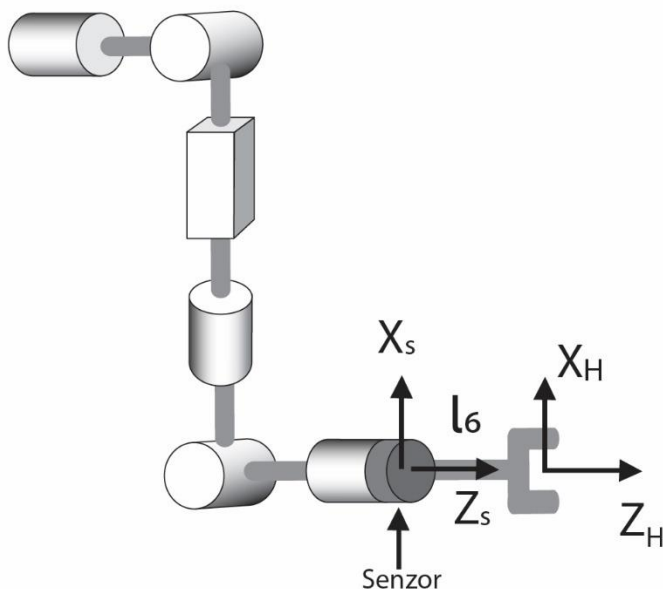
$$\mathbf{F}_i = \mathbf{T}_i^j \mathbf{F}_j,$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_i^j \mathbf{R}_i^j & \mathbf{R}_i^j \end{bmatrix}.$$

Pri čemu matrica \mathbf{R}_i^j predstavlja matricu rotacije između dva koordinatna sistema, a matrica \mathbf{W}_i^j predstavlja matricu rastojanja, tako da je:

$$\mathbf{W}_i^j = \begin{bmatrix} 0 & -d_z & d_y \\ d_z & 0 & -d_x \\ -d_y & d_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Robot sa senzorom je prikazan na Slici 69. U odnosu na referentnu konfiguraciju datu na Slici 69, moguće je proceniti pozicije zglobova $q_1 = 0, q_2 = -\frac{\pi}{2}, q_3 = 0, q_4 = 0, q_5 = \frac{\pi}{2}, q_6 = 0$.



Slika 69 – Funkcionalna šema robota sa 6 stepeni slobode sa senzorom momenta/sile.

Za konfiguraciju prikazanu na Slici 69 matrica rotacije, matrica rastojanja i konačno transformaciona matrica su definisane kao:

$$\mathbf{R}_H^S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_H^S = \begin{bmatrix} 0 & -l_6 & 0 \\ l_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_H^S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ l_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Konačno, izvršavanjem transformacije vektora sile i momenta u koordinatni sistem senzora, moguće je dobiti očitavanje senzora kontaktne sile:

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{T}_H^S \mathbf{F}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ 366.6667 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ 366.6667 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \\ -5 \text{ Nm} \\ 0 \text{ Nm} \end{bmatrix}.$$

Zadatak 58

Dokazati da se pravac glavnih osa elipsoida brzine (manipulabilnosti) i elipsoida sile poklapaju, dok su njihove dimenzije u obrnutoj proporciji.

Rešenje:

Ukoliko se posmatra kretanje robota u prostoru unutrašnjih koordinata, kod koga su brzine u zglobovima normalizovane, važi da je:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} = 1.$$

Ukoliko je poznato da važi $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q})\dot{\mathbf{X}}$, zamenom u prethodni izraz se dobija:

$$\dot{\mathbf{X}}^T (\mathbf{J}^{\dagger T} \mathbf{J}^\dagger) \dot{\mathbf{X}} = 1,$$

gde je \mathbf{J}^\dagger pseudo inverzna matrica Jakobijan matrice, pa se dobija da je:

$$\dot{\mathbf{X}}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \dot{\mathbf{X}} = 1.$$

Gornji izraz predstavlja tačke na površini elipsoida brzine u prostoru završnog uređaja. Za slučaj redundantnih robota, brzine u zglobovima se preslikavaju unutar ovog elipsoida. Za slučaj neredundantnih robota, brzine zglobova se preslikavaju na površinu datog elipsoida.

U pravcu duže ose elipsoida brzine (manipulabilnosti), robot ima mogućnost da razvije veću brzinu, dok u pravcu kraće ose elipsoida brzine, robot nema mogućnost da se kreće tako velikom brzinom. Kako se oblik elipsoida približava sfernom obliku završni uređaj će moći da postigne jednake brzine duž svih pravaca operativnog prostora.

Iz jednačine elipsoida moguće je zaključiti da će oblik i orijentacija elipsoida zavisiti od centralnog člana izraza $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$, koji ujedno predstavlja i konfiguraciju robota.

Glavne ose elipsoida se mogu odrediti iz sopstvenog vektora \mathbf{u}_i matrice $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$, dok su dimenzije osa određene pomoću singularnih vrednosti matrice $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$.

Globalna mera manipulabilnosti se može odrediti određivanjem zapremine elipsoida:

$$\omega(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)},$$

pri čemu za neredundantne robote važi $\omega(\mathbf{q}) = |\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)|$. Može se zaključiti da će uvek važiti $\omega > 0$, osim u tačkama singulariteta kada je $\omega = 0$. Zbog ove osobine se često mera manipulabilnosti uvodi kao mera udaljenosti od singularnih konfiguracija.

Pored elipsoida brzine, moguće je odrediti i elipsoid sile, odnosno naći zavisnost momenta u zglobovima od moguće primenljive sile u završnom uređaju.

Ako je poznato da važi:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^T \dot{\boldsymbol{\tau}} = 1,$$

i koristeći poznatu relaciju $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}$, dobija se da je:

$$\mathbf{F}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \mathbf{F} = 1,$$

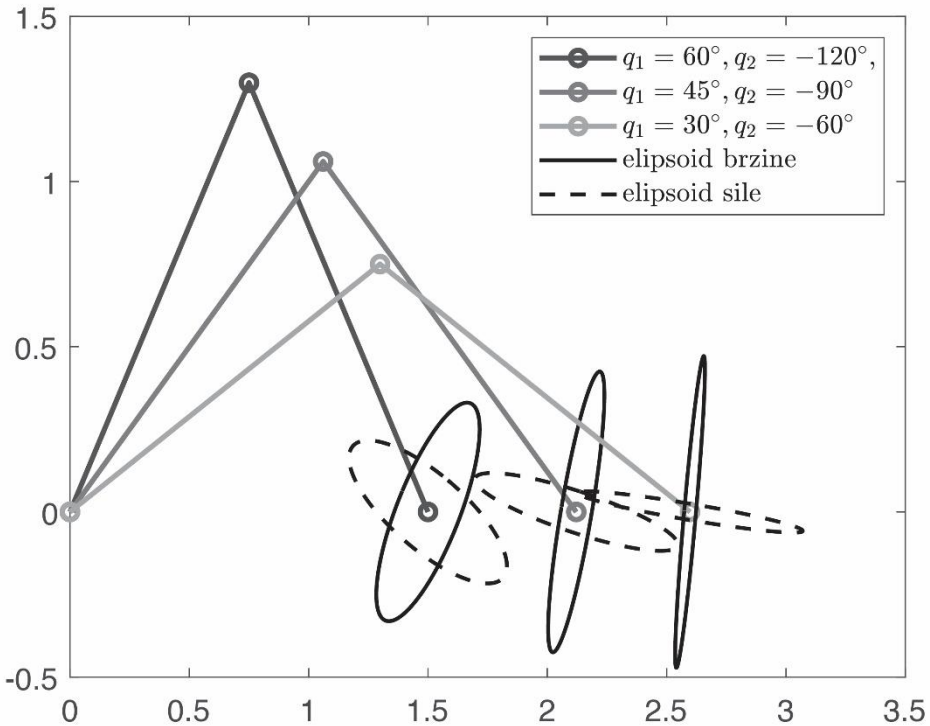
što predstavlja elipsoid sile.

Može se videti da centralni član gornjeg izraza predstavlja inverznu matricu centralnog člana izraza za elipsoid brzine.

Ovim je pokazano da se glavne ose ova dva elipsoida poklapaju, dok su njihove dimenzije u inverznoj proporciji.

Odnosno ukoliko manipulator ima duž neke ose dobre performanse po pitanju brzine, performanse po pitanju ostvarivanja sile neće biti dobre, i obratno.

Na Slici 70 su prikazane tri konfiguracije robota sa ucrtanim elipsoidima brzine i sile.

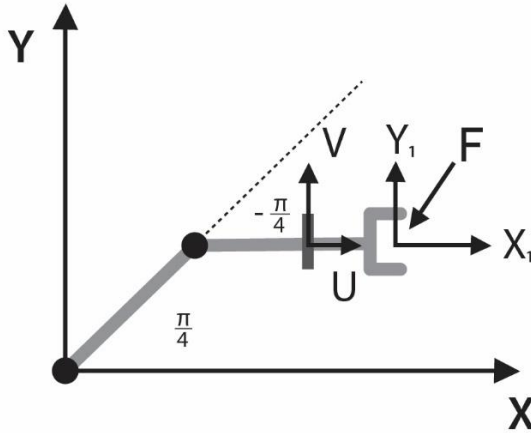


Slika 70 – Manipulator sa dva stepena slobode sa ucrtanim elipsoidima manipulabilnosti i sile.

Zadatak 59

Na planarni manipulator sa dva stepena slobode, čije su dužine segmenata jednake i iznose 0.5 m, deluje sila dok on miruje u poziciji $q_1 = \frac{\pi}{4}$ rad i $q_2 = -\frac{\pi}{4}$ rad (Slika 71). Robot poseduje senzor sile i momenta koji se nalazi na udaljenosti 0.1 m od završnog uređaja. Merenja senzora pokazuju vrednosti sile $F_u = -5$ N i $F_v = -10$ N. Izračunati:

- Silu interakcije robota i objekta,
- Pogonske momente u zglobovima koji će se javiti kao posledica delovanja spoljašnje sile na manipulator.



Slika 71 – Manipulator sa dva stepena slobode na koji deluje spoljašnja sila.

Rešenje:

a) Delovanje sile zabeleženo je u koordinatnom sistemu senzora sa koordinatnim početkom O_{uvw} . Kako robot sa okolinom interaguje svojim završnim uređajem, potrebno je izvršiti transformaciju vektora sile i momenta u odgovarajući koordinatni sistem. Na ovaj način se dobija prava informacija o intenzitetu i pravcu delovanja eksterne sile i momenta koji deluju na završni uređaj robota.

Matrica transformacije vektora sile i momenta je data kao:

$$T_{x_1y_1z_1}^{uvw} = \begin{bmatrix} R_{x_1y_1z_1}^{uvw} & \mathbf{0} \\ W_{x_1y_1z_1}^{uvw} R_{x_1y_1z_1}^{uvw} & R_{x_1y_1z_1}^{uvw} \end{bmatrix}.$$

Sa date slike je moguće odrediti matricu rotacije kao i matricu rastojanja između dva koordinatna sistema između kojih se vrši transformacija vektora sile i momenta:

$$R_{x_1y_1z_1}^{uvw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$W_{x_1y_1z_1}^{uvw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

odnosno matrica transformacije se može napisati u sledećem obliku:

$$T_{x_1y_1z_1}^{uvw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kada je poznata matrica transformacije ukupan vektor sile i momenta koji deluje na završni uređaj, dobija se:

$$F_1 = T_{x_1y_1z_1}^{uvw} F_{ext} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Sada je potrebno izračunati pogonske momente u zglobovima koji će se javiti kao posledica delovanja spoljašnje sile na manipulator. Rešenje ovog dela zadatka moguće je uraditi na dva načina. Prvi način je da se posmatra delovanje sile i momenta na završni uređaj robota i da se odredi Jakobijan matrica za celokupan manipulator. Drugi način je da se robot posmatra samo do senzora sile i momenta i da se u tom slučaju posmatra vektor sile i momenta u koordinatnom sistemu senzora. Analogno prvom slučaju, potrebno je odrediti Jakobijan matricu od baze robota do senzora pa onda izračunati potrebne pogonske momente.

Prvi slučaj:

Jakobijan matrica manipulatora je data sa:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukoliko se zamene broje vrednosti, Jakobijan matrica ima oblik:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -0.3536 & 0 \\ 0.7536 & 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Momenti koji se javljaju kao posledice delovanja eksterne sile na završni uređaj robota se mogu dobiti kao:

$$\tau = J_1^T F_1 = \begin{bmatrix} -0.3536 & 0 \\ 0.8536 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.7678 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ Nm.}$$

Drugi način:

Jakobijan matrica za deo manipulatora do senzora sile i momenta je data sa:

$$J_{uvw} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - (l_2 - 0.1) \sin(q_1 + q_2) & -(l_2 - 0.1) \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + (l_2 - 0.1) \cos(q_1 + q_2) & (l_2 - 0.1) \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ukoliko se zamene brojne vrednosti, Jakobijan matrica ima oblik:

$$J_{uvw} = \begin{bmatrix} -0.3536 & 0 \\ 0.7536 & 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

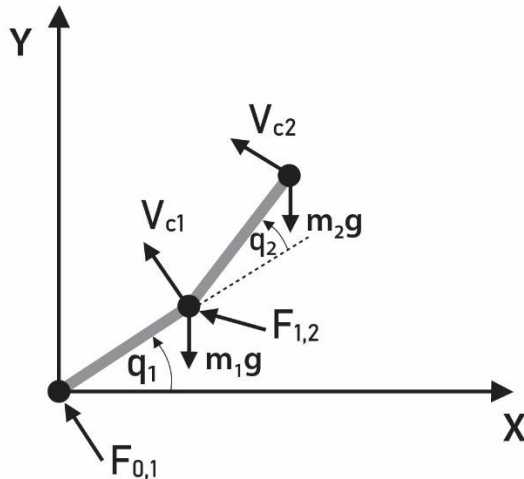
Momenti koji se javljaju kao posledice delovanja eksterne sile izmerene u koordinatnom sistemu senzora mogu dobiti kao:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_{uvw}^T \mathbf{F}_{uvw} = \begin{bmatrix} -0.3536 & 0 \\ 0.7536 & 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.7678 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ Nm.}$$

Na ovaj način je pokazano da je moguće odrediti potrebne pogonske momente na osnovu merenja sa senzora i bez prethodnog izračunavanje vektora sile i momenta koji deluje na završni uređaj robota.

Zadatak 60

Na Slici 72 je prikazan planarni manipulator sa dva stepena slobode, čiji su segmenti dužina l_1 , odnosno l_2 i masa m_1 , odnosno m_2 . Koristeći Njutn-Ojlerov pristup, odrediti jednačine kretanja ovog manipulatora i prikazati ih u formi pogodnoj za dinamičku analizu. Pretpostaviti da su mase segmenata robota skoncetrisane na krajevima segmenata kao na Slici 72.



Slika 72 – Manipulator sa dva stepena slobode.

Rešenje:

Potrebno je odrediti jednačine kretanja za jedan segment robotskog mehanizma. Kretanje se može razložiti na translatorno i rotaciono kretanje. Segment robotskog mehanizma se može smatrati krutim telom, a ukoliko je tačka C_i centar mase segmenta jednačine koje opisuju kretanje i -tog segmenta mogu se napisati u obliku:

$$\Sigma \mathbf{F}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{i-1,i} - \mathbf{F}_{i,i+1} - m_i \dot{\mathbf{v}}_{C_i} + m_i \mathbf{g} = 0,$$

$$\Sigma \mathbf{M}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_{i-1,i} - \mathbf{M}_{i,i+1} + \mathbf{r}_{i,C_i} \times \mathbf{F}_{i,i+1} - \mathbf{r}_{i-1,C_i} \times \mathbf{F}_{i-1,i} - I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = 0.$$

Ukoliko se za svaki segment napišu odgovarajuće jednačine, dobija se:

1) Prvi segment:

$$\mathbf{F}_{0,1} - \mathbf{F}_{1,2} - m_1 \dot{\mathbf{v}}_{C_1} + m_1 \mathbf{g} = 0,$$

$$\mathbf{M}_{0,1} - \mathbf{M}_{1,2} + \mathbf{r}_{1,C_1} \times \mathbf{F}_{1,2} - \mathbf{r}_{0,C_1} \times \mathbf{F}_{0,1} - I_1 \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = 0,$$

2) Drugi segment:

$$\mathbf{F}_{1,2} - \mathbf{F}_{2,3} - m_2 \dot{\mathbf{v}}_{C_2} + m_2 \mathbf{g} = 0,$$

$$\mathbf{M}_{1,2} - \mathbf{M}_{2,3} + \mathbf{r}_{2,C_2} \times \mathbf{F}_{2,3} - \mathbf{r}_{1,C_2} \times \mathbf{F}_{1,2} - I_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = 0.$$

Ukoliko se manipulator kreće slobodno kroz radni prostor, odnosno ne postoji interakcija sa okolinom, važi da je $\mathbf{F}_{2,3} = 0$ i $\mathbf{M}_{2,3} = 0$.

Potrebno je odrediti vektore koji definišu rastojanja između zglobova i centra mase segmenta kao i uvesti nekoliko smena kako bi jednačine bile prikazane u pogodnom obliku:

$$\mathbf{M}_{0,1} = \boldsymbol{\tau}_1, \quad \mathbf{M}_{1,2} = \boldsymbol{\tau}_2, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\mathbf{q}}_1, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\mathbf{q}}_2,$$

$$\mathbf{r}_{0,C_1} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{1,C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{1,C_2} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{2,C_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Takođe, potrebno je odrediti vektor brzine i ubrzanja centra segmenta u funkciji od pozicija unutrašnjih koordinata:

$$\mathbf{v}_{C_1} = \begin{bmatrix} \dot{X}_{C_1} \\ \dot{Y}_{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}(l_1 \cos(q_1)) \\ \frac{d}{dt}(l_1 \sin(q_1)) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{C_1} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) \ddot{q}_1 - l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1^2 \\ l_1 \cos(q_1) \ddot{q}_1 - l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{C_2} = \begin{bmatrix} \dot{X}_{C_2} \\ \dot{Y}_{C_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2)) \\ \frac{d}{dt} (l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2)) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{C_2} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{C_2} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{C_{2x}} \\ \dot{\mathbf{v}}_{C_{2y}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{C_{2x}} = -l_2 \sin(q_1 + q_2) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1^2 - l_1 \sin(q_1) \ddot{q}_1 - l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2,$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{C_{2y}} = l_2 \cos(q_1 + q_2) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1^2 + l_1 \cos(q_1) \ddot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2.$$

Iz jednačina drugog segmenta se može odmah dobiti:

$$\mathbf{F}_{1,2} = m_2 \dot{\mathbf{v}}_{C_2} - m_2 \mathbf{g},$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_{1,C_2} \times (m_2 \dot{\mathbf{v}}_{C_2} - m_2 \mathbf{g}) + l_2 \ddot{\mathbf{q}}_2,$$

$$\tau_2 = \ddot{q}_1 (l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 \cos(q_2)) + \ddot{q}_2 (l_2 + l_2^2 m_2) + l_1 l_2 m_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - l_2 m_2 g \cos(q_1 + q_2).$$

Ukoliko se dobijene sile i momenti interakcije između drugog i prvog segmenta uvrste u jednačine za prvi segment, dobija se:

$$\mathbf{F}_{0,1} = \mathbf{F}_{1,2} + m_1 \dot{\mathbf{v}}_{C_1} - m_1 \mathbf{g},$$

$$\mathbf{M}_{0,1} = \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{M}_{1,2} + \mathbf{r}_{0,C_1} \times \mathbf{F}_{0,1} + l_1 \ddot{\mathbf{q}}_1,$$

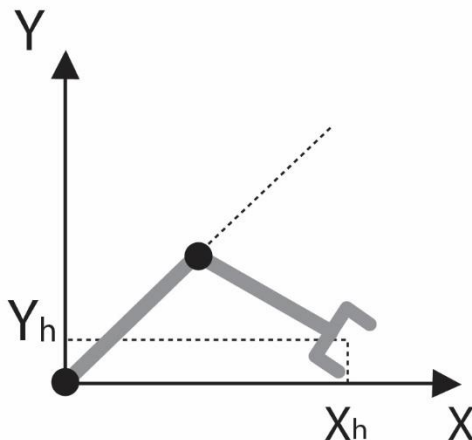
$$\begin{aligned} \tau_1 = & \ddot{q}_1(I_1 + l_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 + l_2^2 m_2 + 2l_1 l_2 m_2 \cos(q_2)) \\ & + \ddot{q}_2(I_2 + l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 \cos(q_2)) - l_1 l_2 m_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ & - 2l_1 l_2 m_2 \sin(q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - g(l_2 m_2 \cos(q_1 + q_2) + l_1 m_1 \cos(q_1) + l_1 m_2 \cos(q_1)) \end{aligned}$$

Zadatak 61

Za manipulator sa dva stepena slobode, kao u prethodnom zadatku, čije su dužine segmenata $l_1 = l_2 = 0.5$ m, a mase $m_1 = m_2 = 1$ kg, izračunati:

- Momente u zglobovima kao posledicu gravitacionog opterećenja,
- Momente u zglobovima kao posledicu inercijalnih efekata (sprezanja između zglobova),
- Momente u zglobovima kao posledicu brzinskih efekata (centripetalne sile i Koriolisovog efekta).

Pretpostaviti da se završni uređaj robota nalazi u poziciji kao na Slici 73 ($X_H = 0.6830$ m i $Y_H = 0.1830$ m), dok se kreće brzinom čije su komponente $\dot{X} = 0.067$ m/s i $\dot{Y} = 1.116$ m/s i ubrztava maksimalno propisanim ubrzanjem $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = \pi$ rad/s² u cilju promene položaja za najkraće moguće vreme.



Slika 73 – Manipulator sa dva stepena slobode.

Rešenje:

U opštem obliku, jednačina dinamike robotskog sistema se može predstaviti preko pojedinih komponenti momenta koje uravnotežuje pogonski moment τ :

$$\tau = H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

Onaj deo izraza za pogonski moment koji se sadrži u izrazu $\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ jeste moment koji potiče od inercijalnih efekata, deo pogonskog momenta $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ potiče od brzinskih efekata, dok poslednji član predstavlja gravitaciono opterećenje u zglobovima.

Pozicija završnog uređaja je $X_H = 0.6830\text{m}$ i $Y_H = 0.1830\text{m}$, odakle se mogu izračunati pozicije u unutrašnjim koordinatama rešavanjem sledećeg sistema jednačina:

$$x = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2),$$

$$y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2).$$

Rešenje datog sistema jednačina je:

$$q_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, \quad q_2 = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Pošto je i brzina manipulatora data kroz brzinu završnog uređaja, potrebno je odrediti brzinu zglobova na sledeći način:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}},$$

odnosno:

$$\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -0.1830 & 0.25 \\ 0.683 & 0.433 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.067 \\ 1.116 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ukoliko se sada sve brojne vrednosti uvrste u jednačine za pogonski moment iz prethodnog zadatka, dobija se:

$$\tau_{G_1} = G_1 = -9.1529 \text{ Nm},$$

$$\tau_{C_1} = C_{11}\dot{q}_1 + C_{12}\dot{q}_2 = 0.75 \text{ Nm},$$

$$\tau_{H_1} = H_{11}\ddot{q}_1 + H_{12}\ddot{q}_2 = 4.7124 \text{ Nm},$$

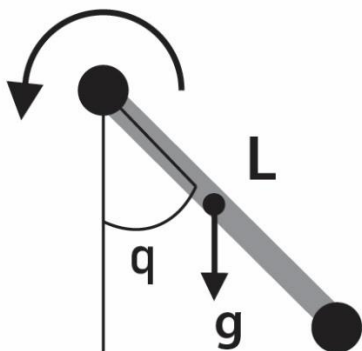
$$\tau_{G_2} = G_2 = -4.2475 \text{ Nm},$$

$$\tau_{C_2} = C_{21}\dot{q}_1 + C_{22}\dot{q}_2 = -0.25 \text{ Nm},$$

$$\tau_{H_2} = H_{21}\ddot{q}_1 + H_{22}\ddot{q}_2 = 2.3562 \text{ Nm}.$$

Zadatak 62

Na Slici 74 je prikazano matematičko klatno kao reprezentacija rotacionog zgloba robota koji pokreće homogeni segment dužine l i mase m . Koristeći Lagranžov pristup odrediti jednačinu kretanja ovog klatna i prikazati je u formi pogodnoj za dinamičku analizu.



Slika 74. Matematičko klatno.

Rešenje:

Algoritam za definisanje dinamičkog modela robota na osnovu Lagranžovog pristupa sadrži sledeće korake:

- 1) Izračunavanje ukupne kinetičke energije robota $E_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$,
- 2) Izračunavanje ukupne potencijalne energije robota $E_p(\mathbf{q})$,
- 3) Izračunavanje Lagranžijana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_p(\mathbf{q})$,
- 4) Izračunavanje Lagranžovog izraza $\psi_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$, gde su sa ψ_i označene nekonzervativne generalisane sile koje vrše rad i direktno utiču na vrednost promenljive q_i .

Što se tiče nekonzervativnih sila, u robotskim sistemima se najčešće ova komponenta određuje kao $\psi_i = \tau_i + [\mathbf{J}^T \mathbf{F}_{ext}]_i + d_{ii} \dot{q}_i$ pri čemu je τ_i pogonski moment u zglobu i , $[\mathbf{J}^T \mathbf{F}_{ext}]_i$ rezultat delovanja spoljašnje sile na zglob i i $d_{ii} \dot{q}_i$ disipativna komponenta momenta uzrokovana trenjem.

Kinetička energija sistema se može napisati kao: $E_k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} I \dot{q}^2$.

Potencijalna energija sistema se može napisati kao: $E_p(q) = mgl(1 - \cos(q))$.

Lagranžijan funkcija je onda definisana na sledeći način:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} I \dot{q}^2 - mgl(1 - \cos(q)).$$

Sada je moguće odrediti izraz za nekonzervativnu generalisanu silu, gde je pretpostavljeno da u zglobu postoji viskozno trenje koeficijenta d , ali ne postoji sila interakcije:

$$\psi = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau - d\dot{q}.$$

Kada se izvrše parcijalne diferencijacije iz gornjeg izraza dobija se:

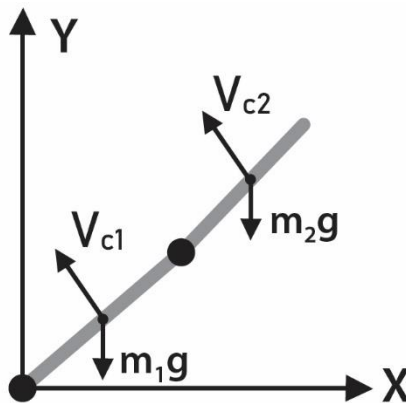
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = I\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = I\ddot{q}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -mgl \sin(q).$$

Konačno, dobija se jednačina dinamike zgloba robota predstavljenog matematičkim klatnom gde se jasno vide inercijalna, brzinska i gravitaciona komponenta:

$$\tau = I\ddot{q} + d\dot{q} + mgl \sin(q).$$

Zadatak 63

Na Slici 75 je prikazan planarni manipulator sa dva stepena slobode čiji su segmenti dužina l_1 , odnosno l_2 i masa m_1 , odnosno m_2 . Koristeći Lagranžov pristup, odrediti jednačine kretanja ovog manipulatora u opštem slučaju i prikazati ih u formi pogodnoj za dinamičku analizu.



Slika 75 – Manipulator sa dva stepena slobode kod koga su segmenti homogeni.

Rešenje:

Na početku je potrebno odrediti potencijalnu energiju sistema:

$$E_p(\mathbf{q}) = E_{p1}(\mathbf{q}) + E_{p2}(\mathbf{q}),$$

$$E_p(\mathbf{q}) = m_1 g l_{c1} \sin(q_1) + m_2 g (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)),$$

a zatim i kinetičku energiju sistema:

$$E_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_{k1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + E_{k2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

$$E_{k1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m_1 v_{c1}^2}{2} + \frac{I_1 \dot{q}_1^2}{2}, \quad E_{k2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m_2 v_{c2}^2}{2} + \frac{I_2 \dot{q}_2^2}{2}.$$

U opštem slučaju, brzina segmenta ima komponente brzine i po x i po y osi pa se može izračunati na sledeći način:

$$v_{c1}^2 = v_{x1}^2 + v_{y1}^2, \quad v_{c2}^2 = v_{x2}^2 + v_{y2}^2.$$

Ukoliko se odrede pozicije centra mase svakog segmenta, njihovim diferenciranjem se dobijaju izrazi za brzinu po odgovarajućoj osi:

$$x_1 = l_{c1} \cos(q_1), \quad y_1 = l_{c1} \sin(q_1),$$

$$x_2 = l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2), \quad y_2 = l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2),$$

odnosno:

$$v_{c1}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2,$$

$$v_{c2}^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + [2l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

Ako se intenziteti dobijenih brzina segmenata uvrste u jednačine kinetičkih energija, dobija se:

$$E_{k1}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2,$$

$$E_{k2}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + [2l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2.$$

Nakon određivanja ukupne energije sistema, potrebno je definisati Lagranžijan za ovakav sistem:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = E_k(q, \dot{q}) - E_p(q),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) = & \left[\frac{1}{2} m_1 l_1^2 + \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_1 \right] \dot{q}_1^2 \\ & + \left(\frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 + \frac{1}{2} I_2 \right) \dot{q}_2^2 + [l_{c2}^2 m_2 + l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - [l_1 m_1 \sin(q_1) + l_{c1} m_1 \sin(q_1) + l_{c2} m_2 \sin(q_1 + q_2)] g. \end{aligned}$$

Generalisane sile koje se javljaju u svakom zglobu dobijaju se na sledeći način:

$$\psi_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1},$$

$$\begin{aligned} \psi_1 = & 2 \left[\frac{1}{2} m_1 l_1^2 + \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_1 \right] \ddot{q}_1 \\ & + [l_{c2}^2 m_2 + l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_2)] \ddot{q}_2 - l_1 l_{c2} m_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ & - 2 l_1 l_{c2} m_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - [l_1 m_2 \cos(q_1) + l_{c1} m_1 \cos(q_1) + l_{c2} m_2 \cos(q_1 + q_2)] g, \end{aligned}$$

$$\psi_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2},$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & [l_{c2}^2 m_2 + l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + (l_{c2}^2 m_2 + I_2) \ddot{q}_2 + l_1 l_{c2} m_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \\ & + l_{c2} m_2 \cos(q_1 + q_2) g. \end{aligned}$$

Ukoliko na manipulator ne deluju spoljne sile i ukoliko je zanemareno trenje u zglobovima važi da je $\psi_1 = \tau_1$ odnosno $\psi_2 = \tau_2$.

Zadatak 64

U opštem slučaju izvesti jednačinu dinamike u spoljašnjim koordinatama polazeći od opšteg oblika jednačine dinamike u unutrašnjim koordinatama:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_{int}.$$

Rešenje:

Ukoliko se jednačine dinamike u unutrašnjim koordinatama pomnože sa leve strane sa $(\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}$, dobija se izraz:

$$(\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{q}) = (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}_{int},$$

pri čemu je sa \mathbf{F}_{int} označena sila interakcije završnog uređaja sa okolinom.

Ukoliko je poznato da važe sledeće relacije između unutrašnjih i spoljašnjih koordinata:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{X}},$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}],$$

prethodni izraz se može napisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}] + (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{X}} \\ + (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{q}) = (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}_{int}. \end{aligned}$$

Ukoliko se uvedu sledeće relacije:

$$\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{q}) = (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}),$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}),$$

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}) = (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{q}),$$

izraz za dinamiku u spoljašnjim koordinatama se može zapisati na sledeći način:

$$\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}) = (\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}_{int}.$$

Može se primetiti da izraz ima identičan oblik kao jednačine dinamike u unutrašnjim koordinatama, s tim što u ovom izrazu figurišu spoljašnje koordinate.

7

Planiranje trajektorije

U ovom poglavlju se razmatraju problemi generisanja željenog kretanja robota uz poštovanje tipičnih ograničenja koje pogoni robota unose – maksimalne brzine i ubrzanja. Nakon rešavanja zadataka, čitaoci će biti sposobni da zadaju željeno kretanje robota kojim se, uz poštovanje pomenutih ograničenja, pokret izvršava na optimalan način, a on se često sagledava kroz minimalno potrebno vreme za izvršavanje zadatka.

Zadatak 65

Odrediti minimalno potrebno vreme za pomeranje zgloba robota od njegove inicijalne pozicije $q_i = 0$ rad do krajnje pozicije $q_f = \pi$ rad, ako je poznata maksimalna brzina zgloba $\dot{q}_{max} = 5$ rad/s. Napisati jednačine koje opisuju kretanje zgloba robota u vremenu. Koristiti linearnu interpolaciju kretanja između početne i krajnje tačke.

Rešenje:

Ukoliko se zglob robota kreće iz stanja mirovanja i treba da se zaustavi u krajnjoj tački putanje važe, sledeće relacije:

$$\dot{q}_i = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \dot{q}_f = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Početak kretanja može se označiti sa $T_i = 0$ s, a vreme trajanja kretanja sa T_f .

Najjednostavniji metod za generisanje trajektorije zgloba od početne tačke do krajnje jeste upravo linearna interpolacija između njih:

$$q(t) = q_i \frac{T_f - t}{T_f} + q_f \frac{t}{T_f}.$$

Diferenciranjem prethodnog izraza je moguće dobiti izraz za brzinu zgloba robota, koja je konstantna tokom čitave trajektorije kada trajektorija ima linearan oblik:

$$\dot{q}(t) = \frac{q_f - q_i}{T_f},$$

a nakon još jedne diferencijacije, moguće je odrediti izraz ubrzanja zgloba robota:

$$\ddot{q}(t) = 0.$$

Iz prethodnih izraza zaključuje se da će se zglob robota tokom svoje putanje kretati konstantnom brzinom, odnosno ubrzanje tokom kretanja treba da bude jednako nuli. Ovakav zaključak nije u skladu sa početnom pretpostavkom da se zglob kreće iz stanja mirovanja i da treba da se zaustavi u krajnjoj tački putanje. Ukoliko se oba zahteva ispune, zglob mora da postigne beskonačno veliko ubrzanje u trenutku $t = T_i = 0$ i u trenutku $t = T_f$. Takođe, u istim tim trenucima brzina zgloba treba da promeni svoju vrednost sa nule na \dot{q}_{max} , odnosno sa \dot{q}_{max} na nula.

Ukoliko se brojne vrednosti uvrste u prethodne izraze dobija se:

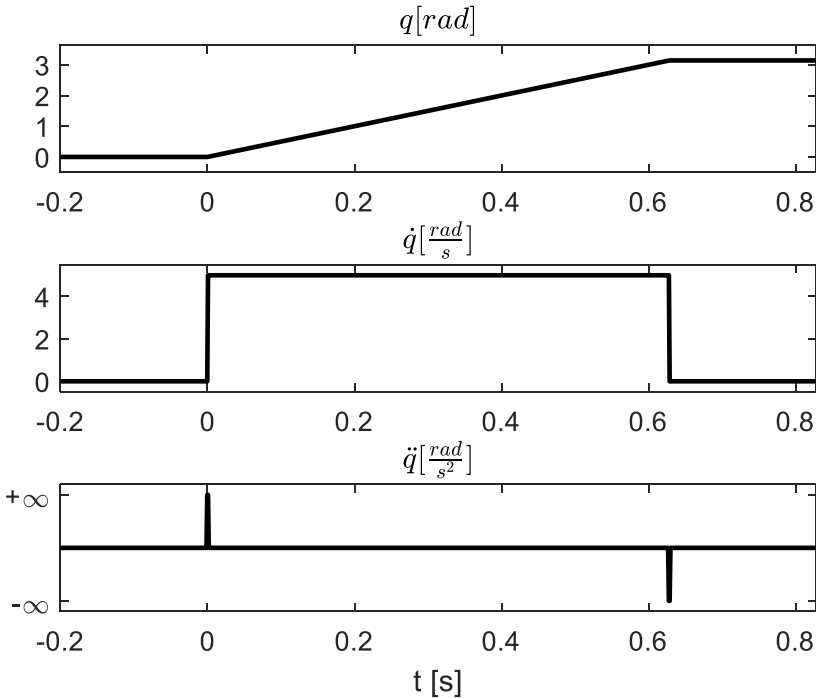
$$\dot{q}_{max} = \frac{q_f - q_i}{T_f} \Rightarrow T_f = \frac{q_f - q_i}{\dot{q}_{max}} = \frac{\pi}{5} = 0.6283 \text{ s.}$$

Na osnovu maksimalnog vremena se može dobiti jednačina kretanja zgloba:

$$q(t) = 0 \frac{0.6283 - t}{0.6283} + \pi \frac{t}{0.6283},$$

$$q(t) = \pi \frac{t}{0.6283} \text{ rad.}$$

Grafici promene pozicije, brzine i ubrzanja kod linearne interpolacije su dati na Slici 76:



Slika 76 – Pozicija, brzina i ubrzanje zgloba robota ukoliko je primenjena linearna interpolacija.

Ukoliko se pogledaju zahtevane brzine i ubrzanje koje zglob robota treba da postigne, može se zaključiti da ovakvo kretanje nije moguće realizovati u realnom okruženju. Zglob robota se pokreće aktuatorom koji u realnom okruženju neće moći da postigne trenutnu promenu brzine niti beskonačno veliko ubrzanje.

Zadatak 66

Odrediti minimalno potrebno vreme za pomeranje zgloba robota od njegove inicijalne pozicije $q_i = 0$ rad do krajnje pozicije $q_f = \pi$ rad, ako je poznata maksimalna brzina $\dot{q}_{max} = 5$ rad/s i ubrzanje zgloba $\ddot{q}_{max} = 25$ rad/s². Napisati jednačine koje opisuju kretanje zgloba robota u vremenu. Koristiti trapezni profil brzine kretanja između početne i krajnje tačke.

Rešenje:

Kod trapezne interpolacije, brzina linearno raste do trenutka T_a , zatim je brzina konstantna do trenutka $T_f - T_a$ i na kraju linearno opada do nulte brzine. Za to vreme, ubrzanje ima konstantnu pozitivnu vrednost do trenutka T_a , zatim je sve do trenutka $T_f - T_a$ jednako nuli i na kraju ima negativnu vrednost.

Kako je već pomenuto, maksimalna brzina zgloba robota će se postići u trenutku T_a i iznosi:

$$\dot{q}_{max} = \ddot{q}_{max}T_a.$$

Opšte jednačine kretanja kod trapeznog profila brzine su:

1) Ubrzanje:

$$\ddot{q}(t) = \begin{cases} +\ddot{q}_{max} & 0 < t \leq T_a; \\ 0 & T_a < t \leq T_f - T_a; \\ -\ddot{q}_{max} & T_f - T_a < t \leq T_f. \end{cases}$$

2) Brzina:

$$\dot{q}(t) = \begin{cases} \ddot{q}_{max}t & 0 < t \leq T_a; \\ \dot{q}_{max} & T_a < t \leq T_f - T_a; \\ \dot{q}_{max}(T_f - t) & T_f - T_a < t \leq T_f. \end{cases}$$

3) Pozicija:

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_{max}t^2 & 0 < t \leq T_a; \\ q_i + \dot{q}_{max}T_a \left(t - \frac{T_a}{2}\right) & T_a < t \leq T_f - T_a; \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_{max}(T_f - t)^2 & T_f - T_a < t \leq T_f. \end{cases}$$

U konkretnom slučaju iz datih ograničenja i informacija mogu se odrediti sledeći parametri trajektorije:

$$\dot{q}_{max} = \ddot{q}_{max} T_a \Rightarrow T_a = \frac{\dot{q}_{max}}{\ddot{q}_{max}} = 0.2 \text{ s},$$

izraz za maksimalno ubrzanje je dat sa:

$$\ddot{q}_{max} = \frac{q_f - q_i}{T_a(T_f - T_a)},$$

odakle se vreme kretanja može izračunati na sledeći način:

$$T_f = \frac{q_f - q_i}{\dot{q}_{max}} + T_a = 0.8283 \text{ s}.$$

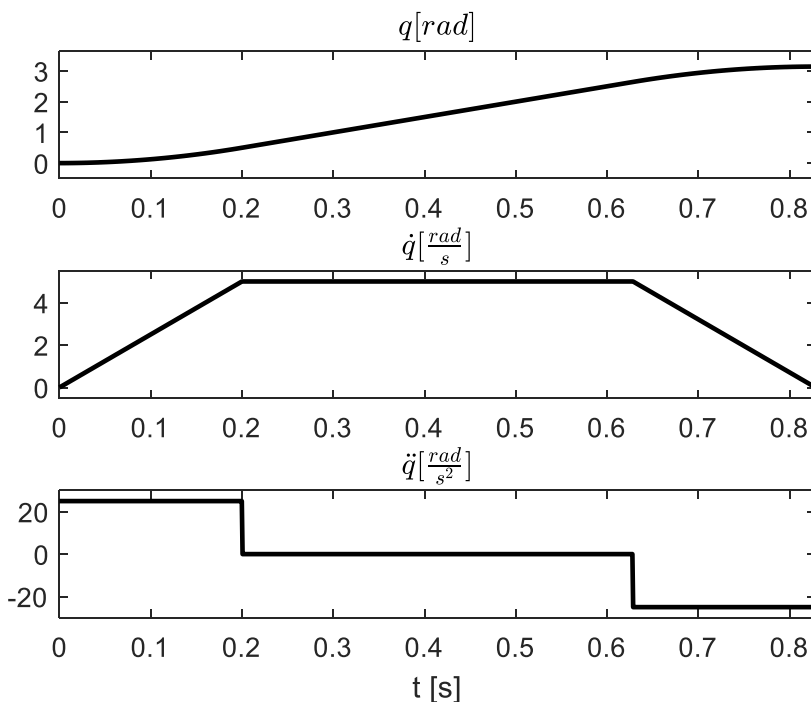
Kada je poznato vreme ubrzavanja i vreme celokupnog kretanja, jednačine koje opisuju kretanje se mogu eksplicitno napisati:

$$\ddot{q}(t) = \begin{cases} +25 \text{ rad/s}^2 & 0 \text{ s} < t \leq 0.2 \text{ s}; \\ 0 & 0.2 \text{ s} < t \leq 0.6283 \text{ s}; \\ -25 \text{ rad/s}^2 & 0.6283 \text{ s} < t \leq 0.8283 \text{ s}. \end{cases}$$

$$\dot{q}(t) = \begin{cases} 25t \text{ rad/s} & 0 \text{ s} < t \leq 0.2 \text{ s}; \\ 5 \text{ rad/s} & 0.2 \text{ s} < t \leq 0.6283 \text{ s}; \\ 25(0.8283 - t) \text{ rad/s} & 0.6283 \text{ s} < t \leq 0.8283 \text{ s}. \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} 12.5t^2 \text{ rad} & 0 \text{ s} < t \leq 0.2 \text{ s}; \\ 5(t - 0.1) \text{ rad} & 0.2 \text{ s} < t \leq 0.6283 \text{ s}; \\ \pi - 12.5(0.8283 - t)^2 \text{ rad} & 0.6283 \text{ s} < t \leq 0.8283 \text{ s}. \end{cases}$$

Grafici promene pozicije, brzine i ubrzanja dati su na Slici 77:



Slika 77 – Pozicija, brzina i ubrzanje zgloba robota ukoliko je primenjen trapezni profil brzine.

Može se primetiti da su u ovom slučaju uvažena ograničenja aktuatora gde ograničenje po brzini potiče od elektromotorne sile u motoru, dok ograničenje po ubrzanju potiče od brzine promene struje, a samim ti i od brzine promene pogonskog momenta.

Zbog navedenih razloga, kretanje trapeznim profilom brzine će trajati nešto duže nego ukoliko se generisanje kretanja izvrši linearnom interpolacijom.

Zadatak 67

Određiti minimalno potrebno vreme za pomeranje zgloba robota od njegove inicijalne pozicije $q_i = 0$ rad do krajnje pozicije $q_f = \pi$ rad, ako je poznata maksimalna brzina $\dot{q}_{max} = 5$ rad/s i ubrzanje zgloba $\ddot{q}_{max} = 5$ rad/s². Napisati jednačine koje opisuju kretanje zgloba robota u vremenu. Koristiti trapezni profil brzine kretanja između početne i krajnje tačke.

Rešenje:

Kako su ograničenja drugačije postavljena nego u prethodnom zadatku potrebno je izračunati nove parametre kretanja:

$$T_a = \frac{\dot{q}_{max}}{\ddot{q}_{max}} = 1 \text{ s},$$

$$T_f = \frac{q_f - q_i}{\dot{q}_{max}} + T_a = 1.6283 \text{ s}.$$

Iz prethodnih izraza se može zaključiti kako važi da je $T_a > T_f/2$, pa trapezni profil brzine treba svesti na trougaoni, odnosno potrebno je postaviti da je $T_a = T_f/2$, čime će se efektivno smanjiti maksimalna brzina:

$$q_f - q_i = \ddot{q}_{max} T_a (T_f - T_a),$$

$$q_f - q_i = \ddot{q}_{max} T_a^2,$$

$$T_a = \sqrt{\frac{q_f - q_i}{\ddot{q}_{max}}},$$

$$T_a = 0.7929 \text{ s} \Rightarrow T_f = 2T_a = 1.5853 \text{ s}.$$

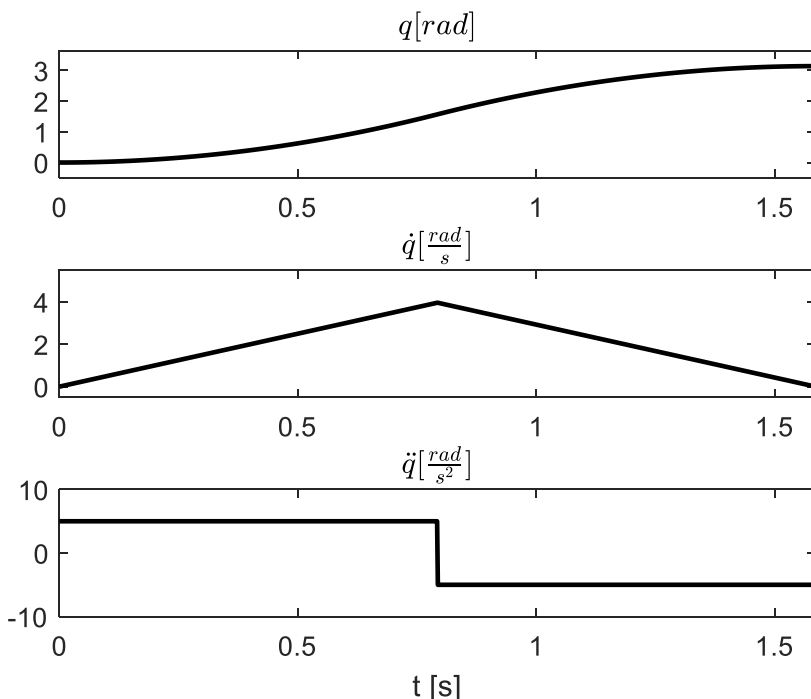
Sada su jednačine kretanja predstavljene na sledeći način:

$$\ddot{q}(t) = \begin{cases} +5 \text{ rad/s}^2 & 0 \text{ s} < t \leq 0.7929 \text{ s}; \\ -5 \text{ rad/s}^2 & 0.7929 \text{ s} < t < 1.5853 \text{ s}. \end{cases}$$

$$\dot{q}(t) = \begin{cases} 5t \text{ rad/s} & 0 \text{ s} < t \leq 0.7929 \text{ s}; \\ 5(1.6283 - t) \text{ rad/s} & 0.7929 \text{ s} < t < 1.5853 \text{ s}. \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} 2.5t^2 \text{ rad} & 0 \text{ s} < t \leq 0.7929 \text{ s}; \\ \pi - 2.5(1.6283 - t)^2 \text{ rad} & 0.7929 \text{ s} < t < 1.5853 \text{ s}. \end{cases}$$

Grafici promene pozicije kretanja, brzine i ubrzanja dati su na Slici 78:



Slika 78 – Pozicija, brzina i ubrzanje zgloba robota ukoliko je primejnen trougaoni profil brzine.

Zadatak 68

Odrediti minimalno potrebno vreme za pomeranje zgloba robota od njegove inicijalne pozicije $q_i = 0$ rad do krajnje pozicije $q_f = \frac{\pi}{2}$ rad, ako je poznato vreme ubrzanja $T_a = 0.2$ s kao i ukupno vreme za koje kretanje treba da se izvrši $T_f = 0.8283$ s. Napisati jednačine koje opisuju kretanje zgloba robota u vremenu. Koristiti trapezni profil brzine kretanja između početne i krajnje tačke.

Rešenje:

Često se može dogoditi da se kretanje opisuje vremenom za koje treba da se izvrši tranzicija od početne do krajnje tačke. Vreme tranzicije i vreme ubrzanja se dobijaju na osnovu ograničenja u jednom od zglobova, obično na osnovu nekog od preostalih zglobova robota čijim se maksimalnim ubrzanjem i brzinom određuju ovi parametri kretanja i za sve ostale zglobove.

Maksimalno ubrzanje i brzina koji će biti postignuti tokom kretanja su:

$$\ddot{q}_{max} = \frac{q_f - q_i}{T_a(T_f - T_a)} = 12.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad \dot{q}_{max} = \ddot{q}_{max} T_a = 2.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

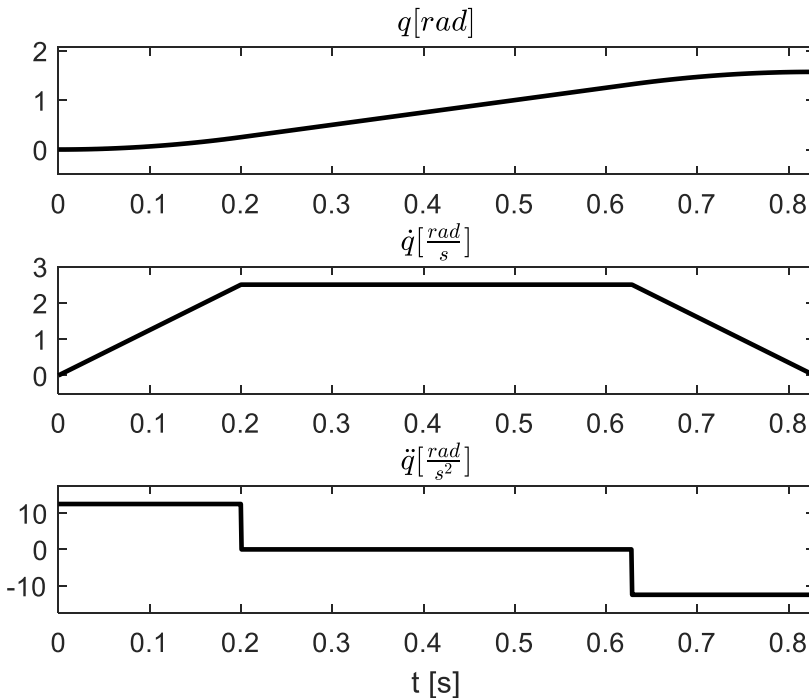
U ovom slučaju jednačine kretanja su date sa:

$$\ddot{q}(t) = \begin{cases} +12.5 \text{ rad/s}^2 & 0 \text{ s} < t \leq 0.2 \text{ s}; \\ 0 & 0.2 \text{ s} < t \leq 0.6283 \text{ s}; \\ -12.5 \text{ rad/s}^2 & 0.6283 \text{ s} < t \leq 0.8283 \text{ s}. \end{cases}$$

$$\dot{q}(t) = \begin{cases} 6.25t \text{ rad/s} & 0 \text{ s} < t \leq 0.2 \text{ s}; \\ 2.5 \text{ rad/s} & 0.2 \text{ s} < t \leq 0.6283 \text{ s}; \\ 6.25(0.8283 - t) \text{ rad/s} & 0.6283 \text{ s} < t \leq 0.8283 \text{ s}. \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} 6.25t^2 \text{ rad} & 0 \text{ s} < t \leq 0.2 \text{ s}; \\ 2.5(t - 0.1) \text{ rad} & 0.2 \text{ s} < t \leq 0.6283 \text{ s}; \\ \pi/2 - 6.25(0.8283 - t)^2 \text{ rad} & 0.6283 \text{ s} < t \leq 0.8283 \text{ s}. \end{cases}$$

Grafici promene pozicije kretanja, brzine i ubrzanja dati su na Slici 79.



Slika 79 – Pozicija, brzina i ubrzanje zgloba robota ukoliko je primenjen trapezni profil brzine.

Ukoliko se koristi robot sa dva stepena slobode sa aktuatorima istih performansi ali pri tome da jedan prelazi duplo veći put (Zadatak 66 i Zadatak 68). Ukoliko se

zahteva da se drugi zglob prilagođava kretanju prvog zgloba onda je zadavanje kretanja, kao u ovom zadatku, pravi način da se zadovolje ograničenja.

Ukoliko sinhronizacija kretanja dva zgloba nije neophodna, vreme za koje je moguće izvršiti kretanje iz ovog zadatka bi bilo:

$$T_{a\ new} = 0.2\ s,$$

$$T_{f\ new} = 0.5142\ s.$$

Zadatak 69

Odrediti minimalno potrebno vreme za pomeranje zgloba robota od njegove inicijalne pozicije $q_i = 0$ rad do krajnje pozicije $q_f = \pi$ rad, ako je poznata maksimalna brzina $\dot{q}_{max} = 5$ rad/s i ubrzanje zgloba $\ddot{q}_{max} = 25$ rad/s². Napisati jednačine koje opisuju kretanje zgloba robota u vremenu. Koristiti interpolaciju polinomom trećeg stepena između početne i krajnje tačke.

Rešenje:

Ukoliko i u ovom zadatku važi pretpostavka da robot kreće iz stanja mirovanja i da se zaustavlja u krajnjoj tački, onda važi:

$$q(0) = q_i, \quad \dot{q}(0) = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$q(T_f) = q_f, \quad \dot{q}(T_f) = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ako se uvede skaliranje vremena i pređenog puta na sledeći način:

$$\tau = \frac{t}{T_f} \Rightarrow t \in [0, T_f] \Rightarrow \tau \in [0, 1],$$

$$p = \frac{q - q_i}{q_f - q_i} \Rightarrow [q_i, q_f] \rightarrow [0, 1],$$

odnosno kretanje je određeno jednačinama:

$$q(t)|_{t=\tau T_f} = q_i + (q_f - q_i)p(\tau),$$

$$\dot{q}(t)|_{t=\tau T_f} = \frac{q_f - q_i}{T_f} p'(\tau),$$

$$\ddot{q}(t)|_{t=\tau T_f} = \frac{q_f - q_i}{T_f^2} p''(\tau).$$

Ako se posmatra skalirani polinom trećeg stepena $p_3(\tau)$, pri čemu važi $p_3(0) = 0$, $p_3(1) = 1$, $\dot{p}_3(0) = 0$ i $\dot{p}_3(1) = 0$:

$$p_3(\tau) = a_3\tau^3 + a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0,$$

$$p'_3(\tau) = 3a_3\tau^2 + 2a_2\tau + a_1.$$

Za navedene normalizovane izraze pozicije i brzine, i navedene početne uslove, dobijamo sistem 4 jednačine sa 4 nepoznate, odakle se lako dobijaju se parametri polinoma $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = -2$, odakle slede i jednačine:

$$p_3(\tau) = -2\tau^3 + 3\tau^2,$$

$$p'_3(\tau) = -6\tau^2 + 6\tau,$$

$$p''_3(\tau) = -12\tau^2 + 6.$$

Ukoliko se vrši interpolacija polinomom trećeg stepena, skalirani polinom će dostići maksimalnu brzinu od $p'_{max} = 1.5$, dok je maksimalno ubrzanje $p''_{max} = 6$.

Kada je u potpunosti opisan polinom kojim treba predstaviti trajektoriju zgloba robota, parametri trajektorije se dobijaju na sledeći način:

$$T_f = \frac{q_f - q_i}{\dot{q}_{max}} p'_{max} = \frac{\pi}{5} 1.5 = 0.9425 \text{ s.}$$

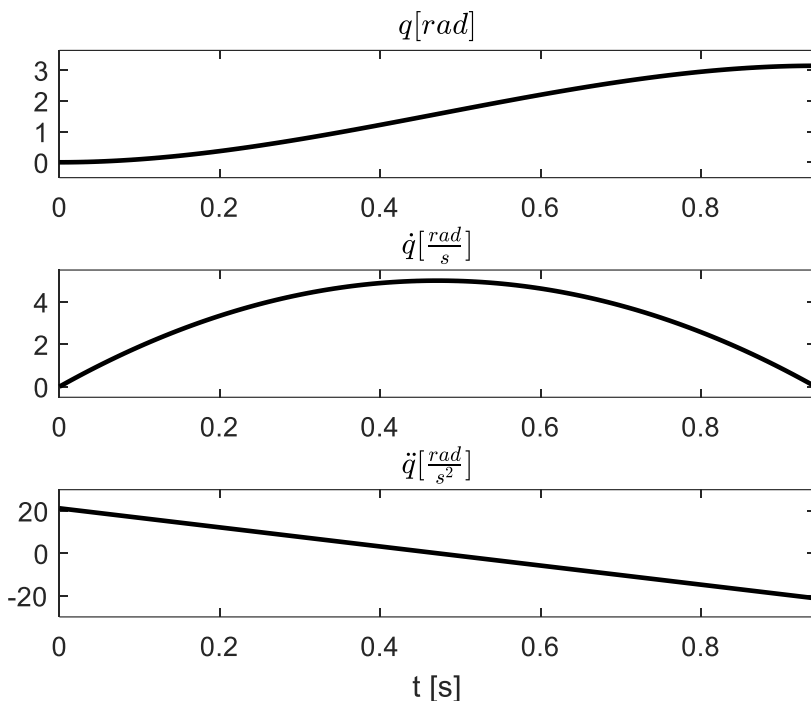
Jednačine kretanja u neskalinanom obliku date su sledećim izrazima:

$$q(t) = -7.5047t^3 + 10.6098t^2,$$

$$\dot{q}(t) = -22.5142t^2 + 21.2197t,$$

$$\ddot{q}(t) = -45.0285t + 21.2207.$$

Grafici promene pozicije, brzine i ubrzanja prikazani su na Slici 80.



Slika 80 – Pozicija, brzina i ubrzanje zgloba robota ukoliko je primenjena interpolacija polinomom trećeg stepena.

Ukoliko se uporedi vreme tranzicije kada je za isto kretanje korišćen trapezni profil brzine, može se primetiti da je tada bilo potrebno manje vremena za izvršavanje kretanja. Razlog tome su diskontinuiteti u ubrzanju tokom kretanja koje u realnom scenariju pogonski aktuator ne bi mogao da isprati sa potpunom tačnošću. Ipak, kod interpolacije polinomom trećeg stepena smanjen je broj diskontinuiteta pa će trajektorija minimalno odstupati od željene.

Zadatak 70

Određiti minimalno potrebno vreme za pomeranje zgloba robota od njegove inicijalne pozicije $q_i = 0$ rad do krajnje pozicije $q_f = \pi$ rad, ako je poznata maksimalna brzina $\dot{q}_{max} = 5$ rad/s i ubrzanje zgloba $\ddot{q}_{max} = 25$ rad/s². Napisati jednačine koje opisuju kretanje zgloba robota u vremenu. Koristiti interpolaciju polinomom petog stepena između početne i krajnje tačke.

Rešenje:

Na sličan način je moguće odrediti parametre polinoma petog stepena $p_5(\tau)$:

$$p_5(\tau) = a_5\tau^5 + a_4\tau^4 + a_3\tau^3 + a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0.$$

Povećavanjem reda polinoma, moguće je ispoštovati više ograničenja u planiranju trajektorije, odnosno moguće je definisati proširen broj uslova i oni glase $p_5(0) = 0$, $p_5(1) = 1$, $\dot{p}_5(0) = 0$, $\dot{p}_5(1) = 0$, $\ddot{p}_5(0) = 0$ i $\ddot{p}_5(1) = 0$. Upotrebom ovih 6 početnih uslova u jednačini polinoma šestog stepena, dobijamo sistem od 6 jednačina sa 6 nepoznatih, čijim se rešavanjem lako određuju koeficijenti polinoma $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 10$, $a_4 = -15$, $a_5 = 6$, odakle slede jednačine:

$$p_5(\tau) = 6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3,$$

$$p_5'(\tau) = 30\tau^4 - 60\tau^3 + 30\tau^2,$$

$$p_5''(\tau) = 120\tau^3 - 180\tau^2 + 60\tau.$$

Maksimalna brzina i ubrzanje skaliranog polinoma petog stepena je:

$$p'_{max} = 1.875, \quad p''_{max} = 5.773.$$

Parametri kretanja se sada mogu odrediti, ali kako je kod ovog polinoma moguće podesiti i maksimalnu brzinu i ubrzanje, potrebno je proveriti oba uslova:

$$T_f = \max(T_{fv}, T_{fa}),$$

$$T_{fv} = \frac{q_f - q_i}{\dot{q}_{max}} p'_{max} = 1.1781 \text{ s}, \quad T_{fa} = \sqrt{\frac{q_f - q_i}{\ddot{q}_{max}} p''_{max}} = 0.8517 \text{ s},$$

pri čemu vreme T_{fv} potiče od ograničenja po brzini, a T_{fa} od ograničenja po ubrzanju. Za finalno vreme kretanje se uzima veće od dva kako bi oba ograničenja i po brzini i po ubrzanju bila ispunjena.

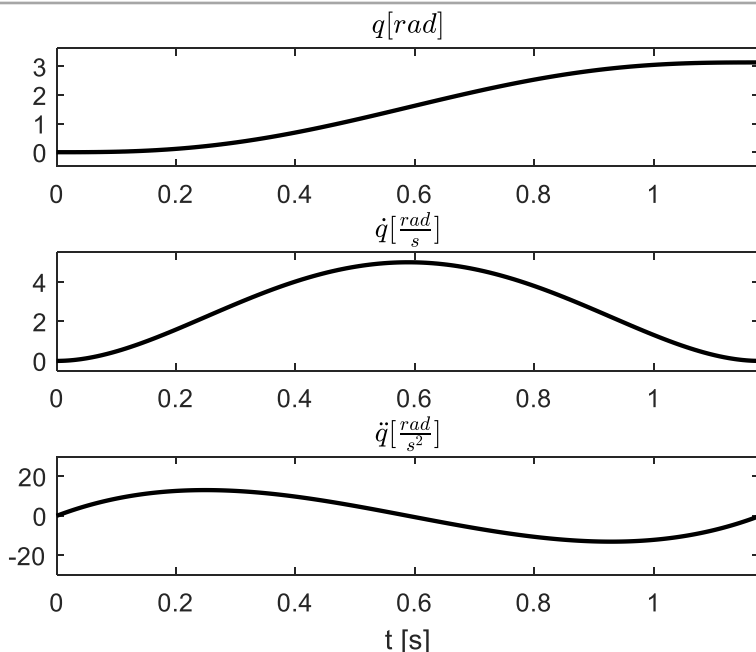
Jednačine kretanja neskaliranog polinoma kretanja date su sa:

$$q(t) = 8.3061t^5 - 24.4634t^4 + 19.2135t^3,$$

$$\dot{q}(t) = 41.5303t^4 - 97.8535t^3 + 57.6405t^2,$$

$$\ddot{q}(t) = 166.1213t^3 - 293.5606t^2 + 114.2840t.$$

Grafici promene pozicije, brzine i ubrzanja prikazani na Slici 81.



Slika 81 – Pozicija, brzina i ubrzanje zgloba robota ukoliko je primenjena interpolacija polinomom petog stepena.

Kao što se može videti u ovom primeru, vreme za koje je potrebno izvršiti kretanje je veće nego u ostalim primerima. Takođe, trajektorija je opisana na najkompleksniji način, ali prednost ovakvog opisivanja trajektorije jeste što su ispoštovana sva ograničenja koja potiču i od brzine i od ubrzanja, a da pri tome ne postoje diskontinuiteti. Ovakva trajektorija će moći da se izvrši u realnom okruženju bez ikakve degradacije.

Zadatak 71

Za planarni manipulator sa dva stepena slobode potrebno je odrediti putanje oba zgloba. Planiranje kretanja prvog zgloba treba ostvariti između početne $q_{1i} = 15^\circ$ i krajnje pozicije $q_{1f} = 45^\circ$, gde je maksimalna brzina zgloba poznata i iznosi $\dot{q}_{1max} = 2 \text{ rad/s}$. Planiranje kretanja drugog zgloba treba ostvariti između početne $q_{2i} = 0^\circ$ i krajnje pozicije $q_{2f} = 50^\circ$, gde su poznati maksimalna brzina i ubrzanje tog zgloba $\dot{q}_{2max} = 1 \text{ rad/s}$, odnosno $\ddot{q}_{2max} = 5 \text{ rad/s}^2$. Odrediti najmanje vreme T_f za koje se željeno kretanje može izvršiti. Odrediti jednačine kretanja prvog i drugog zgloba, tako da oba zgloba kretanje započnu i završe u isto vreme (T_f). Za planiranje kretanja zglobova koristiti trajektorije predstavljene polinomom trećeg ili petog stepena.

Rešenje:

Da bi kretanje oba zgloba krenulo i završilo se u istom trenutku, potrebno je uraditi analizu kretanja zglobova tako da oba zgloba poštuju sva ograničenja koja su im data. Nakon toga se uzima ono vreme koje je veće. Za to krajne vreme je potrebno onda preskalirati polinome i postaviti jednačine kretanja.

1) Analiza kretanja prvog zgloba.

Kako je za prvi zglob poznata samo maksimalna brzina, onda se može postaviti kretanje poštujući ograničenje samo po brzini, odnosno vrši se interpolacija polinomom trećeg stepena.

Prema tome, minimalno potrebno vreme za izvršavanje ovog kretanja se dobija kao:

$$T_{f1} = \frac{q_{1f} - q_{1i}}{\dot{q}_{1max}} p'_{3max} = \frac{(45^\circ - 15^\circ) \cdot \pi}{180^\circ \cdot 2} \cdot 1.5 = 0.3927 \text{ s.}$$

2) Analiza kretanja drugog zgloba.

Kod drugog zgloba potrebno je izvršiti analizu kretanja poštujući oba uslova kretanja – maksimalna brzina i maksimalno ubrzanje, odnosno potrebno je izvršiti interpolaciju polinomom petog stepena.

Poštujući ograničenje po brzini, dobija se:

$$T_{fv2} = \frac{q_{2f} - q_{2i}}{\dot{q}_{2max}} p'_{5max} = \frac{50^\circ \cdot \pi}{180^\circ \cdot 1} \cdot 1.875 = 1.6354 \text{ s.}$$

Poštujući ograničenje po ubrzanju, dobija se:

$$T_{fa2} = \sqrt{\frac{q_{2f} - q_{2i}}{\ddot{q}_{2max}} p''_{5max}} = \sqrt{\frac{50^\circ \pi}{180^\circ \cdot 5}} 5.773 = 1.0038 \text{ s.}$$

Vreme koje je potrebno da se kretanje izvrši poštujući oba uslova je:

$$T_{f2} = \max(T_{fv2}, T_{fa2}) = 1.6354 \text{ s.}$$

Kako je uslov zadatka da se kretanje oba zgloba izvršava i traje jednako, dobija se da je ukupno potrebno vreme kretanja oba zgloba $T_f = 1.6354 \text{ s.}$

Nova maksimalna brzina koju će dostići prvi zglob je:

$$\dot{q}_{1max} = \frac{q_{1f} - q_{1i}}{T_f} p'_{3max} = 0.4802 \frac{\text{rad}}{\text{s.}}$$

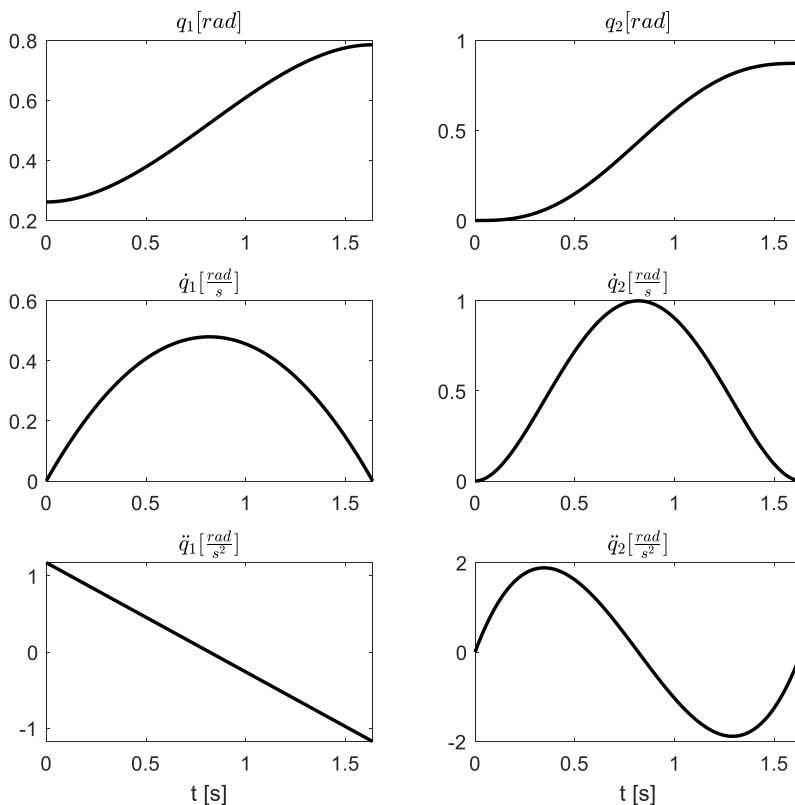
Jednačina kretanja prvog zgloba:

$$q_1(t) = \left(15^\circ + (45^\circ - 15^\circ) \cdot \left(-2 \left(\frac{t}{T_f} \right)^3 + 3 \left(\frac{t}{T_f} \right)^2 \right) \right) \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

Jednačina kretanja drugog zgloba:

$$q_2(t) = \left(0^\circ + (50^\circ - 0^\circ) \cdot \left(6 \left(\frac{t}{T_f} \right)^5 - 15 \left(\frac{t}{T_f} \right)^4 + 10 \left(\frac{t}{T_f} \right)^3 \right) \right) \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

Grafici promene pozicije, brzine i ubrzanja oba zgloba su data na Slici 82:



Slika 82 – Pozicija, brzina i ubrzanje zglobova robota, pri čemu je korišćena interpolacija polinomom trećeg stepena (levo) za kretanje prvog zgloba, odnosno polinomom petog stepena (desno) za kretanje drugog zgloba.

Zadatak 72

Trajektorija zgloba robota definisana je pozicijama u koje zglob robota treba da se pozicionira redom u stepenima: 10, 35, 25 i 10. Dužina tranzicije između svake od navedenih susednih pozicija u sekundama redom iznosi: 2, 1 i 3. Maksimalno ubrzanje zgloba robota na celoj putanji je $\ddot{q}_{max} = 50 \text{ }^\circ/\text{s}^2$. Izračunati maksimalnu dostignutu brzinu na svim segmentima kretanja, vreme ubrzanja i vreme kretanja konstantom brzinom, ako se za planiranje kretanja koristi trapezni profil brzine.

Rešenje:

Ukoliko se putanja zgloba robota definiše kroz početnu, krajnju i nekoliko prolaznih tačaka, datu putanju je moguće posmatrati kroz linearne segmente koji su povezani paraboličnim funkcijama.

Posmatraju se tri susedne tačke trajektorije j , k , i l . Period uklapanja dve linearne funkcije paraboličnom funkcijom kod tačke k dato je sa T_k . Trajanje linearnog dela kretanja između tačaka j i k dato je sa T_{jk} . Celokupno trajanje kretanja između tačaka j i k dato je sa T_{ajk} . Brzina tokom linearnog dela kretanja označena je sa \dot{q}_{jk} , a ubrzanje tokom faze uklapanja dve linearne funkcije kod tačke k označeno je sa \ddot{q}_k .

Za prolazne tačke na putanji važe sledeće relacije:

$$\dot{q}_{jk} = \frac{q_k - q_j}{T_{ajk}},$$

$$\ddot{q}_k = \text{sgn}(\dot{q}_{kl} - \dot{q}_{jk})|\ddot{q}|,$$

$$T_k = \frac{\dot{q}_{kl} - \dot{q}_{jk}}{\ddot{q}_k},$$

$$T_{jk} = T_{ajk} - \frac{1}{2}T_j - \frac{1}{2}T_k.$$

Za prvu i poslednju tačku putanje važe nešto drugačije relacije nego za prolazne tačke putanje.

Za prvu tačku putanje, odnosno za prvi segment kretanja važi:

$$\frac{q_2 - q_1}{T_{12} - \frac{1}{2}T_1} = \dot{q}_1 T_1,$$

odakle se dobija:

$$\ddot{q}_1 = \text{sgn}(q_2 - q_1)|\dot{q}|,$$

$$T_1 = T_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2(q_2 - q_1)}{\ddot{q}_1}},$$

$$\dot{q}_{12} = \frac{q_2 - q_1}{T_{d12} - \frac{1}{2}T_1},$$

$$T_{12} = T_{d12} - T_1 - \frac{1}{2}T_2.$$

Za poslednju taciku, odnosno segment kretanja važi:

$$\frac{q_{n-1} - q_n}{T_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}T_n} = \dot{q}_n T_n,$$

odakle se dalje dobija:

$$\ddot{q}_n = \text{sgn}(q_{n-1} - q_n)|\dot{q}|,$$

$$T_n = T_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 - \frac{2(q_{n-1} - q_n)}{\ddot{q}_n}},$$

$$\dot{q}_{(n-1)n} = \frac{q_n - q_{n-1}}{T_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}T_n},$$

$$T_{(n-1)n} = T_{d(n-1)n} - T_n - \frac{1}{2}T_{n-1}.$$

Ukoliko se uvrste brojne vrednosti date u postavci zadatka, dobijaju se parametri trajektorije koji nedostaju.

Parametri za prvi segment trajektorije:

$$\ddot{q}_1 = 50 \frac{\circ}{s^2}, \quad T_1 = 0.27 \text{ s}, \quad \dot{q}_{12} = 13.5 \frac{\circ}{s}.$$

Parametri trajektorije od druge do treće tačke, odnosno za drugi segment kretanja:

$$\dot{q}_{23} = -10 \frac{\circ}{s}, \quad \ddot{q}_2 = -50 \frac{\circ}{s^2}, \quad T_2 = 0.47 \text{ s}, \quad T_{12} = 1.5 \text{ s}.$$

Za poslednji segment kretanja dobija se:

$$\ddot{q}_4 = 50 \frac{\circ}{s^2}, \quad T_4 = 0.102 \text{ s}, \quad \dot{q}_{34} = -5.1 \frac{\circ}{s}.$$

Konačno, za prethodni segment kretanja dobija se:

$$\ddot{q}_3 = 50 \frac{\circ}{s^2}, \quad T_3 = 0.098 \text{ s}, \quad T_{23} = 0.716 \text{ s}, \quad T_{34} = 2.849 \text{ s}.$$

Ukoliko se putanja definiše na ovakav način, zglob robota kreće iz stanja mirovanja u početnoj tački i zaustavlja se u krajnjoj tački, dok uopšte ne prolazi tačno kroz zadate usputne tačke. Što je ubrzanje veće to će se putanja zgloba više približiti svim zadatim tačkama na putanji. Ovaj efekat se ispoljava zato što u prolaznim tačkama brzina zgloba robota nije jednaka nuli. Ako je potrebno da zglob robota dođe tačno do svake prolazne tačke, moguće je putanju izdeliti na segmente i izvršiti planiranje kretanja trapeznim profilom brzine, za svaki segment nezavisno.

Zadatak 73

Odrediti polinome koji opisuju kretanje zgloba robota između tri tačke: $A = 10^\circ$, $B = 45^\circ$ i $C = 30^\circ$. Maksimalna brzina zgloba robota je $50^\circ/\text{s}$. Odrediti vreme potrebno za izvršenje kretanja ako se ono planira tako da brzina prolaska kroz prolaznu tačku B treba da bude $35^\circ/\text{s}$. Odrediti vreme potrebno za izvršenje kretanja ukoliko se zglob zaustavlja u prolaznoj tački B. Za planiranje sekvenci kretanja između dve tačke koristiti interpolaciju polinomom trećeg stepena.

Rešenje:

U opštem slučaju, putanja zgloba prikazana polinomom trećeg stepena ima oblik:

$$q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0,$$

dok je brzina predstavljena:

$$\dot{q}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1.$$

Opšti uslovi koji važe pri kretanju zgloba robota su:

$$q(0) = q_i, \quad q(T_f) = q_f, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_i, \quad \dot{q}(T_f) = \dot{q}_f.$$

Parametri polinoma tada imaju sledeći oblik:

$$a_0 = q_i, \quad a_1 = \dot{q}_i,$$

$$a_2 = \frac{-3(q_i - q_f) - (2\dot{q}_i + \dot{q}_f)T_f}{T_f^2}, \quad a_3 = \frac{2(q_i - q_f) + (\dot{q}_i + \dot{q}_f)T_f}{T_f^3}.$$

Celokupno zadato kretanje treba podeliti na dva nezavisna kretanja. Prvo od tačke A do tačke B, i drugo od tačke B do tačke C.

Za prvi deo kretanja od tačke A do tačke B, gde važi $q_i = 10^\circ$, $q_f = 45^\circ$, $\dot{q}_i = 0^\circ/\text{s}$, $\dot{q}_f = 35^\circ/\text{s}$, mogu se odrediti koeficijenti polinoma:

$$a_0 = 10, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{105 - 35T_f}{T_f^2}, \quad a_3 = \frac{-70 + 35T_f}{T_f^3}.$$

Kako je zadatkom poznata maksimalna brzina, ali ne i vreme trajanja kretanja, potrebno je odrediti izvod brzine i izjednačiti ga sa nulom kako bi se odredio trenutak u kome se ona dostiže:

$$\ddot{q}(t) = \frac{6t(35T_f - 70)}{T_f^3} - \frac{2(35T_f - 105)}{T_f^2} = 0,$$

$$t_{\dot{q}_{\max}} = -\frac{-T_f^2 + 3T_f}{3T_f - 6}.$$

Ukoliko se sada $t_{\dot{q}_{\max}}$ uvrsti u jednačinu za brzinu, moguće je odrediti ukupno vreme kretanja:

$$\dot{q}(t_{\dot{q}_{\max}}) = -\frac{35(T_f - 3)^2}{3T_f(T_f - 2)} = 50 \frac{\circ}{\text{s}},$$

$$T_{f_{AB1}} = 0.9343 \text{ s}, \quad T_{f_{AB2}} = 1.8225 \text{ s}.$$

Za ukupno vreme kretanja uzima se manja vrednost kako bi celokupno kretanje trajalo kraće.

U tom slučaju polinom koji opisuje trajektoriju zgloba robota od tačke A do tačke B ima oblik:

$$q_{AB} = -45.7345t^3 + 82.8252t^2 + 10.$$

Slično, za drugi deo kretanja od tačke B do tačke C važi:

$$a_0 = 45, \quad a_1 = 35, \quad a_2 = \frac{-45 - 70T_f}{T_f^2}, \quad a_3 = \frac{30 + 35T_f}{T_f^3}.$$

Kao i u prethodnom slučaju potrebno je odrediti izvod brzine i izjednačiti ga sa nulom, odakle se dobija trenutak kada se dostiže maksimalna brzina:

$$\ddot{q}(t) = \frac{6t(35T_f + 30)}{T_f^3} + \frac{2(-70T_f - 45)}{T_f^2} = 0,$$

$$t_{\dot{q}_{max}} = -\frac{14T_f^2 + 9T_f}{21T_f + 18}.$$

Odnosno kada se $t_{\dot{q}_{max}}$ uvrsti u jednačinu brzine, dobija se vreme kretanja:

$$\dot{q}(t_{\dot{q}_{max}}) = -\frac{5(7T_f + 9)^2}{3T_f(7T_f + 6)} = -50 \frac{\circ}{s},$$

$$T_{f_{BC1}} = -0.8966 \text{ s}, \quad T_{f_{BC2}} = 0.5612 \text{ s}.$$

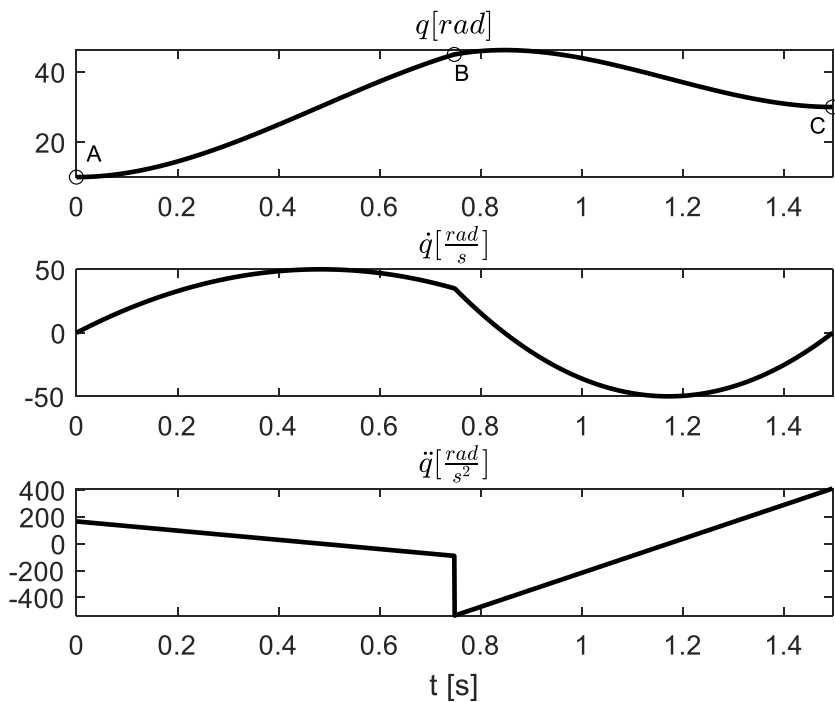
Kao vreme kretanja treba izabrati $T_{f_{BC2}}$ zato što vreme ne može da bude negativno.

Odakle se dobija polinom kretanja za drugi deo putanje kao:

$$q_{BC} = 280.8641t^3 - 267.6146t^2 + 35t + 45.$$

Ukupno vreme kretanja u ovakvom scenariju je: $T_f = T_{f_{AB1}} + T_{f_{BC2}} = 1.4955 \text{ s}$.

Grafik promene pozicije, brzine i ubrzanja dat je na Slici 83:



Slika 83 – Pozicija, brzina i ubrzanje zgloba robota ukoliko je primenjena interpolacija trećeg stepena bez zaustavljanja u prolaznoj tački.

Ukoliko se sada posmatra slučaj da se zglob zaustavlja u tački B, ukupno vreme za takvo kretanje je:

$$T_{f_{AB}} = \frac{q_{f1} - q_{i1}}{q_{max}} p'_{max} = 1.35 \text{ s}, \quad T_{f_{BC}} = \frac{q_{f2} - q_{i2}}{-q_{max}} p'_{max} = 0.45 \text{ s},$$

$$T_f = 1.8 \text{ s}.$$

Vrlo je razumno bilo pretpostaviti da će zglob robota brže izvršiti kretanje iz prvog scenarija nego iz drugog jer ne mora da se zaustavi u prolaznoj tački. Ipak, za drugi deo putanje (kretanje od tačke B do tačke C), može se primetiti da kretanje traje kraće u slučaju drugog scenarija, zato što je u prvom scenariju potrebno da zglob promeni brzinu sa neke vrednosti i započne kretanje u drugom smeru.

Zadatak 74

Za planarni manipulator sa dva stepena slobode potrebno je odrediti putanje oba zglobova. Kretanje završnog uređaja treba da krene iz tačke $(X_A; Y_A) = (0.933; 0.25)$ m, prođe kroz tačku $(X_B; Y_B) = (0.933; 0.25)$ m, pri čemu je brzina završnog uređaja u prolaznoj tački $(\dot{X}_B; \dot{Y}_B) = (1; 0.5)$ m/s, i na kraju je potrebno da se završni uređaj zaustavi u tački $(X_C; Y_C) = (0.7071; 0.7071)$ m. Vreme za koje se izvrši kretanje od tačke A do tačke B je $T_1 = 2$ s, dok je vreme za koje se izvrši kretanje od tačke B do tačke C jednako $T_2 = 3$ s. Odrediti jednačine kretanja prvog i drugog zglobova. Dužine segmenata robota su $l_1 = l_2 = 0.5$ m. Za planiranje kretanja zglobova koristiti trajektorije predstavljene polinomom trećeg stepena.

Rešenje:

Rešavanjem inverznog kinematičkog problema za dvosegmentni ravanski manipulator moguće je odrediti vrednosti unutrašnjih koordinata koji dovode završni uređaj u željenu poziciju, gde je:

$$q_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right),$$

$$\cos(q_2) = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2},$$

$$\sin(q_2) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(q_2)},$$

$$q_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(q_2)}{\cos(q_2)}\right).$$

Kako q_2 može imati dva rešenja u ovom slučaju, generalno inverzni problem u ovom slučaju može imati dva rešenja. Iz ukupnog skupa rešenja za sve tri tačke u spoljašnjim koordinatama A, B i C, izabran je sledeći skup unutrašnjih koordinata:

$$q_{1A} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}, \quad q_{2A} = \frac{\pi}{6} \text{ rad},$$

$$q_{1B} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, \quad q_{2B} = \frac{\pi}{6} \text{ rad},$$

$$q_{1C} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}, \quad q_{2C} = 0 \text{ rad}.$$

Dalje, ukoliko se izračuna Jakobijan matrica, moguće je odrediti brzinu u unutrašnjim koordinatama, pri kojoj robot treba da prođe kroz tačku B. Jakobijan matrica u tački B u odnosu na bazni koordinatni sistem manipulatora je:

$$J = \begin{bmatrix} -0.933 & -0.5 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odnosno, brzina u unutrašnjim koordinatama se dobija kao:

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5.7321 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ukoliko se za opšti oblik trajektorije predstavljene polinomom trećeg stepena uvrste sva ograničenja data postavkom zadatka:

$$q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0,$$

$$\dot{q}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1.$$

$$q(T_i) = q_i, \quad q(T_f) = q_f, \quad \dot{q}(T_i) = \dot{q}_i, \quad \dot{q}(T_f) = \dot{q}_f$$

dobijaju se parametri polinoma koji definišu odgovarajući segment celokupne trajektorije kao:

1) Kretanje od tačke A do tačke B:

$$q_{1_{AB}} = 0.3691t^3 - 0.6073t^2 + 0.5236,$$

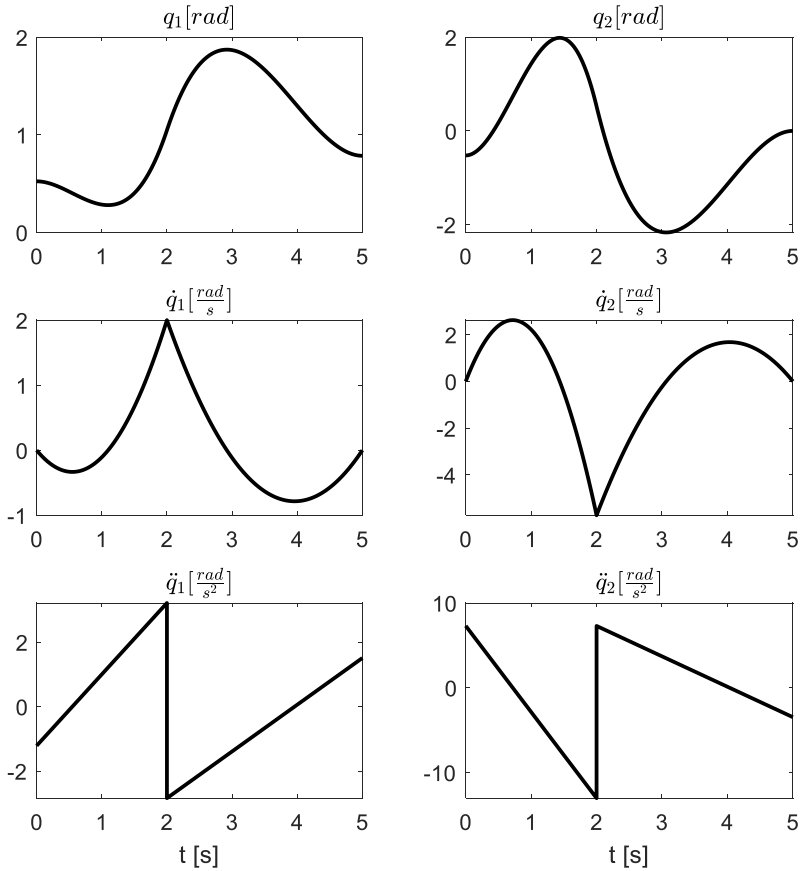
$$q_{2_{AB}} = -1.69748t^3 + 3.654t^2 - 0.5236,$$

2) Kretanje od tačke B do tačke C:

$$q_{1_{AB}} = 0.2416t^3 - 2.8703t^2 - 10.5681,$$

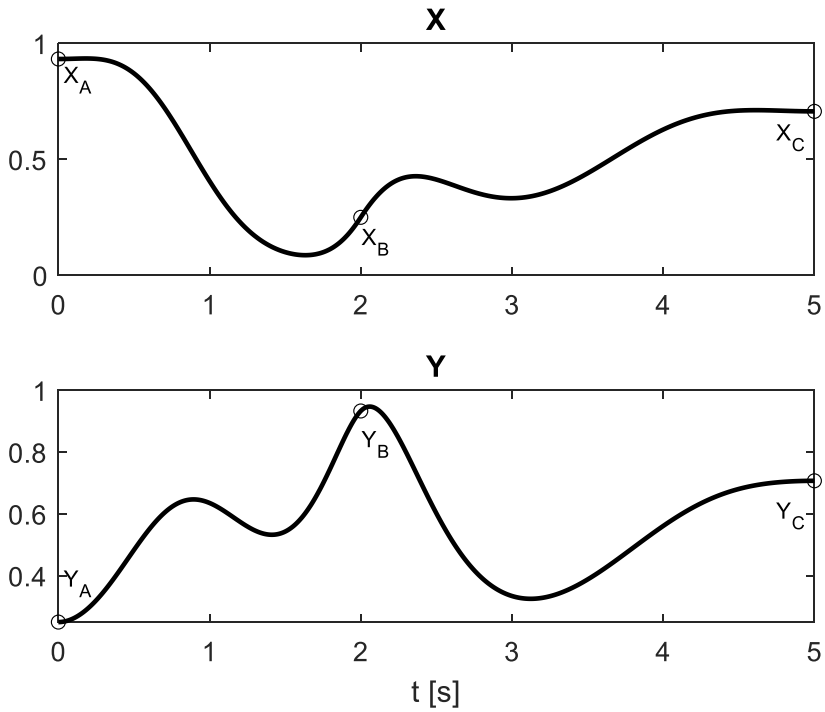
$$q_{2_{AB}} = -0.5981t^3 + 7.2355t^2 + 31.3599.$$

Grafik na kojem je prikazana promena pozicije, brzine i ubrzanja oba zglobova robota dat je na Slici 84.



Slika 84 – Pozicija, brzina i ubrzanje zglobova robota ukoliko je korišćena interpolacija polinomom trećeg stepena.

Promena pozicije završnog uređaja data je na Slici 85.



Slika 85 – Pozicija završnog uređaja robota; x-osa (gore), y-osa (dole).

8

Pogonski i senzorski sistemi robota

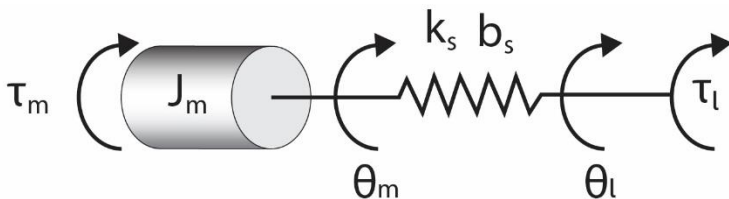
Tipični pogoni robota su električni motori koji koriste reduktore kako bi svoje karakteristike prilagodili potrebama kretanja zglobova robota. Tipični senzori pomoću kojih se kretanje robota meri, odnosno procenjuje jesu enkoderi, dok se za merenje intenziteta interakcije robota koriste senzori sile i momenta. U ovom poglavlju razmatraju se zadaci koji čitaocu daju uvid u to na koji način ovi pogonski i senzorski sistemi utiču na performanse i karakteristike robota, kao i kako se izborom ovih komponenti mogu postići željeni zahtevi u projektovanju robota.

Zadatak 75

Napisati jednačine pogona zgloba robota koji koristi jednosmerni motor kao pogon, dok se veza između motora i zgloba može modelovati kao elastični element konačne krutosti. Napisati model u prostoru stanja sistema i predstaviti ga blok dijagramom.

Rešenje:

Na Slici 86 prikazan je uprošćen prikaz opisane postavke:



Slika 86 – Pogonski motor i zglob robota spojeni elastičnim elementom.

gde je τ_m pogonski moment motora, J_m inercija motora, θ_m pozicija motora, k_s i b_s koeficijent krutosti i prigušenja torziona opruge, θ_l pozicija zgloba robota, a τ_l moment koji se prenosi sa pogonskog mehanizma na segment robota direktno povezanog za taj zglob.

Za ovakav sistem se mogu napisati dve osnovne jednačine koje opisuju dinamiku pogonskog motora i zgloba robota:

$$\tau_m = J_m \cdot \ddot{\theta}_m + B_m \cdot \dot{\theta}_m + \tau_l, \quad \tau_l = J \cdot \ddot{\theta}_l + [d] \cdot \dot{\theta}_l,$$

pri čemu je sa B_m označen koeficijent viskoznog trenja u motoru, dok je sa J označen moment inercije zgloba, a $[d]$ predstavlja mehaničke gubitke usled viskoznog trenja u zglobo.

Moment koji se razvija na zglobo kao posledica natezanja elastičnog elementa se može opisati na sledeći način:

$$\tau_l = k_s \cdot (\theta_m - \theta_l) + b_s \cdot (\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l).$$

Promenljiva koja se kontroliše u ovom sistemu jeste pozicija zgloba robota, odnosno θ_l , dok je komandovana veličina pogonski moment jednosmernog motora τ_m .

Ovakav sistem moguće je opisati modelom u prostoru stanja gde je:

$$x_1 = \theta_m, \quad x_2 = \dot{\theta}_m, \quad x_3 = \theta_l, \quad x_4 = \dot{\theta}_l,$$

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$J_m \dot{x}_2 = \tau_m - B_m x_2 - \tau_l,$$

$$\dot{x}_3 = x_4,$$

$$J \dot{x}_4 = \tau_l - [d] x_4,$$

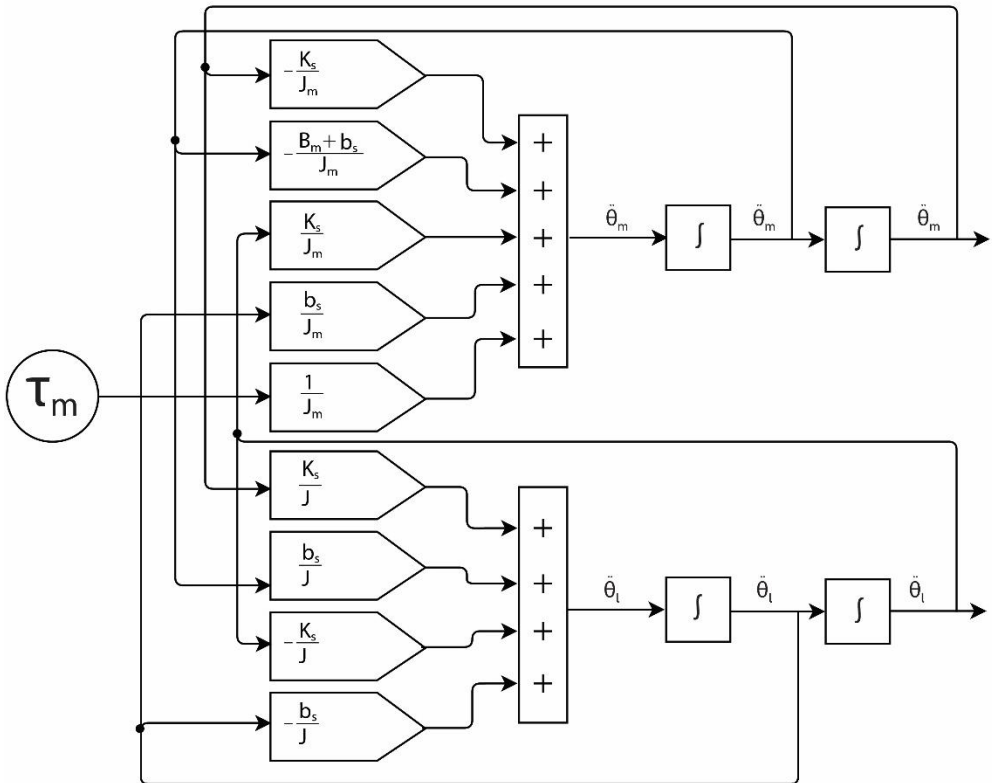
$$y = x_3.$$

Sređivanjem izraza za ubrzanje motora i zgloba dobija se:

$$\ddot{\theta}_m = -\frac{B_m + b_s}{J_m} \dot{\theta}_m - \frac{K_s}{J_m} \theta_m + \frac{K_s}{J_m} \theta_l + \frac{b_s}{J_m} \dot{\theta}_l + \frac{1}{J_m} \tau_m,$$

$$\ddot{\theta}_l = \frac{K_s}{J} \theta_m - \frac{K_s}{J} \theta_l + \frac{b_s}{J} \dot{\theta}_m - \frac{b_s}{J} \dot{\theta}_l.$$

Blok dijagram koji opisuje model u prostoru stanja opisanog sistema:



Slika 87 – Blok dijagram sistema koji opisuje zglob robota pogonjen jednosmernim motorom preko elastične veze.

Zadatak 76

Za planetarni reduktor odrediti prenosni odnos ako je: 1) nosač satelita (planeta) fiksiran i 2) spoljni prsten fiksiran. Parametri reduktora su: broj zubaca spoljašnjeg prstena – $N_{sp} = 100$, broj zubaca centralnog zupčanika (sunca) – $N_s = 50$ i broj zubaca satelita (planeta) – $N_p = 25$.

Rešenje:

Da bi konstrukcijski bilo moguće napraviti planetarni reduktor, broj zubaca mora zadovoljiti uslov:

$$N_{sp} = N_s + 2N_p,$$

gde je N_{sp} broj zubaca spoljašnjeg prstena, N_s broj zubaca centralnog zupčanika (sunca) i N_p broj zubaca zupčanika satelita (planeta).

1) Najpre je potrebno razmotriti slučaj gde je nosač satelita fiksiran.

U ovom slučaju, moguće je odrediti prenosni odnos od osovine reduktora do spoljašnjeg prstena:

$$N = \frac{N_{sp}}{N_s} = 2.$$

2) Sada, je potrebno razmotriti slučaj gde je spoljašnji prsten reduktora fiksiran.

U ovom slučaju moguće je odrediti prenosni odnos od osovine reduktora do nosača satelita:

$$N = \frac{N_s + N_{sp}}{N_p} = 6.$$

Zadatak 77

Odrediti prenosni odnos harmonijskog reduktora kod koga je broj zubaca fleksibilnog prstena – $N_f = 45$, a broj zubaca spoljašnjeg kružnog prstena – $N_l = 50$.

Rešenje:

Kod harmonijskog reduktora, parametar N_f označava broj zubaca fleksibilnog prstena, dok N_l označava broj zubaca spoljašnjeg kružnog prstena.

Prenosni odnos od ulaza ka izlazu reduktora je:

$$N = \frac{(N_f - 1)N_l}{N_f - N_l} = -440.$$

Moguće je primetiti dve osobine harmonijskog reduktora: prva je ta da za relativno mali broj zubaca fleksibilnog i fiksnog prstena prenosni odnos reduktora ima veliku vrednost, a druga da je znak redukcije negativan. Druga osobina govori o tome da će se za jedan smer okretanja ulazne osovine reduktora izlazna osovina okretati u suprotnom smeru.

Zadatak 78

Zglob robota se pogoni električnim motorom koji pokreće segment robota koji se može posmatrati kao štap mase $m = 1 \text{ kg}$ i dužine $l = 0.5 \text{ m}$. Odrediti optimalni prenosni odnos reduktora koji se nalazi u zglobu ovog robota ukoliko je inercija rotora motora $82 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$.

Rešenje:

Optimalni prenosni odnos se dobija prilagođenjem opterećenju. Da bi se izračunao prenosni odnos potrebno je odrediti moment inercije segmenta koji se pogoni:

$$J_l = \frac{1}{3}ml^2 = 0.0833\text{kgm}^2.$$

Obrtni moment koji pokreće opterećenje je dat sledećim izrazom:

$$\tau_m = \left(J_m + \frac{J_l}{N^2} \right) \alpha_m.$$

Na osnovu prethodnog izraza, moguće je odrediti ubrzanje i opterećenja (zgloba robota):

$$\alpha_l = \frac{\alpha_m}{N} = \frac{\tau_m N}{J_m N^2 + J_l}.$$

Kako je potrebno naći prenosni odnos koji će da maksimizuje performanse sistema, parcijalnom diferencijacijom gornjeg izraza po prenosnom odnosu i njegovim izjednačavanjem sa nulom, dobijamo optimalan prenosni odnos:

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial N} = \frac{\tau_m (J_l - J_m N^2)}{(J_m N^2 + J_l)^2} = 0,$$

$$J_l - J_m N^2 = 0,$$

$$N = \sqrt{\frac{J_l}{J_m}}.$$

Odavde se sada dobija optimalni prenosni odnos:

$$N = \sqrt{\frac{J_l}{J_m}} = \sqrt{\frac{0.0833}{80 \cdot 10^{-7}}} \cong 100.$$

Zadatak 79

Motor čije izlazno vratilo ima torzionu krutost od 500 Nm/rad je povezano na ulaznu stranu reduktora čiji je prenosni odnos $N = 10$, dok je izlazna torziona krutost reduktora 5000 Nm/rad. Kolika je efektivna izlazna krutost celokupnog pogonskog sistema prema segmentu robota?

Rešenje:

Određivanje ukupne krutosti sistema je veoma značajno u polju robotike. Kod klasičnih industrijskih robota kruti segmenti donose dve velike prednosti. Standardni roboti ne poseduju senzore koji direktno mere poziciju završnog uređaja, već se koriste senzori na zglobovima robota i kroz direktnu kinematiku se računa pozicija završnog uređaja. Prema tome, prva prednost krutih segmenata i pogonskih sistema jeste što omogućava da postavljeni DH parametri ostanu onakvi kakvi jesu i pod uticajem spoljašnjih sila i momenata. Druga prednost se ogleda u tome da fleksibilne strukture mogu doći u stanje neprigušenih oscilacija, što bi dovelo do neželjenih pojava u sistemu.

Dva fleksibilna elementa moguće je povezati na dva načina, rednom i paralelnom vezom.

Paralelna veza dva fleksibilna elementa će rezultovati ukupnom krutošću na sledeći način:

$$k_p = k_1 + k_2,$$

dok će redna veza dva fleksibilna elementa rezultovati ukupnom krutošću na sledeći način:

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Naravno, ukupna krutost pogonskog sistema će biti rezultat redne veze torzionih krutosti izlaznog vratila motora i izlaznog vratila reduktora.

Takođe, sam reduktor na odgovarajući način modifikuje torzionu krutost izlazne osovine motora faktorom N^2 .

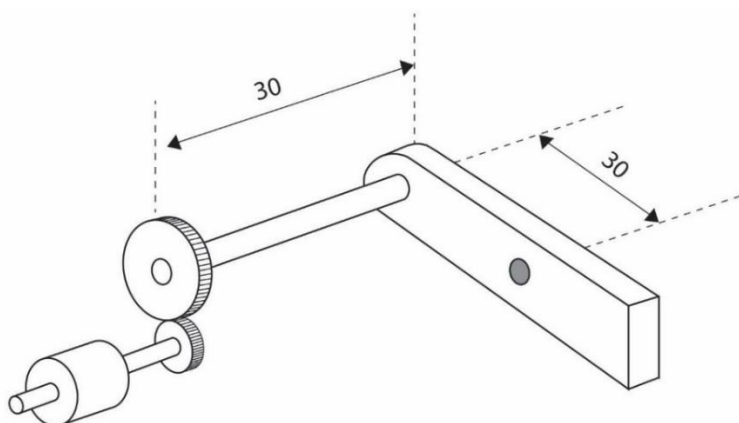
Iz prethodnih relacija se može odrediti ukupna torziona krutost sistema na sledeći način:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_r} + \frac{1}{N^2 k_m} = \frac{1}{5000} + \frac{1}{100 \cdot 500} \rightarrow k = 4545.4 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}.$$

Zadatak 80

Inercija rotora pogonskog motora segmenta robota je $0.015 \text{ k} \cdot \text{gm}^2$, a maksimalni pogonski moment 8 Nm . Ovakav pogon pokreće segment robota čiji se centar mase nalazi na rastojanju od 30 cm , dok je ukupna masa segmenta 10 kg . Ukoliko se zanemari inercija reduktora, kao i viskozno trenje u sistemu, izračunati ukupnu efektivnu inerciju pogona, kao i maksimalno ubrzanje ukoliko je prenosni odnos reduktora:

- a) 3, b) 30.



Slika 88 – Pogonski sklop sa motorom i reduktorom.

Rešenje:

Moment inercije zgloba (ukoliko se on posmatra kao materijalna tačka mase m) robota se može izračunati kao:

$$I_l = ml^2 = 10(0.3)^2 = 0.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Ukupna inercija koja deluje na motor je, za prvi slučaj:

$$I_{total} = \frac{1}{N^2} I_l + I_m = \frac{1}{9} 0.9 + 0.015 = 0.115 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

a za drugi slučaj:

$$I_{total} = \frac{1}{N^2} I_l + I_m = \frac{1}{900} 0.9 + 0.015 = 0.016 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Može se videti da se za veći prenosni odnos reduktora ukupna inercija opterećenja koju „vidi” motor smanjuje.

Maksimalno ugaono ubrzanje koje se postiže u prvom slučaju je:

$$\ddot{\theta}_m = \frac{\tau_m}{I_{total}} = \frac{8}{0.115} = 69.56 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2},$$

a u drugom slučaju:

$$\ddot{\theta}_m = \frac{\tau_m}{I_{total}} = \frac{8}{0.016} = 500 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Ukoliko bi se motor okretao bez ikakvog opterećenja, izlazno vratilo nije spojeno za zglob robota, maksimalno ubrzanje koje bi moglo da se postigne je:

$$\ddot{\theta}_m = \frac{\tau_m}{I_m} = \frac{8}{0.015} \cong 533 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Zadatak 81

Posmatra se postavka iz prethodnog zadatka. Segment robota se može smatrati beskonačno krutim, mase 10 kg i centra mase lociranog na rastojanju od 30 cm od ose rotacije. Reduktor je, takođe, beskonačno krut prenosnog odnosa N . Izlazno vratilo pogonskog sistema je dužine 30 cm i napravljeno je od čelika. Ukoliko je potrebno da centar mase segmenta postigne ubrzanje od 65.4 rad/s^2 , koliko treba da bude prečnik izlaznog vratila kako segment ne bi odstupio od svoje pozicije više od 0.1 rad pri kretanju?

Rešenje:

Inercija opterećenja koje se prenosi ka motoru je:

$$I_l = ml^2 = 10(0.3)^2 = 0.9 \text{ kgm}^2.$$

Ubrzanje koje je potrebno ostvariti tokom kretanja je:

$$\ddot{\theta} = 2g = 65.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Ukupni moment koji tada treba da se razvije iznosi:

$$\tau = \ddot{\theta} I_l = 58.86 \text{ Nm}.$$

Kako pogonski sistem treba da bude dovoljno krut da spreči otklon veći od 0.1 rad pod dejstvom ukupnog momenta, torziona krutost treba da bude:

$$k = \frac{\tau}{\Delta\theta} = 588.6 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}.$$

Aproksimativna formula krutosti reduktora se može izračunati po formuli:

$$k = C_g b r^2,$$

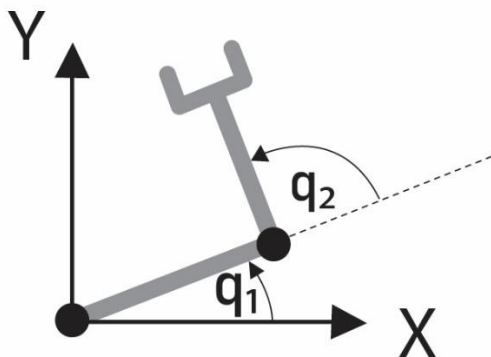
pri čemu mu ja sa b označena dužina izlaznog vratila, sa r je označen poluprečnik izlaznog zupčanika, a $C_g = 1.34 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ za čelik.

Iz poslednjeg izraza se može dobiti poluprečnik izlaznog zupčanika kao:

$$r = \sqrt{\frac{k}{C_g b}} = 3.8265 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

Zadatak 82

Za konfiguraciju robota sa Slike 89 odrediti ekvivalentnu krutost završnog uređaja u spoljašnjim koordinatama, ako je krutost pojedinih zglobova $k_1 = 200 \text{ Nm/rad}$ i $k_2 = 500 \text{ Nm/rad}$. Dužine segmenata robota su $l_1 = l_2 = 0.5 \text{ m}$, dok je pozicija unutrašnjih koordinata za konfiguraciju sa slike $q_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ i $q_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.



Slika 89 – Robot sa dva stepena slobode.

Rešenje:

Ako se posmatra jedan zglob čija je krutost k_i , a koji se otkloni iz svog ravnotežnog položaja za vrednost Δq_i , tada se javlja moment:

$$\tau_i = k_i \Delta q_i,$$

odnosno napisano u matričnom obliku:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Theta} \Delta \mathbf{q}.$$

Veza između pomeraja u unutrašnjim koordinatama i pomeraja u spoljašnjim koordinatama data je sa:

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{q}.$$

Delovanje spoljašnje sile/momenta koji deluju na završni uređaj sa momentima u zglobovima povezani su relacijom:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}.$$

Ukoliko se sada prethodni izrazi srede, može se dobiti:

$$\Delta X = J\Delta q = J\Theta^{-1}\tau = J\Theta^{-1}J^T \cdot F = C \cdot F.$$

Matrica koja povezuje eksternu silu/moment sa pomerajima u spoljašnjim koordinatama je matrica C , koja se naziva matrica popustljivosti.

Ukoliko se obe strane prethodnog izraza pomnože sa C^{-1} , dobija se:

$$F = C^{-1}\Delta X,$$

odnosno,

$$F = K\Delta X,$$

pri čemu se matrica K zove matrica krutosti i raspisan oblik ove matrice se može napisati na ovaj način:

$$K = C^{-1} = (J^T)^{-1}\Theta J^{-1}.$$

Jakobijan matrica za prikazanu konfiguraciju ima oblik:

$$J = \begin{bmatrix} -0.683 & -0.433 \\ 0.1830 & -0.250 \end{bmatrix}.$$

Ukoliko se uvrste krutosti pojedinih zglobova i Jakobijan matrica, dobija se krutost završnog uređaja robota:

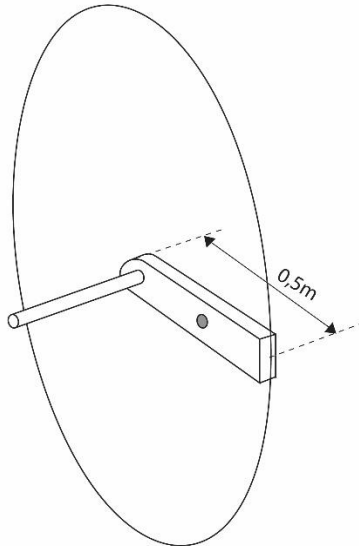
$$K = \begin{bmatrix} 467.9 & 653.6 \\ 653.6 & 4332 \end{bmatrix}.$$

Važno je primetiti da krutost završnog uređaja robota zavisi kako od krutosti pojedinog zgloba robota, tako i od konfiguracije robota u prostoru (Jakobijan matrice).

Zadatak 83

Potrebno je odrediti rezoluciju vrha rotacionog segmenta robota. Za aktuciju se koristi jednosmerni motor koji ima ugrađen reduktor sa prenosnim odnosom $N = 33$. Kao senzor ugaone pozicije koristi se digitalni inkrementalni enkoder sa 500 impulsa po obrtaju. Dužina segmenta je 0.5 m. Posmatrati dva slučaja, kada je:

- a) senzor je montiran na osovinu motora,
- b) senzor je montiran na osovinu zgloba robota.



Slika 90 – Segment robota koji rotira.

Rešenje:

Ukupan put koji segment pokriva ukoliko se zarotira za pun krug je:

$$S = 2r\pi = 3.14 \text{ m,}$$

i za ovaj put enkoder izbroji 500 zareza.

Potrebno je prvo razmotriti slučaj kada je senzor montiran na osovinu motora robota.

Rezolucija koja se postiže na osovini motora je data sa:

$$REZ_m = \frac{PunKrug}{BrojImpulsa} = \frac{360^\circ}{500} = 0.72^\circ.$$

Kako reduktor smanjuje broj obrtaja, odnosno za jedan krug zgloba, potrebno je da se motor okrene 33 puta. Shodno tome, za jedan pun krug zgloba robota efektivno će senzor povećati broj pulseva 33 puta, pa je rezolucija na osovini zgloba robota onda:

$$REZ_r = \frac{360^\circ}{500 \cdot 33} = 0.0218^\circ.$$

Rezolucija na vrhu segmenta se dobija kao:

$$REZ_v = S \cdot \frac{REZ_r}{360^\circ} = 0.19 \text{ mm}.$$

Sada je potrebno razmotriti slučaj kada je senzor montiran na osovini zgloba.

Ukoliko je senzor montiran na osovini zgloba robota, gubi se efekat na merenje koji reduktor unosi u sistem, pa je rezolucija koja se postiže na osovini zgloba:

$$REZ_o = \frac{360^\circ}{500} = 0.72^\circ.$$

Odnosno rezolucija koja se dobija na vrhu segmenta je:

$$REZ_v = S \cdot \frac{REZ_o}{360^\circ} = 6.3 \text{ mm}.$$

Prednosti postavljanja enkodera na osovini motora su iz dobijenih rezultata očigledna, odnosno postiže se daleko manja rezolucija pri merenju pozicije segmenta. Ipak, postavljanje senzora na samoj osovini segmenta ima svoju prednost. Na ovaj način se meri ono što se dešava na samom segmentu, tj. na senzor neće uticati zazor ili drugi neželjeni efekti u reduktoru poput elastičnosti i drugih nelinearnosti koji mogu da dovedu do greške u merenju.

Zadatak 84

Potrebno je odrediti rezoluciju vrha rotacionog segmenta robota. Za aktuaciju se koristi jednosmerni motor koji ima ugrađen reduktor sa prenosnim odnosom $N = 33$. Kao senzor ugaone pozicije koristi se digitalni inkrementalni enkoder sa 500 impulsa po obrtaju. Dužina segmenta je 0.5 m. Enkoder je montiran na osovinu motora i koristi se u kvadraturi (prate se i silazna i uzlazna ivica oba kanala enkodera).

Rešenje:

Rezolucija na motoru koja će se postići u ovom slučaju se može izračunati na sledeći način:

$$REZ_m = \frac{PunKrug}{4 \cdot BrojImpulsa} = \frac{360^\circ}{4 \cdot 500} = 0.18^\circ.$$

Rezolucija koja se postiže na osovinu zgloba nakon uticaja reduktora se dobija kao:

$$REZ_r = \frac{REZ_m}{N} = 0.0055^\circ.$$

Konačno, rezolucija na vrhu segmenta se izračunava na sledeći način:

$$REZ_v = S \cdot \frac{REZ_r}{360^\circ} = 0.047 \text{ mm}.$$

9

Upravljanje

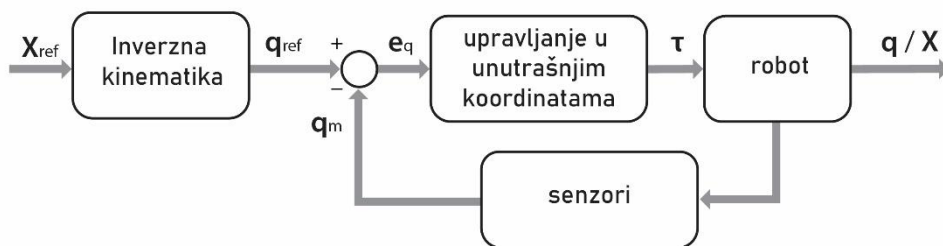
Rešavanjem zadataka u ovom poglavlju, čitaoci će steći uvid u mogućnosti korišćenja znanja o modelu robota sa jedne, odnosno znanja iz teorije upravljanja sa druge strane u cilju različitih pristupa upravljanju robotskim sistemima.

Zadatak 85

Objasniti pristupe upravljanja robotom u unutrašnjim (generalisanim) i spoljašnjim (funkcionalnim) koordinatama i predstaviti ih blok dijagramom.

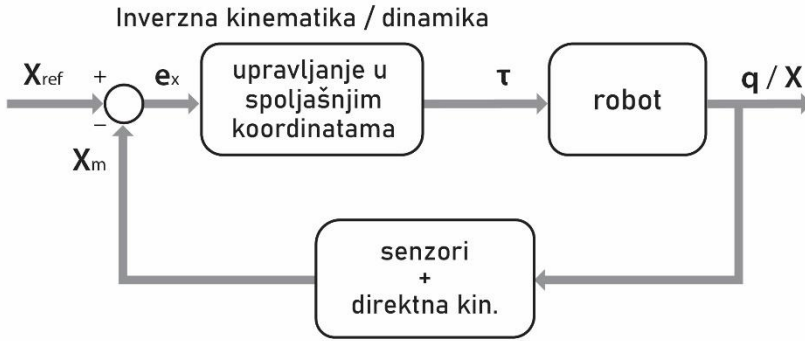
Rešenje:

Problematika upravljanja u unutrašnjim i spoljašnjim koordinatama se prirodno nameće jer se željeno kretanje robota zadaje u spoljašnjim (funkcionalnim) koordinatama, dok pogoni robota kojim upravljamo direktno utiču na kretanje unutrašnjih (generalisanih) koordinata.



Slika 91 – Blok dijagram upravljačke šeme robota u unutrašnjim koordinatama.

Upravljanje u unutrašnjim koordinatama zahteva najpre rešenje inverznog kinematičkog problema radi izračunavanja željenog kretanja svakog zgloba, a zatim upravljanja pozicijom svakog pojedinačnog zgloba. Mana upravljanja unutrašnjim koordinatama je ta što se ne meri pozicija završnog uređaja robota već, se ona procenjuje na osnovu merenja pozicije zglobova i rešavanja modela direktne kinematike. Model kinematike nikada nije idealan i ne razmatra neizbežne greške usled zazora u reduktorima i elastičnosti samih reduktora, ali i ostalih elemenata mehaničke konstrukcije. To znači da iako se idealno ostvare željene pozicije zglobova, pozicija završnog uređaja ne mora biti idealno ostvarena.



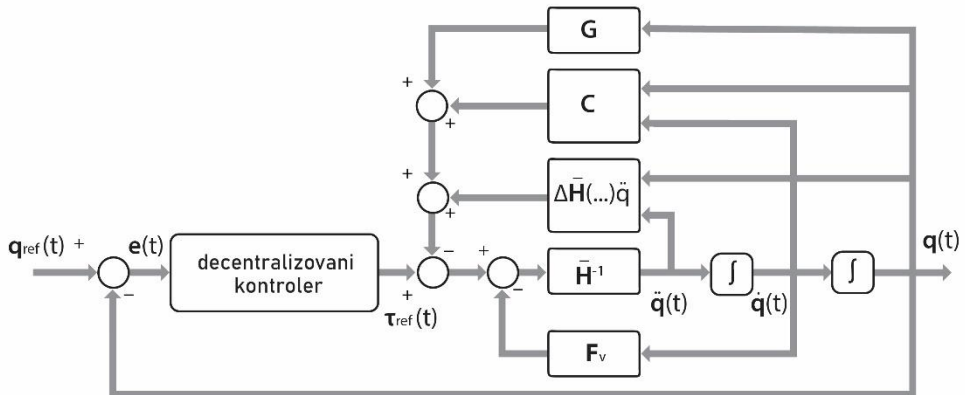
Slika 92 – Blok dijagram upravljačke šeme robota u spoljašnjim koordinatama.

Kod upravljanja u spoljašnjim koordinatama, poredi se odstupanje u spoljašnjim koordinatama. Međutim, treba istaći da je poziciju završnog robota teško direktno meriti, već se ona opet procenjuje na osnovu merenja pozicije zglobova i modela direktne kinematike (manje problematična od inverzne). Sa druge strane, kako se upravljačke komande izvršavaju na nivou unutrašnjih koordinata, upravljački mehanizam je vrlo kompleksan jer sadrži proračun inverzne dinamike.

Zadatak 86

Nacrtati opštu šemu decentralizovanog upravljanja robotskim manipulatorom. Objasniti osnovne principe decentralizovanog upravljanja.

Rešenje:



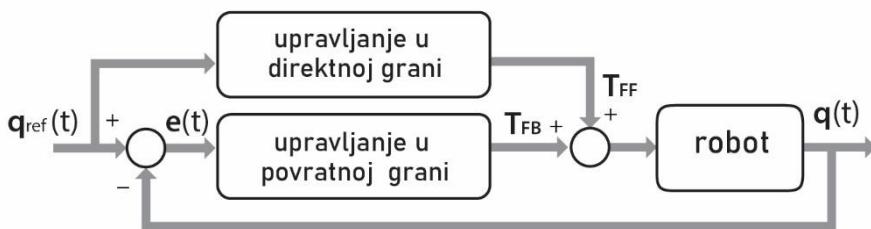
Slika 93 – Blok dijagram decentralizovane upravljačke šeme robota.

Decentralizovano upravljanje se zasniva na konceptu da se upravljanje vrši nad svakim zglobom robota nezavisno tako što se posmatra samo njegov linearni deo iz matrice H . Ostatak matrice H , koji se odnosi na efekte dinamičkog spreznja (kuplovanja) sa ostalim zglobovima kinematičkog lanca, kao i brzinski (C) i gravitacioni efekti (G), se posmatraju kao poremećaji u sistemu. Ovakvim postupkom zadatak upravljanja je sveden na n nezavisnih zadataka upravljanja jednim zglobom. Sa druge strane, cena ovako pojednostavljenog pristupa je da su potrebni robusni kontroleri za upravljanje pojedinim osama zbog velikog doprinosa opisanih poremećaja.

Zadatak 87

Nacrtati opštu šemu centralizovanog upravljanja robotskim manipulatorom. Objasniti osnovne principe centralizovanog upravljanja.

Rešenje:

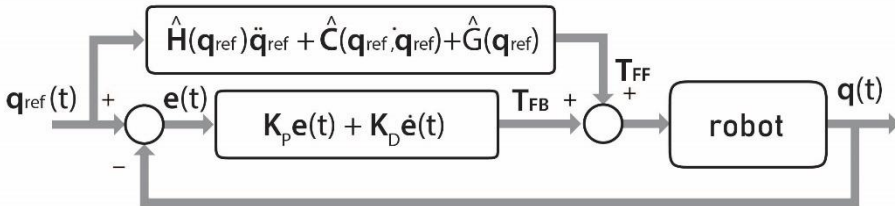


Slika 94 – Blok dijagram centralizovane upravljačke šeme robota.

Model robota je uglavnom poznat korisniku pri projektovanju zakona upravljanja, kao i referentna trajektorija, odnosno željeno kretanje pozicije zglobova tokom kretanja. Kod centralizovanog pristupa upravljanju, prvi deo kontrolera eksploatiše znanje o modelu robota (direktnu dinamiku) i zadato kretanje. Najčešći naziv za ovaj deo upravljanja je upravljanje u direktnoj grani ili engl. *feedforward*. Drugi deo kontrolera se odnosi na upravljanje u povratnoj grani ili engl. *feedback*. Ovaj deo kontrolnog algoritma ima za zadatak da kompenzuje nemodelovanu dinamiku sistema i eventualno nastale poremećaje i tako obezbedi praćenje reference sa nultom greškom. Naziva se upravljanjem u povratnoj grani zato što se oslanja na merenje pozicija zglobova.

Zadatak 88

Napisati zakon upravljanja robotom metodom proračunatih momenata (engl. *computed torque control*). Nacrtati šemu upravljanja koja koristi metodu proračunatih momenata u direktnoj grani uz PD regulaciju odstupanja pozicije zglobova robota. Objasniti osnovne principe upravljanja robotom metodom proračunatih momenata.

Rešenje:

Slika 95. Zakon upravljanja robota metodom proračunatih momenata.

Metoda proračunatih momenata je jedna od najpoznatijih metoda centralizovanog upravljanja. Upravljanje u direktnoj grani se u ovom slučaju zasniva na izračunavanju potrebnih pogonskih momenata u svakom zglobov robota na osnovu referentnog kretanja i poznavanja modela dinamike robota, koji u opštem slučaju obuhvata inercijalne, brzinske i gravitacione efekte.

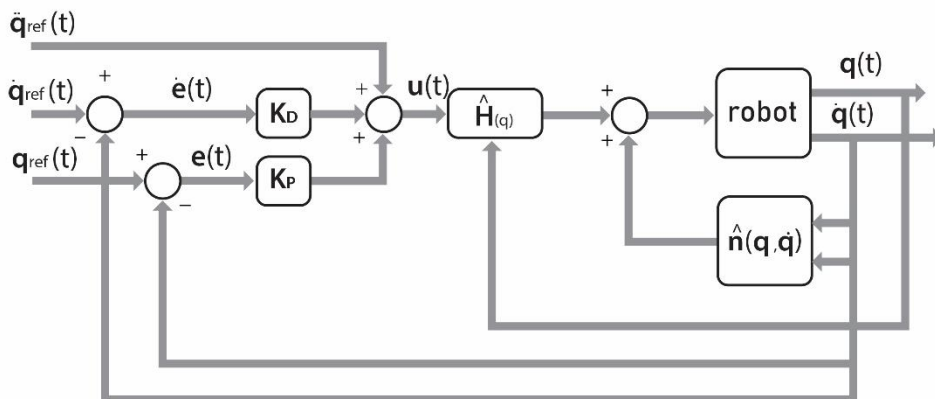
Ovaj deo upravljačkog algoritma je moguće računati u off-line režimu, pa čak i prikazati lookup tabelom, čime se smanjuje potrebna računarska moć u on-line režimu koja se može iskoristiti za neki drugi proces. U ovom slučaju, upravljanje u povratnoj grani se uglavnom realizuje u vidu PD kontrolera, a doprinos upravljanja u ovoj grani se realizuje u on-line režimu. Zakon upravljanja je dat sa:

$$\tau = \hat{H}(q_{ref})\ddot{q}_{ref} + \hat{C}(q_{ref}, \dot{q}_{ref})\dot{q}_{ref} + \hat{G}(q_{ref}) + K_D\dot{e} + K_P e.$$

Zadatak 89

Napisati zakon upravljanja robotom metodom inverzne dinamike uz PD regulaciju odstupanja pozicije zglobova robota. Nacrtati šemu upravljanja koja koristi metodu inverzne dinamike kao nominalno upravljanje. Objasniti osnovne principe upravljanja robotom na bazi inverzne dinamike.

Rešenje:



Slika 96 – Upravljačka šema inverzne dinamike sa PD kontrolerom.

Metoda inverzne dinamike je još jedna česta metoda centralizovanog upravljanja. Za razliku od metode proračunatih momenata, ovde se za proračun inverznog modela dinamike robota koriste merene, odnosno trenutne vrednosti pozicija i brzina zglobova robota. Na taj način se dobija preciznije izračunavanje potrebnih doprinosa upravljanja u direktnoj grani, ali je potrebno mnogo više računarskih resursa jer se, shodno tome, ovakav metod upravljanja mora realizovati u on-line režimu. U povratnoj grani se koristi PD kontroler čija je uloga da kompenzuje greške nastale rešavanjem inverznog modela dinamike i nastalih poremećaja u sistemu. Zakon upravljanja dat je izrazima:

$$\tau = \hat{H}(q)u + \hat{n}(q, \dot{q}),$$

$$u(t) = \ddot{q}_{ref}(t) + K_D \dot{e}(t) + K_P e(t).$$

Primenom navedene metode se dobija sledeći izraz dinamike robota, gde se jasno vidi kako PD kontroler kompenzuje nemodeliranu dinamiku sistema datu sa ΔH i Δn :

$$\ddot{e}(t) + K_D \dot{e}(t) + K_P e(t) = \hat{H}^{-1}(\Delta H \ddot{q} + \Delta n).$$

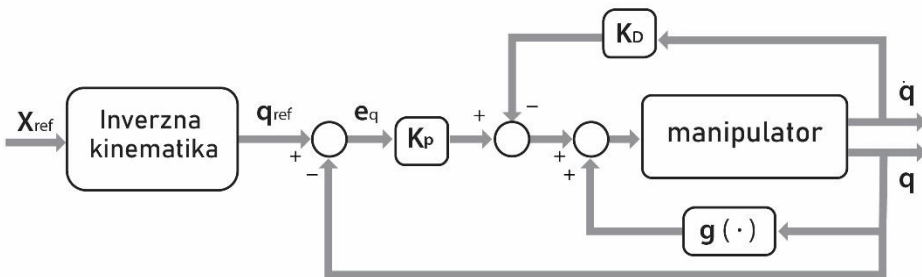
Zadatak 90

Napisati i predstaviti grafički blok dijagramom:

- PD zakon upravljanja u unutrašnjim koordinatama sa gravitacionom kompenzacijom,
- PD zakon upravljanja u spoljašnjim koordinatama sa gravitacionom kompenzacijom.

Rešenje:

- PD zakon upravljanja u unutrašnjim koordinatama sa gravitacionom kompenzacijom je prikazan na Slici 97.



Slika 97 – Blok dijagram upravljačke šeme koji koristi PD zakon upravljanja sa gravitacionom kompenzacijom u unutrašnjim koordinatama.

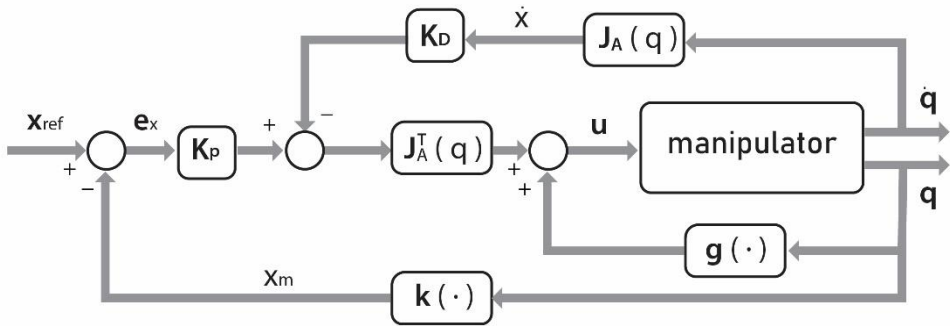
Ovo je jedan od čestih metoda upravljanja industrijskim robotima jer sadrži deo koji izračunava pogonske momente, koji su potrebni da kompenzuju gravitaciono opterećenje na osnovu trenutne pozicije robota, gde se gravitacioni moment vrlo jednostavno izračunava, dok je merenje pozicija zglobova vrlo precizno. Prikazani metod upravljanja koristi PD kontroler svakog pojedinog zgloba kao osnovni deo upravljačkog algoritma. Jednačina upravljanje je data sa:

$$u = g(q) + K_P e_q - K_D \dot{q}.$$

Primenom navedene metode se dobija sledeći izraz dinamike robota, gde se jasno vidi uticaj PD kontrolera definisanog u prostoru unutrašnjih koordinata:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = g(q) + K_P e_q - K_D \dot{q}.$$

b) PD zakon upravljanja u spoljašnjim koordinatama sa gravitacionom kompenzacijom je prikazan na Slici 98.



Slika 98 – Blok dijagram upravljačke šeme koji koristi PD zakon upravljanja sa gravitacionom kompenzacijom u spoljašnjim koordinatama.

Analogno prethodnoj upravljačkoj šemi u ovom zadatku, gravitaciona kompenzacije se postiže na jednostavan i precizan način na osnovu modela i merenja trenutne pozicije robota. Sa druge strane, metod upravljanja koristi PD kontroler definisan u prostoru spoljašnjih koordinata na osnovu merenja, odnosno procene odstupanja položaja završnog uređaja. Na ovaj način se izračunava potrebna sila kojom bi trebalo delovati na završni uređaj robota kako bi se ova odstupanja eliminisala, a te izračunate sile se zatim preračunavaju u pogonske momente pomoću Jakobijan matrice koristeći princip virtuelnog rada. Jednačina upravljanja je data sa:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^T \mathbf{K}_P \mathbf{e}_X - \mathbf{J}^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}.$$

Primenom navedene metode se dobija sledeći izraz dinamike robota gde se jasno vidi uticaj PD kontrolera definisanog u prostoru spoljašnjih koordinata:

$$\Lambda(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{X}} + \Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{X}} + \eta(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^T \mathbf{K}_P \mathbf{e}_X - \mathbf{J}^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}.$$

Izdavač

Akademski misao

Primorska 21, Beograd

Tel.: +381 11 3218 354

Marko Vujadinović dipl. el. inž.

+381 63 30 10 75

marko.vujadinovic@akademski-misao.rs

Aleksandar Rašković, dipl. el. inž.

+381 63 30 10 65

sasa.raskovic@akademski-misao.rs

www.akademski-misao.rs
office@akademski-misao.rs

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

007.52(075.8)(076)

62-52(075.8)(076)

ЈОВАНОВИЋ, Коста, 1986-

Robotika : zbirka rešenih zadataka / Kosta Jovanović,
Nikola Knežević. - Beograd : Akademski misao :
Univerzitet, Elektrotehnički fakultet, 2021 (Beograd :
Akademski misao). - 188 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 200.

ISBN 978-86-7466-876-4 (AM)

1. Кнежевић, Никола, 1993- [аутор]

а) Роботика - Задаци

COBISS.SR-ID 35708169

