

ZBIRKA ZADATAKA IZ ROBOTIKE

Prof. dr Branislav Borovac

Doc. dr Goran Đorđević

Mr Milan Rašić

dipl. inž. Dejan Andrić

NOVI SAD, NIŠ, 2002

PREDGOVOR

Zbirka zadataka iz robotike namenjena je studentima završnih godina studija elektrotehnike i mašinstva. Imajući u vidu da je broj studenata koji slušaju robotiku u Srbiji tokom jedne školske godine relativno mali, odlučili smo se za verziju Zbirke koja bi bila usklađena sa nastavnim planovima robotike Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu i Elektronskog fakulteta Univerziteta u Nišu. Mnogi od zadataka Zbirke korišćeni su tokom niza godina pri izvodjenju računskih ili laboratorijskih vežbanja iz predmeta Tehnička robotika i Industrijska robotika. Ipak, Zbirka sadrži i nekoliko novih zadataka koji, nadamo se, uspešno povezuju poglavlja u neophodnu celinu. Na ovom mestu smatramo da je neophodno da se zahvalimo Mr. Draganu Kostiću koji je pomogao u koncipiranju značajnog broja zadataka Zbirke tokom rada na Elektronskom fakultetu u Nišu.

Pažljivo odabrani zadaci pružaju sveobuhvatan uvod neophodan za izučavanje naučnih i tehnoloških osnova industrijske robotike. Prateći savremene trendove u robotici a istovremeno imajući na umu složenost materije koja nije pogodna za tekstualno izlaganje, odlučili smo se da se oslonimo, tamo gde je moguće, na prednosti koje pruža okruženje MATLAB-a. Veliki broj osnovnih matematičkih funkcija nad vektorima i matricama, bogat skup funkcija za grafičko predstavljanje rezultata a posebno funkcije koje pripadaju velikom broju korisničkih alata, tzv. toolbox-ova, pružilo je, i bukvalno, programsku osnovu za virtuelnu robotsku laboratoriju. Otuda i preporuka da se pre početka korišćenja ove Zbirke studenti kratkim uvodom pripreme za rad u MATLAB okruženju.

Smatrajući da izdavanje udžbenika osnovnih studija ne treba da donosi profit, odlučili smo se da Zbirka bude dostupna svakom studentu, bez materijalne nadoknade. Dodatan razlog koji opravdava elektronsku distribuciju knjige je da velika većina zadataka poseduje MATLAB skript kao deo rešenja. Time je omogućena direktna verifikacija zadataka a takođe ostavljena i sloboda autonomnog rada, bez zamornog prekucavanja kodâ rešenja.

Autori pozivaju sve korisnike ove Zbirke da sugestije, primedbe i uočene nedostake pošalju elektronskim putem na adresu ZbirkaIzRobotike@yahoo.com.

Autori,

Novi Sad, Niš, April 2002. godine

SADRŽAJ

HOMOGENE TRANSFORMACIJE.....	4
D-H NOTACIJA I DIREKTNI ZADATAK KINEMATIKE	23
JAKOBIJAN I INVERZNI ZADATAK KINEMATIKE	37
DINAMIKA	71
PLANIRANJE TRAJEKTORIJA I PRIMENE.....	76
DODATAK 1	164
DODATAK 2	167
DODATAK 3	170
DODATAK 4	173
DODATAK 5	177
DODATAK 6	183
LITERATURA.....	186

HOMOGENE TRANSFORMACIJE

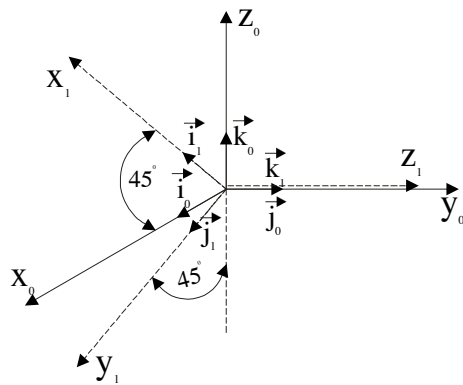
Zadatak 1.1

Odrediti projekcije vektora \vec{i}_1 , \vec{j}_1 , \vec{k}_1 na ose koordinatnog sistema O_o - $x_o y_o z_o$ i matricu rotacije R_0^1 za slučaj prikazan na Sl. 1.

Rešenje:

Obzirom da kolone matrice transformacije R_0^1 predstavljaju projekcije ortova rotiranog koordinatnog sistema O_I - $x_I y_I z_I$ na ortove nepokretnog koordinatnog sistema O_o - $x_o y_o z_o$ (videti Dodatak 1), za situaciju prikazanu na Sl. 1. možemo pisati:

$$\vec{i}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{2} \end{bmatrix} \quad \vec{j}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{2} \end{bmatrix} \quad \vec{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Slika 1. Relativni položaj koordinatnih sistema posle rotacije

odakle, zamenom u kolone matrice, sledi tražena matrica rotacije

$$R_o^1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 1.2

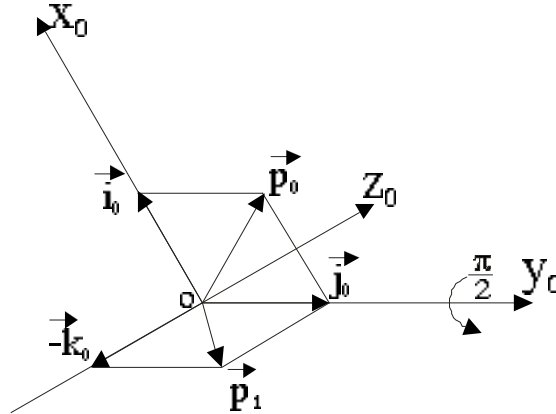
Vektor $\vec{p}_0 = [1, 1, 0]^T$ je rotiran oko y_0 ose za ugao $\theta = \frac{\pi}{2}$ kao što je prikazano na Sl. 2. Odrediti koordinate vektora posle rotacije.

Rešenje:

$$\vec{p}_1 = R_{y,\theta} \cdot \vec{p}_0 = R_{y,90^\circ} \cdot \vec{p}_0$$

Na osnovu osnovnih (bazičnih) matrica rotacije oko koordinatnih osa (videti Dodatak 1) sledi

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Slika 2. Ilustracija uz zadatak 1.2

pa posle sračunavanja vrednosti za ugao $\theta = \pi/2$ dobijamo tražene koordinate vektora

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.3

Odrediti matricu rotacije R koja predstavlja rotaciju za $-\pi/2$ oko x ose praćenu rotacijom za ugao $-\pi/4$ oko trenutne z ose.

Rešenje:

Ukupnu matricu rotacije (vidi Dodatak 2) možemo odrediti kao rezultat dve uzastopne rotacije prema izrazu

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x, -90^\circ} \cdot \mathbf{R}_{z, -45^\circ}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zadatak 1.4

Da bi utvrdili da li za uzastopne rotacije važi zakon komutativnosti odrediti matricu rotacije \mathbf{R}' za iste pojedinačne rotacije kao u prethodnom primeru (zadatak 1.3) ali izvedene obrnutim redosledom.

Rešenje:

U ovom slučaju ukupna matrica rotacije nastaje kao rezultat dve uzastopne rotacije ali obrnutim redosledom, tj.

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}_{z, -45^\circ} \cdot \mathbf{R}_{x, -90^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 R' &= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Odavde se vidi da za konačne rotacije na važi zakon komutativnosti.

Zadatak 1.5

Odrediti matricu rotacije koja odgovara skupu rotacija definisanih sa:

- 1.- rotacija oko z ose za ugao ϕ
- 2.- rotacija oko nove y ose za ugao θ
- 3.- rotaciju oko nove z ose za ugao ψ

ako su uglovi rotacija dati sa: $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$, $\psi = \pi/4$. Koji je smer x_1 ose u odnosu na bazni koordinatni sistem?

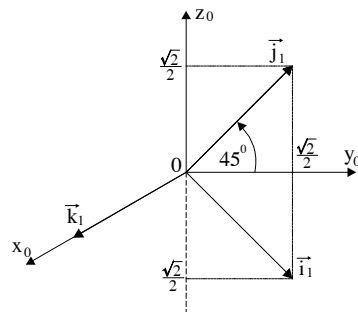
Rešenje:

Pošto su u pitanju ZYZ Ojlerovi uglovi, matrica rotacije je data sa

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\theta \cdot C\psi - S\phi \cdot S\psi & -C\phi \cdot C\theta \cdot S\psi - S\phi \cdot C\psi & C\phi \cdot S\theta \\ S\phi \cdot C\theta \cdot C\psi + C\phi \cdot S\psi & -S\phi \cdot C\theta \cdot S\psi + C\phi \cdot C\psi & S\phi \cdot S\theta \\ -S\theta \cdot C\psi & S\theta \cdot S\psi & C\theta \end{bmatrix}$$

odakle sledi

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$



Slika 3. Položaj koordinatnog sistema posle rotacije u odnosu na bazni

Položaj koordinatnog sistema posle rotacije u odnosu na bazni je dat na Sl. 3.

Zadatak 1.6

Odrediti matricu rotacije za date uglove valjanja $\phi = 0^\circ$, propinjanja $\theta = \pi/2$ i skretanja $\psi = \pi/4$.

Rešenje:

Ako primenimo odgovarajuću matricu transformacije (vidi Dodatak 2)

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\theta \cdot C\psi - S\phi \cdot S\psi & -C\phi \cdot C\theta \cdot S\psi - S\phi \cdot C\psi & C\phi \cdot S\theta \\ S\phi \cdot C\theta \cdot C\psi + C\phi \cdot S\psi & -S\phi \cdot C\theta \cdot S\psi + C\phi \cdot C\psi & S\phi \cdot S\theta \\ -S\theta \cdot C\psi & S\theta \cdot S\psi & C\theta \end{bmatrix}$$

za date vrednosti uglova ϕ , θ i ψ dobijamo

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.7

Odrediti homogenu transformacionu matricu \mathbf{H} koja predstavlja rotaciju oko $0x$ ose za ugao α prateći translaciju duž rotirane $0y$ ose za b jedinica.

Rešenje:

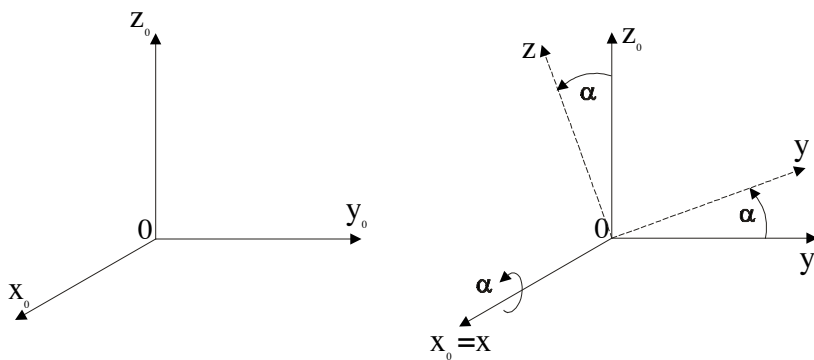
$$\mathbf{H} = \mathbf{I}$$

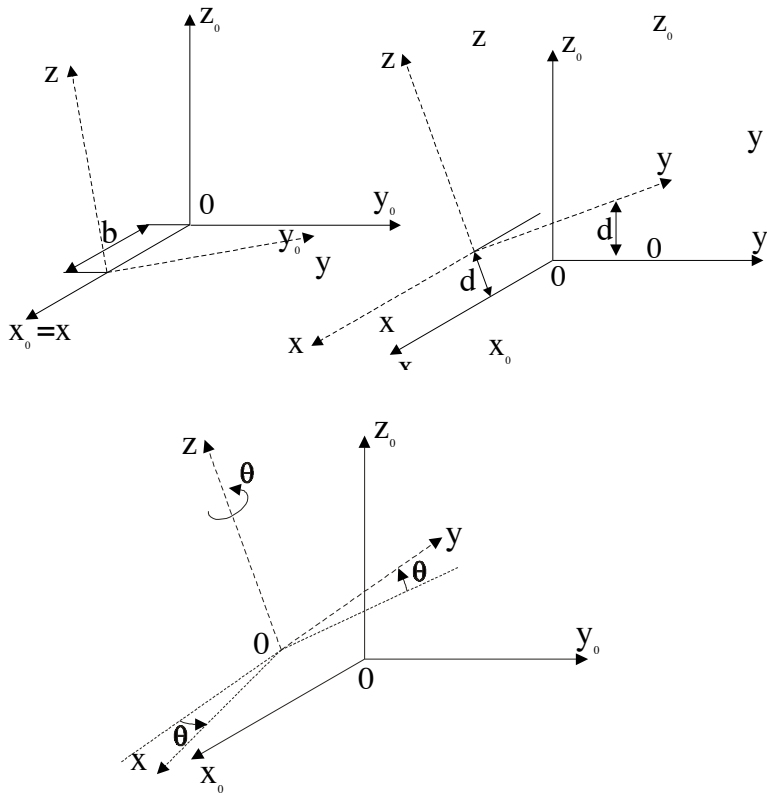
$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{x,\alpha} \cdot \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{x,\alpha}$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_{y,b} = \mathbf{H}_{x,\alpha} \cdot \mathbf{H}_{y,b} \Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{H}_{x,\alpha} \cdot \mathbf{H}_{y,b}$$

Zadatak 1.8

Odrediti homogenu matricu transformacije koja predstavlja rotaciju za α stepeni oko trenutne x ose praćenu translacijom za b jedinica duž trenutne x ose,





Slika 4. Transformacije koordinatnih sistema

praćenu translacijom za d jedinica duž trenutne z ose i praćenu rotacijom za θ stepeni oko trenutne z ose.

Rešenje:

Ako primenimo sukcesivno matrice specificiranih homogenih transformacija, koje su skicirane na Sl. 4, rezultujuća homogena matrica ukupne transformacije se može odrediti na osnovu izraza:

$$H = R_{x,\alpha} \cdot T_{x,b} \cdot T_{z,d} \cdot R_{z,\theta}$$

Zamenom pojedinačnih matrica homogenih transformacija (vidi Dodatak 3) sledi

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa na kraju dobijamo

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & b \\ C\alpha \cdot S\theta & C\alpha \cdot C\theta & -S\alpha & -d \cdot S\alpha \\ S\alpha \cdot S\theta & S\alpha \cdot C\theta & C\alpha & d \cdot C\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.9

Određiti transformacionu matricu \mathbf{T} koja predstavlja rotaciju oko 0x ose za ugao α praćenu translacijom duž 0x ose za a jedinica, praćenu translacijom duž 0z ose za d jedinica, praćenu rotacijom oko 0z ose za ugao θ .

Rešenje:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{x,\alpha} \cdot \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{x,\alpha}$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{x,a} \cdot \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{x,a} \cdot \mathbf{H}_{x,\alpha}$$

$$\mathbf{H}_3 = \mathbf{H}_{z,d} \cdot \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{z,d} \cdot \mathbf{H}_{x,a} \cdot \mathbf{H}_{x,\alpha}$$

$$\mathbf{H}_4 = \mathbf{H}_{z,\theta} \cdot \mathbf{H}_3 = \mathbf{H}_{z,\theta} \cdot \mathbf{H}_{z,d} \cdot \mathbf{H}_{x,a} \cdot \mathbf{H}_{x,\alpha}$$

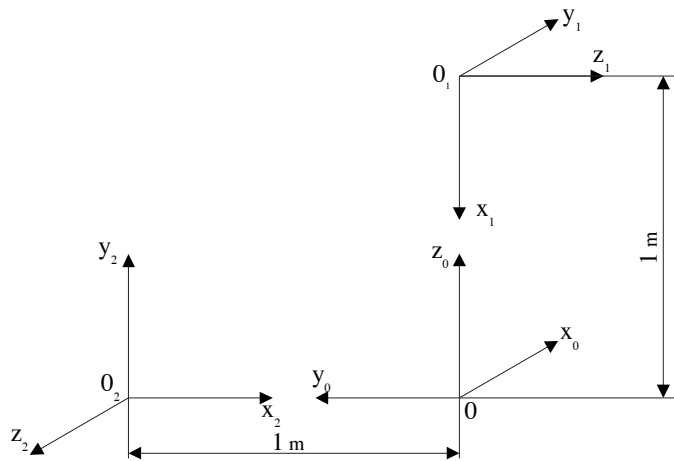
Odakle dobijamo

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{z,\theta} \cdot \mathbf{H}_{z,d} \cdot \mathbf{H}_{x,a} \cdot \mathbf{H}_{x,\alpha}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\alpha & -S_\alpha & 0 \\ 0 & S_\alpha & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.10

Odrediti homogene transformacije $\mathbf{H}_0^1, \mathbf{H}_0^2, \mathbf{H}_1^2$ koje predstavljaju transformacije između sistema prikazanih na slici. Pokažite da je $\mathbf{H}_0^2 = \mathbf{H}_0^1 \mathbf{H}_1^2$.



Slika 5. Položaj koordinatnih sistema

Rešenje:

Sa slike se može uočiti da između koordinatnih sistema $O_0-x_0y_0z_0$ i $O_1-x_1y_1z_1$ postoje sledeće transformacije:

$$\mathbf{H}_0^1 = \text{Tran}_{z,1} \cdot \text{Rot}_{x,90^\circ} \cdot \text{Rot}_{z,-90^\circ}$$

na osnovu čega sledi

$$\begin{aligned}
 H_0^1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Na sličan način se dobija

$$H_0^2 = \mathit{Tran}_{y,1} \cdot \mathit{Rot}_{x,90^\circ} \cdot \mathit{Rot}_{y,-90^\circ}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}
 H_0^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Za vezu između koordinatnih sistema $O_1-x_1y_1z_1$ i $O_2-x_2y_2z_2$ važi

$$H_1^2 = \mathit{Tran}_{x,1} \cdot \mathit{Tran}_{z,-1} \cdot \mathit{Rot}_{y,-90^\circ} \cdot \mathit{Rot}_{x,90^\circ}$$

na osnovu čega sledi

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa konačno za homogenu transformaciju H_1^2 dobijamo

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Također, na osnovu međusobnog položaja koordinatnih sistema $O_o-x_o y_o z_o$ i $O_1-x_1 y_1 z_1$ se može pisati

$$\mathbf{H}_0^1 = \mathbf{Rot}_{x,90^\circ} \cdot \mathbf{Rot}_{z,-90^\circ} \cdot \mathbf{Tran}_{x,-1}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Na osnovu gornjih izraza za \mathbf{H}_0^1 i \mathbf{H}_1^2 možemo odrediti ukupnu homogenu matricu transformacije \mathbf{H}_0^2 prema izrazu

$$\mathbf{H}_0^2 = \mathbf{H}_0^1 \cdot \mathbf{H}_1^2$$

odakle sledi

$$\mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obzirom da je dobijeni rezultat identičan matrici homogene transformacije \mathbf{H}_0^2 dobijene direktnim sračunavanjem dokazano je da relacija $\mathbf{H}_0^2 = \mathbf{H}_0^1 \cdot \mathbf{H}_1^2$ važi.

Ovaj zadatak je moguće rešiti korišćenjem drugih transformacija. Naime, sa Sl. 5 se može uočiti da između koordinatnih sistema $O_o-x_o y_o z_o$ i $O_1-x_1 y_1 z_1$ postoji drugačiji niz transformacija kojima se koordinatni sistemi dovode do poklapanja:

$$\mathbf{H}_0^1 = \mathbf{Rot}_{x,90^0} \cdot \mathbf{Rot}_{z,-90^0} \cdot \mathbf{Tran}_{z,-1}$$

na osnovu čega sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Na sličan način se može dobiti

$$\mathbf{H}_0^2 = \mathbf{Rot}_{z,-90^0} \cdot \mathbf{Rot}_{x,90^0} \cdot \mathbf{Tran}_{y,-1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Za vezu između koordinatnih sistema takođe $O_1-x_1y_1z_1$ i $O_2-x_2y_2z_2$ važi

$$\mathbf{H}_1^2 = \mathbf{Rot}_{y,-90^0} \cdot \mathbf{Rot}_{x,90^0} \cdot \mathbf{Tran}_{y,-1} \cdot \mathbf{Tran}_{x,-1}$$

na osnovu čega sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

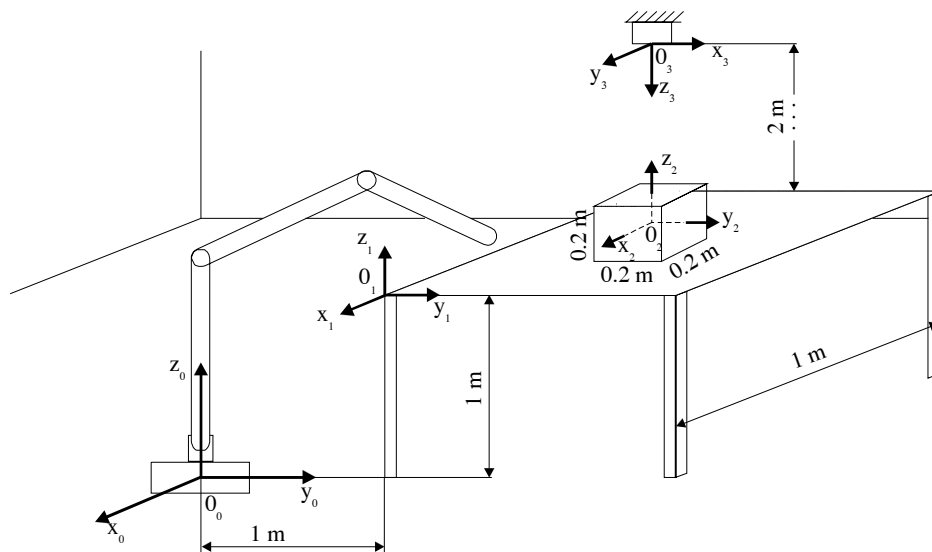
Treba uočiti da se dobijeni rezultati poklapaju sa rezultatima dobijenim u prethodnom slučaju, čime smo pokazali da rezultat ne zavisi od načina na koji je neka transformacija realizovana.

Zadatak 1. 11

Robot je postavljen (Sl. 6) na rastojanju od 1 m od stola čije dve noge se nalaze na y_0 osi. Gornja površina stola je na rastojanju od 1 m od podloge i kvadratnog je oblika sa stranicom dužine 1 m. Koordinatni sistem $O_1-x_1y_1z_1$ je fiksiran za ivicu stola. Kocka dimenzija 0,2 m je postavljena na sredini radne površine stola sa koordinatnim sistemom $O_2-x_2y_2z_2$ smeštenim u centru kocke. Kamera je postavljena direkto iznad centra kocke 2 m iznad površine stola sa sopstvenim koordinatnim sistemom $O_3-x_3y_3z_3$. Odrediti homogene transformacije svih koordinatnih sistema u odnosu na bazni koordinatni sistem $O_0-x_0y_0z_0$ kao i homogenu transformaciju koordinatnog sistema $O_2-x_2y_2z_2$ u odnosu na koordinatni sistem $O_3-x_3y_3z_3$.

Rešenje:

$$H_0^1 = \text{Tran}_{y,1} \cdot \text{Tran}_{z,1}$$



Slika 6. Slika uz zadatak

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^2 = \mathbf{Tran}_{y,1.5} \cdot \mathbf{Tran}_{z,1.1} \cdot \mathbf{Tran}_{x,-0.5}$$

$$\mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^3 = \mathbf{Tran}_{x,-0.5} \cdot \mathbf{Tran}_{z,3} \cdot \mathbf{Tran}_{y,1.5} \cdot \mathbf{Rot}_{x,\pi} \cdot \mathbf{Rot}_{z,-\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathbf{H}_0^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \mathbf{Tran}_{z,1.9} \cdot \mathbf{Rot}_{y,\pi} \cdot \mathbf{Rot}_{z,\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.12

Kocka iz zadatka 1.10. je rotirana za 90° oko ose z_2 . Ponovo sračunati sve transformacije kao u prethodnom zadatku.

Rešenje:

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0^2 = H_0^1 H_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0^3 = H_0^2 H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & -1 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.13

Pretpostavimo da je kamera u zadatku 1.10. zarotirana za 90° oko ose z_2 i pomeren tako da njen centar u odnosu na koordinatni sistem $O_I-x_Iy_Iz_I$ ima koordinate $[0 \ 0.8 \ 0.1]$. Sračunati homogene transformacije između kocke i kamere i kocke i koordinatnog sistema $O_I-x_Iy_Iz_I$.

Rešenje:

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & -1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & -1 & 1.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogena transformacija od kocke do koordinatnog sistema $O_I-x_Iy_Iz_I$ je

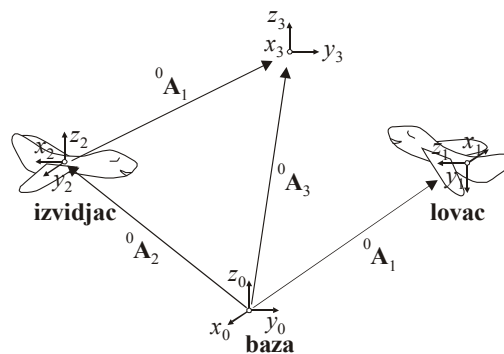
$$\mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.14

Lovac presretač nalazi se u odnosu na bazu u položaju opisanom homogenom transformacijom ${}^0\mathbf{A}_1$, slika 7. Izvidjački avion na položaju ${}^0\mathbf{A}_2$ u odnosu na bazu uočio je neprijateljsku letelicu na položaju ${}^2\mathbf{A}_3$ u odnosu na sebe. Odrediti parametre po kojima lovac treba da ispali raketu na neprijateljski avion ako je poznato:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0,866 & 0 & 0,5 & 3 \\ 0,25 & 0,866 & -0,433 & 4 \\ -0,433 & 0,5 & 0,75 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 & 0 & 2 \\ 0,433 & 0,75 & -0,5 & 5 \\ 0,25 & 0,433 & 0,866 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0,866 & 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -0,5 & 0 & 0,866 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 7. Primer presretanja lovca

Rešenje:

Oredimo osnovne homogene matrice transformacija koje će definisati položaj cilja. Položaj cilja u odnosu na bazu određen je relacijom

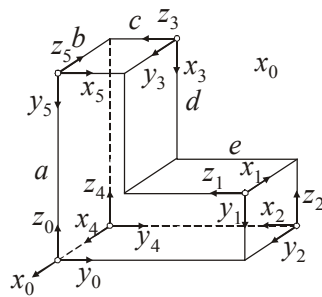
$${}^0\mathbf{A}_3 = {}^0\mathbf{A}_2 \cdot {}^0\mathbf{A}_3$$

$${}^1\mathbf{A}_0 = ({}^0\mathbf{A}_1)^{-1}$$

$${}^3\mathbf{A}_1 = {}^1\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_3 = ({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} \cdot {}^0\mathbf{A}_2 \cdot {}^0\mathbf{A}_3$$

Zadatak 1.15

Za kordinatne sisteme prikazane na slici 8, odrediti transf. matrice ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ i ${}^0\mathbf{A}_i$ za $i=1,2,\dots,6$. Koristiti funkcije `rotx`, `roty`, `rotz`, i `transl` Robotics toolbox-a.



Slika 8. Koordinatni sistemi na temenima slova L

Rešenje:

Slaganjem matrica transformacija dobijamo

$${}^0\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}_{y,c+e} \cdot \mathbf{T}_{x,a-d} \cdot \mathbf{R}_{x,-90^\circ} \cdot \mathbf{R}_{y,180^\circ}$$

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & c+e \\ 0 & -1 & 0 & a-d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & a-d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prethodno opisana procedura može biti realizovana pomoću i paketa Robotics toolbox:

$$T = \text{rot x (teta)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & -S_\theta & 0 \\ 0 & S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \text{rot y (alpha)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{y,\alpha} = \begin{bmatrix} C_\alpha & 0 & -S_\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_\alpha & 0 & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \text{rot z (beta)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{z,\beta} = \begin{bmatrix} C_\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_\beta & C_\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

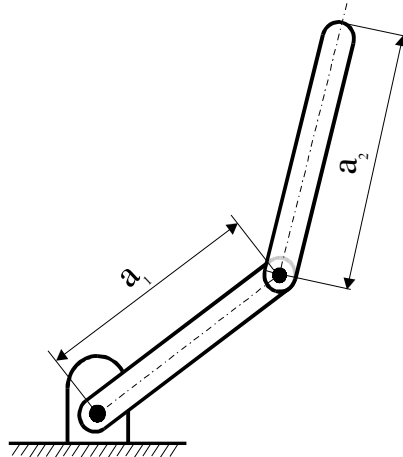
$$T = \text{transl (x,y,z)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0,895 & -0,433 & -0,58 & -0,8971 \\ 0,433 & 0,866 & 0,25 & 5,5981 \\ -0,58 & -0,25 & 0,9665 & -0,7141 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D-H NOTACIJA I DIREKTNI ZADATAK KINEMATIKE

Zadatak 2.1

Odrediti Denavit-Hartenbergove (D-H) parametre i matricu transformacije T_0^2 za dvosegmentni ravanski manipulator koji je prikazan na Sl. 9.



Slika 9. Dvosegmentni ravanski manipulator

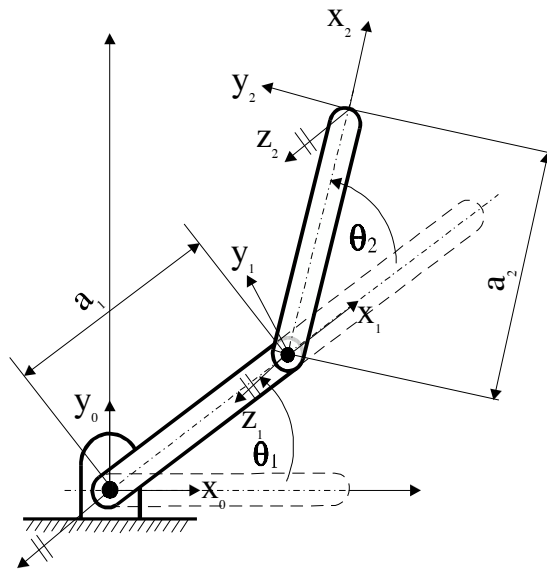
Rešenje:

Pripadajući koordinatni sistemi su prikazani na narednoj slici, a odgovarajući D-H parametri su sistematizovani u sledećoj tabeli

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1^*
2	a_2	0	0	θ_2^*

θ_1 i θ_2 su promenljive koordinate zgloba i u tabeli ih obeležavamo sa θ_1^* i θ_2^* .

Tablica D-H parametara dvosegmentnog manipulatora sa koordinatnim sistemima postavljenim kao na Sl. 10.



lika 10. Mehanizam sa postavljenim koordinatnim sistemima

Ukupna matrica transformacije je definisana izrazom

$$T_0^2 = A_1 \cdot A_2$$

Ako uvedemo skraćeni zapis $C\theta_1 = C_1$ i $S\theta_1 = S_1$ za pojedinačne matrice transformacije možemo pisati

$$A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & a_1 \cdot C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & a_1 \cdot S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 \cdot C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & a_2 \cdot C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & a_2 \cdot S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 \cdot C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa se ukupna matrica transformacije dobija množenjem matrica A_1 i A_2

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 \cdot C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 \cdot C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

na osnovu čega sedi

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} C_1 \cdot C_2 - S_1 \cdot S_2 & -C_1 \cdot S_2 - S_1 \cdot C_2 & 0 & C_1 \cdot a_2 \cdot C_2 - S_1 \cdot a_2 \cdot S_2 + a_1 \cdot C_1 \\ S_1 \cdot C_2 + C_1 \cdot S_2 & C_1 \cdot C_2 - S_1 \cdot S_2 & 0 & S_1 \cdot a_2 \cdot C_2 + C_1 \cdot a_2 \cdot S_2 + a_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

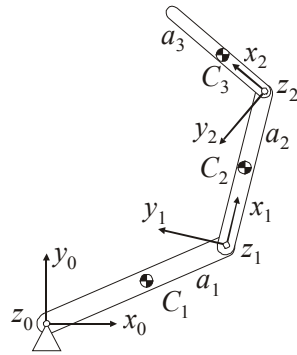
Na osnovu već poznatih relacija $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$ kao i $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \beta \cdot \cos \alpha$ (skraćenom notacijom ove izraze možemo zapisati kao $C_1 \cdot C_2 - S_1 \cdot S_2 = C_{12}$ i $S_1 \cdot C_2 + C_1 \cdot S_2 = S_{12}$) matricu T_0^2 možemo napisati u konačnoj formi

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

čime je zadatak rešen.

Zadatak 2.2.

Formirati model kinematike i dinamike planarnog manipulatora sa tri stepena slobode. Dužine segmenata su $a_i, i=1,2,3$, položaji cenatara masâ su $l_{ci}, i=1,2,3$ a mase segmenata su skoncentrisane u centrima masa $C_i, i=1,2,3$ i iznose $m_i, i=1,2,3$.



Slika 11. Planarni, RRR, laktasti robot

Rešenje:

DH parametri planarnog redundatnog robota su

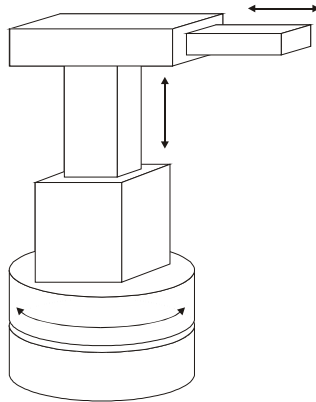
DH	α	d	a	θ
1	0	0	a_1	q_1
2	0	0	a_2	q_2
3	0	0	a_3	q_3

Homogena matrica transformacije glasi

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.3

Za trosegmentni manipulator cilindrične konfiguracije koji je prikazan na Sl. 12 odrediti D-H parametre i matricu transformacije T_0^3 .



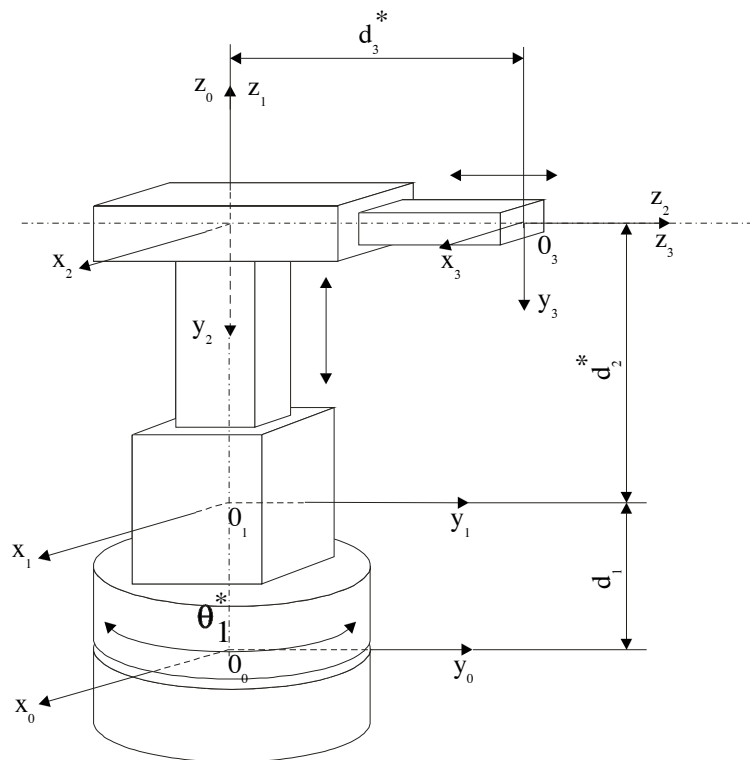
Slika 12. Trosegmentna cilindrična konfiguracija

Rešenje:

Koordinatni sistemi postavljeni prema D-H notaciji su skicirani na Sl. 12, dok su odgovarajući D-H parametri dati u tabeli.

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1^*
2	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_2^*	0
3	0	0	d_3^*	0

Tablica D-H parametara trosegmentne cilindrične konfiguracije sa koordinatnim sistemima postavljenim kao na Sl. 13.



Slika 13. Trosegmentna cilindrična konfiguracija sa postavljenim koordinatnim sistemima

Pojedinačne matrice transformacije su date sa

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dok se ukupna matrica transformacije određuje prema

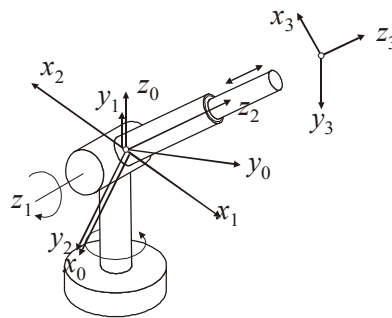
$$T_0^3 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

odakle, konačno, sledi

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & -S_1 \cdot d_3 \\ S_1 & 0 & C_1 & C_1 \cdot d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.4

Odrediti DH parametre i matrice homogenih transformacija za sferni manipulator, prikazan na slici 14.



Slika 14. Sferna, RRT, minimalna konfiguracija

Rešenje:

Postavimo koordinatne sisteme kako je prikazano na skici sfernog manipulatora

	θ_i	d_i	a_i	α_i	σ
1	θ_1	0	0	90°	0
2	$90^\circ + \theta_2$	0	0	90°	0
3	0	d_3	0	1	1

gde je d_3 - dužina ruke robota

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

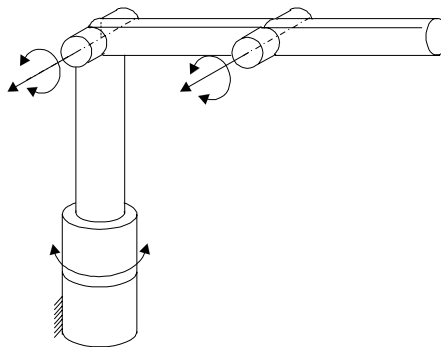
Poznajući trigonometrijske relacije $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$; $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$ slaganjem homogenih matrica transformacija izračunaćemo položaj vrha robota

$${}^0\mathbf{A}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_2 \cdot {}^0\mathbf{A}_3$$

$${}^0\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -C_1 S_2 & S_1 & C_1 C_2 & d_3 C_1 C_2 \\ -S_1 S_2 & -C_1 & S_1 C_2 & d_3 S_1 C_2 \\ C_2 & 0 & S_2 & d_3 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.5

Za manipulator sa tri stepena slobode antropomorfne konfiguracije,

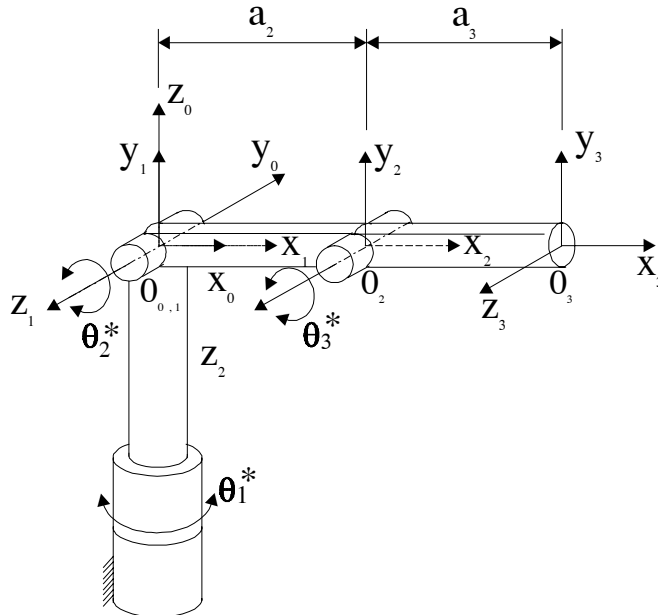


Slika 15. Minimalna konfiguracija antropomorfnog robota

koji je prikazan na Sl. 15. odrediti D - H parametre i ukupnu transformaciju T_0^3 .

Rešenje:

Koordinatni sistemi postavljeni prema D-H notaciji su skicirani na Sl. 16, dok su odgovarajući D-H parametri dati u tabeli.



Slika 16. Minimalna konfiguracija antropomorfnog robota sa postavljenim koordinatnim sistemima prema D-H notaciji

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_1^*
2	a_2	0	0	θ_2^*
3	a_3	0	0	θ_3^*

Tablica D-H parametara za minimalnu konfiguraciju antropomorfnog robota sa koordinatnim sistemima postavljenim kao na Sl. 16. pojedinačne matrice transformacija su date sa

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 \cdot C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

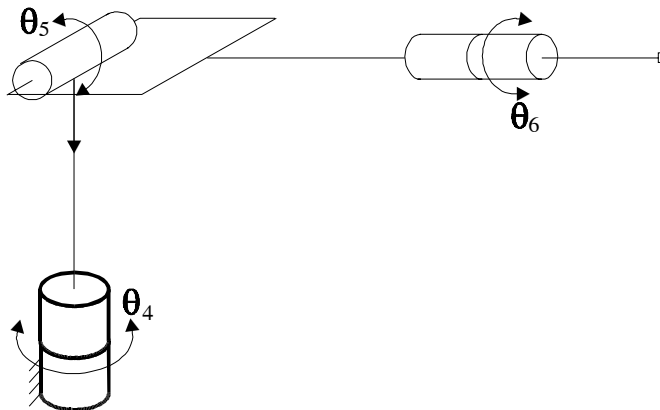
$$A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 \cdot C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 \cdot S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dok je ukupna transformacija data sa

$$T_0^3 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \begin{bmatrix} C_1 \cdot C_{23} & -C_1 \cdot S_{23} & S_1 & C_1 \cdot (a_3 \cdot C_{23} + a_2 \cdot C_2) \\ S_1 \cdot C_{23} & -S_1 \cdot S_{23} & -C_1 & S_1 \cdot (a_3 \cdot C_{23} + a_2 \cdot C_2) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3 \cdot S_{23} + a_2 \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.6

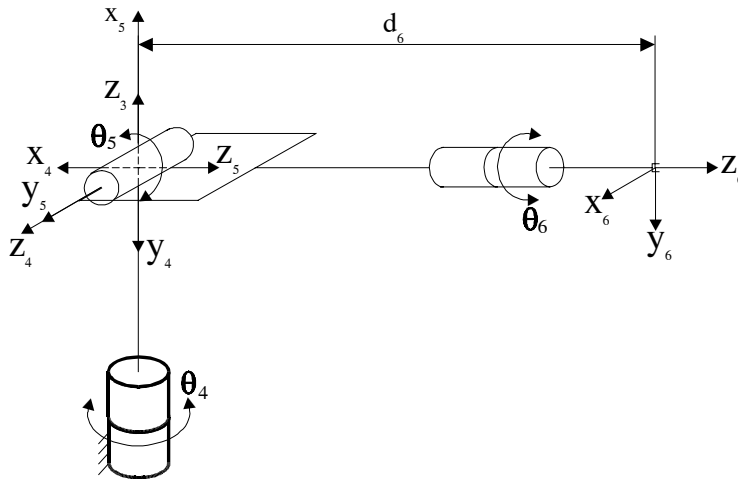
Za sferni zglobov, prikazan na Sl. 17, odrediti D - H parametre i matricu transformacije T_3^6 .



Slika 17. Shematski prikaz sfernog zgloba

Rešenje:

Koordinatni sistemi postavljeni prema D-H notaciji su skicirani na Sl. 18, dok su odgovarajući D-H parametri dati u tabeli.



Slika 18. Shematski prikaz sfernog zgloba sa postavljenim koordinatnim sistemima prema D-H notaciji

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	0	θ_4^*
2	0	$\pi/2$	0	θ_5^*
3	0	0	d_6	θ_6^*

Tablica D-H parametara sfernog zgloba sa koordinatnim sistemima postavljenim kao na Sl. 18.

Pojedinačne matrice transformacija su date sa

$$A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dok je matrica ukupne transformacije

$$T_3^6 = A_4 \cdot A_5 \cdot A_6 =$$

$$= \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^6 = \begin{bmatrix} C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 - S_4 \cdot S_6 & -C_4 \cdot C_5 \cdot S_6 - C_6 \cdot S_4 & C_4 \cdot S_5 & C_4 \cdot S_5 \cdot d_6 \\ S_4 \cdot C_5 \cdot C_6 + C_4 \cdot S_6 & -S_4 \cdot C_5 \cdot S_6 + C_4 \cdot C_6 & S_4 \cdot S_5 & S_4 \cdot S_5 \cdot d_6 \\ -S_5 \cdot C_6 & S_5 \cdot S_6 & C_5 & C_5 \cdot d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.7

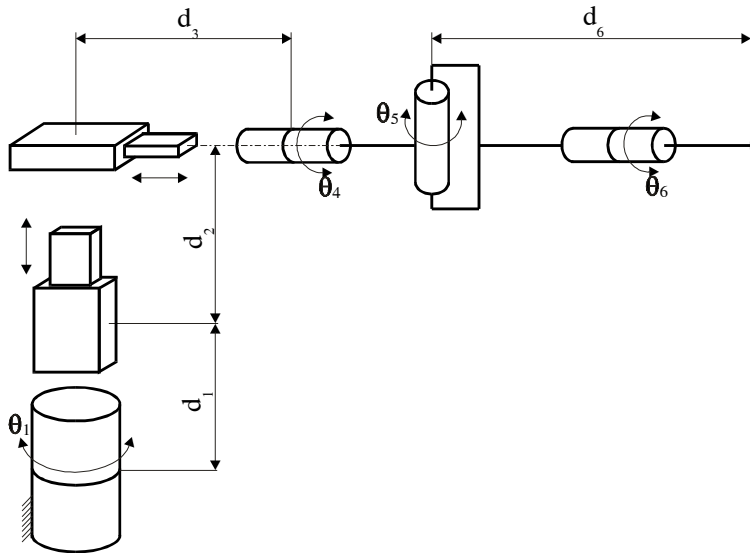
Za manipulator cilindrične konfiguracije sa sfernim zglobovima treba odrediti D - H parametre i matricu ukupne transformacije T_0^6 .

Rešenje:

Koordinatni sistemi postavljeni prema D-H notaciji su skicirani na Sl. 19, dok su odgovarajući D-H parametri dati u tabeli.

Na osnovu zadatka 1.12 sledi:

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & -S_1 \cdot d_3 \\ S_1 & 0 & C_1 & C_1 \cdot d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 19. Cilindrična konfiguracija sa sfernim zglobovima

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1^*
2	0	$-\pi/2$	d_2^*	0
3	0	0	d_3^*	0
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4^*
5	0	$\pi/2$	0	θ_5^*
6	0	0	d_6	θ_6^*

Tablica D-H parametara cilindrične konfiguracije sa sfernim zglobovima dok na osnovu zadatka 1.14 sledi:

$$T_3 = \begin{bmatrix} C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 - S_4 \cdot S_6 & -C_4 \cdot C_5 \cdot S_6 - C_6 \cdot S_4 & C_4 \cdot S_5 & C_4 \cdot S_5 \cdot d_6 \\ S_4 \cdot C_5 \cdot C_6 + C_4 \cdot S_6 & -S_4 \cdot C_5 \cdot S_6 + C_4 \cdot C_6 & S_4 \cdot S_5 & S_4 \cdot S_5 \cdot d_6 \\ -S_5 \cdot C_6 & S_5 \cdot S_6 & C_5 & C_5 \cdot d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa se ukupna matrica transformacije može odrediti kao

$$T_0^6 = T_0^3 \cdot T_3^6 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & -S_1 \cdot d_3 \\ S_1 & 0 & C_1 & C_1 \cdot d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 - S_4 \cdot S_6 & -C_4 \cdot C_5 \cdot S_6 - C_6 \cdot S_4 & C_4 \cdot S_5 & C_4 \cdot S_5 \cdot d_6 \\ S_4 \cdot C_5 \cdot C_6 + C_4 \cdot S_6 & -S_4 \cdot C_5 \cdot S_6 + C_4 \cdot C_6 & S_4 \cdot S_5 & S_4 \cdot S_5 \cdot d_6 \\ -S_5 \cdot C_6 & S_5 \cdot S_6 & C_5 & C_5 \cdot d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rezultujuća matrica transformacije je

$$T_0^6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gde su elementi matrice rotacije dati sa

$$\begin{aligned} r_{11} &= C_1 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 - C_1 \cdot S_4 \cdot S_6 + S_1 \cdot S_5 \cdot C_6 \\ r_{21} &= S_1 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 - S_1 \cdot S_4 \cdot S_6 - C_1 \cdot S_5 \cdot C_6 \\ r_{31} &= -S_4 \cdot C_5 \cdot C_6 - C_4 \cdot S_6 \\ r_{12} &= -C_1 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_6 - C_1 \cdot S_4 \cdot C_6 - S_1 \cdot S_5 \cdot S_6 \\ r_{22} &= -S_1 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_6 - S_1 \cdot S_4 \cdot C_6 + C_1 \cdot S_5 \cdot S_6 \\ r_{32} &= S_4 \cdot C_5 \cdot S_6 - C_4 \cdot C_6 \\ r_{13} &= C_1 \cdot C_4 \cdot S_5 + S_1 \cdot C_5 \\ r_{23} &= S_1 \cdot C_4 \cdot S_5 + C_1 \cdot C_5 \\ r_{33} &= -S_4 \cdot S_5 \end{aligned}$$

a elementi vektora translacije dati sa

$$\begin{aligned} d_x &= C_1 \cdot C_4 \cdot S_5 \cdot d_6 - S_1 \cdot C_5 \cdot d_6 - S_1 \cdot d_3 \\ d_y &= S_1 \cdot C_4 \cdot S_5 \cdot d_6 + C_1 \cdot C_5 \cdot d_6 + C_1 \cdot d_3 \end{aligned}$$

$$d_z = -S_4 \cdot S_5 \cdot d_6 + d_1 + d_2$$

JAKOBIJAN I INVERZNI ZADATAK KINEMATIKE

Zadatak 3.1

Za manipulator antropomorfne konfiguracije (Sl. 16) rešiti inverzni kinematički zadatak (odrediti uglove u zglobovima q_1 , q_2 i q_3 za zadatu poziciju vrha specificiranu koordinatama x , y i z) analitičkim načinom.

Rešenje:

U zadatku 1.15. je za robot iste konfiguracije rešen direktni kinematički zadatak gde je određena ukupna matrica transformacije T_0^3 u formi

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} C_1 \cdot C_{23} & -C_1 \cdot S_{23} & S_1 & C_1 \cdot (a_3 \cdot C_{23} + a_2 \cdot C_2) \\ S_1 \cdot C_{23} & -S_1 \cdot S_{23} & -C_1 & S_1 \cdot (a_3 \cdot C_{23} + a_2 \cdot C_2) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3 \cdot S_{23} + a_2 \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na osnovu četvrte kolone matrice transformacije T_0^3 za poziciju vrha robota možemo pisati

$$x = C_1 \cdot (a_3 \cdot C_{23} + a_2 \cdot C_2) \quad (1)$$

$$y = S_1 \cdot (a_3 \cdot C_{23} + a_2 \cdot C_2) \quad (2)$$

$$z = a_3 \cdot S_{23} + a_2 \cdot S_2 \quad (3)$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa S_1 , a drugu sa C_1 dobijamo

$$x \cdot S_1 = C_1 \cdot S_1 \cdot (a_3 \cdot C_{23} + a_2 \cdot C_2) \quad (4)$$

$$y \cdot C_1 = S_1 \cdot C_1 \cdot (a_3 \cdot C_{23} + a_2 \cdot C_2) \quad (5)$$

Ako jednačinu (5) oduzmemo od jednačine (4), sledi:

$$x \cdot S_1 - y \cdot C_1 = 0$$

odakle direktno dobijamo

$$q_1 = \arctg \frac{y}{x} + k \cdot \pi$$

Da bi odredili ugao q_3 pomnožimo jednačinu (1) C_1 , a (2) sa S_1 , na osnovu čega dobijamo

$$x \cdot C_1 = C_1^2 \cdot (a_3 \cdot C_{23} + a_2 \cdot C_2) \quad (6)$$

$$y \cdot S_1 = S_1^2 \cdot (a_3 \cdot C_{23} + a_2 \cdot C_2) \quad (7)$$

Ako jednačine (6) i (7) saberemo i sredimo, rezultujuća jednačina zajedno sa jednačinom (3) čini sistem

$$x \cdot C_1 + y \cdot S_1 = (a_3 \cdot C_{23} + a_2 \cdot C_2) / z^2 \quad (8)$$

$$z = a_3 \cdot S_{23} + a_2 \cdot S_2 \quad (9)$$

čijim kvadriranjem

$$x^2 \cdot C_1^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot C_1 \cdot S_1 + y^2 \cdot S_1^2 = a_3^2 \cdot C_{23}^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot C_{23} \cdot C_2 + a_2^2 \cdot C_2^2$$

$$z^2 = a_3^2 \cdot S_{23}^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot S_{23} \cdot S_2 + a_2^2 \cdot S_2^2$$

i sabiranjem dobijamo

$$z^2 + (x \cdot C_1 + y \cdot S_1)^2 = (S_{23}^2 + C_{23}^2) \cdot a_3^2 + (S_2^2 + C_2^2) \cdot a_2^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot (C_{23} \cdot C_2 + S_{23} \cdot S_2) \quad (10)$$

Ako uzmemo u obzir da je

$$(S_{23}^2 + C_{23}^2) = 1, \quad S_{23} = S_2 C_3 + C_2 S_3 \quad \text{i} \quad C_{23} = C_2 C_3 - S_2 S_3$$

i sve to primenimo na jednačinu (10), posle sređivanja dobijamo

$$C_3 = \frac{(C_1 x + S_1 y)^2 + z^2 - a_3^2 - a_2^2}{2 a_2 a_3}$$

Sinus ugla q_3 možemo odrediti na osnovu poznate relacije $S_3 = \pm \sqrt{1 - C_3^2}$ (izborom znaka + ili - opredeljujemo se za položaj lakta konfiguracije na gore ili na dole), pa konačno dobijamo

$$\theta_3 = \arctg \frac{S_3}{C_3}$$

Da bi odredili ugao q_2 na osnovu sistema (8) i (9) dobijamo

$$S_2 = \frac{(C_3 \cdot a_3 + a_2) \cdot z - S_3 \cdot a_3 \cdot (C_1 \cdot x + S_1 \cdot y)}{(C_3 \cdot a_3 + a_2)^2 + S_3^2 \cdot a_3^2}$$

$$C_2 = \frac{(C_3 \cdot a_3 + a_2) \cdot (C_1 \cdot x + S_1 \cdot y) + S_3 \cdot a_3 \cdot z}{(C_3 \cdot a_3 + a_2)^2 + S_3^2 \cdot a_3^2}$$

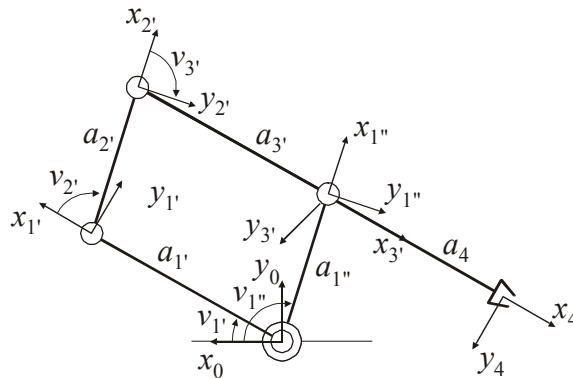
odakle, konačno, dobijamo

$$q_2 = \arctg \frac{(C_3 \cdot a_3 + a_2) \cdot z - S_3 \cdot a_3 \cdot (C_1 \cdot x + S_1 \cdot y)}{(C_3 \cdot a_3 + a_2) \cdot (C_1 \cdot x + S_1 \cdot y) + S_3 \cdot a_3 \cdot z}$$

čime je zadatak rešen.

Zadatak 3.2

Posmatrajmo paralelogramsku strukturu manipulatora (five-bar linkage), prikazanu na slici 20. Zatvoreni lanac se javlja u tački gde prva dva zgloba spajaju segmente 1' i 1'' sa segmentom 0. Zglob 4 je izabran kao rasečen zglob. Odabrano je $a_{1'} = a_{3'}$ i $a_{2'} = a_{1''}$. Parametri četvrtog segmenta su konstantni. Svi zglobovi su rotacioni, sa jednim stepenom slobode. Odrediti DH parametre ove konfiguracije kao i direktnu kinematičku funkciju.



Slika 20. Paralelogramski ravanski manipulator

Rešenje:

Ovakvu konfiguraciju možemo razmatrati kao dva nezavisna manipulatora koji ispunjavaju ograničenja u četvrtom zglobu. Koordinatni sistemi su postavljeni kao na slici. DH parametri dati su u tabeli.

	a_i	α_i	d_i	v_i
1'	$a_{1'}$	0	0	$v_{1'}$
2'	$a_{2'}$	0	0	$v_{2'}$
3'	$a_{3'}$	0	0	$v_{3'}$
1''	$a_{1''}$	0	0	$v_{1''}$
4	a_4	0	0	0

Homogena matrica transformacije identična je za sve zglobove

$$A_i^{i-1}(v_i) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3$$

Prvi manipulator, niz od prva tri segmenta, $a_{1'}, a_{2'}, a_{3'}$, ima matricu transformacija

$$A_{3'}^0(q') = A_{1'}^0 \cdot A_{2'}^1 \cdot A_{3'}^2 = \begin{bmatrix} c_{1'2'3'} & -s_{1'2'3'} & 0 & a_{1'}c_{1'} + a_{2'}c_{1'2'} + a_{3'}c_{1'2'3'} \\ s_{1'2'3'} & c_{1'2'3'} & 0 & a_{1'}s_{1'} + a_{2'}s_{1'2'} + a_{3'}s_{1'2'3'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gde je vektor unutrašnjih koordinata $\mathbf{q}' = [v_{1'} \quad v_{2'} \quad v_{3'}]^T$.

Za drugi manipulator, koji čini samo jedan segment, $a_{1''}$, homogena matrica transformacija glasi

$$A_{1''}^0(q'') = \begin{bmatrix} c_{1''} & -s_{1''} & 0 & a_{1''}c_{1''} \\ s_{1''} & c_{1''} & 0 & a_{1''}s_{1''} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gde je vektor unutrašnjih koordinata $\mathbf{q}'' = v_{1''}$

Homogena matrica transformacija za poslednji segment glasi

$$A_4^{3'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prvo ograničenje koje ukazuje da su dva manipulatora sastavljena u četvrtom zglobu glasi ($d_{3'1''} = 0$), odnosno

$$R_0^{3'}(q') \cdot (p_{3'}^0(q') - p_{1''}^0(q'')) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dok je drugo ograničenje ispunjeno nezavisno od \mathbf{q}' i \mathbf{q}'' . Kako je postavljen uslov da su paralelni segmenti jednakih dužina, mogu se izvesti dve relacije

$$a_{1'}(c_{1'} + c_{1'2'3'}) + a_{1''}(c_{1'2'} - c_{1''}) = 0$$

$$a_{1'}(s_{1'} + s_{1'2'3'}) + a_{1''}(s_{1'2'} - s_{1''}) = 0$$

Proizvoljnim izborom $a_{1'}, a_{1''}$, iz prethodnih jednačina se dobija

$$v_{2'} = v_{1''} - v_{1'}$$

$$v_{3'} = \pi - v_{2'} = \pi - v_{1''} + v_{1'}$$

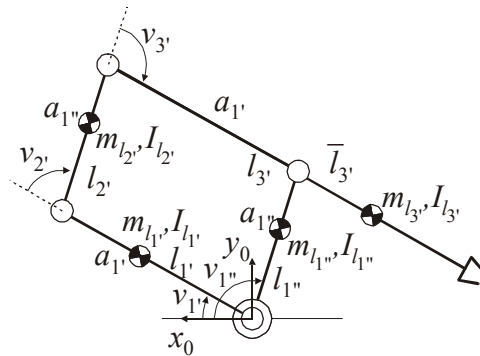
Otuda, vektor unutrašnjih koordinata je $\mathbf{q} = [v_{1'} \quad v_{1''}]^T$. Ovi zglobovi su prirodno rešenje za pogonske zglobove. Smenom $v_{2'}$ i $v_{3'}$ u matricu homogenih transformacija A_3^0 i izračunavanjem direktne kinematike dobijamo

$$T_4^0(q) = A_3^0(q) \cdot A_4^{3'} = \begin{bmatrix} -c_{1'} & s_{1'} & 0 & a_{1''}c_{1''} - a_4c_{1'} \\ -s_{1'} & -c_{1'} & 0 & a_{1''}s_{1''} - a_4s_{1'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 1$$

Kinematički posmatrano, paralelogramska struktura manipulatora identična je sa dvosegmentnom laktastom strukturom (vidi jednačinu). Jedina razlika je u tome što su zglobovi locirani u osnovi i ne opterećuju strukturu. To će značajno pojednostaviti model dinamike.

Zadatak 3.3

Za paralelogramsku strukturu manipulatora prikazanu na slici 21, odrediti model dinamike u formi matrice diferencijalne jednačine drugog reda. Pretpostaviti da je robot sastavljen od dve razgranate otvorene strukture. Rastojanja centara masa od odgovarajućih zglobova data su dužinama l_1', l_2', l_3', l_1'' , duž osâ segmenata. Mase segmenata su m_1', m_2', m_3', m_1'' , a momenti inercije, sračunati za koordinatni sistem u centru masa, su I_1', I_2', I_3', I_1'' . Inercije rotora motora su zanemarene.



Slika 21. Paralelogramski planarni manipulator sa definisanim centrima masa i inercijama

Rešenje:

Za odabrane koordinatne sisteme, izračunati su Jakobijani po translacionim brzinama za svaki od zglobova

$$J_P^{(l_1')} = \begin{bmatrix} -l_1' s_{1'} & 0 & 0 \\ l_1' c_{1'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_P^{(l_2')} = \begin{bmatrix} -a_1' s_{1'} - l_2' s_{1'2'} & -l_2' s_{1'2'} & 0 \\ a_1' c_{1'} + l_2' c_{1'2'} & l_2' c_{1'2'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_P^{(l_3')} = \begin{bmatrix} -a_1 s_{1'} - a_2 s_{1'2'} - l_3 s_{1'2'3'} & -a_2 s_{1'2'} - l_3 s_{1'2'3'} & -l_3 s_{1'2'3'} \\ a_1 c_{1'} + a_2 c_{1'2'} + l_3 c_{1'2'3'} & a_2 c_{1'2'} + l_3 c_{1'2'3'} & l_3 c_{1'2'3'} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_P^{(l_1'')} = \begin{bmatrix} -l_1'' s_{1''} \\ l_1'' c_{1''} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jakobijani po rotacionim brzinama za svaki od zglobova su

$$J_P^{(l_1')} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_P^{(l_2')} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_P^{(l_3')} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad J_P^{(l_1'')} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Formiraćemo dinamičke modele smatrajući da je robot sastavljen od dva podrobota, jednog sa tri stepena slobode i drugog sa jednim stepenom slobode. Za robot sastavljen od tri segmenta, l_1', l_2', l_3' , matrica inercija glasi

$$B'(\mathbf{q}') = \begin{bmatrix} b_{1'1'}(v_2', v_3') & b_{1'2'}(v_2', v_3') & b_{1'3'}(v_2', v_3') \\ b_{2'1'}(v_2', v_3') & b_{2'2'}(v_3') & b_{2'3'}(v_3') \\ b_{3'1'}(v_2', v_3') & b_{3'2'}(v_3') & b_{3'3'} \end{bmatrix}$$

gde je

$$\begin{aligned} b_{1'1'} &= I_{l_1'} + m_{l_1'} l_{l_1'}^2 + I_{l_2'} + m_{l_2'} (a_1^2 + l_2'^2 + 2a_1 l_2' c_{2'}) + I_{l_3'} + \\ &\quad + m_{l_3'} (a_1^2 + a_2^2 + l_3'^2 + 2a_1 a_2 c_{2'} + 2a_1 l_3' c_{2'3'} + 2a_2 l_3' c_{3'}) \\ b_{1'2'} &= b_{2'1'} = I_{l_2'} + m_{l_2'} (l_2'^2 + a_1 l_2' c_{2'}) + I_{l_3'} + \\ &\quad + m_{l_3'} (a_2^2 + l_3'^2 + a_1 a_2 c_{2'} + a_1 l_3' c_{2'3'} + 2a_2 l_3' c_{3'}) \\ b_{1'3'} &= b_{3'1'} = I_{l_3'} + m_{l_3'} (l_3'^2 + a_1 l_3' c_{2'3'} + a_2 l_3' c_{3'}) \\ b_{2'2'} &= I_{l_2'} + m_{l_2'} l_2'^2 + I_{l_3'} + m_{l_3'} (a_2^2 + l_3'^2 + 2a_2 l_3' c_{3'}) \\ b_{2'3'} &= I_{l_3'} + m_{l_3'} (l_3'^2 + a_2 l_3' c_{3'}) \\ b_{3'3'} &= I_{l_3'} + m_{l_3'} l_3'^2 \end{aligned}$$

i gde je vektor koordinata $\mathbf{q}' = [q_1' \quad q_2' \quad q_3']^T$.

Za drugi podsistem, $q'' = q_1''$, koji čini samo segment l_1'' , važi

$$b_{1'1'} = I_{l_1''} + m_{l_1''} l_{l_1''}^2$$

Stoga, momenti usled inercija oba podsistema su

$$\tau_{i''} = \sum_{j'=1}^{3'} b_{i',j'} \ddot{v}_{j''} \quad \tau_{1''} = b_{1',1'} \ddot{v}_{1''}$$

Posmatrano u celini, ukupan moment inercije iznosi

$$\tau_a = \mathbf{B}_a \cdot \ddot{\mathbf{q}}_a$$

gde su

$$\mathbf{q}_a = [v_{1'} \quad v_{1''}], \quad \tau_a = [\tau_{1'} \quad \tau_{1''}] \text{ i}$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} b_{a11} & b_{a12} \\ b_{a21} & b_{a22} \end{bmatrix}$$

$$b_{a11} = I_{l_1'} + m_{l_1'} l_1'^2 + m_{l_2'} a_1'^2 + I_{l_3'} + m_{l_3'} l_3'^2 + m_{l_3'} a_1'^2 - 2a_1' m_{l_3'} l_3'$$

$$b_{a12} = b_{a21} = (a_1' m_{l_2'} l_2' + a_1' m_{l_3'} (a_1' - l_3')) \cos(v_{1''} - v_{1'})$$

$$b_{a22} = I_{l_1'} + m_{l_1'} l_1'^2 + I_{l_2'} + m_{l_2'} l_2'^2 + m_{l_3'} a_1'^2$$

Ovaj izraz otvara mogućnost formiranja dekuplovane i konfiguraciono nezavisne inercijalne matrice. Uslov koji treba ispuniti je da četiri segmenta manipulatora zadovoljavaju jednakost

$$\frac{m_{l_3'} \bar{l}_3'}{m_{l_2'} \bar{l}_2'} = \frac{a_1'}{a_1''}$$

gde je $\bar{l}_3' = l_3' - a_1'$, rastojanje od centra mase trećeg segmenta, 3', do ose četvrtog zgloba. Ukoliko je taj uslov ispunjen, inercijalna matrica je dijagonalna

$$b_{12} = b_{21} = 0.$$

$$b_{a11} = I_{l_1'} + m_{l_1'} l_1'^2 + m_{l_2'} a_1'^2 \left(1 + \frac{l_2' \bar{l}_3'}{a_1' a_1''} \right) + I_{l_3'}$$

$$b_{a22} = I_{l_1'} + m_{l_1'} l_1'^2 + I_{l_2'} + m_{l_2'} l_2'^2 \left(1 + \frac{a_1' a_1''}{l_2' \bar{l}_3'} \right)$$

Kao posledica, doprinosi koriolisovih i centrifugalnih sila na ukupan momenat u zglobovima su poništeni. Takav rezultat nije mogao biti ostvaren sa dvosegmentnom laktastom konfiguracijom.

Što se gravitacionih efekata tiče, pošto je $\mathbf{g}_0 = [0 \quad -g \quad 0]^T$, sa prethodno izvedenim jakobijanima dobija se

$$\begin{aligned}
 g_{1'} &= (m_{l_1} l_{1'} + m_{l_2} a_{1'} + m_{l_3} a_{1'}) \cdot g c_{1'} + (m_{l_2} l_{2'} + m_{l_3} a_{2'}) \cdot g c_{1'2'} + m_{l_3} l_3 g c_{1'2'3'} \\
 g_{2'} &= (m_{l_2} l_{2'} + m_{l_3} a_{2'}) \cdot g c_{1'2'} + m_{l_3} l_3 g c_{1'2'3'} \\
 g_{3'} &= m_{l_3} l_3 g c_{1'2'3'}
 \end{aligned} \tag{1}$$

kao i

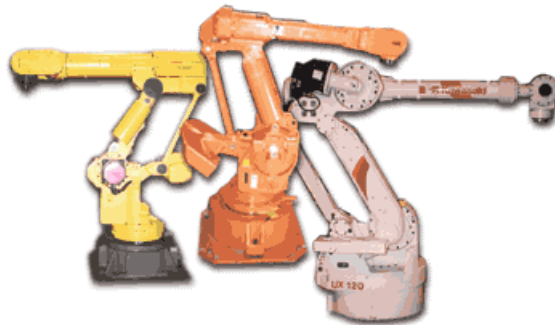
$$g_{1''} = m_{l_1} l_{1''} g c_{1''}$$

Superpozicijom gravitacionih efekata usled dve strukture, dobija se

$$g_a = \begin{bmatrix} (m_{l_1} l_{1'} + m_{l_2} a_{1'} - m_{l_3} \bar{l}_{3'}) \cdot g c_{1'} \\ (m_{l_1} l_{1''} + m_{l_2} l_{2'} + m_{l_3} a_{1''}) \cdot g c_{1''} \end{bmatrix}.$$

Time smo formirali model dinamike paralelogramske strukture manipulatora.

Posmatrajući model dinamike, (1) može da se zaključi da je, nasuprot složenijoj kinematičkoj funkciji, došlo do značajnog pojednostavljenja u odnosu na dvosegmentnu laktastu strukturu (19). Nje potrebno uvoditi dodatne mase za statičko uravnoteženje kao kod dvosegmentnog planarnog manipulatora. Uranoteženje smo postigli jednostavnim zahvatom u konstrukciji izjednačavajući odnose masa, centara masâ dužina odgovarajućih segmenata. Takođe, mase i inercije statora motora ne ulaze u model dinamike i značajno pojednostavljaju uležištenje. To naročito pojednostavljuje planiranje kretanja i upravljanje. Usled toga, kao i zbog povećane sposobnosti nošenja tereta, ovakva struktura manipulatora veoma često se koristi u industrijskoj robotici, slika 22. Jedini problem ogleda se u činjenici da su, usled zatvorene kinematičke veze, kretanja u zglobovima značajno ograničena u odnosu na dvosegmentnu laktastu strukturu.



Slika 22. Industrijski roboti sa paralelogramskom strukturom drugog i trećeg segmenta

Zadatak 3.4

Za dvosegmentni ravanski manipulacioni mehanizam (Sl. 10) odrediti Jakobijan analitičkim i numeričkim načinom

Rešenje:

Analitički način

Za položaj vrha mehanizma možemo pisati

$$\mathbf{x} = a_1 \mathbf{C}_1 + a_2 \mathbf{C}_{12}$$

$$\mathbf{y} = a_1 \mathbf{S}_1 + a_2 \mathbf{S}_{12}$$

Ako formiramo parcijalne izvode $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_2}$, $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \theta_1}$ i $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \theta_2}$ Jakobijan se može napisati u sledećoj formi

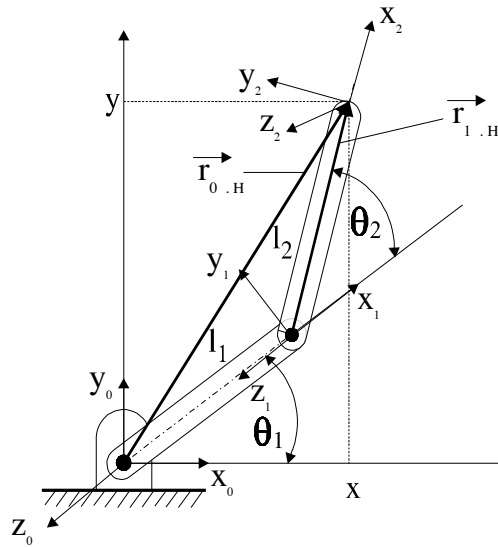
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

pa za konkretnu dvosegmentnu konfiguraciju dobijamo

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 \mathbf{S}_1 - a_2 \mathbf{S}_{12} & -a_2 \mathbf{S}_{12} \\ a_1 \mathbf{C}_1 + a_2 \mathbf{C}_{12} & a_2 \mathbf{C}_{12} \end{bmatrix}$$

Numerički način

Da bi sračunali jakobijan numaričkim putem potrebno je odrediti vektore definisane relacijama (D4.16) i (D4.17) koje su date u Dodatku 4.



Slika 23. Dvosegmentni ravanski mehanizam

Projekcije potrebnih vektora (prikazani su na Sl.23) na bazni (nulti) koordinatni sistem su date sa

$$\vec{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{0,H} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12} \\ a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{1,H} = \begin{bmatrix} a_2 \cdot C_{12} \\ a_2 \cdot S_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ako se podsetimo da se vektorski proizvod dva vektora se dobija na sledeći način

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{bmatrix}$$

možemo pisati

$$\vec{z}_0 \times \vec{r}_{0,H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12} \\ a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \cdot S_1 - a_2 \cdot S_{12} \\ a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z}_1 \times \vec{r}_{1,H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2 \cdot C_{12} \\ a_2 \cdot S_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 \cdot S_{12} \\ a_2 \cdot C_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ukoliko se ograničimo samo na jakobijan vezan za poziciju vrha manipulatora jakobijevu matricu dobijamo u formi

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 \cdot S_1 - a_2 \cdot S_{12} & -a_2 \cdot S_{12} \\ a_1 \cdot C_1 - a_2 \cdot C_{12} & a_2 \cdot C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Treba primetiti je zadatak dvodimenzionalan i da ne postoji treća koordinata te da se zbog toga u trećoj vrsti nalaze nule. Ako ovu vrstu izostavimo dobijamo jakobijan identičan onom sračunatom analitičkim putem.

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 \cdot S_1 - a_2 \cdot S_{12} & -a_2 \cdot S_{12} \\ a_1 \cdot C_1 - a_2 \cdot C_{12} & a_2 \cdot C_{12} \end{bmatrix}$$

Sada se može uspostaviti veza između linearnih brzina vrha manipulatora i ugaonih brzina u zglobovima u formi

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-a_1 \cdot S_1 - a_2 \cdot S_{12}) \cdot \dot{q}_1 - a_2 S_{12} \cdot \dot{q}_2 \\ (a_1 \cdot C_1 - a_2 \cdot C_{12}) \cdot \dot{q}_1 + a_2 C_{12} \cdot \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Ukoliko želimo da u jakobijevu matricu uvrstimo i deo koji odgovara orijentaciji prema izrazima (D5.16) i (D5.17) koje su date u Dodatku 4 dobijamo

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 \cdot S_1 - a_2 \cdot S_{12} & -a_2 \cdot S_{12} \\ a_1 \cdot C_1 - a_2 \cdot C_{12} & a_2 \cdot C_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

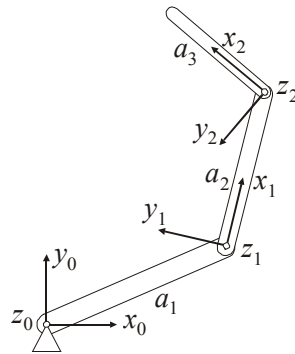
odakle sledi

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-a_1 \cdot S_1 - a_2 \cdot S_{12}) \cdot \dot{q}_1 - a_2 S_{12} \cdot \dot{q}_2 \\ (a_1 \cdot C_1 - a_2 \cdot C_{12}) \cdot \dot{q}_1 + a_2 C_{12} \cdot \dot{q}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Odavde se jasno vidi da je orijentacija koordinatnog sistema ne vrhu mehanizma posledica vrednosti uglova u zglobovima (naravno, to važi i za brzinu kretanja ovog koordinatnog sistema) i da se na nju ne može posebno uticati pošto mehanizam ne poseduje stepene slobode (zglobove) kojima bi se moglo uticati na njegovu orijentaciju nezavisno od pozicije.

Zadatak 3.5

Odrediti Jakobijan planarnog manipulatora sa tri stepena slobode, datog na slici 24, sa dužinama segmenata l_i , $i = 1, 2, 3$.



Slika 24. Planarni laktasti manipulator sa 3 ss i koordinatni sistemi potrebni za definisanje DH parametara, homogenih matrica transformacija i jakobijana.

Rešenje:

Homogena matrica transformacije za prvi zglob

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogena matrica transformacija za prva dva zgloba, zajedno

$${}^0\mathbf{T}_2 = {}^0\mathbf{T}_1 \cdot {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogena matrica transformacija za prva dva zgloba, zajedno sa homogenom matricom trećeg zgloba

$${}^0\mathbf{T}_3 = {}^0\mathbf{T}_2 \cdot {}^2\mathbf{T}_3$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} + l_3s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz matrice transformacija uočavamo matricu koja definiše orijentaciju i translacije vrha manipulatora

$$\rho = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 \\ s_{123} & c_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} \\ l_1s_1 + l_2s_{12} + l_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ukoliko primenimo definiciju analitičkog jakobijana moraćemo da diferenciramo elemente matrice \mathbf{T} po vektoru unutrašnjih koordinata \mathbf{q} . Takva matematička operacija može biti vrlo komplikovana. Umesto toga, primenićemo postupak na bazi geometrijskog jakobijana. U tom cilju, definisaćemo koordinatne sisteme svakog zgloba, sa vektorima \mathbf{z}_i postavljenim u pravcu pozitivnog smera ose rotacije zglobova.

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Postavimo vektore od osnove do tačaka na kraju segmenata, pri čemu vektor \mathbf{p} definiše položaj vrha robota.

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} \\ l_1s_1 + l_2s_{12} + l_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} l_1c_1 \\ l_1s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} \\ l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Formalna definicija elemenata geometrijskog jakobijana daje

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_{p1} &= \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 - l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{j}_{p2} &= \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 s_{12} + l_3 s_{123} & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} \\ l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{j}_{p3} &= \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ l_3 c_{123} & l_3 s_{123} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 s_{123} \\ l_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Primenom formalizma (39), dobija se jakobijan planarnog manipulatora sa tri stepena slobode

$$\mathbf{J} = \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{matrix} \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

Zadatak 3.6

Odrediti homogene matrice transformacija i jakobijan planarnog manipulatora sa tri stepena slobode datog na slici 24. Dužine segmenata su a_i , $i = 1, 2, 3$.

Rešenje:

Homogene transformacija manipulatora su date sa

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1c_2 & s_1 & a_2a_1c_2 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & a_2s_1c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1c_{23} & s_1 & c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1c_{23} & -s_1c_{23} & -c_1 & s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2s_2 + a_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Postavimo koordinatne sisteme kao na slici. Vektori osâ rotacije su

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektori položaja vrhâ segmenata su

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ a_2s_2 + a_3s_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2c_1c_2 \\ a_2s_1c_2 \\ a_2s_2 \end{bmatrix}$$

Elementi geometrijskog jakobijana su

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{p1} &= \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = \\ &= \mathbf{i}(-s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})) - \mathbf{j}(-c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})) + \mathbf{k} \cdot 0 \\ &= \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{p2} &= \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ s_1 & -c_1 & 0 \\ a_2 c_1 c_2 & a_2 s_1 s_2 & a_2 s_2 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i}(-a_2 c_1 s_2 - a_3 c_1 s_{23}) - \mathbf{j}(a_2 s_1 s_2 + a_3 s_1 s_{23}) + \mathbf{k}(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ &= \begin{bmatrix} -a_2 c_1 s_2 - a_3 c_1 s_{23} \\ -a_2 s_1 s_2 - a_3 s_1 s_{23} \\ a_2 c_2 + a_3 c_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{p3} &= \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ s_1 & -c_1 & 0 \\ a_3 c_1 c_{23} & a_3 s_1 c_{23} & a_3 s_{23} \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \cdot (-a_3 c_1 s_{23}) - \mathbf{j} \cdot (a_3 s_1 s_{23}) + \mathbf{k} \cdot a_3 c_{23} = \\ &= \begin{bmatrix} -a_3 c_1 s_{23} \\ a_3 s_1 s_{23} \\ a_3 c_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Konačno, jakobijan antropomorfnog manipulatora glasi

$$\mathbf{J} = \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{matrix} \begin{bmatrix} -s_1(a_2 c_2 + a_2 c_{23}) & -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} & a_3 c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

Uočavamo da prvi zglobov ne utiče na kretanje duž Oz ose.

Vrednost jakobijana zavisi od konfiguracije robota. Robotics toolbox poseduje dve funkcije za izračunavanje jakobijana. Prva sračunava jakobijan u odnosu na osnovu manipulatora

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \text{jakob0}(\text{DH}, \mathbf{q}) \\ \mathcal{J} &= \text{jakobn}(\text{DH}, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

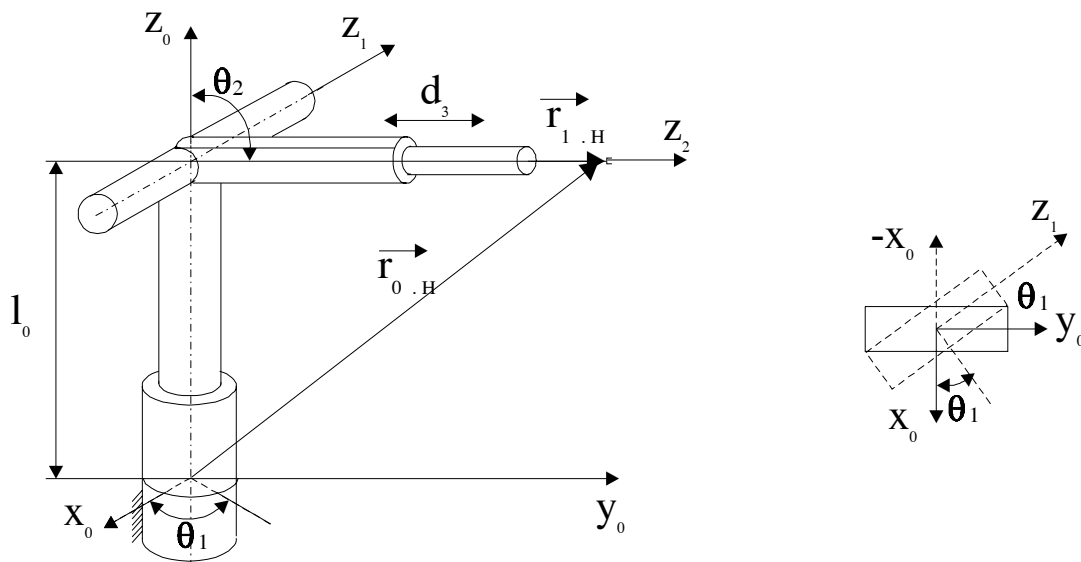
Ulazni parametri obe funkcije su matrica DH parametara manipulatora i vektor unutrašnjih koordinata manipulatora, \mathbf{q} . U oba slučaja dobijamo matricu $6 \times n$.

Komentar

U upravljačkim šemama na bazi rešavanja inverzne kinematike, neophodno je u svakoj periodi upravljanja izračunati jakobijan. Osim što je sastavljanje jakobijana u principu komplikovano za izračunavanje, problem koji se javlja vezan je za činjenicu da jakobijan može postati singularan čime je onemogućeno njegova inverzija. U narednim zadacima razmotrićemo algoritme za rešavanje inverzne kinematike koji predstavljaju numeričko pojednostavljenje date definicije jakobijana kao. Posebno je razmatran problem redundatnog manipulatora koji dovodi do pravougonog jakobijana kao problem singularnih položaja robota u kojima jakobijan gubi puni rang određen stepenima manipulabilnosti robota.

Zadatak 3.7

Za manipulator sa tri stepena slobode sferne konfiguracije prikazan na Sl. 25 odrediti Jakobijevu matricu numeričkim načinom.



Slika 25. Manipulator sferne konfiguracije

Rešenje:

Opšti oblik jakobijeve matrice za ovaj slučaj (dva rotaciona i jedan translatorni zglob) je dat sa

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}_0 \times \bar{\mathbf{r}}_{0,e} & \bar{\mathbf{z}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_{1,e} & \bar{\mathbf{z}}_2 \\ \bar{\mathbf{z}}_0 & \bar{\mathbf{z}}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Prva i druga kolona u jakobijevoj matrici odgovaraju prvom i drugom rotacionom stepenu slobode, dok treća odgovara trećem translatorom stepenu slobode. Odgovarajući vektori su dati sa

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}_0 &= [0 \ 0 \ 1]^T & \bar{\mathbf{z}}_1 &= [-\mathbf{S}_1 \ \mathbf{C}_1 \ 0]^T & \bar{\mathbf{z}}_2 &= [\mathbf{C}_1 \mathbf{S}_2 \ \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \ \mathbf{C}_2]^T \\ \bar{\mathbf{r}}_{0,H} &= \mathbf{l}_0 \cdot \bar{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{d}_3 \cdot \bar{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{l}_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{d}_3 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{l}_0 + \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{r}}_{1,H} &= \mathbf{d}_3 \cdot \bar{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{d}_3 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

na osnovu čega možemo sračunati

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}_0 \times \bar{\mathbf{r}}_{0,H} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{l}_0 + \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{z}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_{1,H} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_1 \\ \mathbf{C}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sada se jakobijeva matrica dobija u formi

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 & \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{S}_2 & \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{C}_2 & \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ 0 & -\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{S}_2 & \mathbf{C}_2 \\ 0 & -\mathbf{S}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 3.8

Sastaviti tablicu DH parametara robota Mitsubishi RM-101 prikazanog na slici 26. Dimenzije robota su (u mm): $d_1 = 215$, $a_2 = 200$, $a_3 = 150$, $d_5 = 85$. Ograničenja u zglobovima su $q_{\text{imin}} = [-120, -30, -120, -90, -180]$ i $q_{\text{imax}} = [120, 120, 0, 90, 180]$. Odrediti analitičke izraze za direktnu i inverznu kinematičku funkciju.

Slika 26. Mitsubishi RM-101 robot ("Toyrobot") i koordinatni sistemi potrebni za definisanje DH parametara

Rešenje:

DH parametri Mitsubishi RM-101 robota

DH	α	d	a	θ
1	q_1	d_1	0	90
2	q_2	0	a_2	0
3	q_3	0	a_3	0
4	q_4	0	0	90
5	q_5	d_5	0	0

Na osnovu tablice DH parametara, sastavljamo homogene matrice transformacija

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Izračunavanje direktne kinematike

Množenjem A-matrice dobijamo koordinate u spoljašnjem koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned} n_x &= c_5 c_1 c_{234} + s_1 s_5 & o_x &= -c_1 s_5 c_{234} + s_1 c_5 & a_x &= c_1 s_{234} \\ n_y &= c_5 s_1 c_{234} - c_1 c_5 & o_y &= -s_1 s_5 c_{234} - c_1 c_5 & a_y &= s_1 c_{234} \\ n_z &= c_5 s_{234} & o_z &= -s_5 s_{234} & a_z &= -c_{234} \end{aligned}$$

i otuda je

$$\begin{aligned} p_x &= d_5 c_1 s_{234} + a_3 c_1 c_{23} + a_2 c_1 c_2 \\ p_y &= d_5 s_1 s_{234} + a_3 s_1 c_{23} + a_2 s_1 c_2 \\ p_z &= d_1 - d_5 c_{234} + a_3 s_{23} + a_2 s_2 \end{aligned}$$

Ukoliko su sve unutrašnje koordinate jednake nuli, homogene transformacije daju položaj osa petog koordinatnog sistema i poziciju tog sistema u odnosu na početni koordinatni sistem.

$$\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 129 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Može se pokazati da za elemente T_5 važi

$$\begin{aligned}
|\mathbf{n}| = |\mathbf{o}| = |\mathbf{a}| &= 1 \\
\mathbf{n} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} &= 0 \\
\mathbf{n} \times \mathbf{o} &= \mathbf{a} \\
\mathbf{o} \times \mathbf{a} &= \mathbf{n} \\
\mathbf{n} \times \mathbf{a} &= \mathbf{o}
\end{aligned} \tag{2}$$

Izračunavanje inverzne kinematike

Poznato je

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_5 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \\
\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{T}_5 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5
\end{aligned} \tag{3}$$

Rezultat matričnog množenja je

$$\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} c_1 n_x + s_1 n_y & c_1 o_x + s_1 o_y & c_1 a_x + s_1 a_y & c_1 p_x + s_1 p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z - d_1 \\ s_1 n_x - c_1 n_y & s_1 o_x - c_1 o_y & s_1 a_x - c_1 a_y & s_1 p_x - c_1 p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} c_5 c_{234} & -s_5 c_{234} & s_{234} & d_5 s_{234} + a_3 c_{23} + a_2 c_2 \\ c_5 s_{234} & -s_5 s_{234} & -c_{234} & d_5 c_{234} + a_3 s_{23} + a_2 s_2 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Iz jednačina (2-4) dobijamo

$$s_1 a_x - c_1 a_y = 0 \quad \text{i/ili} \quad s_1 p_x - c_1 p_y = 0$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= ATAN2(p_y, p_x), \quad \text{ili} \\
\theta_1 &= ATAN2(a_y, a_x)
\end{aligned}$$

Najbolje je koristiti p_x, p_y , osim ako su nule. Tada treba koristiti a_x, a_y . Ukoliko su i te vrednosti nula, onda je robot postavljen sa rukom duž z_0 ose, što je singularna pozicija. U tom slučaju treba postaviti $\theta_1 = 0$

Dakle, dobija se

$$\begin{aligned}
s_{234} &= c_1 a_x + s_1 a_y \\
-c_{234} &= a_z
\end{aligned}$$

odnosno, za poznato θ_1 ,

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = ATAN2(c_1 a_x + s_1 a_y, -a_z)$$

Uporedjivanjem prethodnih jednačina i korišćenjem pomoćnih promenljivih

$$t_1 = c_1 p_x + s_1 p_y - d_5 s_{234}$$

$$t_2 = p_z - d_1 + d_5 c_{234}$$

dobijamo sistem jednačina

$$t_1 = a_3 c_{23} + a_2 c_2$$

$$t_2 = a_3 s_{23} + a_2 s_2$$

Ako ih kvadrimo i saberemo, dobija se

$$c_3 = \frac{t_1^2 + t_2^2 - a_3^2 - a_2^2}{2a_2 a_3}$$

Problem je u tome što ne možemo naći s_3 u zatvorenoj formi. Otuda moramo da koristimo

$$\theta_3 = ATAN2\left(\pm\sqrt{1-c_3^2}, c_3\right)$$

Za robot Mitsubishi, lakat uvek mora da uzima negativne vrednosti.

Ako razložimo članove u c_{23} i s_{23} dobija se

$$t_1 = (a_3 c_3 + a_2) c_2 - a_3 s_3 s_2$$

$$t_2 = a_3 s_3 c_2 + (a_3 c_3 + a_2) s_2$$

Sistem može biti rešen po s_2 i c_2 primenom Kramerovog pravila. Primenom funkcije $ATAN2$ dobija se

$$\theta_2 = ATAN2\{(a_3 c_3 + a_2)t_2 - a_3 s_3 t_1, (a_3 c_3 + a_2)t_1 - a_3 s_3 t_2\}$$

Iz prethodnog rezultata, a poznajući θ_2 i θ_3 , dobija se

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_3 - \theta_2$$

Konačno,

$$\theta_5 = ATAN2(s_1 n_x - c_1 n_y, s_1 o_x - c_1 o_y)$$

Time završavamo izračunavanje inverzne kinematike. U primeni ovih relacija stalno moramo voditi računa o tome da potkorenim veličinama ne postanu

negativne. To se događa pri zahtevima za kretanjem koji se nalaze van radnog prostora robota.

Razmotimo rešenje kinematike primenom MATLAB funkcija koje su date u pratećem paketu.

MATLAB funkcija za rešavanje inverzne i direktne kinematike Mitsubishi RM-101 robota:

`mitsudh.m`

postavlja DH parametre; takodje postavlja M vektor. Koriste se u funkciji `ikine(.)`.

`mitsufk.m`

direktna kinematika

`mitsuik.m`

inverzna kinematika

`mitjoint.m`

generiše slučajan skup dozvoljenih uglova

`mittest.m`

testiranje ostalih funkcija. Generiše slučajan skup polaznih uglova.

Izračunava direktnu kinematiku (T5, korišćenjem `mitsufk.m` i `fkine(.)`).

Potom poziva `mitsuik.m`. Da bi se pokrenuo, generiše se početna vrednost na bazi originalnog vektora položaja dodajući slučajne vrednosti. Uočiti poklapanje rešenja.

`ikine.m`

modifikovana verzija funkcije `ikine(.)` iz Robotics Toolbox-a.

Postupak rešavanja izložen je u nastavku.

```
>mitsudh
>dh
dh =
    1.5708         0         0    214.0000         0
         0    200.0000         0         0         0
         0    150.0000         0         0         0
    1.5708         0         0         0         0
         0         0         0    85.0000         0
>M'
ans =
     1     1     1     0     1     1
```

Ovaj vektor ukazuje funkciji `ikine(.)` da Mitsubishi robot ne poseduje sposobnost rotacije oko Ox ose završnog uredjaja.

`>mittest`

Polazne vrednosti za položaj zglobova (deg):

```

-64.3013  50.4792  -68.3258  72.6446  175.4369

-----  Direktna kinematika
          koriscenjem mitsufk  -----

T5 =
-0.3209   0.8783   0.3543  147.2246
 0.4833   0.4736  -0.7363 -305.9273
-0.8145  -0.0650  -0.5765  273.3094
         0         0         0         1.0000

indirektnog resenje koriscenjem fkine:

T5 =
-0.3209   0.8783   0.3543  147.2246
 0.4833   0.4736  -0.7363 -305.9273
-0.8145  -0.0650  -0.5765  273.3094
         0         0         0         1.0000

```

Rezultati su identični. Primetimo da je razlika samo u numeričkoj efikasnosti. Funkcija `fkine(.)` zahteva mnogo više vremena usled stalnog generisanja matrica `A` i njihovog množenja. Funkcija `mitsuik` je približno deset puta brža.

Nastavimo sa `mittest`:

```

-----  Inverzna kinematika
          direktno resenje koriscenjem mitsuik  -----

resenje:

-64.3013  50.4792  -68.3258  72.6446  175.4369

numericno resenje koriscenjem robotics toolbox-a:

originalne vrednosti:

-61.6261  52.4876  -66.2201  71.5652  173.4223

ikine iteracije = 104

resenja dobijena sa ikine:

-64.3013  50.4799  -68.3292  72.6520  175.4351

maxerror =

0.0075

```

Rešenja dobijena sa `mitsuik` su potpuno jednaka originalnom vektoru korišćenom da se generiše `T5`. Pri rešavanju sa `ikine(.)`, u prvom slučaju, polazne vrednosti su bile u okviru 3 deg od tačnih vrednosti. Odabrana je tolerancija konvergencije $1e-12$. Rešenje je dobijeno u 104 iteracije. To je skoro duplo više nego je `mitsuik` trebao (65 iteracije).

Zadatak 3.9

Industrijski robot Manutec-r3 dat je na slici 27 i 49. Postaviti koordinatne sisteme vezane za segmente i odrediti DH parametre robota. Odrediti matricu jakobijana.

Na bazi kataloških podataka formirati bazu dinamičkih parametara segmenata i aktuatora sa reduktorima.

Rešenje:

Manutec r-3 ima sledeće osobine:

maksimalna brzina	3.7 m/s
maksimalno tangencijalno ubrzanje	9.3 m/s ²
maksimalno centrifugalno ubrzanje	11.4 m/s ²
masa korisnog tereta	15 kg
korisni momenat	22 Nm
rezolucija	0.1 mm

Skica manipulatora, sa postavljenim koordinatnim sistemima poslužiće za formiranje DH parametara. Tablica DH parametara je

	θ	d	a	α
zglob 1	0	617	0	$\frac{\pi}{2}$
zglob 2	0	0	500	0
zglob 3	0	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
zglob 4	0	730	0	$\frac{\pi}{2}$
zglob 5	0	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
zglob 6	0	100	0	0

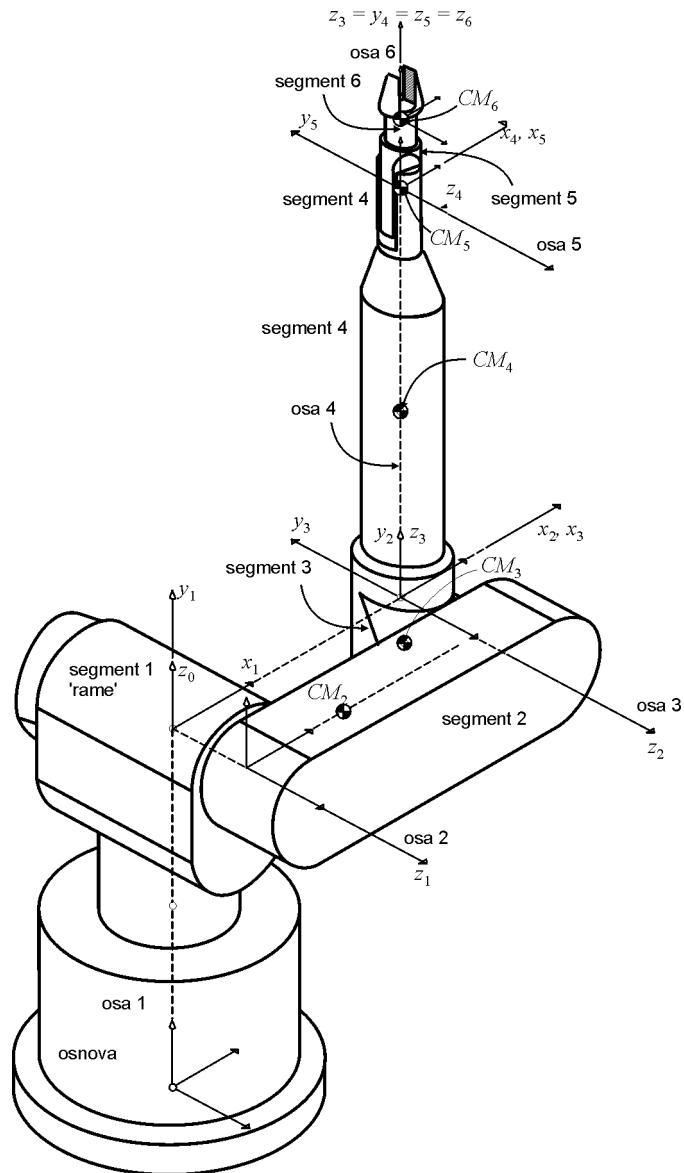
Jakobijan formiramo primenom paketa SYM ŠREFC. Po definisanju pomoćnih promenljivih,

$$\begin{aligned}
C_2 &= \cos(q_2) & T_{6311} &= C_4 \cdot T_{6411} - S_4 \cdot S_6 & T_{6211} &= C_3 \cdot T_{6311} - S_3 \cdot T_{6421} \\
S_2 &= \sin(q_2) & T_{6321} &= S_4 \cdot T_{6411} + C_4 \cdot S_6 & T_{6221} &= S_3 \cdot T_{6311} + C_3 \cdot T_{6421} \\
C_3 &= \cos(q_3) & T_{6411} &= C_5 \cdot C_6 & T_{6212} &= C_3 \cdot T_{6312} - S_3 \cdot T_{6422} \\
S_3 &= \sin(q_3) & T_{6421} &= S_5 \cdot C_6 & T_{6222} &= S_3 \cdot T_{6312} + C_3 \cdot T_{6422} \\
C_4 &= \cos(q_4) & T_{6412} &= -C_5 \cdot S_6 & T_{6213} &= C_3 \cdot T_{6313} - S_3 \cdot C_5 \\
S_4 &= \sin(q_4) & T_{6422} &= -S_5 \cdot S_6 & T_{6223} &= S_3 \cdot T_{6313} + C_3 \cdot C_5 \\
C_5 &= \cos(q_5) & T_{6414} &= -S_5 \cdot D_6 & T_{6214} &= C_3 \cdot T_{6314} - S_3 \cdot T_{6334} \\
S_5 &= \sin(q_5) & T_{6424} &= C_5 \cdot D_6 & T_{6224} &= S_3 \cdot T_{6314} + C_3 \cdot T_{6334} \\
C_6 &= \cos(q_6) & T_{6324} &= S_4 \cdot T_{6414} & & \\
S_6 &= \sin(q_6) & T_{6334} &= S_4 \cdot T_{6414} & T_{p2} &= T_{6214} + A_2 \\
& & T_{6334} &= T_{6424} + D_4 & &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{6111} &= C_2 \cdot T_{6211} - S_2 \cdot T_{6221} & T_{6111} &= C_2 \cdot T_{6211} - S_2 \cdot T_{6221} \\
T_{6121} &= S_2 \cdot T_{6211} + C_2 \cdot T_{6221} & T_{6121} &= S_2 \cdot T_{6211} + C_2 \cdot T_{6221} \\
T_{6112} &= C_2 \cdot T_{6212} - S_2 \cdot T_{6222} & T_{6112} &= C_2 \cdot T_{6212} - S_2 \cdot T_{6222} \\
T_{6122} &= S_2 \cdot T_{6212} + C_2 \cdot T_{6222} & T_{6122} &= S_2 \cdot T_{6212} + C_2 \cdot T_{6222} \\
T_{6113} &= C_2 \cdot T_{6213} - S_2 \cdot T_{6223} & T_{6113} &= C_2 \cdot T_{6213} - S_2 \cdot T_{6223} \\
T_{6123} &= S_2 \cdot T_{6213} + C_2 \cdot T_{6223} & T_{6123} &= S_2 \cdot T_{6213} + C_2 \cdot T_{6223} \\
T_{6114} &= C_2 \cdot T_{p2} - S_2 \cdot T_{6224} & T_{6114} &= C_2 \cdot T_{p2} - S_2 \cdot T_{6224}
\end{aligned}$$

jakobijan glasi

$$J = \begin{bmatrix}
-T_{6111} \cdot T_{6324} + T_{6114} \cdot T_{6321} & -T_{6112} \cdot T_{6324} + T_{6114} \cdot T_{6322} & -T_{6113} \cdot T_{6324} + T_{6114} \cdot T_{6323} & T_{6121} & T_{6122} & T_{6123} \\
-T_{6211} \cdot T_{6224} + T_{p_2} \cdot T_{6221} & -T_{6212} \cdot T_{6224} + T_{p_2} \cdot T_{6222} & -T_{6213} \cdot T_{6224} + T_{p_2} \cdot T_{6223} & -T_{6321} & -T_{6322} & -T_{6323} \\
-T_{6311} \cdot T_{6334} + T_{6314} \cdot T_{6421} & -T_{6312} \cdot T_{6334} + T_{6314} \cdot T_{6422} & -T_{6313} \cdot T_{6334} + T_{6314} \cdot C_5 & -T_{6321} & -T_{6322} & -T_{6322} \\
T_{6414} \cdot S_6 & T_{6414} \cdot C_6 & 0 & T_{6421} & T_{6422} & C_5 \\
-C_6 \cdot D_6 & S_6 \cdot D_6 & 0 & -S_6 & -C_6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$



Slika 27. Industrijski Manutec r-3 manipulator sa 6 ss.

Definišimo dinamičke parametre manipulatora i pogonskog sistema.
Uvedimo sledeće oznake:

$r J^i$ - momenat inercije rotora motora i oko ose sopstvene rotacije.
Rotor je smešten na segmentu $i-1$ a pokreće segment i .

ρ^i - prenosni odnos reduktora i ; negativan znak ukazuje na promenu smera rotacije izlazne osovine u odnosu na ulaznu osovinu.

v^i - elektromehanička konstanta motora i .

$|u_{\max}^i|$ - maksimalni napon motora i .

m^i - masa segmenta i .

\mathbf{h}^i - vektor koji ukazuje na položaj ose narednog zloba u odnosu na prethodni zglob, definisan u koordinatnom sistemu prethodnog zgloba.

\mathbf{d}^i - vektor koji ukazuje na položaj centra mase segmenta u odnosu na tačku preseka ose rotacije i uzdužne ose datog segmenta.

\mathbf{I}^i - tenzor inercije segmenta sa rotorom motora, u odnosu na centar mase datog segmenta, u fiksnom koordinatnom sistemu datog segmenta.

Nominalni naponi svih motora su $|u_{\max}^i| = 7.5 \text{ V}$.

	${}^r J^i$ [kgm ²]	ρ^i	v^i [Nm/V]	m^i [kg]	\mathbf{h}^i [m]	\mathbf{d}^i [m]	\mathbf{I}^i [kgm ²]
zglob 1	1.3e-3	-105	-126	×	×	×	${}^a J^1 = 1.16^1$
zglob 2	1.3e-3	210	252	56.5	$\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.172 \\ 0.000 \\ 0.205 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.58 & 0.00 & -0.46 \\ 0.00 & 2.73 & 0.00 \\ -0.46 & 0.00 & 0.64 \end{bmatrix}$
zglob 3	1.3e-3	60	72	26.4	$\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.064 \\ 0.000 \\ -0.034 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.279 & 0.000 & -0.070 \\ 0.000 & 0.413 & 0.000 \\ -0.070 & 0.000 & 0.245 \end{bmatrix}$
zglob 4	1.6e-4	-99	-24.8	28.7	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.73 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.32 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.670 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.670 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.081 \end{bmatrix}$
zglob 5 ²	1.8e-4	79.2	21.4	5.2	$\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.023 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.25 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.53 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.81 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$
zglob 6 ³	4.3e-5	-99	-8.6	×	×	×	$I_{33}^6 \approx 10^{-4}$

¹ Za prvi zglob dovoljan je samo momenat inercije oko ose 1.

² Segment 5, pored svoje mase i mase rotora 6. zgloba, sadrži i segment 6.

³ Poslednji segment robota, bez korisnog tereta, male je mase, obično simetrično postavljene oko svoje ose rotacije. Otuda se segment 6 može tretirati kao rotor motora. Otuda je, za računanje jednačina kretanja, potreban samo moment inercije oko ose rotacije.

Pod opterećenjem smatramo skoncentrisanu masu m^L . Vektor od H^5 do opterećenja, u fiksnom koordinatnom sistemu 6. segmenta, označava se sa r^L . Za opterećenje još važi

$$0 \leq m^L \leq 15 \text{ [kg]}$$

$$0 \leq (r_1^L)^2 + (r_2^L)^2 \leq 0.15 \text{ [m]}$$

$$0.1 \leq r_3^L \leq 0.25 \text{ [m]}$$

Parametri motora su definisani sledećim veličinama.

σ_v - viskozno prigušenje [Nms / rad]

K_p - poziciono pojačanje [V / rad]

K_i - integralno pojačanje [V / rad]

K_d - diferencijalno pojačanje [Vs / rad]

k_t - strujna konstanta [Nm / V]

k_v - brzinska konstanta [Nms / rad]

	$r J^i$ [kgm^2]	σ_v^i [Nms / rad]	K_p^i [V / rad]	K_i^i [V / rad]	K_d^i [Vs / rad]	k_t^i [Nm / V]	k_v^i [Nms / rad]
zglob 1	1.3e-3	1.86e-3	50	400	0	4.4	0.03395
zglob 2	1.3e-3	1.86e-3	50	400	0	4.8	0.03395
zglob 3	1.3e-3	1.86e-3	50	400	0	5.1	0.03395
zglob 4	1.6e-4	2.43e-4	50	400	0	0.3	0.03395
zglob 5 ⁴	1.8e-4	2.43e-4	50	400	0	0.3	0.03395
zglob 6 ⁵	4.3e-5	6.7e-5	50	400	0	0.23	0.03395

Neki interesantni parametri motora su dati u sledećoj tabeli. Takodje, posmatran kao sistem sačinjen od 6 nezavisnih podsistema, Manutec r-3 poseduje rezonantne frekvence ω_0^i i korene karakteristične jednačine $s_{1,2}^i$ date u sledećoj tabeli.

⁴ Segment 5, pored svoje mase i mase rotora 6. zgloba, sadži i segment 6.

⁵ Poslednji segment robota, bez korisnog tereta, male je mase, obično simetrično postavljene oko svoje ose rotacije. Otuda se segment 6 može tretirati kao rotor motora. Otuda je, za sračunavanje jednačina kretanja, potreban samo moment inercije oko ose rotacije.

	tip motora	I_{\max}^i [A]	M_{nom}^i [Nm]	M_{\max}^i [Nm]	n_{\max}^i [obr/min]	ω_0^i [s ⁻²]	$s_{1,2}^i$
zglob 1	1FT1071	25	4.5	9	3000	×	×
zglob 2	1FT1071	25	4.5	9	3000	$576 \cdot 10^3$	-306 ±706
zglob 3	1FT1071	25	4.5	9	3000	$573 \cdot 10^3$	-276 ±700
zglob 4	1FT1043	8	1.5	3.2	3200	$2.6 \cdot 10^6$	-425 ±1550
zglob 5 ⁶	1FT1041	4.5	0.7	1.45	3200	$983 \cdot 10^3$	-439 ±869
zglob 6 ⁷	1FT1031	2.1	0.3	0.5	3500	$1.737 \cdot 10^6$	-448 ±1264

Ograničenja u zglobovima i ograničenja po brzinama i ubrzanjima

	$ q^i <$ [rad]/[deg]	$ \dot{q}^i <$ [$\frac{rad}{s}$]/[$\frac{deg}{s}$]	$ \ddot{q}^i <$ [$\frac{deg}{s^2}$]
zglob 1	2.97; 170	3; 170	170
zglob 2	2.01; 115	1.5; 86	90
zglob 3	2.86; 164	5.2; 298	530
zglob 4	3.63; 208	3.4; 195	1310
zglob 5 ⁸	2.27; 130	4.3; 246	1270
zglob 6 ⁹	neograničeno	3.7; 212	650

⁶ Segment 5, pored svoje mase i mase rotora 6. zgloba, sadrži i segment 6.

⁷ Poslednji segment robota, bez korisnog tereta, male je mase, obično simetrično postavljene oko svoje ose rotacije. Otuda se segment 6 može tretirati kao rotor motora. Otuda je, za računanje jednačina kretanja, potreban samo moment inercije oko ose rotacije.

⁸ Segment 5, pored svoje mase i mase rotora 6. zgloba, sadrži i segment 6.

Senzori u zglobovima: inkrementalni enkoderni i induktivni davači referentne pozicije. Impulsni enkoderni poseduju rezoluciju 600 impulsa po obrtaju. Po kvadratnom dekodiranu, dobija se 2400 impulsa po obrtaju. Induktivni davači obezbeđuju referentni položaj robota. Robot se postavlja u parkirni položaj za 10° unazad od referentnog položaja.

	referentni položaj	parkirni položaj
zglob 1	$+40^\circ$	$+30^\circ$
zglob 2	$+70^\circ$	$+60^\circ$
zglob 3	-130°	-120°
zglob 4	-50°	-40°
zglob 5 ¹⁰	$+30^\circ$	$+20^\circ$
zglob 6 ¹¹	$+95^\circ$	$+85^\circ$

Zadatak 3.10

Odrediti singularne tačke planarnog robota sa dva stepena slobode, prikazanog na slici 32.

Rešenje:

U slučaju da robot nije redundantan, singularne tačke su one tačke u kojima jakobijan nije regularna matrica. Ukoliko je robot redundantan, jakobijan nije kvadratna matrica, pa se singularne tačke definišu kao tačke u unutrašnjem prostoru robota u kojima je rang jakobijana manji od stepena manipulabilnosti robota. Singularnosti postavljaju konfiguracije u kojima je pokretljivost strukture smanjena odnosno postoje pravci u kojima manipulator ne može da se kreće. U

⁹ Poslednji segment robota, bez korisnog tereta, male je mase, obično simetrično postavljene oko svoje ose rotacije. Otuda se segment 6 može tretirati kao rotor motora. Otuda je, za računanje jednačina kretanja, potreban samo moment inercije oko ose rotacije.

¹⁰ Segment 5, pored svoje mase i mase rotora 6. zgloba, sadrži i segment 6.

¹¹ Poslednji segment robota, bez korisnog tereta, male je mase, obično simetrično postavljene oko svoje ose rotacije. Otuda se segment 6 može tretirati kao rotor motora. Otuda je, za računanje jednačina kretanja, potreban samo moment inercije oko ose rotacije.

singularnoj poziciji postojati beskonačno mnogo rešenja inverzne kinematike. Konačno, u okolini singularnih tačaka male brzine u radnom prostoru tj. spoljnim koordinatama mogu proizvesti velike brzine u zglobovima, ukoliko robot upravljamo inverznim kinematičkim algoritmima. Singularnosti mogu biti: granične i unturašnje. Granične nastaju kada je manipulator na granicama svoje radne oblasti. Njih je moguće ih je izbeći planiranjem trajektorije. Unutrašnje singularnosti nastaju dovodjenjem više zglobova na istu osu kretanja. U slučaju planarnog lakatastog robota, slika 32, jednačine direktne kinematike su

$$\begin{aligned}x &= l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\y &= l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ \dot{x} &= -l_1 s_1 \dot{q}_1 - l_2 s_{12} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{y} &= l_1 s_1 \dot{q}_1 - l_2 c_{12} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\end{aligned}$$

Diferenciranjem dobijamo jakobijan

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$$

U singularnim tačkama jakobijan nije regularan, odnosno

$$\det \mathbf{J} = 0$$

$$\begin{aligned}-l_1 l_2 s_1 c_{12} - l_2^2 s_{12} c_{12} + l_2 l_1 c_1 s_{12} + l_2^2 s_{12} c_{12} &= 0 \\ l_1 l_2 \cdot [c_1 (s_1 c_2 + c_1 s_2) - s_1 (c_1 c_2 - s_1 s_2)] &= 0 \\ l_1 l_2 s_2 &= 0\end{aligned}$$

Konačno, singularne tačke dobijaju se za ispruženu ili sklopljenu konfiguraciju datog robota.

$$\sin q_2 = 0$$

$$q_2 = 0 \vee q_2 = \pm\pi$$

Kada je manipulator u singularnom položaju kretanjem zglobova q_1 brzina ima dva moguća smera koji su isti i za segment 1 i za segment 2 (matrica \mathbf{J} ima linearno zavisne vrste $\dot{q}_2 = k\dot{q}_1$) i kretanje je ograničeno.

Zadatak 3.11

Odrediti singularne položaje antropomorfnog, RRR robota, slika 38.

Rešenje:

Homogena matrica transformacije i jakobijan antropomorfnog robot su

$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1 (a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_2 c_1 s_{23} \\ c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1 (a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} & a_3 c_{23} \end{bmatrix}$$

Uslov singularnosti za antropomorfni robot glasi

$$\det \mathbf{J} = 0$$

$$\det \mathbf{J} = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23})$$

$$s_3 = 0 \quad \vee \quad a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0$$

četvrta kolona matrice homogenih transformacija postaje

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 s_2 + a_3 s_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

što ukazuje da singularan položaj nastaje kada je $(x, y) = (0, 0)$, odnosno kada se vrh robota nalazi na z -osi.

$$q_3 = 0 \quad \vee \quad q_3 = \pm\pi$$

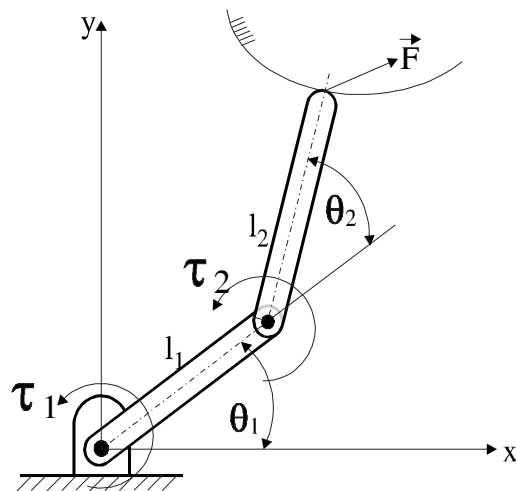
U okolini singularnog položaja $\det \mathbf{J} \approx 0$, odnosno izraz $\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det(\text{adj}(\mathbf{J}))}$ dobija

veoma veliku vrednost pa iz $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{x}}$ sledi da se u okolini singulariteta brzine zglobova naglo povećavaju prevazilazeći sposobnost aktuatora da ih obezbede.

DINAMIKA

Zadatak 4.1

Za dvosegmentni ravanski mehanizam prikazan na Sl. 28. sračunati potrebne momente u zglobovima (ne uzimajući u obzir gravitaciona opterećenja i silu trenja) da bi manipulator delovao na okolinu silom $\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$.



Slika 28. Dvosegmentni mehanizam u kontaktu sa okolinom

Rešenje:

Relacija koja povezuje silu kojom robot deluje na okolinu i odgovarajuće momente u zglobovima je data sa

$$\tau = J^T \cdot F$$

Treba napomenuti da se momenti τ u gornjem izrazu odnose samo na doprinos koji u zglobovima indukuje spoljna sila F i da gravitacioni momenti od težine samih segmenata mehanizma nisu uključeni.

Jakobijan ovog mehanizma smo sračunali ranije i on je dat sa

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 \cdot S_1 - l_2 \cdot S_{12} & -l_2 \cdot S_{12} \\ l_1 \cdot C_1 + l_2 \cdot C_{12} & l_2 \cdot C_{12} \end{bmatrix}$$

pa je transponovani jakobijan J^T dat sa

$$J^T = \begin{bmatrix} -l_1 \cdot S_1 - l_2 \cdot S_{12} & l_1 \cdot C_1 + l_2 \cdot C_{12} \\ -l_2 \cdot S_{12} & l_2 \cdot C_{12} \end{bmatrix}$$

na osnovu čega možemo sračunati

$$\tau = J^T \cdot F = \begin{bmatrix} -l_1 \cdot S_1 - l_2 \cdot S_{12} & l_1 \cdot C_1 + l_2 \cdot C_{12} \\ -l_2 \cdot S_{12} & l_2 \cdot C_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pa su traženi momenti, konačno, dati sa

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \cdot l_1 \cdot S_1 - 10 \cdot l_2 \cdot S_{12} \\ -10 \cdot l_2 \cdot S_{12} \end{bmatrix}$$

Zadatak 4.2

Za trosegmentni sferni manipulator (zadatak 4.1) odrediti potrebne pogone u zglobovima (ne uzimajući u obzir gravitaciona opterećenja i silu trenja) da bi manipulator delovao na zid silom $F = (10, 5, 2)^T$.

Rešenje:

Jakobijeva matrica za ovaj manipulator je data sa

$$J = \begin{bmatrix} -d_3 \cdot S_1 \cdot S_2 & d_3 \cdot C_1 \cdot C_2 & C_1 \cdot S_2 \\ d_3 \cdot C_1 \cdot S_2 & d_3 \cdot S_1 \cdot C_2 & S_1 \cdot S_2 \\ 0 & -d_3 \cdot S_2 & C_2 \\ 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pa možemo pisati

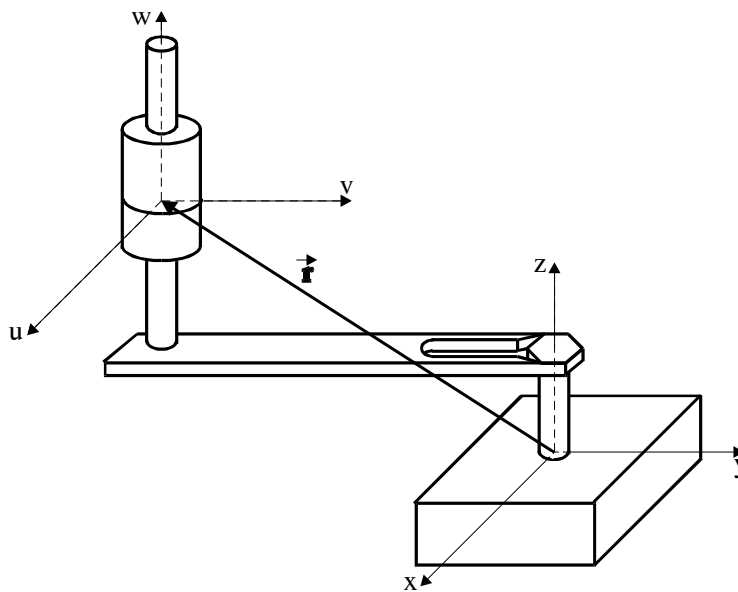
$$\tau = J^T \cdot F = \begin{bmatrix} -d_3 \cdot S_1 \cdot S_2 & d_3 \cdot C_1 \cdot S_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_3 \cdot C_1 \cdot C_2 & d_3 \cdot S_1 \cdot C_2 & -d_3 \cdot S_2 & -S_1 & C_1 & 0 \\ C_1 \cdot S_2 & S_1 \cdot S_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

odakle sledi

$$\tau = \begin{bmatrix} (5 \cdot C_1 - 10 \cdot S_1) \cdot d_3 \cdot S_2 \\ (10 \cdot C_1 \cdot C_2 + 5 \cdot S_1 \cdot C_2 - 2 \cdot S_2) \cdot d_3 \\ (10 \cdot C_1 \cdot S_2 + 5 \cdot S_1 \cdot S_2 + 2 \cdot C_2) \end{bmatrix}$$

Zadatak 4.3

Odrediti sile i momente koji deluju na zavrtnaj ako ga okrećemo ključem koji je pričvršćen za poslednji segment robota (Sl. 29). Podatke o sili i momentu



Slika 29. Poslednji segment robota sa senzorom sile u zglobu šake u kontaktu sa zavrtnjem

dobijamo od senzora smeštenog u "zglobu šake" koji meri tri komponente sile i tri komponente momenta.

Rešenje:

Da bi ovaj zadatak rešili potrebno je da malo detaljnije razmotrimo teoretske aspekte jakobijeve matrice. Modifikujmo definiciju vektora q koji je označavao vektor ugaonih koordinata u zglobovima. Neka je sada vektor $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ predstavlja nezavisni i kompletan skup generalisanih koordinata u kome je moguće kompletno opisati položaj mehaničkog sistema (koordinate u zglobovima robota predstavljaju jedan takav skup). Neka su $Q = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T$ generalisane sile i momenti koje odgovaraju generalisanim koordinatama $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$. Takođe pretpostavimo da je $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]^T$ drugi skup generalisanih koordinata koji ne mora da bude kompletan, tj. ne mora biti obezbeđeno da se sistem može u celosti njime opisati. Na primer, koordinate za poziciju i orijentaciju robota nisu potpun skup u slučaju da je robot redundantan. Posmatrajmo, zatim, trenutak kada statičke sile i momenti deluju na sistem čija pozicija je opisana sa q . Pretpostavimo da su te statičke sile i momenti obeleženi sa $P = [P_1, P_2, \dots, P_m]^T$ i da su izraženi u odnosu na koordinatni sistem $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]^T$. Problem je kako transformisati sile i momente obeležene sa P iz $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]^T$ koordinata u $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ koordinate.

Posmatrajmo virtualna pomeranja δp . Obzirom da je skup q koordinata kompletan skup generalisanih koordinata njima se može izraziti pomeraj proizvoljne tačke sistema. međutim, pomeraj opisan sa p mora biti izražen u odnosu na q koordinate. Diferenciranjem funkcije možemo povezati virtualna pomeranja δp i δq u obliku

$$\delta p = J \delta q$$

gde je J jakobijeva matrica dimenzija $m \times n$ pridružena transformaciji koordinata. Da bi pronašli vezu između sila P i Q posmatrajmo ravnotežu sistema i napišimo izraz za virtualni rad za taj slučaj. Pod virtualnim pomeranjima se podrazumevaju infinitezimalni pomeraji mehaničkog sistema koje dozvoljavaju veze. Za razliku od stvarnih pomeraja virtualni pomeraji treba samo da budu u saglasnosti sa ograničenjima koja nameću veze, dok se ostalim zakonima kretanja ne pokoravaju. Prema tome, izraz za virtualni rad je

$$\delta w = \mathbf{Q}^T \cdot \delta q - \mathbf{P}^T \cdot \delta p = (\mathbf{Q} - \mathbf{J}^T \mathbf{P}) \delta q = 0$$

Obzirom da su virtuelna pomeranja različita od nule $\delta q \neq 0$, prethodni izraz može biti tačan samo ukoliko je izraz u zagradi jednak nuli, odakle sledi

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J}^T \mathbf{P}$$

čime smo odredili traženu zavisnost.

U ovom slučaju se poslednji segment robota zajedno sa ključem za završtanje vijka i vijkom može smatrati jedinstvenim krutim telom. Neka je u centru senzora sile smešten koordinatni sistem $O-uvw$, a u centru vijka koordinatni sistem $O-xyz$ i neka su ova dva koordinatna sistema paralelna, kao što je na Sl. 29 prikazano. Infinitesimalna kretanja krutog tela izražena u odnosu na koordinatni sistem $O-xyz$ su data vektorom $[dx \ dy \ dz \ d\phi_x \ d\phi_y \ d\phi_z]^T$, a u odnosu na koordinatni sistem $O-uvw$ vektorom $[du \ dv \ dw \ d\phi_u \ d\phi_v \ d\phi_w]^T$.

Jakobijeva matrica transformacije između ova dva koordinatna sistema je d

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \\ d\phi_u \\ d\phi_v \\ d\phi_w \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ d\phi_x \\ d\phi_y \\ d\phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ d\phi_x \\ d\phi_y \\ d\phi_z \end{bmatrix}$$

odakle posle sređivanja sledi

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \\ d\phi_u \\ d\phi_v \\ d\phi_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_z & -r_y \\ 0 & 1 & 0 & -r_z & 0 & r_x \\ 0 & 0 & 1 & r_y & -r_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ d\phi_x \\ d\phi_y \\ d\phi_z \end{bmatrix}$$

Ako je $[F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z]^T$ vektor sila i momenata koje deluju na vijak, a $[F_u, F_v, F_w, M_u, M_v, M_w]^T$ vektor sila i momenata izmerenih na senzoru, na osnovu izraza za vezu između generalisanih sila \mathbf{P} i \mathbf{Q} koja je izvedena ranije, možemo pisati

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_z & r_y & 1 & 0 & 0 \\ r_z & 0 & -r_x & 0 & 1 & 0 \\ -r_y & r_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ M_u \\ M_v \\ M_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ -r_z \cdot F_v + r_y \cdot F_w + M_u \\ r_z \cdot F_u - r_x \cdot F_w + M_v \\ -r_y \cdot F_u + r_x \cdot F_v + M_w \end{bmatrix}$$

čime je zadatak rešen.

PLANIRANJE TRAJEKTORIJA I PRIMENE

Zadatak 5.1

U početnom trenutku se vrh manipulatora sa tri linearna stepena slobode (dekartova ili kartezijska konfiguracija) nalazi u tački A_0 ($x_0=5$, $y_0=3$, $z_0=5$) mm. Odrediti trajektoriju do ciljne tačke A_1 ($x_1=12$, $y_1=9$, $z_1=15$) mm ukoliko se kretanje ostvaruje tako da se pojedinačno (sekvencijalno) aktiviraju zglobovi. Pretpostaviti da maksimalne brzine aktuatora iznose 0.2 m/s. Periode ubrzanja i usporenja zanemariti tj. pretpostaviti da se zglobovi svo vreme kreću maksimalnom i konstantnom brzinom. Period uzorkovanja (odabiranja) je 5 ms.

Rešenje:

Najpre ćemo odrediti koliki put svaki segment (duž koordinatnih osa) treba da pređe tokom ovog pokreta

$$\Delta x = X_{A1} - X_{A0} = 12 - 5 = 7 \text{ mm}$$

$$\Delta y = Y_{A1} - Y_{A0} = 9 - 3 = 6 \text{ mm}$$

$$\Delta z = Z_{A1} - Z_{A0} = 15 - 5 = 10 \text{ mm}$$

Put koji segment pređe tokom jednog perioda odabiranja je

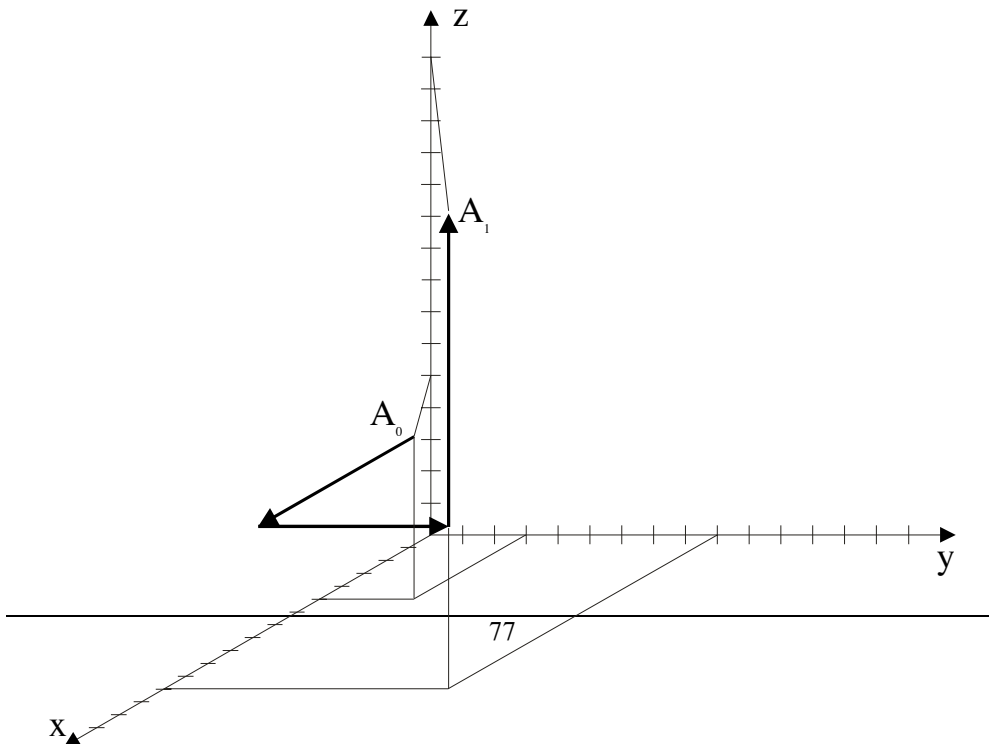
$$S = v_0 t = 0.2 \frac{\text{mm}}{\text{ms}} \cdot 5 \text{ ms} = 1 \text{ mm}$$

Položaji vrha manipulatora su za svaki period odabiranja dati u sledećoj tabeli.

Vreme (ms)	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	Vreme (ms)	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
0	5	3	5	60	12	8	5
5	6	3	5	65	12	9	5
10	7	3	5	70	12	9	6
15	8	3	5	75	12	9	7
20	9	3	5	80	12	9	8
25	10	3	5	85	12	9	9
30	11	3	5	90	12	9	10
35	12	3	5	95	12	9	11
40	12	4	5	100	12	9	12
45	12	5	5	105	12	9	13
50	12	6	5	110	12	9	14
55	12	7	5	115	12	9	15

Sa skice se može videti da se vrh manipulatora prvo kreće po x osi (počevši od tačke A_0) ukupno 7 mm. Vreme trajanja pokreta je 35 ms. Zatim se kreće po y osi 6 mm (do trenutka $t=60$ ms), i na kraju, po z osi 10 mm do krajnje tačke A_1 .

Na sledećoj skici je prikazana putanja vrha manipulatora.



Očigledno je da je redosled aktiviranja zglobova mogao biti i drugačiji, tj. molo je najpre biti realizovano kretanje duž y ili z ose, a zatim kretanje duž ostale dve ose. Redosled aktiviranja zglobova zadatkom nije bio specificiran tako da je mogao biti usvojen bilo koji redosled sa istim krajnjim položajem.

Zadatak 5.2

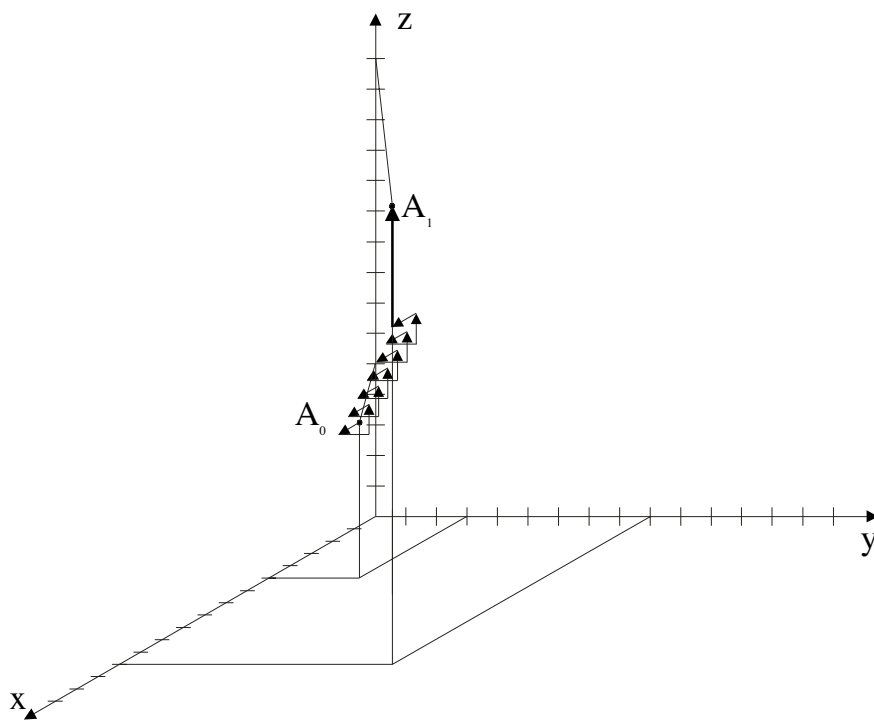
U prethodnom primeru je svaki zglob bio aktiviran samo jednom i tokom rada je pređen ceo planirani opseg kretanja. Za podatke iz prethodnog primera odrediti trajektoriju vrha robota ako se aktiviranje zglobova vrši isto sekvencijalno i pojedinačno, ali se u svakom narednom periodu odabiranja uključuje sledeći zglob.

Rešenje:

U početku pokreta će biti redosledno aktivirana sva tri zgloba. Međutim, obzirom da dužina trajektorije vrha po osama nije ista, do kraja pokreta će ostati aktivan samo onaj zglob čiji je period angažovanja najduži. U ovom primeru je to zglob koji ostvaruje kretanje duž z ose. Na ovaj način se takođe dobija izlomljena trajektorija ali mnogo bliža pravolinijskoj putanji.

Vrh robota se kreće (iz početne tačke A_0) za 1 mm redosledno po sve tri ose do vremena 95 ms. U tom trenutku su završena kretanja po x i y osi. Vrh manipulatora nastavlja da se kreće samo po z osi do krajnje tačke A_1 .

Na sledećoj skici je prikazana putanja vrha manipulatora



Slika 30 Putanja vrha robota iz zadatka 3.2

U narednoj tabeli je dat prikaz položaja vrha manipulatora tokom trajanja pokreta

Vreme (ms)	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	Vreme (ms)	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
0	5	3	5	60	9	7	9
5	6	3	5	65	10	7	9
10	6	4	5	70	10	8	9
15	6	4	6	75	10	8	10
20	7	4	6	80	11	8	10
25	7	5	6	85	11	9	10
30	7	5	7	90	11	9	11
35	8	5	7	95	12	9	11
40	8	6	7	100	12	9	12
45	8	6	8	105	12	9	13
50	9	6	8	110	12	9	14

55	9	7	8	115	12	9	15
----	---	---	---	-----	----	---	----

Zadatak 5.3

Za podatke iz zadatka 3.1. odrediti trajektoriju vrha robota ako se svi zglobovi aktiviraju na početku pokreta istovremeno i kreću se maksimalnom brzinom. Motori ostaju uključeni dok svaki pojedinačni zglob ne dostigne željenu vrednost.

Rešenje:

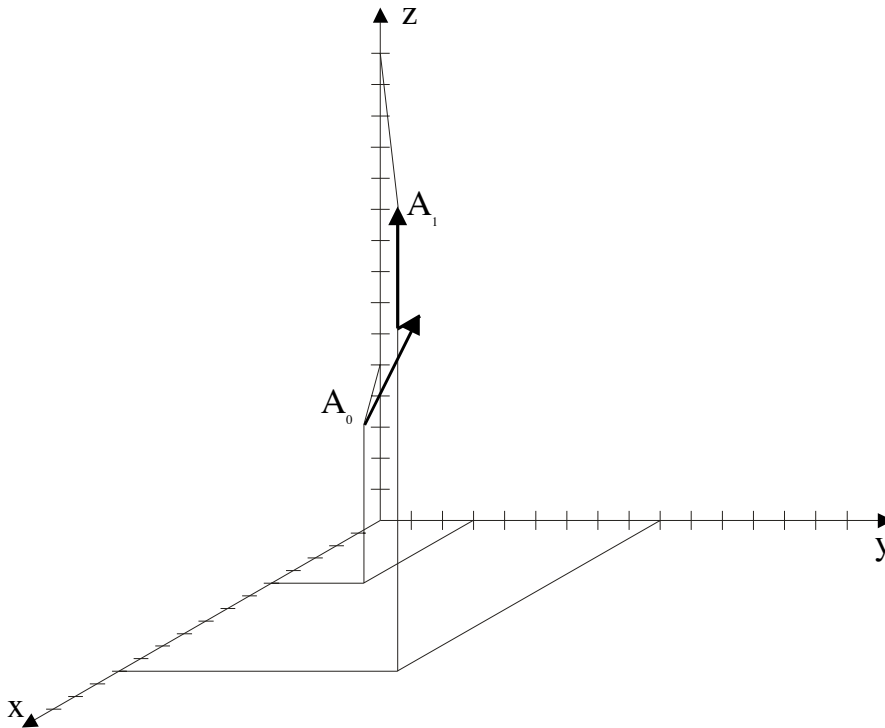
Ovaj način realizacije trajektorije, obzirom da su svi motori uključeni istovremeno, omogućuje znatno kraće vreme trajanja pokreta ali zbog nejednakog vremena rada motora u pojedinim zglobovima dolazi do velikih trzaja i neusklađenih kretanja. Putanja vrha robota nije prava linija i njen oblik zavisi od dužine rada motora u pojedinim zglobovima.

U narednoj tabeli su date koordinate trajektorije vrha robota za vreme trajanja pokreta.

Vrh robota se kreće istovremeno po X, Y, Z osi do trenutka $t=30$ ms kada se završava kretanje po y osi. Sledi kretanje od 1 mm po x osi. I na kraju sledi kretanje po z osi do krajnje tačke A_1 .

Vreme (ms)	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
0	5	3	5
5	6	4	6
10	7	5	7
15	8	6	8
20	9	7	9
25	10	8	10
30	11	9	11
35	12	9	12
40	12	9	13
45	12	9	14
50	12	9	15

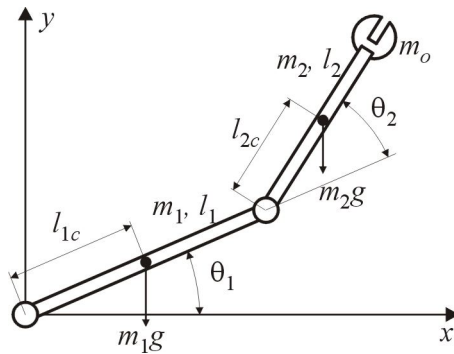
Na sledećoj skici je prilazana putanja vrha manipulatora



Slika 31. Putanja vrha robota

Zadatak 5.4

Za laktastu strukturu strukturu manipulatora sa dva stepena slobode u vertikalnoj ravni, slika 32, izvesti uslov kojim se eliminišu nelinearnosti matrice inercije u dinamičkom modelu manipulatora. Poznate su dužine l_1 i l_2 i mase segmenata m_1 i m_2 kao i masa opterećenja m_o



Slika 32. Laktasta struktura manipulatora sa dva stepena slobode u vertikalnoj ravni

Rešenje:

Primenom Langranž-Ojlerove jednačine formiraćemo model dinamike datog manipulatora

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \quad (2)$$

gde su:

τ_i – pogonski momenti u zglobovima

θ_i – ugaoni pomeraji u zglobovima

$\dot{\theta}_i$ – ugaona brzina u zglobovima

L – Lagranžijan

$L = E_k - E_p$, gde je E_k ukupna kinetička energija manipulatora a E_p je ukupna potencijalna energija manipulatora.

1. Segment

Kinetička energija za prvi segment iznosi

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_{1c}^2 + \dot{y}_{1c}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (3)$$

gde je I_1 moment inercije prvog segmenta u odnosu na centar mase prvog segmenta. Ukoliko segment smatramo štapićem bez debljine, sa centrom mase na sredini štapa, moment inercije iznosi

$$I_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x_{1c} &= l_{1c} \cos \theta_1, & \dot{x}_{1c} &= -l_{1c} \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \\ y_{1c} &= l_{1c} \sin \theta_1, & \dot{y}_{1c} &= l_{1c} \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Otuda, kinetička i potencijalna energija prvog segmenta iznose

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 l_{1c}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2, \quad E_{p1} = m_1 g y_{1c} = m_1 g l_{1c} \sin \theta_1 \quad (6)$$

2. Segment

Ugaona brzina drugog segmenta u odnosu na osnovu iznosi $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$. Otuda, kinetička energija drugog segmenta iznosi

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{2c}^2 + \dot{y}_{2c}^2) + \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (7)$$

Moment inercije drugog segmenta, smatrajući da je segment štap bez debljine, sa masom m_2 skoncentrisanom na sredini štapa $l_2/2$.

$$I_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} x_{2c} &= l_1 \cos \theta_1 + l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ y_{2c} &= l_1 \sin \theta_1 + l_{2c} \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ \dot{x}_{2c} &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_{2c} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ \dot{y}_{2c} &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_{2c} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2), \end{aligned} \quad (9)$$

Kinetička energija drugog segmenta data je relacijom

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{2c}^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \dots \\ &\quad m_2 l_1 l_{2c} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \end{aligned} \quad (10)$$

Potencijalna energija drugog segmenta data je relacijom

$$E_{p2} = m_2 g y_{2c} = m_2 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_{2c} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (11)$$

Kinetička energija za opterećenje na hvataljci robota iznosi

$$E_{ko} = \frac{1}{2} m_o (\dot{x}_o^2 + \dot{y}_o^2) \quad (12)$$

Za centre mase hvataljke brzina iznosi

$$\begin{aligned}
x_o &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
y_o &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
\dot{x}_o &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
\dot{y}_o &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned} \tag{13}$$

Otuda, kinetička i potencijalna energija drugog segmenta iznose

$$E_{ko} = \frac{1}{2} m_o l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_o l_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + m_o l_1 l_2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \tag{14}$$

$$E_{po} = \frac{1}{2} m_o g y_o = m_o g (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) \tag{15}$$

Ukupna kinetička energija iznosi

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{ko} \tag{16}$$

a ukupna potencijalna energija iznosi

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} + E_{po} \tag{17}$$

Otuda je Lagranžijan

$$\begin{aligned}
L = E_k - E_p &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_1 l_{1c}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_o l_1^2) + \dots \\
&+ \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) (m_2 l_{2c}^2 + I_2 + m_o l_2^2) + \dots \\
&+ l_1 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 (m_2 l_{2c} + m_o l_2) - \dots \\
&g \sin \theta_1 (m_1 l_{1c} + m_2 l_1 + m_o l_1) - g \sin(\theta_1 + \theta_2) (m_2 l_{2c} + m_o l_2)
\end{aligned} \tag{18}$$

U cilju primene izraza za Lagranžijan dvosegmentnog manipulatora datog jednačinom (18) u Lagranžovu jednačinu (2), moramo da odredimo izraze za parcijalne izvode Lagranžijana po ugaonim pozicijama i brzinama.

Opšta matična forma jednačine dinamike manipulatora sa dva stepena slobode glasi:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

gde su:

$$\begin{aligned}
H_{11} &= m_1 l_{1c}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{2c}^2 + I_2 + m_o l_1^2 + m_o l_2^2 + 2l_1(m_2 l_{2c} + m_o l_2) \cos \theta_2 \\
H_{12} &= H_{21} = m_2 l_{2c}^2 + I_2 + m_o l_2^2 + l_1(m_2 l_{2c} + m_o l_2) \cos \theta_2 \\
H_{22} &= m_2 l_{2c}^2 + I_2 + m_o l_2^2 \\
C_1 &= -2l_1(m_2 l_{2c} + m_o l_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_1(m_2 l_{2c} + m_o l_2) \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \\
C_2 &= l_1(m_2 l_{2c} + m_o l_2) \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \\
G_1 &= (m_1 l_{1c} + m_2 l_1 + m_o l_1) g \cos \theta_1 + (m_2 l_{2c} + m_o l_2) g \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
G_2 &= (m_2 l_{2c} + m_o l_2) g \cos(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned} \tag{20}$$

Usled prisustva mnogobrojnih sabiraka sa trigonometrijskim funkcijama koordinata robota u relacijama (20), model dinamike je izrazito nelinearan. Usled periodičnih svojstava pomenutih funkcija, pri određenim frekvencijama upravljačkih signala može doći do neželjenih vibracija strukture manipulatora.

U suštini, linearizacija predstavlja modifikaciju mehaničke konstrukcije robota sa ciljem da se u delu radnog prostora obezbedi smanjenje ili potpuno eliminisanje uticaja relativnog kretanja segmenata robota. To se, recimo, može postići pomeranjem centara mase segmenata, u negativnom smeru ose zgloba, ka zglobovima. U konkretnom slučaju, značajno eliminisanje nelinearnosti u Lagranžijanu može se ostvariti izborom centara mase tako da izraz $m_2 l_{2c} + m_o l_2$, koji se javlja kao činilac u skoro svim koeficijentima dinamičke jednačine, uzme vrednost nula

$$m_2 l_{2c} + m_o l_2 = 0,$$

odnosno da centar mase drugog segmenta uzme vrednost

$$l_{2c} = -\frac{m_o}{m_2} l_2 \tag{21}$$

Takođe, poželjno je i da

$$m_1 l_{1c} + m_2 l_1 + m_o l_1 = 0$$

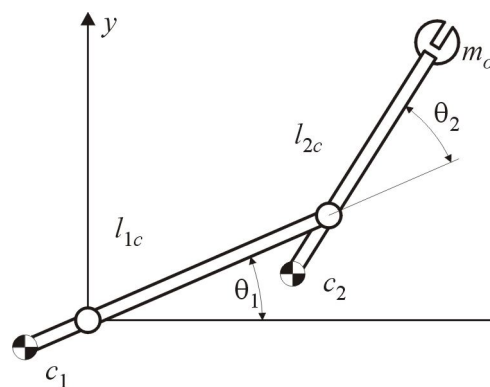
odnosno da centar mase prvog segmenta uzme vrednost

$$l_{1c} = -\frac{m_o + m_2}{m_1} l_1 \tag{22}$$

Ostvarivanjem uslova (21) i (22), model dinamike postaje:

$$\begin{aligned}\bar{H}_{11} &= m_1 l_{1c}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{2c}^2 + I_2 + m_o l_1^2 + m_o l_2^2 \\ \bar{H}_{12} &= H_{21} = m_2 l_{2c}^2 + I_2 + m_o l_2^2 \\ \bar{H}_{22} &= m_2 l_{2c}^2 + I_2 + m_o l_2^2 \\ \bar{C}_1 &= \bar{C}_2 = 0 \\ \bar{G}_1 &= (m_1 l_{1c} + m_2 l_1 + m_o l_1) g \cos \theta_1 \\ \bar{G}_2 &= 0\end{aligned}$$

Dakle, za robot prikazan na slici 33, ostvareno je potpuno poništavanje efekata usled centrifugalnih i koriolisovih sila. Eliminisan je uticaj gravitacione sile na drugi segment kao i deo gravitacione sile drugog segmenta koji je preslikan na prvi zglob. Takođe, potpuno su eliminisani efekti nelinearnosti u matrici inercija.



Slika 33. Laktasta struktura manipulatora sa dva stepena slobode u vertikalnoj ravni sa kompenzovanim centrima masa

Ukoliko je poznata masa opterećenja m_o , izmenom konstrukcije robota, uvodjenjem kontramasâ m_{c1} i m_{c2} postiže se željeno dinamičko uravnoteženje manipulatora, slika 33. To se može postići i izmeštanjem pogonskih i redukcionih jedinica. Ukoliko masa opterećenja m_o nije poznata, treba usvojiti srednju vrednost očekivanih masa ili formirati složeniji sistem na bazi opruga i hidraulike.

Zadatak 5.5

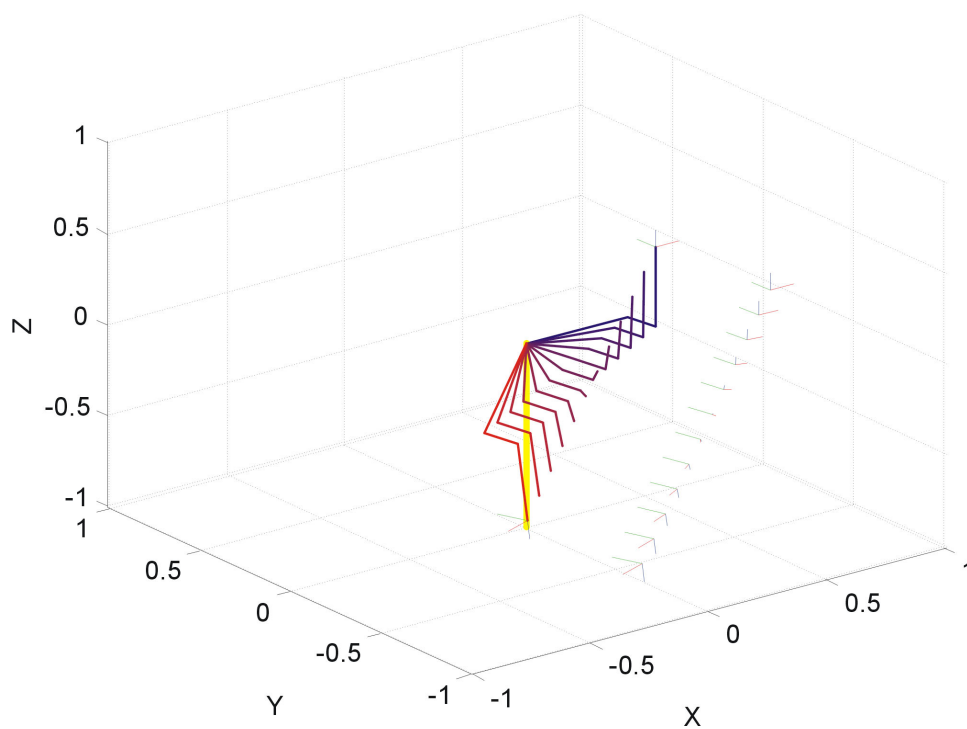
Simulirati trajektorije PUMA560, slika 56, robota koji se iz nultog položaja $q_z = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$; prepušta dejstvu gravitacije. Motori robota nisu uključeni a kočnice u zglobovima su isključene. Pad traje 0.7652 s.

Rešenje:

Analizirajmo pad primenom funkcije `fdyn`, bez dodatnog pogona u motorima.

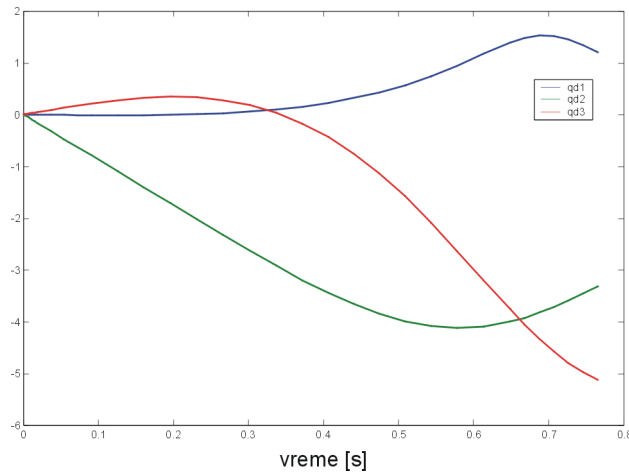
```
[t q qd] = fdyn(p560, 0, 0.7652);
```

Rezultati su prikazani na slici 34.



Slika 34. Simulacija pada robota PUMA560

U ovom slučaju je jasno da robot pada pod dejstvom gravitacije ali usled koriolisovih i centrifugalnih sila dešava se rotacija oko ose prvog zgloba (plava linija na slici 35).



Slika 35. trajektorije prva tri zgloba robota PUMA560 pri slobodnom padu iz nultog položaja

Recimo, ubrzanja na početku kretanja se mogu izračunati

```
qdd0 = accel(p560, qz, zeros(1,6), zeros(1,6))
```

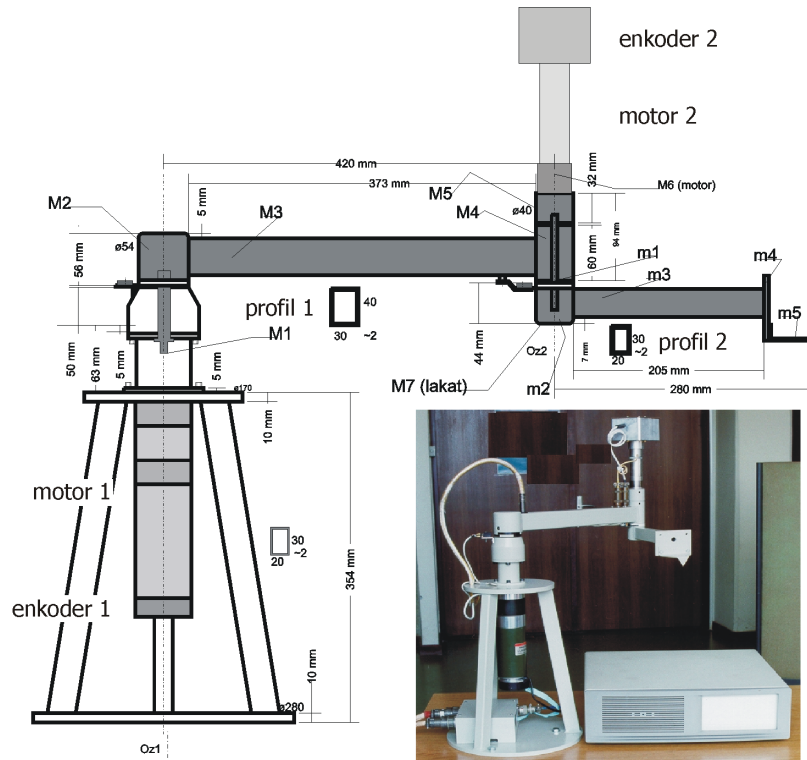
dajući rezultat

```
qdd0 = [-0.2463 -8.7020 2.5442 0.0021 0.0672 0.0001] % rad
```

Zadatak 5.6

Sastaviti model kinematičkih i dinamičkih parametara za robot E2R na bazi eksperimentalno i kataloški odredjenih vrednosti za segmente i motore. Izgled manipulatora dat je na slici 36.

	l_i [m]	m_i [kg]	R_i [ohm]	K_{em_i} [Nm/A]	J_i [kgm ²]	N_i	U_{n_i} [V]
segment 1	0.42	3.312	1.35	0.1	122e-6	35	24
segment 2	0.28	0.42	8	48/(38*69)	1.1261e-6	69	24



Slika 36. Skica i fotografija laboratorijskog dvosegmentnog planarnog manipulatora namenjenog obuci studenata

Rešenje:

% Matrica kinematičkih i dinamičkih parametara E2R manipulatora

```
% alfa a theta d sigma m rx ry rz Ixx Iyy Izz Ixy Iyz Ixz Jm G B Tc+ Tc-
dh_ee2r=[
    0 11 0 0 0 m1 -11/2 0 0 0 (m1*11 (m1*11 0 0 0 J1
    N1 0 0 0
        *11/12) *11/12)
    0 12 0 0 0 m2 -12/2 0 0 0 *m2*12 m2*12 0 0 0 J2
    N2 0 0 0];
        *12/12) *12/12)
```

% Matrica Dinamičkih parametara aktuatora E2R manipulatora

```
% Rr Kem Kme Jm N B U
act_ee2r=[R1 Kem1 Kme1 J1 N1 0 Ur1
          R2 Kem2 Kme2 J2 N2 0 Ur2];
```

Zadatak 5.7

Korišćenjem odgovarajućih funkcija robotics-toolbox-a izračunati nominalno upravljanje robotom E2R ukoliko je poznato da trajanje pokreta iznosi 1 s a vreme diskretizacije iznosi 10 ms. Početni položaj robota definisan je vektorom $q_0=[30 \ -60]*\pi/180$ rad, a završni položaj vektora definisan je vektorom $q_f=[90 \ -30]*\pi/180$ rad.

Rešenje:

Korišćenjem matrica dh_ee2r i act_ee2r izračunaćemo napone na motorima za dati pokret.

```
% Inverzna dinamika
disp('Racunanje nominalnih napona motora - racunanje inverzne
dinamike sa aktuatorima')
```

```
ur=idynact(dh_ee2r, act_ee2r, q, qd, qdd);
```

Izračunavanje direktna dinamika obavlja se po sledećoj proceduri

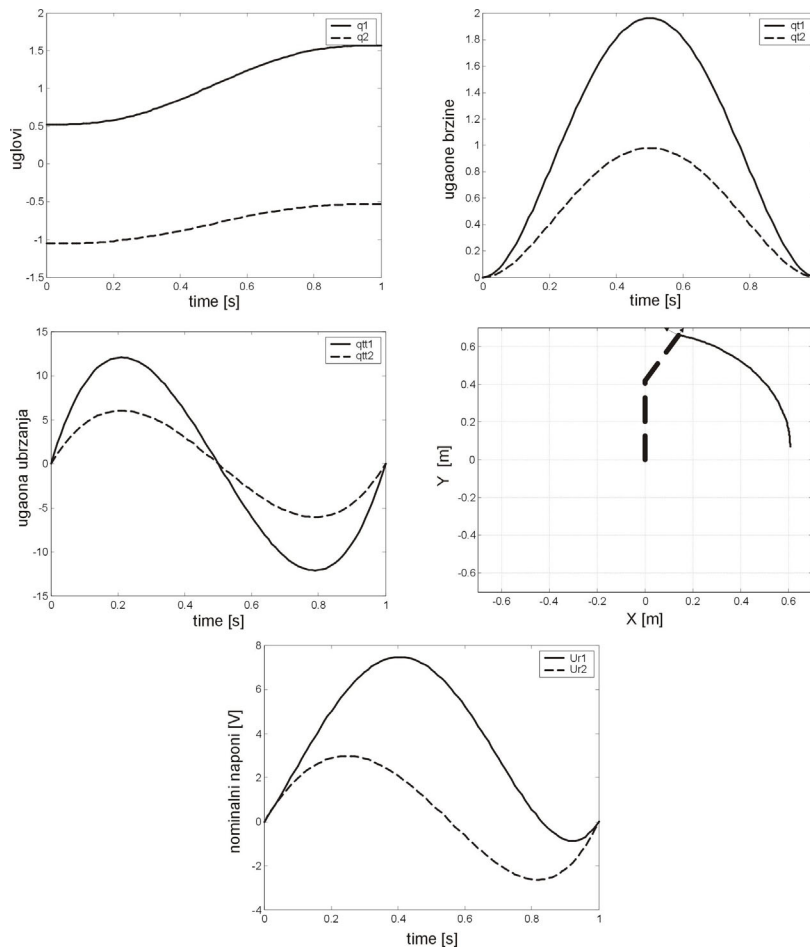
```
t111=t';
taunom=[t111, ur];
qt=[t111, q, qd, qdd];
Pgain=[0 0]; Dgain=[0 0];
qd0=qd(1,:);
ctlanme='nomctl'
global taunom qt Pgain Dgain ctlanme
[tsim, q_os, qd_os]=fdynact(dh_ee2r, act_ee2r, ...
0, tf, 'nomctl', q0, qd0);
q_os=interp1(tsim, q_os, t111);
qd_os=interp1(tsim, qd_os, t111);
plot(t111, q_os-q);
plotbot(ee2rob, q_os);
```

Napon koji se dovodi na motore zadaje se funkcijom `nomctl`. Ova funkcija se koristi za implementaciju upravljačkog algoritma

```
f-os = interp1(tsim, q_os, t111);
```

interpolacija ostvarenih pozicija radi uskladjivanja sa `t111` koristi se ugrađena funkcijaza numeričku integraciju `ode23` (runge-kutte 2-3 reda).

Rezultati su prikazani na slici 37.



Slika 37. Trajektorije u unutrašnjim i spoljašnjim koordinatama i sračunato nominalno upravljanje.

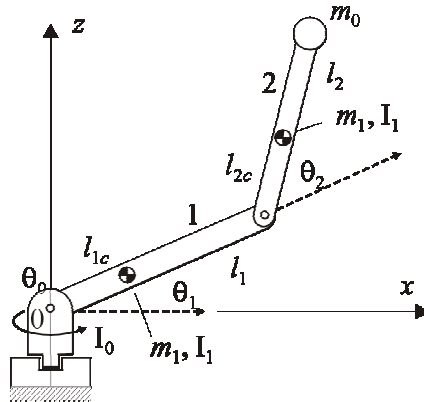
Zadatak 5.8

Izvesi model dinamike antropomorfne minimalne konfiguracije sa slike 38.

Rešenje:

Postupak izvodjenja modela dinamike biće realizovan nezavisnim sračunavanjem momenata za prvi zglob, u odnosu na osnovu, i za druga dva zgloba

koji čine laktasti planarni manipulator u vertikalnoj ravni. Time će se razložiti uticaj različitih parametara konstrukcije manipulatora na model dinamike.



Slika 38. Antropomorfna, RRR minimalna konfiguracija.

Kinetička i potencijalna energija zgloba 0 date su sa:

$$K_0 = I_0 \cdot \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} \quad V_0 = 0$$

Momenat T_{00} koji zglob uz osnovu treba da obezbedi odredjen je Lagranžovom jednačinom

$$T_{00} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K_0}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial K_0}{\partial \theta_0}, \quad \text{ili} \quad T_{00} = I_0 \cdot \ddot{\theta}_0$$

Za segment 1, vektori pozicije \mathbf{r}_{1g} i brzine \mathbf{v}_{1g} centra mase su

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1g} &= l_{1c} \left[(\cos \theta_0 \cdot \cos \theta_1) \mathbf{i} + (\sin \theta_0 \cdot \cos \theta_1) \mathbf{j} + \sin \theta_1 \cdot \mathbf{k} \right] \\ \mathbf{v}_{1g} = \dot{\mathbf{r}}_{1g} &= l_{1c} \left\{ \left[(-\sin \theta_0 \cdot \cos \theta_1) \dot{\theta}_0 + (\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 \right] \mathbf{i} + \right. \\ &\quad \left. + \left[(\cos \theta_0 \cdot \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + (\sin \theta_0 \cdot \sin \theta_1) \dot{\theta}_2 \right] \mathbf{j} - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{j} - (\cos \theta_1) \dot{\theta}_2 \cdot \mathbf{k} \right\} \end{aligned}$$

Kinetička energija prvog segmenta je

$$K_1 = m_1 \frac{v_{1g}^2}{2} + I_1 \frac{\omega_1^2}{2}$$

pri čemu je ugaona brzina

$$\omega_1 = v_{1g} / l_{1c}$$

Kombinacijom prethodnih jednačina dobijamo

$$K_1 = \frac{m_1 l_{1c}^2 + I_1}{2} (\dot{\theta}_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_2^2)$$

Komponente momenata koje motori osnove i ramena treba da ostvare su

$$T_{01} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K_1}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial K_1}{\partial \theta_0} = (m_1 l_{1c}^2 + I_1) (\ddot{\theta}_0 \cos^2 \theta_1 + 2\dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1)$$

$$T_{11} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K_1}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial K_1}{\partial \theta_1} = (m_1 l_{1c}^2 + I_1) (\ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_0^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1)$$

U prethodnim jednačinama izraza $(m_1 l_{1c}^2 + I_1) \cos^2 \theta_1$, predstavlja inerciju prvog segmenta u odnosu na vertikalnu osu Z. Ova inercije, pomožena sa ugaonim ubrzanjem segmenta uz osnovu daje moment potreban da se ostvari to ubrzanje. Drugi član je koriolisova sila koji nestaje pri nultim brzinama drugog i trećeg zgloba. Ovaj član je ekvivalentan efektu povećanja rotacionog ubrzanja oko vertikalne ose koji klizač na ledu postiže skupljajući ispružene ruke. Prvi član druge jednačine definiše moment potreban da se ubrza segment 1 sa inercijom $(m_1 l_{1c}^2 + I_1)$ u odnosu na osu zgloba 1. Drugi član je centrifugalna sila koja ukazuje na tendenciju zauzimanja horizontalnog položaja segmenta koji rotira oko vertikalne ose.

Za segment 2, masa je $m_2 = m'_2 + m_0$ a inercija I_1 definisana je oko ose normalne na segment, postavljene kroz centar mase segmenta.

Položaj vektora drugog centra mase drugog segmenta u odnosu na O_1 je

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{2g} = & \cos \theta_0 [l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{i} + \\ & + \sin \theta_0 [l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{j} + \\ & + l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_{2c} \sin(\theta_1 + \theta_2) \mathbf{k} \end{aligned}$$

dok je vektor brzine

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{2g} = \dot{\mathbf{r}}_{2g} = & \left\{ -\left[l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \dot{\theta}_0 \sin \theta_0 + \right. \\ & \left. + \left[l_1 \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_1 + l_{2c} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \right] \cos \theta_0 \right\} \mathbf{i} \\ & + \left\{ \left[l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \dot{\theta}_0 \cos \theta_0 + \left[l_1 \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_1 + l_{2c} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \right] \sin \theta_0 \right\} \mathbf{j} \\ & + \left[-l_1 \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1 - l_{2c} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \mathbf{k} \end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{2g}^2 = \mathbf{v}_{2g} \cdot \mathbf{v}_{2g} = & \left[l_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1 + 2l_1 l_{2c} \cos \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{2c}^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) \right] + \\ & l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_{2c} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + l_{2c}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \times \cos^2 \theta_2 + l_{2c}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{aligned}$$

Moduo ugaone brzine drugog segmenta je

$$\omega_3 = \left| \mathbf{v}_{2g} - \frac{l_1}{l_{1c}} \mathbf{v}_{1g} \right| / l_{2c}$$

gde je $\left(\frac{l_1}{l_{1c}} \right) \mathbf{v}_{1g}$ brzina zgloba između segmenata 1 i 2. Sredjivanjem, dobija se

$$\omega_3 = \left(\mathbf{v}_{2g} - \frac{l_1}{l_{1c}} \mathbf{v}_{1g} \right) \cdot \left(\mathbf{v}_{2g} - \frac{l_1}{l_{1c}} \mathbf{v}_{1g} / l^2 \right) = \dot{\theta}_0 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

Pa je kinetička energija drugog segmenta

$$\begin{aligned} K_2 = \frac{1}{2} \left\{ m_2 \left[l_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1 + 2l_1 l_{2c} \cos \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{2c}^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) \right] \dot{\theta}_0^2 + \right. \\ \left. + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_{2c} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + \right. \\ \left. + (m_2 l_{2c}^2 + I_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \right\} \end{aligned}$$

a momenti motora u zglobovima 0, 1, i 2 potrebnih da podrže kretanje segmenta 2 su, respektivno,

$$\begin{aligned}
T_{02} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K_2}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial K_2}{\partial \theta_0} = \\
&= \left\{ m_2 \left[l_1^2 \cos^2 \theta_1 + 2l_1 l_{2c} \cos \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] + (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \cos^2(\theta_1 + \theta_2) \right\} \ddot{\theta}_0 + \\
&2 \left\{ m_2 \left[l_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + l_1 l_{2c} \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] + (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right\} \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \\
&2 \left[m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{12} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K_2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial K_2}{\partial \theta_1} = (m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_2 + m_2 l_{2c}^2 + I_2) \ddot{\theta}_1 + \\
&+ (m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_2 + m_2 l_{2c}^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 - \\
&- \left\{ m_2 \left[l_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + l_1 l_{2c} \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 l_{2c} \cos \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \right. \right. \\
&\left. \left. + l_{2c}^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \right\} + \\
&+ I_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_0^2 + \\
&+ (m_2 l_1 l_{2c} \sin \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (2m_2 l_1 l_{2c} \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{22} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K_2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial K_2}{\partial \theta_2} = (m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_2 + m_2 l_{2c}^2 + I_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_{2c} + I_2) \ddot{\theta}_2 - \\
&\left\{ m_2 \left[l_1 l_{2c} \cos \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_{2c}^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] + \right. \\
&\left. I_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right\} \dot{\theta}_0^2 - (m_2 l_1 l_{2c} \sin \theta_2) \dot{\theta}_2^2
\end{aligned}$$

Komponente momenata usled gravitacije izračunavaju se iz izraza za potencijalnu energiju

$$V = g \left\{ m_1 l_{1c} \sin \theta_1 + m_2 \left[l_1 \sin \theta_1 + l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \right\}$$

Shodno tome, gravitacione komponente u aktuatorima zglobova 1 i 2 su

$$T_{1g} = - \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = g \left\{ m_1 l_{1c} \cos \theta_1 + m_2 \left[l_1 \cos \theta_1 + l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \right\}$$

$$T_{2g} = - \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = g \left[m_2 l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \right]$$

Ove statičke komponente dodaju se komponentama usled kretanja pa se ukupni momenti zglobova 0, 1 i 2 dobijaju kao suma prethodno izvedenih izraza za momente (T_0, T_1, T_2)

$$\begin{aligned}
T_0 &= T_{00} + T_{01} + T_{02} = \\
&= \{I_0 + (m_1 l_{1c}^2 + I_1) \cos^2 \theta_1 + m_2 l_1 [l_1 \cos \theta_1 + 2 l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2)] \cos \theta_1\} + \\
&\quad (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \ddot{\theta}_0 + 2 \{ (m_1 l_{1c}^2 + I_1) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \\
&\quad + m_2 l_1 [l_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + l_{2c} \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)] + \\
&\quad (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \} \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \\
&\quad + 2 [m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)] \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 \\
T_1 &= T_{11} + T_{12} + T_{1g} = \\
&= (m_1 l_{1c}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + 2 m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_2 + m_2 l_{2c}^2 + I_2) \ddot{\theta}_1 + \\
&\quad + (m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_2 + m_2 l_{2c}^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 - \{ (m_1 l_{1c}^2 + I_1) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \\
&\quad + m_2 [l_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + l_1 l_{2c} \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{2c}^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)] + \\
&\quad I_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \} \dot{\theta}_0^2 + (m_2 l_1 l_{2c} \sin \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (2 m_2 l_1 l_{2c} \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\
&\quad + g \{ m_1 l_{1c} \cos \theta_1 + m_2 [l_1 \cos \theta_1 + l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2)] \} \\
T_2 &= T_{22} + T_{2g} = (m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_2 + m_2 l_{2c}^2 + I_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 - \\
&\quad - \{ m_2 [l_1 l_{2c} \cos \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_{2c}^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)] + \\
&\quad + I_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \} \dot{\theta}_0^2 \\
&\quad - (m_2 l_1 l_{2c} \sin \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + g [m_2 l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2)]
\end{aligned}$$

Konačno, model dinamike je izveden. Razmotrimo mogućnosti pojednostavljenja mehanike modifikacijom dizajna.

Prvo, uticaj nelinearnih gravitacionih članova može biti umanjen statičkim uravnoteženjem segmenata 1, da bi se postiglo $l_{1c} = 0$ i $l_{2c} = 0$. Kod prvog segmenta primena statičkog uravnoteženja je jednostavnija nego kod drugog s obzirom na činjenicu da je masa drugog segmenta relativno srazmerna korisnom teretu koji robot nosi. Ukoliko je ostvareno idealno rešenje $l_{1c} = 0$ i $l_{2c} = 0$, jednačine momenata su

$$T_0 = \left[I_0 + I_1 \cos^2 \theta_1 + I_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \ddot{\theta}_0 + \\ + 2 \left[I_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \right. \\ \left. + I_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \\ + 2 I_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2$$

$$T_1 = \left(I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 \right) \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 - \\ - \left[I_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + I_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \dot{\theta}_0^2 + \\ + g(m_2 l_1 \cos \theta_1)$$

$$T_2 = I_1 \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 - \left[I_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \dot{\theta}_0^2$$

Zadatak 5.9¹²

Dat je dvosegmentni laktasti manipulator, slika 32, u vertikalnoj ravni. Definisana je dužinama segmenata $a_i = 1\text{m}$, položajima centara masa $l_{c_i} = 0.5\text{m}$, momentima inercija segmenata za ose rotacije u zglobovima $I_{l_i} = 10$; masama segmenata $m_i = 50\text{kg}$, masama $m_{mi} = 5\text{kg}$ i momentima inercija motora $I_{m_i} = 0.01$ i prenosnim odnosima reduktora $k_{ri} = 100$. Odrediti pogonske momente motora za tri različite trajektorije.

a. Oba zgloba rotiraju za po $\pi/2$, u trajanju od 0.5 s; ugaone brzine imaju trougaoni profil,

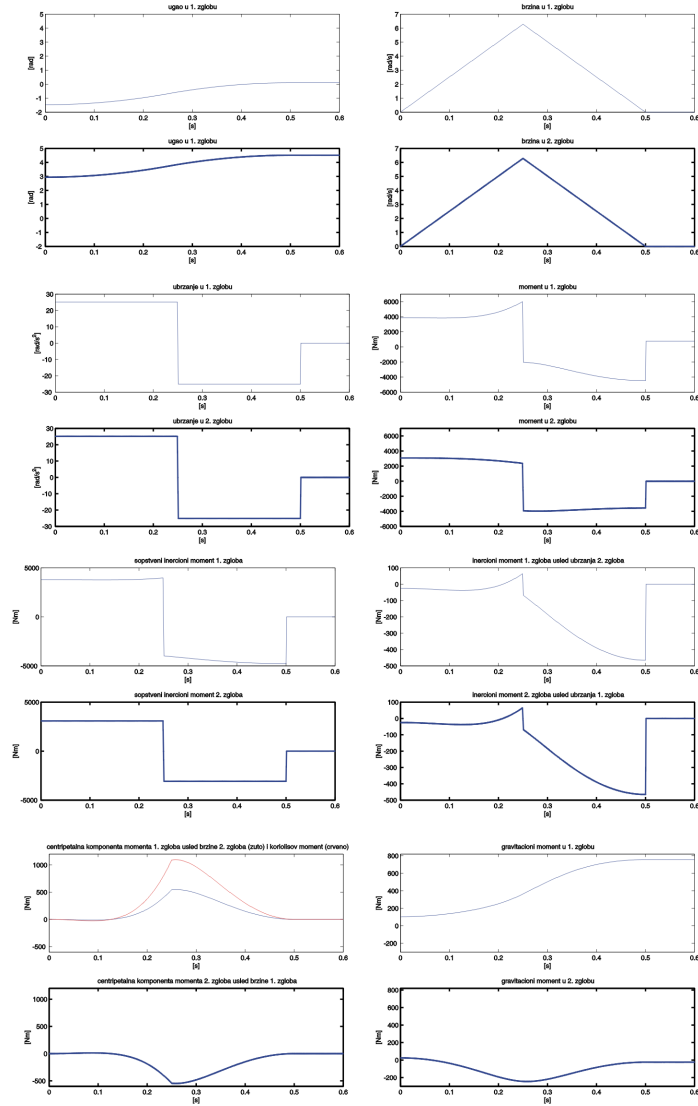
b. Oba zgloba rotiraju tako da vrh robota prevode iz tačke $x_i = [0.2; 0]$; u tačku $x_f = [1.8; 0]$; u trajanju od 0.66 s; profil brzine je trapeznog oblika; trajanje vremena ubrzanja/usporenja je 0.15 s a brzina krstarenja ograničena je na 5 rad/s.

c. Vrh robota kreće se pravolinijski od $x_i = [0.2; 0]$; do $x_f = [1.8; 0]$; u trajanju 0.6 s; profil brzine je trapeznog oblika; trajanje vremena ubrzanja/usporenja je 0.15 s a brzina krstarenja ograničena je na 5 rad/s.

¹² dan3

Rešenje:

Simulacioni skript može se naći u fajlovima dan3a.m, dan3b.m i dan3c.m. Rezultati su prikazani na skupovima dijagrama 39, 40, 41.

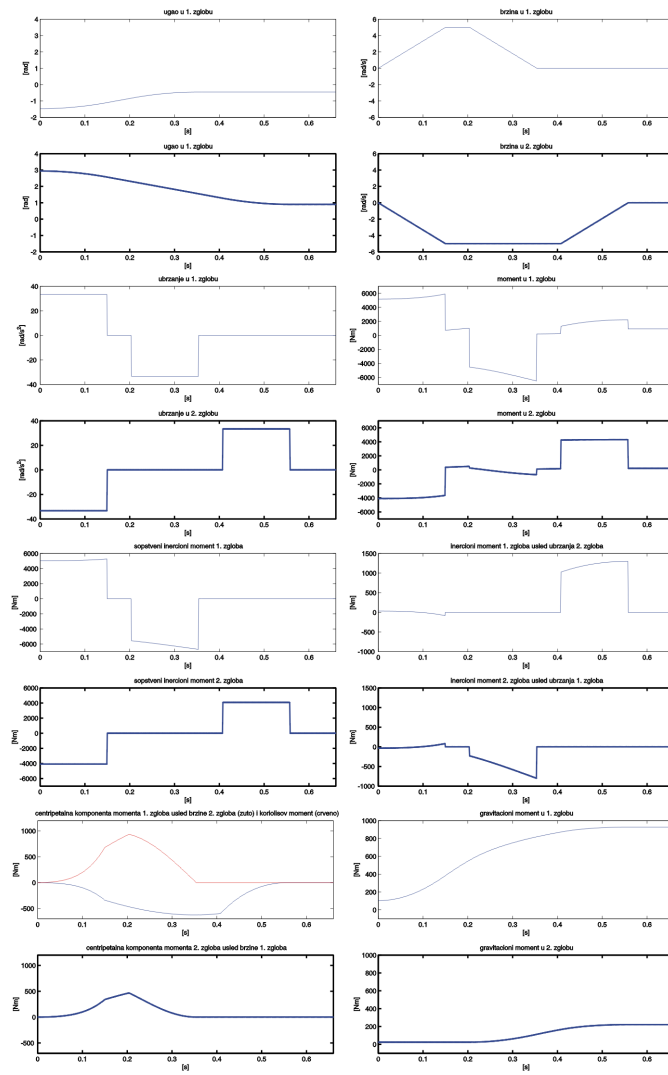


Slika 39. Trougaoni profili brzine za trajektoriju a)

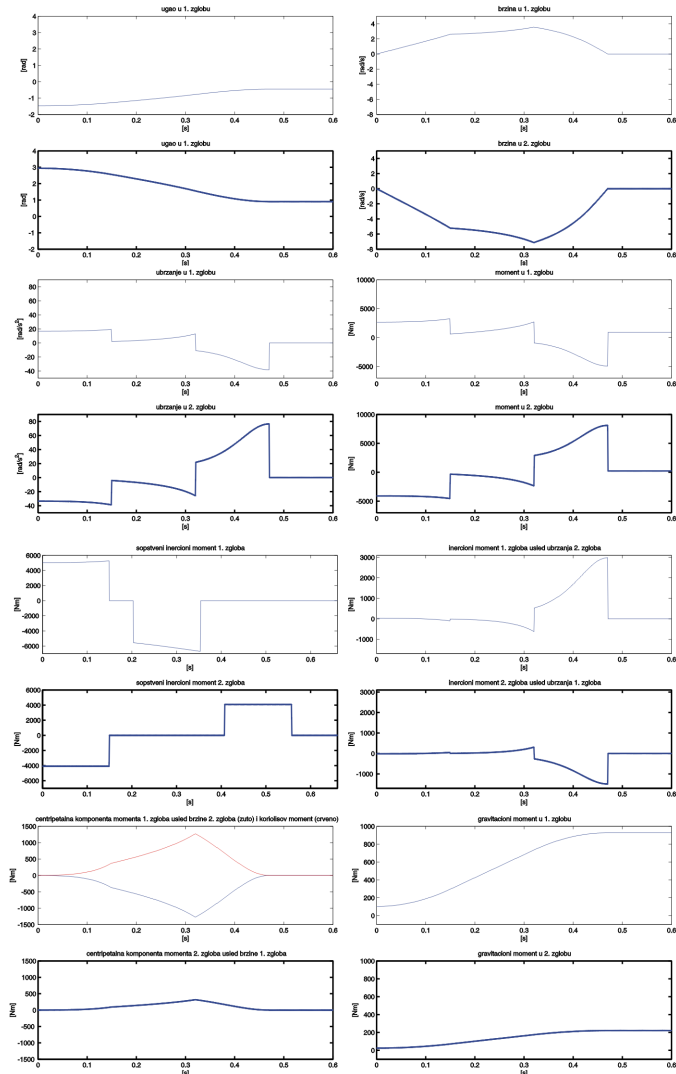
Sa slike 39 uočavamo da inercijalni element prvog zgloba prati oblik ubrzanja u prvom zglobu. Usled konstantnog sopstvenog momenta inercije drugog zgloba, sopstveni inercijalni element drugog zgloba je takodje konstantan za odgovarajuću vrednost ugaonog ubrzanja drugog zgloba. Inercioni elementi usled sprežanja prvog i drugog zgloba su jednaki što je obezbedjeno trajektorijom. Koriolisovi efekti su prisutni samo u prvom zglobu jer se vrh robota kreće u odnosu na koordinatni sistem vezan za centar mase prvog segmenta dok je nepokretan u odnosu na koordinatni sistem vezan za centar mase drugog segmenta. Konačno, centrifugalni efekti u prvom i drugom zglobu su simetrični jer je $\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_2(t)$.

Kako su zadatkom definisana jednaka ubrzanja, unakrsni (sprežni) linearni momenti imaju suprotne vrednosti u delu kretanja kada oba ubrzanja imaju istu vrednost a suprotnog su znaka, slika 40. Trapezni profili brzina u prvom i drugom zglobu traju različito što dovodi do toga da centrifugalne komponente momenta u prvom zglobu, usled brzine kretanja drugog zgloba traju duže nego centrifugalna komponenta momenta u drugom zglobu usled kretanja u prvom zglobu.

Dijagrami brzina i ubrzanja u zglobovima, kao i komponente momenata, slika 41, razlikuju se od dijagrama koji odgovaraju trajektorijama prvog i drugog, što je posledica nelinearne veze koja postoji između uglova u zglobovima i kretanja vrha robota.



Slika 40. Trapezni profili brzine za trajektoriju pod b)



Slika 41. Dijagrami za trajektoriju pod c)

Zadatak 5.10

Izvršiti simulaciju robota PUMA 560 u zadatku praćenja pravolinijske trajektorije koja polazi iz tačke:

$$(x_i, y_i, z_i) = [0.4, 0.1, 0.2]$$

po trapeznom profilu brzine sa vremenom ubrzanja/usporenja od 20% ukupnog zadatog vremena, i dolazi u tačku:

$$(x_f, y_f, z_f) = [0.2, 0.2, -0.25]$$

za vreme od $T=3s$.

Dinamički parametri manipulatora PUMA560 su dati u tabeli.

m [kg]	rx [m]	ry [m]	rz [m]	Ixx [kgm ²]	Iyy [kgm ²]	Izz [kgm ²]
0	0	0	0	0	0.35	0
17.4	-.3638	.006	.0774	.13	.524	.539
4.8	0	-.014	.070	.066	.086	.0125
0.82	0	.019	0	1.8e-3	1.3e-3	1.8e-3
0.34	0	0	0	.3e-3	.4e-3	.3e-3
m6	0	0	.032	.15e-3/.09*m6	.15e-3/.09*m6	.04e-3/.09*m6

Ixy [kgm ²]	Iyz [kgm ²]	Ixz [kgm ²]	Jm [kgm ²]	G	B	Tc+	Tc-
0	0	0	200e-6	-62.6111	1.48e-3	.395	-.435
0	0	0	200e-6	107.815	.817e-3	.126	-.071
0	0	0	200e-6	-53.7063	1.38e-3	.132	-.105
0	0	0	33e-6	76.0364	71.2e-6	11.2e-3	-16.9e-3
0	0	0	33e-6	71.923	82.6e-6	9.26e-3	-14.5e-3
0	0	0	33e-6	76.686	36.7e-6	3.96e-3	-10.5e-3;

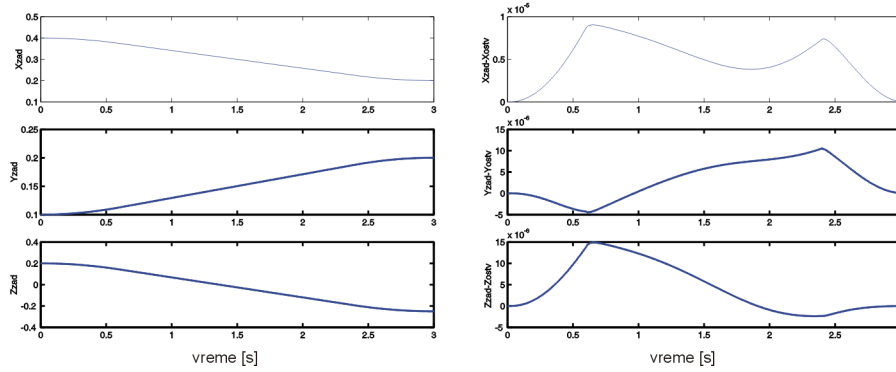
Dinamički parametri motora su:

```
% Dinamicki parametri modela motora
%      R      Kem      Kme      J      N      B      U
motdyn=[1.1 0.034 0.034 0.00132 62.6111 0.0001 20
         1.1 0.034 0.034 0.00132 107.815 0.0001 20
         1.1 0.034 0.034 0.00132 53.7063 0.0001 20
         1.1 0.034 0.034 0.00132 76.0364 0.0001 20
         1.1 0.034 0.034 0.00132 71.9230 0.0001 20
         1.1 0.034 0.034 0.00132 76.6860 0.0001 20];
```

Za simulaciju dinamike koristiti PD regulator.

Rešenje:

Trajektorija je definisana sa:



Slika 42. Trajektorije u radnom prostoru (levo) i greške dobijene rešavanjem inverzne kinematike (desno).

PD regulator je podešen na maksimalnom momentu inercije po svakom zglobu za datu trajektoriju

```
J_i_max = [ 2.7471    4.1218    0.9373    0.1926    0.1713
0.1941];
```

i za struktrunu rezonantnu frekvenciju u svakom zglobu

```
w0_i = 157 % rad/s
```

Primenom relacije

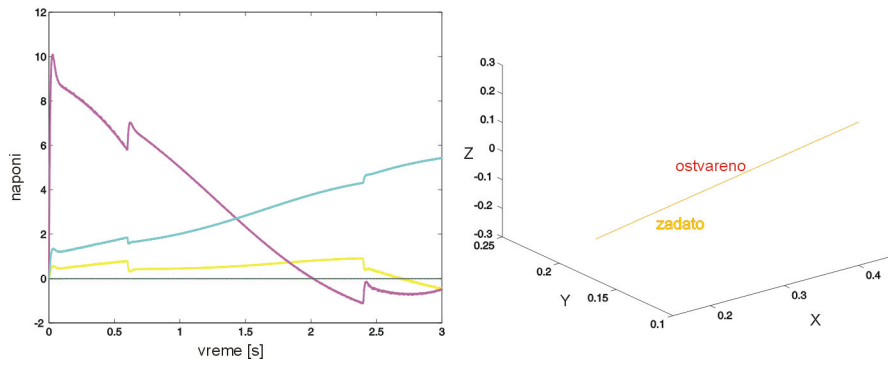
```
Pgain=(J.*(w.^2)).*(motdyn(:,1)') ./ (motdyn(:,5)') ./ (motdyn(:,2)') /4
Dgain=2*sqrt(Pgain)
```

dobijena su pojačanja

```
Pgain = 1.0e+003 [ 8.7472    7.6219    3.4796    0.5050    0.4750
0.5046];
Dgain = [ 187.0532  174.6068  117.9761  44.9463  43.5876
44.9279];
```

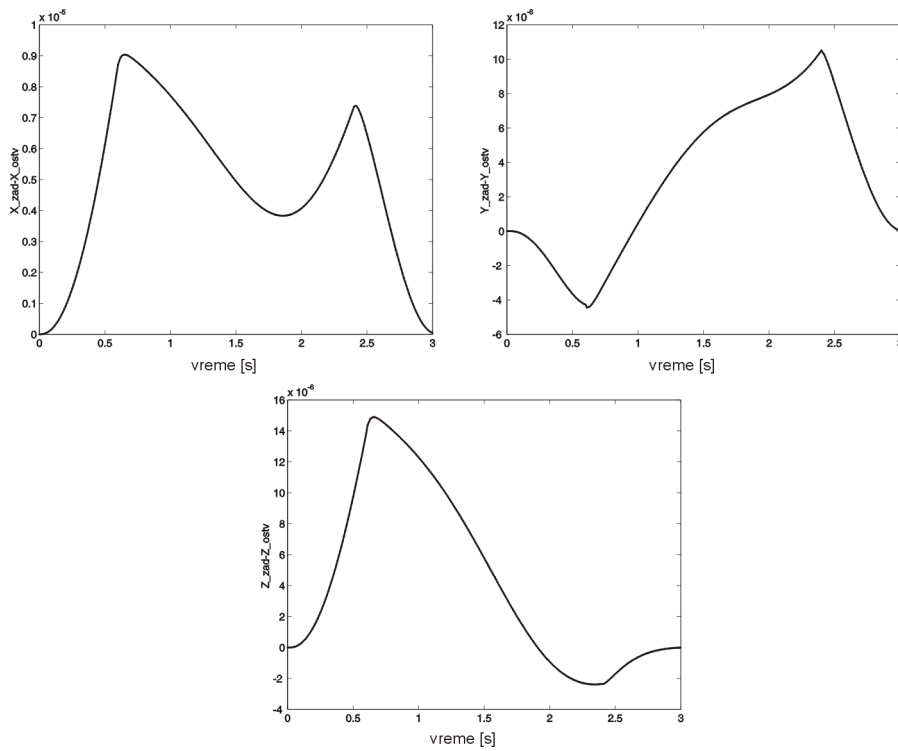
Dinamička simulacija daje sledeće napone aktuatora

```
% Izracunavanje greske u untrasnjim koordinatama
e_din=q_dmd-q_r;
ed_din=qd_dmd-qd_r;
% Izracunavanje upravljackog napona PD regulatora
uls=e_din * diag(Pgain) + ed_din * diag(Dgain);
```



Slika 43. Naponi aktuatora prva tri motora i ostvarena i zadata trajektorija u radnom prostoru (skoro potupno poklapanje).

kao i greške u spoljašnjim koordinatama



Slika 44. Greške u spoljašnjim koordinatama, posle simulacije dinamike.

Zadatak 5.11

Robot PUMA560 opisuje polukružnu putanju sa centrom u $(x_0, y_0, z_0) = (50, 0, 40) \text{ cm}$, poluprečnika 20 cm. Koriste se samo prva tri motora. Kretanje započinje u tački A: $(50, 0, 20) \text{ cm}$, i prati trougaoni profil intenziteta brzine do tačke C: $(50, 0, 60) \text{ cm}$, preko tačke B: $(70, 0, 40) \text{ cm}$. Trajanje pokreta iznosi 3s. Dinamički parametri robota i motora su dati u tabeli.

m	rx	ry	rz	Ixx	Iyy	Izz
[kg]	[m]	[m]	[m]	[kgm ²]	[kgm ²]	[kgm ²]
0	0	0	0	0	0.35	0
17.4	-.3638	.006	.0774	.13	.524	.539
4.8	0	-.014	.070	.066	.086	.0125
0.82	0	.019	0	1.8e-3	1.3e-3	1.8e-3
0.34	0	0	0	.3e-3	.4e-3	.3e-3
m6	0	0	.032	.15e-3/.09*m6	.15e-3/.09*m6	.04e-3/.09*m6

Ixy	Iyz	Ixz	Jm	G	B	Tc+	Tc-
[kgm ²]	[kgm ²]	[kgm ²]	[kgm ²]				
0	0	0	200e-6	-62.6111	1.48e-3	.395	-.435
0	0	0	200e-6	107.815	.817e-3	.126	-.071
0	0	0	200e-6	-53.7063	1.38e-3	.132	-.105
0	0	0	33e-6	76.0364	71.2e-6	11.2e-3	-16.9e-3
0	0	0	33e-6	71.923	82.6e-6	9.26e-3	-14.5e-3
0	0	0	33e-6	76.686	36.7e-6	3.96e-3	-10.5e-3];

	R	Kem	N	Jm	B	Unom
motor 1	0.176	0.08	62.6111	1.46e-4	0	24
motor 2	0.176	0.08	107.815	1.46e-4	0	24
motor 3	1.35	0.1	53.7063	1.22e-4	0	24
motor 4	1.35	0.1	76.0364	1.22e-4	0	24
motor 5	1.89	0.06	71.9230	6.62e-5	0	24
motor 6	1.89	0.06	76.6860	6.62e-5	0	24

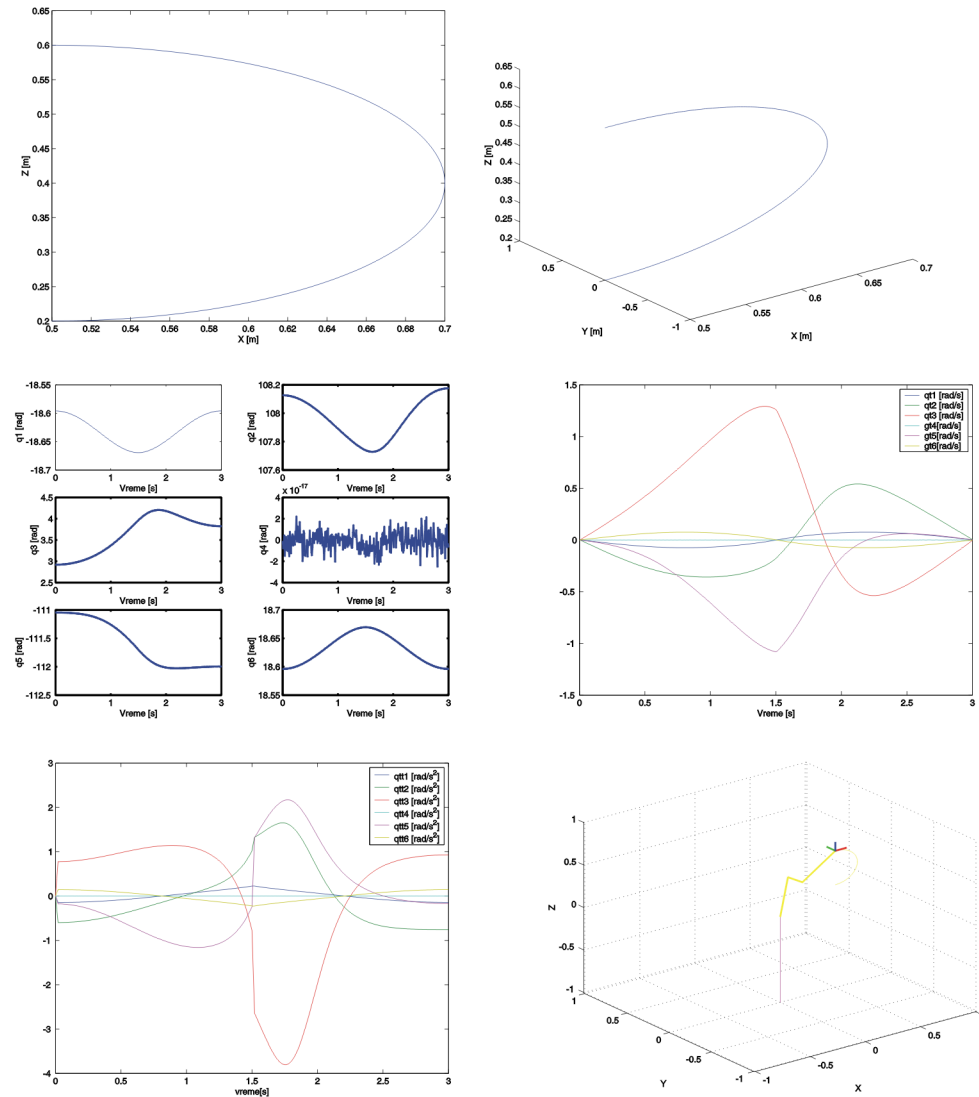
Izračunati inverznu kinematiku i uporedi greške dobijene u rešenju za trajektoriju u radnom prostoru. Izračunati napone motora potrebne da se ostvari dati pokret. Odrediti pojačanja PD regulatora u zglobovima. Numeričkom integracijom modela robota sa regulatorima simulirati zadati pokret i uporediti dobijenu trajektoriju sa zadatom. Uvesti kompenzaciju gravitacije. Simulacijom robota sa upravljačkom šemom na bazi kompenzacije gravitacije proveriti kvalitet upravljanja.

Rešenje:

DH parametri robota dati su u tabeli.

alpha	A	theta	D	sigma
$\pi/2$	0	0	0	0
0	.4318	0	0	0
$-\pi/2$.0203	0	.1254	0
$\pi/2$	0	0	.4318	0
$-\pi/2$	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Trajektorija u radnom prostoru kao i trajektorije, brzine i ubrzanja u unutrašnjim koordinatama date su na slici 45.



Slika 45. Inverzna kinematika i simulacija robota PUMA560.

Rešenje inverzne kinematike daje greške u spoljašnjim koordinatama

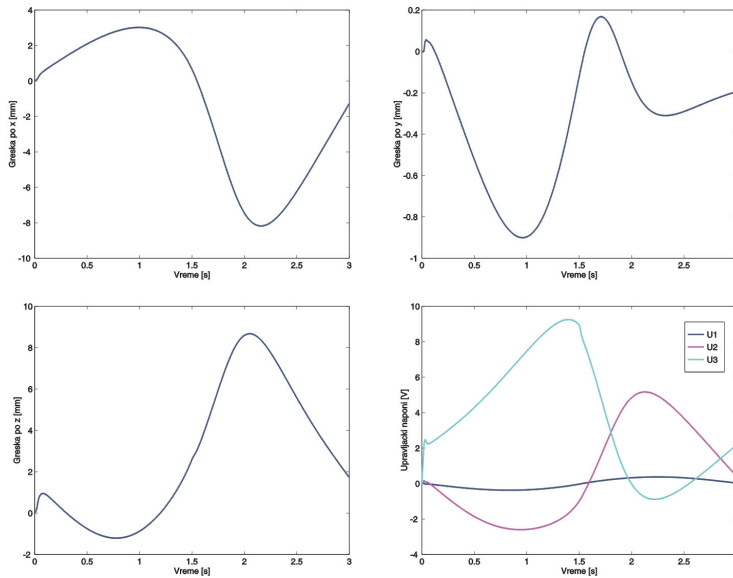
Model dinamike aktuatora je preuzet iz tabele date zadatkom. PD regulatori podešeni su na bazi procenjenih maksimalnih inercija duž zadate trajektorije i strukturne rezonantne frekvencije.

$$J = [2.8672 \quad 5.0577 \quad 0.9392 \quad 0.1926 \quad 0.1713 \quad 0.194]; \quad \% J_max$$

$$w = [70 \quad 100 \quad 100 \quad 100 \quad 50 \quad 50]; \quad \% \text{ Strukturne rez. frekv.}$$

```
Pgain = [148.0494 344.5856 811.3697 398.5831 140.6414 149.7780];
Dgain = [3.4511 5.1582 27.0842 8.3397 6.9359 7.3811];
```

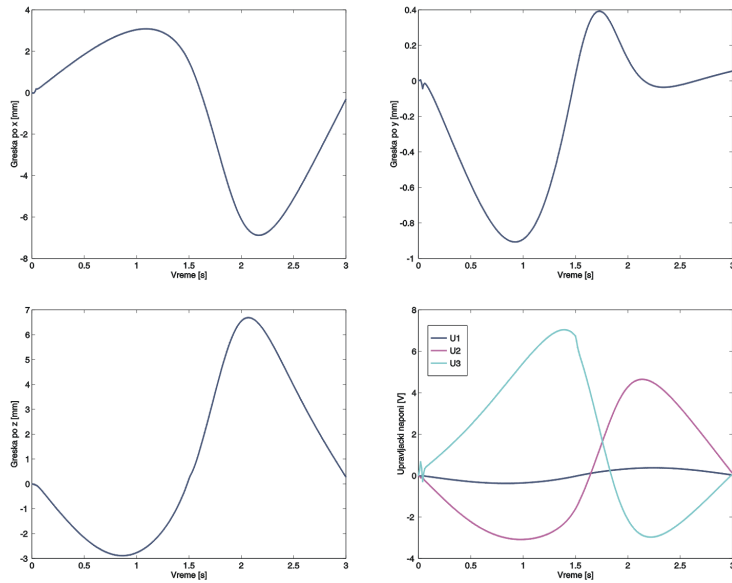
Poznajući kretanje u prostoru stanja, pojačanja regulatora i dinamiku robota i aktuatora, numerička integracija dinamičkog modela robota daje sledeći rezultat.



Slika 46. Trajektorije robota PUMA560 u zadatku praćenja trajektorije bez kompenzacije gravitacionog opterećenja.

Uvedimo kompenzaciju gravitacije (Siciliano i Sciavico, 2000), koristeći ista pojačanja PD regulatora. Po simulaciji dobijaju se sledeći dijagrami grešaka po radnim koordinatama i pogonski naponi.

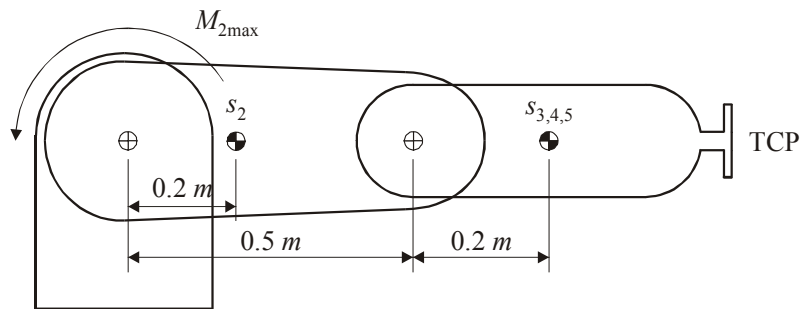
Uočavamo da se greška po kritičnoj osi, Oz , smanjila za približno 20%. To je postignuto modifikacijom nominalnog napona na samom početku putanje, kada se od trećeg motora nije zahtevalo da obezbedi veliki trzaj.



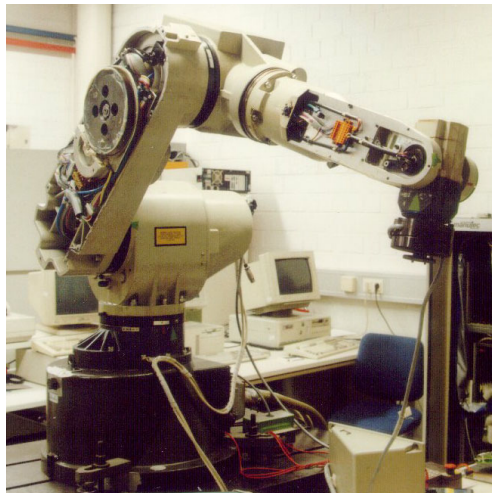
Slika 47. Trajektorije robota PUMA560 u zadatku praćenja trajektorije sa kompenzacijom gravitacije.

Zadatak 5.12

Odrediti momente držanja u drugom i trećem zglobu Manutec-r3 robota. Smatrati da je masa drugog segmenta, sa masom rotora drugog motora, ukupno 57 kg, skoncentrisana u tački s_2 , na 0.2 m od ose rotacije, duž ose drugog segmenta, dok su mase trećeg, četvrtog i petog segmenta, sa trećim, četvrtim i petim motorom, ukupno 61 kg, skoncentrisane na 0.2 m od ose rotacije trećeg zgloba duž ose trećeg segmenta. Odrediti maksimalan momenat držanja.



Slika 48. Procena maksimalnog momenta držanja u drugom i trećem zglobu Manutec r-3



Slika 49. Fotografija Manutec r-3 sa delimično skinutom oplatom drugog i četvrtog segmenta

Rešenje:

Maksimalan moment držanja očekuje se kada su drugi, treći, četvrti i peti segment robota paralelni sa osnovom. Tada je:

- za drugu osu

$$M_{2\max} = [61\text{kg} \cdot (0.5\text{m} + 0.2\text{m}) + 57\text{kg} \cdot 0.2\text{m}] \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 531\text{Nm}$$

Reduktor primenjen u drugom zglobu ima prenosni odnos 210, što daje maksimalan moment držanja motora od

$$M_{2mot_{\max}} = \frac{531Nm}{210} = 2.5Nm$$

- za treću osu

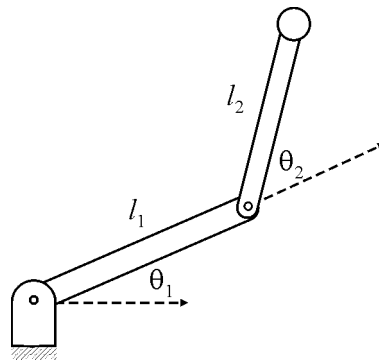
$$M_{3_{\max}} = 61kg \cdot 0.2m \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 120Nm$$

Reduktor primenjen u drugom zglobu ima prenosni odnos 60, što daje maksimalan moment držanja motora od

$$M_{2mot_{\max}} = \frac{120Nm}{60} = 2Nm$$

Zadatak 5.13-1

Dat je laktasti manipulator sa dva stepena slobode dužina segmenata po 1 m, slika 50. Početni položaj određen je pozicijom vrha manipulatora $[0.2; 0]$ m. Primenom MATLAB funkcije `inv_k2d.m` odrediti početni položaj manipulatora u unutrašnjim koordinatama i simulirati pokret od 0.6 s, sa vremenom diskretizacije od 1 ms. Pokret nastaje simultanom rotacijom oba zgloba za $\pi/2$, sa trapeznim profilom brzine u trajanju od 0.5 s. Kretanje je ograničeno maksimalnom brzinom od $2\pi \frac{rad}{s}$ po zglobu. Prikazati trajektorije u unutrašnjem koordinatnom sistemu.



Slika 50. Dvosegmentni planarni manipulator

Rešenje:

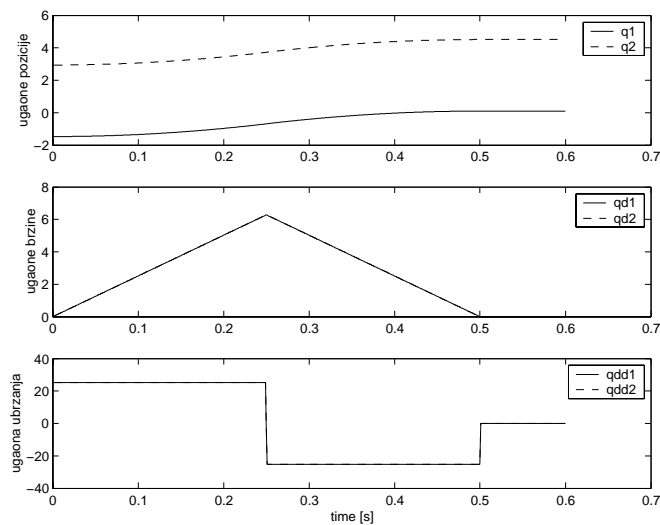
Sledeći matlab skript predstavlja delimično rešenje zadatka.

```
% duzine segmenata
a = [1;1];
% polazna pozicija vrha
x_i = [0.2;0];
% polazna pozicija zglobova
q_i = inv_k2d(a,x_i);
% vreme odabiranja
Ts = 1e-3;
% trajanje
t_d = 0.6;
% vektor vremenskih odbiraka
time = 0:Ts:t_d;
% parametri trajektorije
dq_M = 2*pi; % maximum velocity
Delta_q = 0.5*pi; % joint total variation
t_f = 0.5; % final time
% trougaoni profil brzine trajektorije od 0 do Delta_q
[T,q_t,dq_t,ddq_t,err]=trapez(0,Delta_q,dq_M,t_f,Ts);
% trajektorija u unutrašnjem prostoru u trajanju od t_d sec
n = size(time,2);
m = size(T,1);
q = zeros(2,n);
dq = q;
ddq = q;
% pozicija
q_ta = [q_t; Delta_q*ones(n-m,1)];
q(1,:) = q_i(1)*ones(1,n) + q_ta';
q(2,:) = q_i(2)*ones(1,n) + q_ta';
% brzina
dq(1,1:m) = dq_t';
dq(2,1:m) = dq(1,1:m);
% ubrzanje
ddq(1,1:m) = ddq_t';
ddq(2,1:m) = ddq(1,1:m);
```

Neki medjurezultati su

```
q_i = [ -1.4706; 2.9413];
```

Rezultat simulacije daje trajektoriju trapeznog profila intenziteta brzine, slika 51.



Slika 51. Trajektorija sa trougaonim profilom intenziteta brzine.

Zadatak 5.14

Dat je laktasti manipulator sa dva stepena slobode dužina segmenata po 1 m. Početni položaj određen je pozicijom vrha manipulatora $x_i = [0.2; 0]$ m. Položaj vrha na kraju kretanja određen je vektorom: $x_f = [1.8; 0]$ m. Primenom funkcije `inv_k2d.m` odrediti početni i završni položaj u unutrašnjim koordinatama i simulirati pokret od 0.66 s, sa vremenom diskretizacije od 1 ms. Pokret nastaje simultanom rotacijom oba zglobova za $\pi/2$, sa trapeznim profilom brzine u trajanju od 0.5 s. Kretanje je ograničeno maksimalnom brzinom od $5 \frac{rad}{s}$ po zglobovima, a vreme trajanja ubrzanja/usporenja iznosi 0.15 s. Prikazati zahtevane trajektorije u unutrašnjem koordinatnom sistemu.

Rešenje:

Delimično rešenje dato je sledećim MATLAB skriptom.

```
% duzina segmenata
a = [1;1];
% polazna pozicija vrha
x_i = [0.2;0];
```

```

% polazna pozicija zglobova
q_i = inv_k2d(a,x_i);
% završna pozicija vrha
x_f = [1.8;0];
% završna pozicija zglobova
q_f= inv_k2d(a,x_f);
% vreme odabiranja
Ts = 1e-3;
% trajanje
t_d = 0.66;
% vektor vremenskih odbiraka
time = 0:Ts:t_d;
% generisanje trajektorije
n = size(time,2);
q = zeros(2,n);
dq = q;
ddq = q;
% parametri trajektorije za zglob 1
dq_M = 5; % maksimalna brzina
t_a = 0.15; % trajanje ubrzanja
t_f = abs(q_f(1)-q_i(1))/dq_M + t_a; % vreme trajanja
% trapezni profil brzine za zglob 1
[T,q_t,dq_t,ddq_t,err]=trapez(q_i(1),q_f(1),dq_M,t_f,Ts);
% trajektorija u unutrašnjem prostoru u trajanju od t_d sec za zglob
1
m = size(T,1);
q(1,:) = [q_t' q_f(1)*ones(1,n-m)];
dq(1,1:m) = dq_t';
ddq(1,1:m) = ddq_t';

clear T dq_t dq_t ddq_t
% parametri trajektorije zglboa 2
dq_M = 5; % maximum velocity
t_a = 0.15; % acceleration time
t_f = abs(q_f(2)-q_i(2))/dq_M + t_a; % final time
% trapezni profil brzine zgloba 2
[T,q_t,dq_t,ddq_t,err]=trapez(q_i(2),q_f(2),dq_M,t_f,Ts);
% trajektorija u unutrašnjem prostoru u trajanju od t_d sec za zglob
2
m = size(T,1);
q(2,:) = [q_t' q_f(2)*ones(1,n-m)];
dq(2,1:m) = dq_t';
ddq(2,1:m) = ddq_t';

```

Neki medjurezultati su:

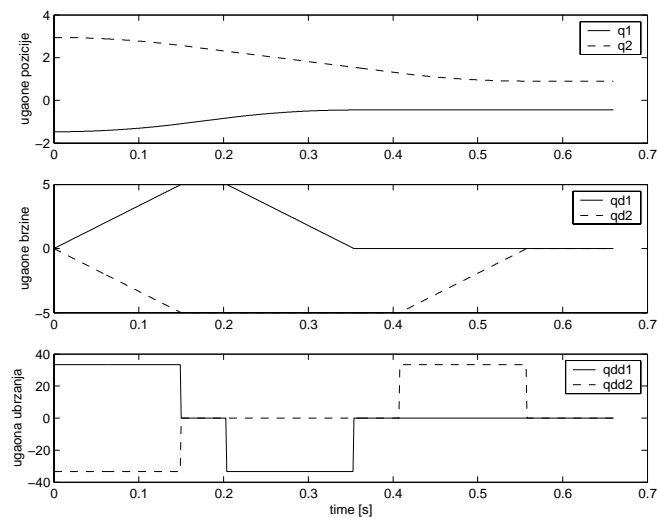
inicijalna pozicija u unutrašnjim koordinatama

```
q_i = [ -1.4706; 2.9413] rad;
```

a završna pozicija u unutrašnjim koordinatama

```
q_f = [-0.4510; 0.9021] rad;
```

Zahtevana trajektorija trapeznog profila data je na sledećoj slici



Zadatak 5.15

Za podatke iz zadatka 3.1. odrediti način aktiviranja zglobova tako da se obezbedi pravolinijska trajektorija vrha robota između tačaka A_0 i A_1 .

Rešenje:

Da bi se obezbedila pravolinijska trajektorija vrha potrebno je da su svi zglobovi aktivni svo vreme trajanja pokreta i da tokom kretanja imaju nepromenljivu brzinu. (Trebalo bi primetiti da brzine u svim zglobovima ne moraju da budu iste).

Da bi ovo ostvarili usvaja se da zglob koji prelazi najveće rastojanje ide maksimalnom brzinom, a brzine ostalih zglobova se određuju tako da svi istovremeno završe kretanje. Jasno je da svi motori ostaju uključeni tokom ukupnog vremena trajanja pokreta.

Podsetimo se da dužina projekcije trajektorije na x osu iznosi 7 mm, na y osu 6 mm, a na z osu 10 mm. Odavde se vidi da je najduža komponenta kretanja u pravcu z ose pa ćemo usvojiti da će se motor u tom zglobovima kretati maksimalnom brzinom od 0.2 m/s. U zadatku 3.1. smo videli da se u tom slučaju za jedan period odabiranja prelazi 1 mm, a obzirom da najduži segment putanje ima 10 mm sledi

da će ukupan pokret trajati 10 perioda odabiranja, tj. 0.05 s. Zahtevana brzina kretanja duž x ose se može sračunati na sledeći način

$$\dot{x} = \frac{0.007}{0.05} = 0.14 \frac{m}{s}$$

što je manje od 0.2 m/s koliko iznosi maksimalna brzina. Obzirom da celu trajektoriju od 7 mm treba preći za 10 koraka, proizilazi da će se u jednom koraku preći 0.7 mm. Prema tome, x koordinata vrha će posle prvog koraka iznositi 5.7 mm, posle drugog 6.4 mm, ...

Na isti način se može odrediti kretanje duž y ose. Brzina je $\dot{y} = 0.12 \frac{m}{s}$, a koordinate vrha se menjaju na sledeći način (3, 3.6, 4.2, ...).

Duž z ose se manipulator kreće maksimalnom brzinom (tokom 1 s vrh manipulatora prelazi po 1 mm), pa se koordinate menjaju na sledeći način (5, 6, 7, 8, ...). Promena sve tri koordinate vrha tokom trajanja pokreta su date u tabeli.

Vreme (ms)	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
0	5	3	5
5	5.7	3.6	6
10	6.4	4.2	7
15	7.1	4.8	8
20	7.8	5.4	9
25	8.5	6.0	10
30	9.2	6.6	11
35	9.9	7.2	12
40	10.6	7.8	13
45	11.3	8.4	14
50	12	9	15

Zadatak 5.16

Objasniti sintezu trajektorije korišćenjem polinoma.

Rešenje:

Da bi ostvarili uravnoteženo kretanje bez trzaja i naglih promena brzina i ubrzanja potrebno je da hvataljka prati trajektoriju koja je kontinualna i glatka po poziciji, ubrzanju i brzini. Ako definišemo svaku komponentu putanje (x, y, z, \dots) kao polinomsku funkciju vremena mogu se odrediti koeficijenti polinoma tako da zadovoljavaju gore navedene uslove.

Način sinteze ćemo objasniti na primeru koji se odnosi samo na jedan stepen slobode (npr. x -koordinatu), a isti način se može primeniti i za sve ostale.

Posmatraćemo slučaj kada se robot u početnom trenutku $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$ nalazi u mirovanju $\dot{\mathbf{x}}_0 = 0$, dok se u krajnjoj tački putanje $\mathbf{x}(t=t_f) = \mathbf{x}_f$ zaustavlja pa sledi da je $\dot{\mathbf{x}}_f = 0$. Odavde se takođe vidi da je vreme trajanja pokreta $t = t_f$.

Ako usvojimo polinom III stepena

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_3 \cdot t^3 + \mathbf{a}_2 \cdot t^2 + \mathbf{a}_1 \cdot t + \mathbf{a}_0 \quad (1)$$

posle diferenciranja dobijamo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = 3 \cdot \mathbf{a}_3 \cdot t^2 + 2 \cdot \mathbf{a}_2 \cdot t + \mathbf{a}_1 \quad (2)$$

a posle još jednog diferenciranja sledi

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = 6 \cdot \mathbf{a}_3 \cdot t + 2 \cdot \mathbf{a}_2 \quad (3)$$

Iz izraza (1) za početni vremenski trenutak $t = 0$ odmah možemo odrediti \mathbf{a}_0 :

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}_0$$

Za $t = 0$ i za $t = t_f$ izraz (2) postaje

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = 3 \cdot \mathbf{a}_3 \cdot t_0^2 + 2 \cdot \mathbf{a}_2 \cdot t_0 + \mathbf{a}_1$$

$$\dot{\mathbf{x}}_f(t) = 3 \cdot \mathbf{a}_3 \cdot t_f^2 + 2 \cdot \mathbf{a}_2 \cdot t_f + \mathbf{a}_1$$

Na osnovu uslova $\dot{\mathbf{x}}_0 = 0$ za $t = 0$ iz prve jednačine sledi

$$\mathbf{a}_1 = 0.$$

Uzimajući ovaj rezultat u obzir, kao i činjenicu da za $t = t_f$ važi $\dot{x}_f = 0$ druga jednačina postaje

$$0 = 3 \cdot a_3 \cdot t_f^2 + 2 \cdot a_2 \cdot t_f + a_1$$

pa posle deljenja sa t_f dobijamo

$$3 \cdot a_3 \cdot t_f + 2 \cdot a_2 = 0$$

odakle određujemo a_2 u obliku

$$a_2 = -\frac{3}{2} \cdot a_3 \cdot t_f$$

Ako u jednačinu (1) zamenimo $x(t) = x_f$ sledi

$$x_f(t) = a_3 \cdot t_f^3 + a_2 \cdot t_f^2 + 0 \cdot t_f + a_0$$

gde posle smenjivanja vrednosti za a_2 i a_0 dobijamo

$$x_f(t) = a_3 \cdot t_f^3 + \left(-\frac{3}{2} \cdot a_3 \cdot t_f\right) \cdot t_f^2 + x_0$$

odakle, konačno, sračunavamo vrednost koeficijenta a_3

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3} (x_f - x_0)$$

Smenjujući izraz za a_3 u prethodno dobijen izraz za a_2 posle jednostavnih transformacija sledi

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2} (x_f - x_0)$$

čime su svi koeficijenti određeni.

Zadatak 5.18

Pokret manipulatora sa rotacionim zglobovima sa jednim stepenom slobode traje od pozicije $q_i(t_0) = q_0$ do pozicije $q_i(t_f) = q_1$ za vreme t_f . Poznate su početna $\dot{q}_i(t_0) = q'_0$ i završna $\dot{q}_i(t_f) = q'_1$ brzina. Interpolirati kretanje zgloba kubnim splajnom i odrediti koeficijente polinoma.

Rešenje:

Oblik trajektorije zgloba na bazi opšte jednačine polinoma trećeg stepena glasi

$$q_i(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

Otuda, jednačine brzine glasi

$$\dot{q}_i(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

Treba odrediti koeficijente $a_i, i = 0, \dots, 3$, tako da zadovoljavaju uslove

$$q_i(t_0) = q_0, \quad q_i(t_f) = q_1,$$

$$\dot{q}_i(t_0) = q'_0, \quad \dot{q}_i(t_f) = q'_1.$$

Koeficijenti a_0 i a_1 određuju se iz početnih uslova

$$q_i(0) = a_0 = q_0, \quad \dot{q}_i(0) = a_1 = q'_0$$

$$a_0 = q_0, \quad a_1 = q'_0 \quad (23)$$

Koeficijenti a_2 i a_3 određuju se iz završnih uslova

$$q_i(t_f) = q_0 + q'_0 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 = q_1$$

$$\dot{q}_i(t_f) = q'_0 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 = q'_1$$

Eliminacijom a_3 iz prethodnog skupa jednačina dobija se

$$\begin{aligned} 3q_1 - t_f q'_1 &= 3q_0 + 3q'_0 t_f + 3a_2 t_f^2 - q'_0 t_f - 2a_2 t_f^2 - 3a_3 t_f^3 \\ &= 3q_0 - 2q'_0 t_f + a_2 t_f^2 \end{aligned}$$

Otuda se određuju i preostali koeficijenti

$$a_2 = \frac{3(q_1 - q_0) - (2q'_0 + q'_1)t_f}{t_f^2}, \quad a_3 = \frac{2(q_0 - q_1) + (q'_0 + q'_1)t_f}{t_f^3} \quad (24)$$

Zadatak 5.19

Jednozglobni robot polazi iz mirovanja sa pozicije $q(t=0) = \theta_0$ i za vreme t_f dolazi i zaustavlja se na poziciji $q(t=t_f) = \theta_f$. Tokom kretanja ograničena je maksimalna brzina i maksimalno ubrzanje koje robot sme da postigne sledećim nejednakostima

$$|\dot{\theta}(t)| < \dot{\theta}_{\max}, \quad |\ddot{\theta}(t)| < \ddot{\theta}_{\max}$$

Smatrajući da se promena ugla $q(t)$ može aproksimirati kubnim splajnom, odrediti minimalno vreme za koje će robot obaviti zadatak.

Rešenje:

Na bazi jednačina kubnog splajna (23) i (24), po uslovu zadatka, koeficijenti kubnog splajna su

$$a_0 = \theta_0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}, \quad a_3 = -\frac{2(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}$$

Da bi ograničenje iz uslova zadatka bilo zadovoljeno, odredimo maksimalne vrednosti brzine i ubrzanja

$$|\dot{\theta}(t)| \leq |\dot{\theta}_{ex}| < \dot{\theta}_{\max}, \quad \text{kao i} \quad |\ddot{\theta}(t)| \leq |\ddot{\theta}_{ex}| < \ddot{\theta}_{\max}$$

Za brzinu važe sledeće relacije

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \\ |\dot{\theta}_{ex}| &= |\dot{\theta}(t_f/2)| < \dot{\theta}_{\max} \\ |a_1 + 2a_2(t_f/2) + 3a_3(t_f/2)^2| &< \dot{\theta}_{\max} \end{aligned}$$

Otuda dobijamo da je uslov da se robot kreće ograničenom brzinom moguće zadovoljiti ukoliko

$$t_f > \left| \frac{3(\theta_f - \theta_0)}{2\dot{\theta}_{\max}} \right|$$

Na sličan način, za ubrzanje dobijamo da je

$$\begin{aligned} |\ddot{\theta}_{ex}| &= |\ddot{\theta}(0)| = |\ddot{\theta}(t_f)| \\ |\ddot{\theta}(0)| &< \ddot{\theta}_{\max}, \quad |2a_2| < \ddot{\theta}_{\max} \\ \left| \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} \right| &< \ddot{\theta}_{\max} \end{aligned}$$

Otuda se određuje minimalno potrebno vreme koje zadovoljava ograničenje po ubrzanju

$$t_f > \sqrt{\frac{6(\theta_f - \theta_0)}{\ddot{\theta}_{\max}}}$$

Konačno, vreme koje će zadovoljiti oba uslova zadatka je

$$t_f > \max \left\{ t_f > \left| \frac{3(\theta_f - \theta_0)}{2\dot{\theta}_{\max}} \right|, \sqrt{\frac{6(\theta_f - \theta_0)}{\ddot{\theta}_{\max}}} \right\}$$

Zadatak 5.20

Definisati kretanje i-tog zgloba robota između dve pozicije. Zglob iz stanja mirovanja ubrzava po paraboličnom zakonu do brzine V , zatim se kreće konstantnom brzinom V , i na kraju na isti način usporava do stanja mirovanja.

Rešenje:

Kvadratni i kubni polinomi obezbeđuju tri neophodna granična uslova za definisanje trajektorije kao i mogućnost da se zadovolji jedan uslov tokom putanje.

$$\begin{aligned} q_i(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ \dot{q}_i(t) &= a_1 + 2a_2 t \end{aligned} \quad (25)$$

sa početnim uslovom

$$\begin{aligned}q_i(0) &= q_0 \\ \dot{q}_i(0) &= 0\end{aligned}$$

Za polaznu brzinu usvojena je nulta vrednost pa je otuda

$$\begin{aligned}q_i(0) &= a_0 = q_0 \\ \dot{q}_i(0) &= a_1 = 0\end{aligned}$$

Zamenom u (25), dolazimo do

$$\begin{aligned}q_i(t) &= q_0 + a_2 t^2 \\ \dot{q}_i(t) &= 2a_2 t\end{aligned}\tag{26}$$

Koeficijent a_2 odredjujemo iz uslova konstante brzine V do koje ubrzavamo za vreme t_b . To vreme takodje nije poznato. Na delu putanje tokom koga je brzina konstantna iz jednačine (26) možemo odrediti koeficijent a_2 kao funkciju t_b

$$\begin{aligned}\dot{q}_i(t) &= 2a_2 t_b = V \\ a_2 &= \frac{V}{2t_b}\end{aligned}$$

pa se iz jednačine (26) dobija

$$q_i(t) = q_0 + \frac{V}{2t_b} t^2 \quad 0 \leq t \leq t_b\tag{27}$$

Linearni segment je

$$q_i(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t = \alpha_0 + Vt \quad t_b \leq t \leq t - t_b\tag{28}$$

gde je t_f ukupno vreme trajanja pokreta. Po uslovu simetrije brzina i ubrzanja, srednja pozicija pojaviće se na sredini vremenskog intervala

$$q_i(t_f/2) = \frac{q_0 + q_1}{2}$$

gde je $q_1 = q_i(t_f)$. Otuda se iz jednačine 1.4 dobija

$$\begin{aligned}\frac{q_0 + q_1}{2} &= \alpha_0 + \frac{Vt_f}{2} \\ \alpha_0 &= \frac{q_0 + q_1 - Vt_f}{2}\end{aligned}\tag{29}$$

Naravno, parabolični produžetak trajektorije mora pravilno da se nastavi što se postiže izjednačavanjem (27) i (28) u t_b

$$q_0 + \frac{V}{2t_b} t_b^2 = \frac{q_0 + q_1 - Vt_f}{2} + Vt_b \quad (30)$$

$$t_b = \frac{q_0 + q_1 - Vt_f}{V}$$

Neka je $a = \ddot{q}_i = \frac{V}{t_b}$. Tada je konačan rezultat iz (27), za dato (30) i iz (28) za dato (29)

$$q_i(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{1}{2}at^2 & 0 \leq t \leq t_b \\ \frac{q_0 + q_1 - Vt_f}{2} + Vt_f & t_b \leq t \leq t - t_b \end{cases} \quad (31)$$

Slično, kvadratni polinom na drugom kraju mora da zadovolji oblik

$$q_i(t) = q_1 - \frac{a}{2}t_f^2 + at_f t - \frac{a}{2}t^2 \quad t_f - t_b \leq t \leq t_f \quad (32)$$

gde su završni uslovi dati sa

$$q_i(t_f) = q_1$$

$$\dot{q}_i(t_f) = 0$$

Zadatak 5.21

Linearni aktuator robota čija je uzdužna osa paralelna x - osi, treba iz stanja mirovanja pri položaju radne tačke hvataljke $x_0 = 15$ mm da pređe u poziciju $x_f = 75$ mm za $t = 3$ s. i tamo da se zaustavi. Odrediti koeficijente polinoma koji ostvaruju željenu trajektoriju. Nacrtati dijagrame pozicije, brzine i ubrzanja radne tačke hvataljke u funkciji vremena. Ako pretpostavimo da se odabiranje vrši frekvencijom od 40 Hz koliki je period odabiranja?

Rešenje:

Period odabiranja je $1/40 = 0.025$ s = 25 ms . Koristeći izraze dobijene u prethodnom zadatku koeficijente a_0 i a_1 možemo odmah odrediti

$$a_0 = x_0 = 15 \quad a_1 = 0$$

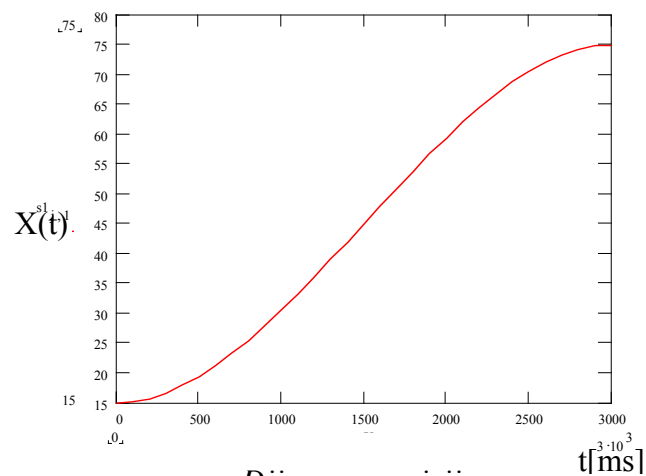
dok su koeficijenti a_3 i a_4 sračunavaju iz

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2} \cdot (x_f - x_0) = \frac{3}{3^2} \cdot (75 - 15) = 20$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3} \cdot (x_f - x_0) = -\frac{2}{3^3} \cdot (75 - 15) = -4.44$$

U sledećoj tabeli i dijagramu je prikazan položaj vrha manipulatora tokom pokreta.

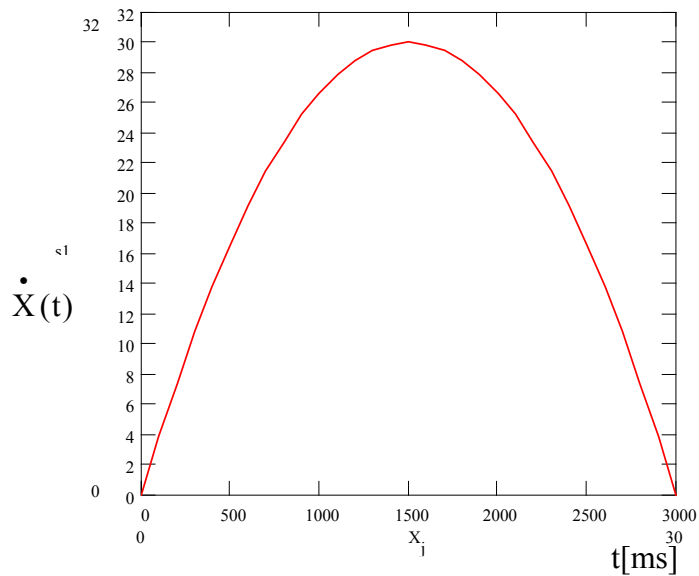
Vreme ms	X mm	Vreme ms	X mm	Vreme ms	X mm
0	15.00	1100	33.28	2200	64.47
100	15.19	1200	36.12	2300	66.72
200	15.76	1300	39.03	2400	68.76
300	16.68	1400	42.00	2500	70.55
400	17.91	1500	45.00	2600	72.08
500	19.44	1600	47.99	2700	73.32
600	21.24	1700	50.96	2800	74.23
700	23.27	1800	53.88	2900	74.80
800	25.52	1900	56.71	3000	75.00
900	27.96	2000	59.44		
1000	30.55	2100	62.04		



Promena brzine tokom vremena je prikazana u sledećoj tabeli

Vreme ms	\dot{x} mm/s	Vreme ms	\dot{x} mm/s	Vreme ms	\dot{x} mm/s
0	0	1100	27.86	2200	23.46
100	3.86	1200	28.80	2300	21.46
200	7.46	1300	29.46	2400	19.20
300	10.80	1400	29.86	2500	16.66
400	13.86	1500	30.00	2600	13.86
500	16.66	1600	29.86	2700	10.80
600	19.20	1700	29.46	2800	7.46
700	21.46	1800	28.80	2900	3.86
800	23.46	1900	27.86	3000	0
900	25.20	2000	26.66		
1000	26.66	2100	25.20		

dok je grafički prikaz dat na narednom dijagramu



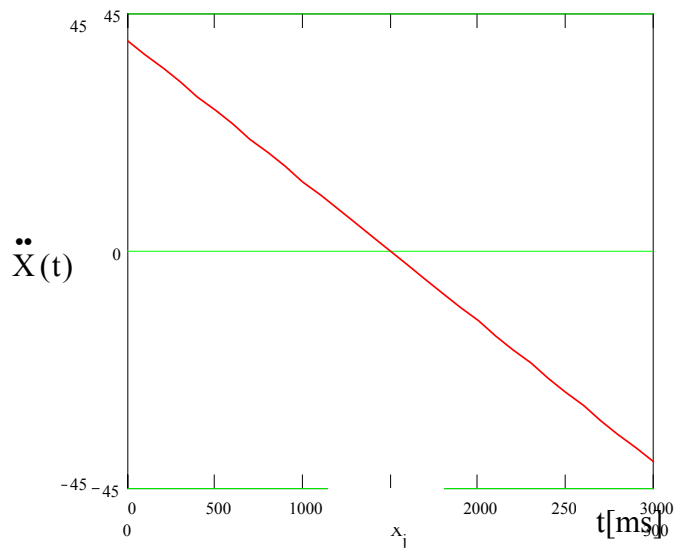
Dijagram brzine

Na isti način kao pozicije i brzine možemo odrediti i ubrzanje. Rezultati su prikazani u narednoj tabeli.

Vreme ms	\ddot{x} mm/s^2	Vreme ms	\ddot{x} mm/s^2	Vreme ms	\ddot{x} mm/s^2
0	40	1100	10.66	2200	-18.66
100	37.33	1200	8	2300	-21.33
200	34.66	1300	5.33	2400	-24
300	32	1400	2.66	2500	-26.66
400	29.33	1500	0	2600	-29.33
500	26.66	1600	-2.66	2700	-32
600	24	1700	-5.33	2800	-34.66
700	21.33	1800	-8	2900	-37.33
800	18.66	1900	-10.66	3000	-40
900	16	2000	-13.33		
1000	13.33	2100	-16		

dok je dijagramski prikaz dat na narednoj slici

Dijagram ubrzanja



Zadatak 5.22

Odrediti koeficijente polinoma za aproksimaciju trajektorije tako da u početnom trenutku hvataljka miruje, dok u krajnjoj tački putanje ima konstantnu brzinu ($\dot{x}_0 = 0$; $\dot{x}_f = const.$; $\ddot{x}_f = 0$).

Rešenje:

Za rešenje ovog zadatka koristimo polinom IV reda.

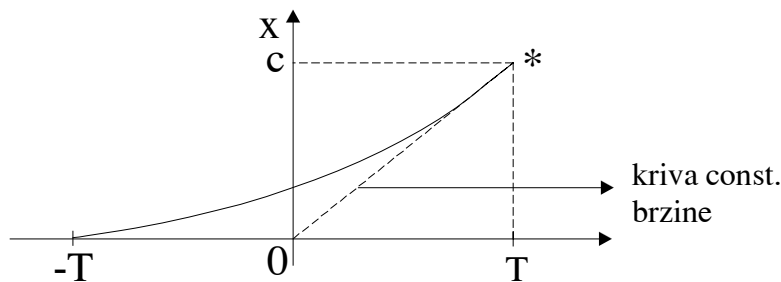
$$x(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 \quad (1)$$

gde posle diferenciranja dobijamo

$$\dot{x}(t) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot t + 3 \cdot a_3 \cdot t^2 + 4 \cdot a_4 \cdot t^3 \quad (2)$$

$$\ddot{x}(t) = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot t + 12 \cdot a_4 \cdot t^2 \quad (3)$$

Problem je prikazan dijagramski na sledećoj slici (koordinatni sistem je postavljen u sredinu posmatranog vremenskog intervala tj. $t_f = (-T, T)$ čime nije umanjena



Slika 52. Putanja $x(t)$ koja u trenutku $t=T$ zadovoljava $\dot{x}(t) = c/T$ i $\ddot{x}(t) = 0$

opštost razmatranja. Neka je tokom posmatranog intervala hvataljka prešla put dužine c . Tada je intenzitet brzine u krajnjoj tački dat sa

$$\dot{x}_f = \frac{c}{\frac{t_f}{2}} = \frac{2 \cdot c}{T+T} = \frac{c}{T}$$

Granični uslovi su:

$$x(-T) = 0 \quad \dot{x}(-T) = 0 \quad \ddot{x}(-T) = 0$$

$$x(T) = c \quad \dot{x}(T) = \frac{c}{T} \quad \ddot{x}(T) = 0$$

Iz jednačine (3) za $t = -T$ sledi: $0 = 12 \cdot a_4 \cdot T^2 - 6 \cdot a_3 \cdot T + 2 \cdot a_2$

Iz jednačine (3) za $t = T$ sledi: $0 = 12 \cdot a_4 \cdot T^2 + 6 \cdot a_3 \cdot T + 2 \cdot a_2$

pa iz ova dva izraza možemo odrediti

$$a_3 = 0$$

Ostale koeficijente jednostavno određujemo, pa sledi

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{3 \cdot c}{16} & a_1 &= \frac{c}{2 \cdot T} \\ a_2 &= \frac{3 \cdot c}{8 \cdot T^2} & a_4 &= \frac{-c}{16 \cdot T^4} \end{aligned}$$

Zadatak 5.23

Odrediti pravolinijsku putanju vrha hvataljke u Oxy - ravni tako da se kreće u skladu sa sledećim zahtevima:

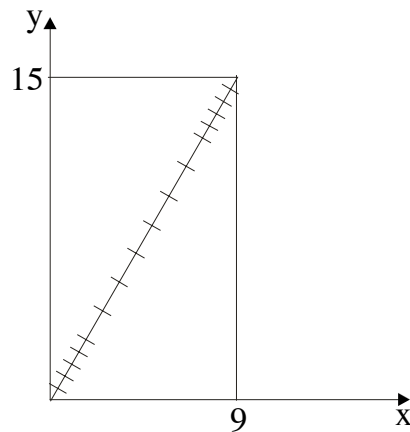
$$\begin{array}{lll} \text{za vremenski trenutak } t = -3 \text{ sledi:} & x = 0 & \dot{x} = 0 & \ddot{x} = 0 \\ & y = 0 & \dot{y} = 0 & \ddot{y} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{za vremenski trenutak } t = +3 \text{ sledi:} & x = 9 & \dot{x} = 3 & \ddot{x} = 0 \\ & y = 15 & \dot{y} = 5 & \ddot{y} = 0 \end{array}$$

Formirati tabelu u kojoj su prikazane pozicije, brzine i ubrzanja tokom pokreta. Za periodu odabiranja usvojiti $t = 0.2$ s. Nacrtati trajektoriju u Oxy - ravni kao i krive $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$.

Rešenje:

Trajektorija hvataljke u Oxy - ravni je prikazana na narednoj slici. Treba napomenuti da se krajnja tačka ove trajektorije naziva prolaznom jer se na nju može nadovezati naredna trajektorija na koju bi hvataljka prešla bez zaustavljanja



Slika 53 Trajektorija u Oxy - ravni

Koeficijenti polinoma za x i y komponentu trajektorije (gornji indeks označava pripadnost x ili y komponenti trajektorije) su:

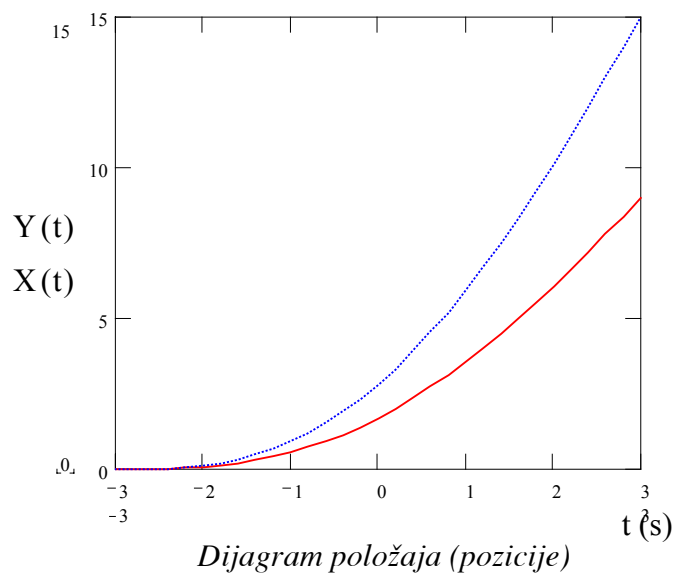
$$\begin{array}{cccccc}
 a_0^x(x) = \frac{27}{16} & a_1^x(x) = \frac{3}{2} & a_2^x(x) = \frac{3}{8} & a_3^x(x) = 0 & a_4^x(x) = -\frac{1}{144} \\
 a_0^y(y) = \frac{45}{16} & a_1^y(y) = \frac{5}{2} & a_2^y(y) = \frac{5}{8} & a_3^y(y) = 0 & a_4^y(y) = -\frac{5}{432}
 \end{array}$$

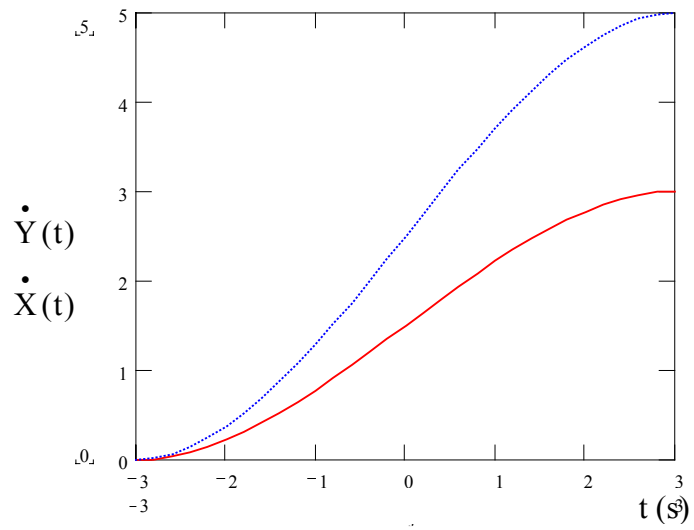
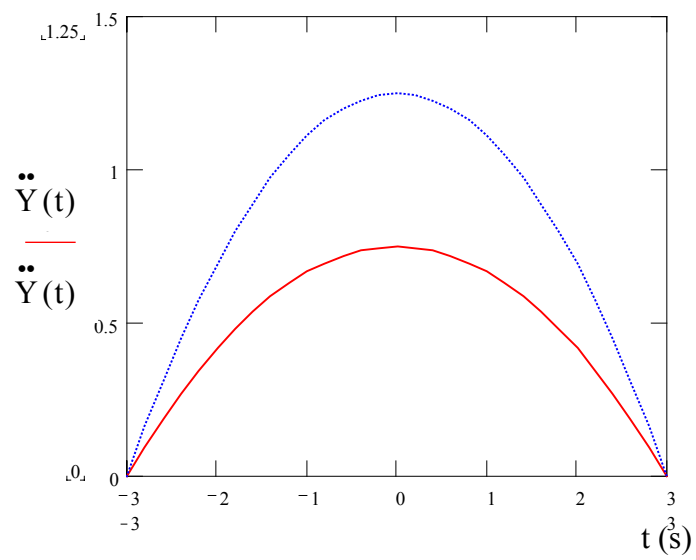
Prikaz pozicija, brzina i ubrzanja tokom pokreta je dat u narednoj tabeli

Vreme	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$	$y(t)$	$\dot{y}(t)$	$\ddot{y}(t)$
-3.0	0	0	0	0	0	0
-2.8	0.00065	0.0097	0.0966	0.001	0.0162	0.1611
-2.6	0.00515	0.0382	0.1866	0.0085	0.0637	0.3111
-2.4	0.0171	0.084	0.27	0.0285	0.14	0.45
-2.2	0.0398	0.1457	0.3466	0.0663	0.2429	0.5777
-2.0	0.0763	0.222	0.4166	0.1273	0.3703	0.6944
-1.8	0.1296	0.312	0.48	0.216	0.52	0.8
-1.6	0.2010	0.413	0.5366	0.3366	0.6896	0.89
-1.4	0.2958	0.526	0.5866	0.4930	0.8770	0.977
-1.2	0.4131	0.648	0.63	0.6885	1.08	1.05
-1.0	0.5550	0.777	0.6666	0.9259	1.2962	1.111
-0.8	0.7246	0.9142	0.6966	1.2077	1.5237	1.161
-0.6	0.9216	1.056	0.72	1.536	1.76	1.20
-0.4	1.147	1.201	0.736	1.9122	2.0029	1.2277
-0.2	1.402	1.350	0.746	2.3374	2.25003	1.2444

0.0	1.6875	1.50	0.75	2.8125	2.5	1.25
0.2	2.00	1.6497	0.746	3.3374	2.7496	1.2444
0.4	2.347	1.7982	0.736	3.9122	2.997	1.2277
0.6	2.7216	1.944	0.72	4.536	3.24	1.2
0.8	3.1303	2.085	0.6966	5.2070	3.4762	1.161
1.0	3.5555	2.222	0.6666	5.9259	3.7037	1.111
1.2	4.0131	2.352	0.63	6.6885	3.92	1.05
1.4	4.4958	2.473	0.5866	7.493	4.1229	0.977
1.6	5.00	2.586	0.5366	8.3366	4.3103	0.89
1.8	5.5296	2.688	0.48	9.216	4.48	0.8
2.0	6.076	2.777	0.4166	10.127	4.6296	0.6944
2.2	6.639	2.8542	0.3466	11.066	4.757	0.5777
2.4	7.217	2.916	0.27	12.028	4.86	0.45
2.6	7.805	2.961	0.1866	13.008	4.9362	0.3111
2.8	8.400	2.990	0.0966	14.001	4.9837	0.1611
3.0	9.00	3.00	0	15	5.00	0

Na narednim dijagramima koje pokazuju trajektorije pozicije, brzine i ubrzanja kriva koja je nacrtana isprekidanom linijom odgovara x , a punom y komponenti.



*Dijagram brzine**Dijagram ubrzanja*

Zadatak 5.24

Odrediti koeficijente polinoma za aproksimaciju trajektorije tako da u početnom trenutku hvataljka miruje i kroz krajnju tačku prođe bez zaustavljanja bez obzira na ubrzanje koje ima, tj, granični uslovi su $\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}_1, \dot{\mathbf{x}}_f = \mathbf{C}_2, \ddot{\mathbf{x}}_f \neq 0$.

Rešenje:

Za rešenje ovog problema koristimo polinom III reda, a koeficijente ćemo odrediti pomoću sledećih graničnih uslova .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t=0) &= \dot{\mathbf{x}}_0 & \mathbf{x}(t=0) &= \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t=t_f) &= \dot{\mathbf{x}}_f & \mathbf{x}(t=t_f) &= \mathbf{x}_f \end{aligned}$$

Traženi koeficijenti su

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathbf{x}_0 & a_1 &= \dot{\mathbf{x}}_0 & a_2 &= \frac{3}{t_f^2} \cdot (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0) - \frac{2}{t_f} \cdot \dot{\mathbf{x}}_0 - \frac{1}{t_f} \cdot \dot{\mathbf{x}}_f \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3} \cdot (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{t_f^2} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{x}}_f) \end{aligned}$$

Zadatak 5.25

Nacrtati dijagrame pozicije, brzine i ubrzanja za dvosegmentnu pravolinijsku putanju gde je svaki segment aproksimiran kubnim polinomom. Hvataljka se kreće duž x ose, početna pozicija je \mathbf{x}_0 , prolazna i krajnja tačka su \mathbf{x}_p i \mathbf{x}_g . Pretpostaviti da kretanje duž svakog od segmenata treba da se završi za 1s. Brzina u prolaznoj tački treba da bude 17.5 mm/s. Početna brzina je $\dot{\mathbf{x}}_0$.

Rešenje:

Uslovi postavljeni zadatkom su sledeći

$$x_0 = 5 \text{ mm} \quad \dot{x}_0 = 0 \quad t = 1 \text{ s} \quad x_f = 15 \text{ mm} \quad \dot{x}_f = 17.5 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$x_g = 40 \text{ mm} \quad \dot{x}_g = 0 \quad x_v = 15 \text{ mm} \quad \dot{x}_v = 17.5 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

I segment	II segment
$x_0 = 5 \text{ mm} = x_{01}$	$x_v = 15 \text{ mm} = x_{02}$
$\dot{x}_0 = 0 = \dot{x}_{01}$	$\dot{x}_v = 17.5 \frac{\text{mm}}{\text{s}} = \dot{x}_{02}$
$x_g = 40 \text{ mm} = x_{f2}$	$\dot{x}_g = 0 = \dot{x}_{f2}$

Koeficijente treba odrediti za svaki od segmenata posebno

I segment

$$a_0 = 5 \quad a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{3}{1^2} \cdot (15 - 5) - \frac{2}{1} \cdot 0 - \frac{1}{1} \cdot 17.5 = 12.5 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 12.5$$

$$a_3 = -\frac{2}{1^3} \cdot (15 - 5) + \frac{1}{1^2} \cdot (0 + 17.5) = -2.5 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -2.5$$

II segment

$$a_0 = 15 \quad a_1 = 17.5$$

$$a_2 = \frac{2}{1^3} \cdot (40 - 15) - \frac{2}{1} \cdot 17.5 - \frac{1}{1} \cdot 0 = 40 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 40$$

$$a_3 = -\frac{2}{1^3} \cdot (40 - 15) + \frac{1}{1^2} \cdot (0 + 17.5) = -32.5 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -32.5$$

Prema tome, polinom III reda (kao i njegovi izvodi) primenjeni na prvi i drugi segment trajektorije se mogu napisati u formi

I segment

$$x(t) = 5 + 12.5 \cdot t^2 - 2.5 \cdot t^3$$

II segment

$$x(t) = 15 + 17.5 \cdot t + 40 \cdot t^2 - 32.5 \cdot t^3$$

$$\dot{x}(t) = 25 \cdot t - 7.5 \cdot t^2$$

$$\dot{x}(t) = 17.5 + 80 \cdot t - 97.5 \cdot t^2$$

$$\ddot{x}(t) = 25 - 15 \cdot t$$

$$\ddot{x}(t) = 80 - 195 \cdot t$$

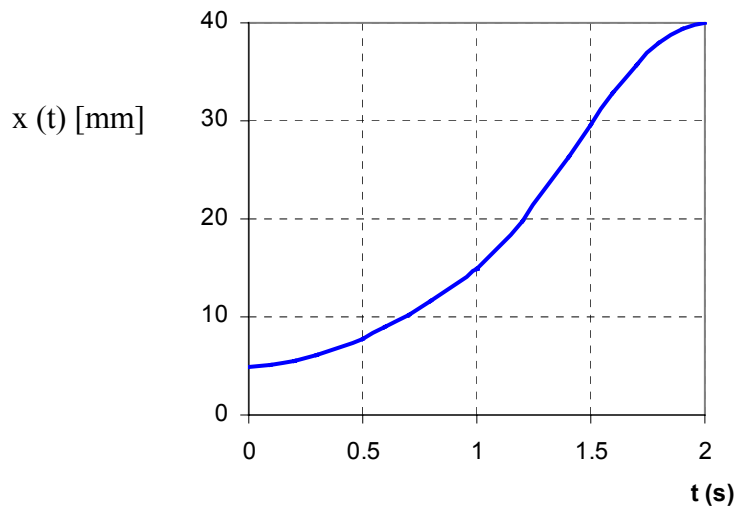
što se u tabelarnoj formi može prikazati na sledeći način

I S E G M E N T	Vreme s	x (t) mm	$\dot{x}(t)$ mm/s	$\ddot{x}(t)$ mm/s ²
	0.0	5.0	0.0	25.0
	0.1	5.1225	2.425	23.5
	0.2	5.48	4.70	22.0
	0.3	6.0575	6.825	20.0
	0.4	6.84	8.80	19.0
	0.5	7.8125	10.625	17.5
	0.6	8.96	12.30	16.0
	0.7	10.267	13.825	14.5
	0.8	11.72	15.20	13.0
0.9	13.302	16.425	11.5	
1.0	15	17.50	10.0	

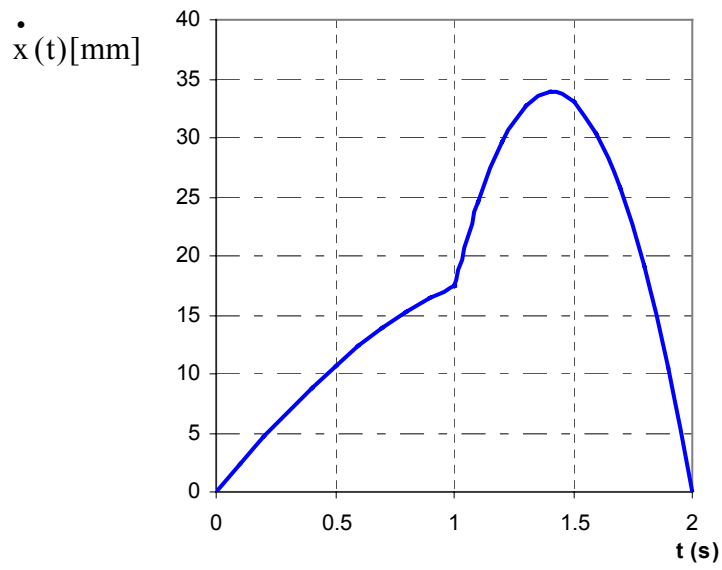
II S E G M E N T	Vreme	x (t)	$\dot{x}(t)$ mm/s	$\ddot{x}(t)$ mm/s ²
	1.0	15.00	17.50	80.0
	1.1	17.117	24.525	60.5
	1.2	19.84	29.60	41.0
	1.3	22.972	32.725	21.5
	1.4	26.32	33.90	2.0
	1.5	29.687	33.125	-17.5
	1.6	32.88	30.40	-37.0
	1.7	35.70	25.724	-56.5
	1.8	37.96	19.10	-76.0
	1.9	39.45	10.525	-95.5
2.0	40.00	0.0	-115.0	

Dijagramski prikaz je dat na slikama koje slede.

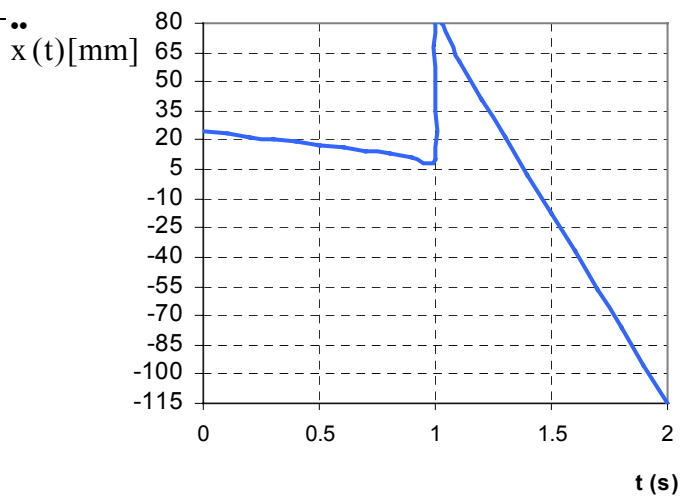
Spoj dva segmenta krive je u trenutku $t = 1$ s. Može se uočiti da je na dijagramu pozicije kriva glatka, dok kod se na dijagramima brzine i ubrzanja mogu uočiti skokovite promene.



Dijagram pozicije



Dijagram brzine



*Dijagram ubrzanja***Zadatak 5.26**

Trajektorije se sastoji od dva segmenta. Početna tačka prvog segmenta i krajnja tačka drugog segmenta su zaustavne. Uslovi postavljeni zadatkom su sledeći:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{x}_0 = 5 \text{ mm} & \dot{\mathbf{x}}_0 = 0 & t = 1 \text{ s} \\ \mathbf{x}_f = 15 \text{ mm} & \mathbf{x}_v = 15 \text{ mm} & \\ \mathbf{x}_g = 40 \text{ mm} & \dot{\mathbf{x}}_g = 0 & \end{array}$$

Izvršiti sintezu trajektorije tako da je u prolaznoj tački obezbeđen uslov kontinualnosti brzine i ubrzanja.

Rešenje:

Koristićemo polinome III stepena (a_1 su koeficijenti polinoma I segmenta, a_2 su koeficijenti polinoma II segmenta polinom II krive).

I segment

II segment

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_{10} + \mathbf{a}_{11}t + \mathbf{a}_{12}t^2 + \mathbf{a}_{13}t^3$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_{20} + \mathbf{a}_{21}t + \mathbf{a}_{22}t^2 + \mathbf{a}_{23}t^3$$

U početnom trenutku za $t = 0$ imamo $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}_{10}$, pa zatim sledi

$$\mathbf{x}_v = \mathbf{a}_{10} + \mathbf{a}_{11} \cdot t_{f1} + \mathbf{a}_{12} \cdot t_{f1}^2 + \mathbf{a}_{13} \cdot t_{f1}^3$$

gde je \mathbf{x}_v - krajnja tačka prvog segmenta koja je i početna pozicija drugog segmenta putanje. Dalje imamo

$$\mathbf{x}_v = \mathbf{a}_{20}$$

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{a}_{20} + \mathbf{a}_{21} \cdot t_{f2} + \mathbf{a}_{22} \cdot t_{f2}^2 + \mathbf{a}_{23} \cdot t_{f2}^3$$

Na kraju drugog segmenta brzina je jednaka nuli.

$$0 = \mathbf{a}_{11}$$

$$0 = \mathbf{a}_{21} + 2 \cdot \mathbf{a}_{22} \cdot t_{f2} + 3 \cdot \mathbf{a}_{23} \cdot t_{f2}^2$$

U prolaznoj tački brzine i ubrzanja su isti.

$$\mathbf{a}_{11} + 2 \cdot \mathbf{a}_{12} \cdot t_{f1} + 3 \cdot \mathbf{a}_{13} \cdot t_{f1}^2 = \mathbf{a}_{21}$$

$$2 \cdot \mathbf{a}_{12} + 6 \cdot \mathbf{a}_{13} \cdot t_{f1} = 2\mathbf{a}_{22}$$

Ako ovaj sistem jednačina rešimo pod uslovom $t_{f1} = t_{f2}$ dobijamo koeficijente za prvi segment

$$\mathbf{a}_{10} = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{a}_{11} = 0$$

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{12 \cdot \mathbf{x}_v - 3 \cdot \mathbf{x}_g - 9 \cdot \mathbf{x}_0}{4 \cdot t^2}$$

$$\mathbf{a}_{13} = \frac{-8 \cdot \mathbf{x}_v + 3 \cdot \mathbf{x}_g + 5 \cdot \mathbf{x}_0}{4 \cdot t^3}$$

i koeficijente za drugi segment

$$\mathbf{a}_{20} = \mathbf{x}_v$$

$$\mathbf{a}_{21} = \frac{3 \cdot \mathbf{x}_g - 3 \cdot \mathbf{x}_0}{4 \cdot t}$$

$$\mathbf{a}_{22} = \frac{-12 \cdot \mathbf{x}_v + 6 \cdot \mathbf{x}_g + 6 \cdot \mathbf{x}_0}{4 \cdot t^2}$$

$$\mathbf{a}_{23} = \frac{8 \cdot \mathbf{x}_v - 5 \cdot \mathbf{x}_g - 3 \cdot \mathbf{x}_0}{4 \cdot t^3}$$

Na osnovu uslova postavljenih zadatkom koeficijenti polinoma za prvi i drugi segment glase:

I segment

$$a_{10}=5 \quad a_{11}=0$$

$$a_{12}=3.75 \quad a_{13}=6.25$$

II segment

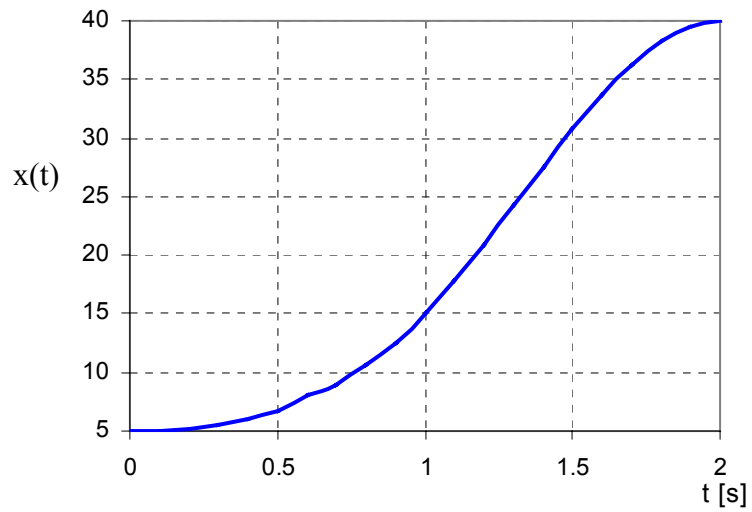
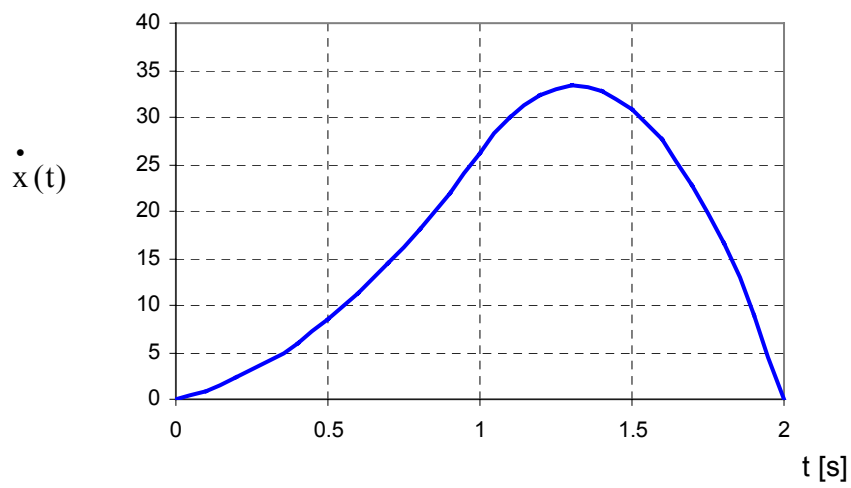
$$a_{20}=15 \quad a_{21}=26.25$$

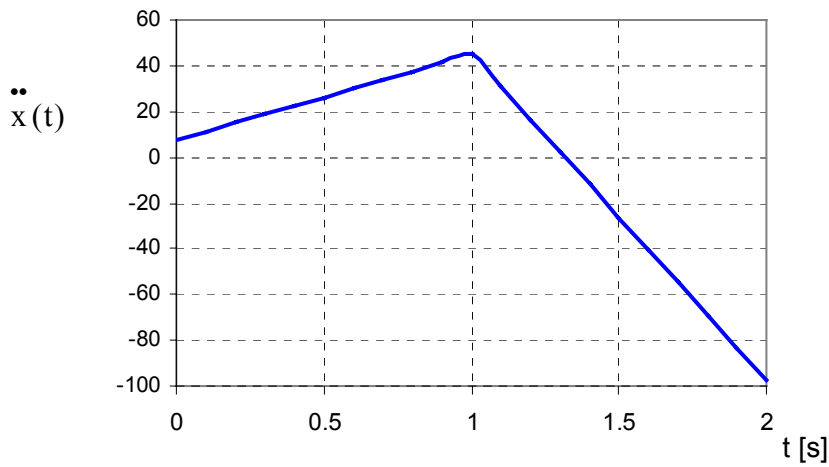
$$a_{22}=22.5 \quad a_{23}=-23.75$$

Tabelarni prikaz pozicija, brzina i ubrzanja za svaki od segmenata trajektorije je dat u sledećim tabelama, dok je dijagramski prikaz kompletne trajektorije dat na dijagramima koji slede nakon tabela.

I S E G M E N T	Vreme s	x (t) mm	$\dot{x}(t)$ mm/s	$\ddot{x}(t)$ mm/s ²
	0.0	5.0	0	7.5
	0.1	5.0437	0.9375	11.25
	0.2	5.2	2.25	15
	0.3	5.506	3.937	18.75
	0.4	6	6	22.5
	0.5	6.178	8.4375	26.25
	0.6	8.1	11.25	30
	0.7	8.981	14.437	33.75
	0.8	10.6	18	37.5
0.9	12.593	21.937	41.25	
1.0	15.00	26.25	45	

II S E G M E N T	Vreme	x (t)	$\dot{x}(t)$ mm/s	$\ddot{x}(t)$ mm/s ²
	1.0	15.00	26.25	45
	1.1	17.826	30.03	30.75
	1.2	20.96	32.41	16.5
	1.3	24.258	33.34	2.25
	1.4	27.58	32.86	-12
	1.5	30.7	30.94	-26.25
	1.6	33.72	27.6	-40.5
	1.7	36.25	22.84	-54.75
	1.8	38.24	16.66	-69
1.9	39.53	9.037	-83.25	
2.0	40.00	0.0	-97.5	

**Dijagram pozicije****Dijagram brzine**



Dijagram ubrzanja

Zadatak 5.27

Odrediti koeficijente polinoma za aproksimaciju trajektorije ukoliko su u početnoj i krajnjoj tački zadate (poznate) pozicija, brzina i ubrzanje (obe tačke su prolazne). Nacrtati dijagrame pozicije, brzine i ubrzanja za kretanje duž x ose ukoliko su uslovi postavljeni zadatkom sledeći:

$$\begin{aligned} x_0 &= 15 \text{ mm} & \dot{x}_0 &= 10 \text{ mm/s} & \ddot{x}_0 &= 6 \text{ mm/s}^2 \\ x_f &= 40 \text{ mm} & \dot{x}_f &= 5 \text{ mm/s} & \ddot{x}_f &= 3 \text{ mm/s}^2. \end{aligned}$$

Kretanje traje 1s.

Rešenje:

U ovom slučaju je potrebno da primenimo polinom petog stepena.

$$x(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 + a_5 \cdot t^5$$

Iz izraza za poziciju u početnom ($t=0$) i krajnjem trenutku ($t=t_f$) sledi

$$x_0 = a_0$$

$$x_f = a_0 + a_1 \cdot t_f + a_2 \cdot t_f^2 + a_3 \cdot t_f^3 + a_4 \cdot t_f^4 + a_5 \cdot t_f^5$$

Iz izraza za brzinu u početnom ($t=0$) i krajnjem trenutku ($t=t_f$) sledi

$$\dot{x}_0 = a_1$$

$$\dot{x}_f = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot t_f + 3 \cdot a_3 \cdot t_f^2 + 4 \cdot a_4 \cdot t_f^3 + 5 \cdot a_5 \cdot t_f^4$$

Iz izraza za ubrzanje u početnom ($t=0$) i krajnjem trenutku ($t=t_f$) sledi

$$\ddot{x}_0 = 2 \cdot a_2$$

$$\ddot{x}_f = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot t_f + 12 \cdot a_4 \cdot t_f^2 + 20 \cdot a_5 \cdot t_f^3$$

odakle sledi

$$a_3 = \frac{20 \cdot x_f - 20 \cdot x_0 - (8 \cdot \dot{x}_f + 12 \cdot \dot{x}_0) \cdot t_f - (3 \cdot \ddot{x}_0 - \ddot{x}_f) \cdot t_f^2}{2 \cdot t_f^3}$$

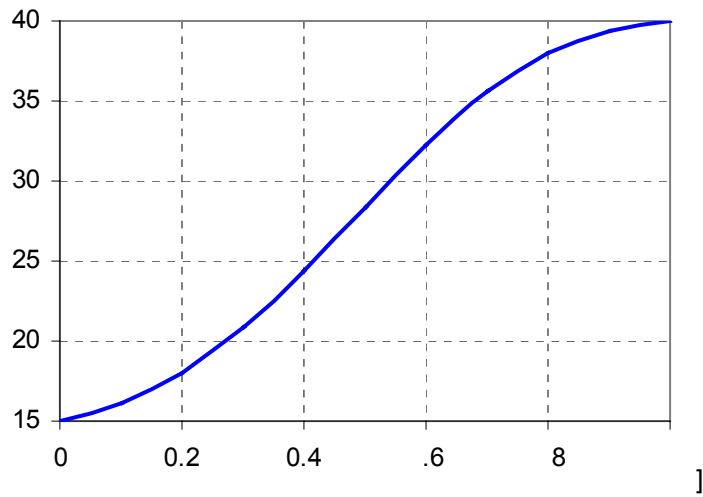
$$a_4 = \frac{30 \cdot (x_0 - x_f) + (14 \cdot \dot{x}_f + 16 \cdot \dot{x}_0) \cdot t_f + (3 \cdot \ddot{x}_0 - 2 \cdot \ddot{x}_f) \cdot t_f^2}{2 \cdot t_f^4}$$

$$a_5 = \frac{12 \cdot (x_f - x_0) - (6 \cdot \dot{x}_f + 6 \cdot \dot{x}_0) \cdot t_f - (\ddot{x}_0 - \ddot{x}_f) \cdot t_f^2}{2 \cdot t_f^5}$$

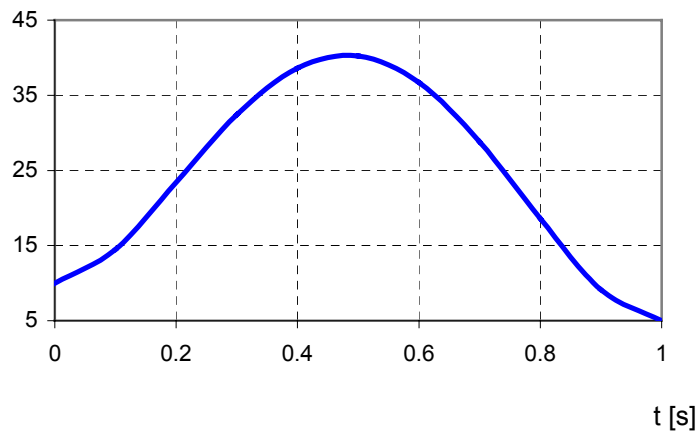
čime su određeni svi traženi koeficijenti. Izračunati koeficijenti polinoma za putanju su: $a_0=15$, $a_1=10$, $a_2=162.5$, $a_3=-254$, $a_4=103.5$.

S E G M E N T	Vreme	x (t)	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$
	s	mm	mm/s	mm/s ²
	0.0	15	10	6
	0.1	16.17	14.51	75.09
	0.2	18.04	23.4	95.64
	0.3	20.85	32.43	80.07
	0.4	24.43	38.62	40.8
	0.5	28.42	40.21	-9.75
0.6	32.3	36.71	-59.16	

	0.7	35.61	28.83	-95.01
	0.8	37.99	18.57	-104.88
	0.9	39.35	9.14	-76.35
	1.0	40	5	3

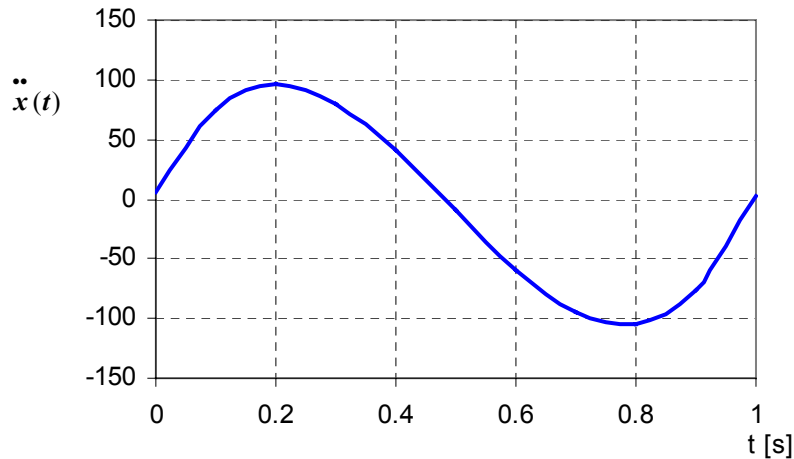


Dijagram pozicije



Dijagram brzine

$$\dot{x}(t)$$



Dijagram ubrzanja

Zadatak 5.28

Rotacioni zglob manipulatora sa dva stepena slobode polarne konfiguracije (r, θ) se nalazi u koordinatnom početku, dok mu se hvataljka nalazi u položaju koji je određen koordinatama $x_1=3$; $y_1=4$ i treba da pređe u položaj $x_2=4$; $y_2=3$. Maksimalne brzine zglobova su $\dot{r}_{\max} = 2 \text{ m/s}$, $\dot{q}_{\max} = 2 \text{ rad/s}$. Treba izvršiti sintezu trajektorije u unutrašnjim koordinatama tako da hvataljka iz prvog položaja pređe u drugi po lučnoj putanji.

Rešenje:

Proces sinteze trajektorije u spoljašnjim koordinatama u opštem slučaju možemo podeliti na sledeće faze (korake):

1. Podeliti putanju hvataljke u spojašnjim koordinatama na pogodan broj segmenata.
2. Za svaki segment transformisati spojašnje koordinate početne i krajnje tačke u unutrašnje koordinate i odrediti početne i krajnje pozicije svakog zgloba.
3. Odrediti vreme posebno svakom stepenu slobode za prelaženje svakog od segmenata prema izrazu:

$$T_{seg} = \max \left\{ \frac{q_{i1} - q_{i2}}{\dot{q}_i} \right\}$$

gde je \dot{q}_i - unapred poznata max brzina i - tog stepena slobode.

1. Podeliti T_{seg} na m podjednakih vremenskih intervala ΔT_{seg} .

$$m = \frac{T_{seg}}{\Delta T_{seg}} \qquad \Delta T_{seg} = \frac{1}{f_{semp}}$$

gde je f_{semp} - frekvencija odabiranja (semplovanja).

2. Za svaki zglob odrediti rastojanja koja treba da pređe za vreme ΔT_{seg} .

$$\Delta q_i = \frac{q_{i1} - q_{i2}}{m}$$

Obzirom na jednostavnost zadate putanje u ovom zadatku (luk poluprečnika $r=5$) nema potrebe deliti je na više segmenata već ćemo je posmatrati kao jedan segment. Transformacijom spoljašnjih koordinata hvataljke u unutrašnje koordinate mehaničke strukture robota se dobija $r_1 = 5$; $q_1 = 0.93$ rad, $r_2 = 5$; $q_2 = 0.64$ rad.

$$\Delta q = q_{i1} - q_{i2} = 0.93 - 0.64 = 0.29 \text{ rad}$$

Ako usvojimo da je $f_{semp} = 60 \text{ Hz}$, sledi

$$\Delta T_{seg} = \frac{1}{f_{semp}} = \frac{1}{60} = 16.66 \cdot 10^{-3} \text{ s} \approx 16 \text{ ms}$$

$$T_{seg} = \frac{\Delta q}{\dot{q}} = \frac{0.29}{2} = 0.145 \approx 0.15 \text{ s}$$

pa je

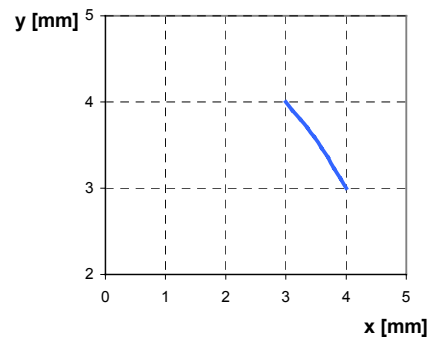
$$m = \frac{T_{seg}}{\Delta T_{seg}} = \frac{0.15}{16 \cdot 10^{-3}} = 9.375 \approx 9$$

odakle sledi

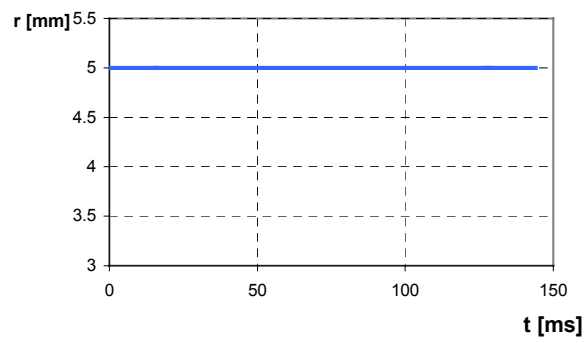
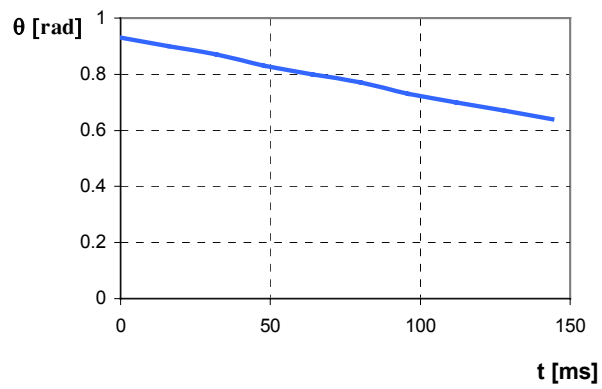
$$\Delta q = \frac{q_1 - q_2}{m} = \frac{0.93 - 0.64}{9} = 0.03222$$

Rezultate sinteze trajektorije možemo prikazati tabelarno

t	r	θ	x	y
0	5	0.93	3.00	4.00
16	5	0.90	3.11	3.90
32	5	0.87	3.24	3.80
48	5	0.83	3.36	3.70
64	5	0.80	3.47	3.59
80	5	0.77	3.59	3.47
96	5	0.73	3.70	3.36
112	5	0.70	3.80	3.23
128	5	0.67	3.91	3.11
144	5	0.64	4.00	3.00



i dijagramski

Trajektorija vrha robota (hvataljke) u x-y ravni**Promena koordinate r****Promena koordinate q**

Zadatak 5.29

Odrediti putanju vrha robota u radnom prostoru $\mathbf{p}(t)$, od tačke \mathbf{p}_0 preko tačke \mathbf{p}_1 do tačke \mathbf{p}_2 . Pri tome smatrati da je tačka \mathbf{p}_1 prolazna, odnosno da vrh robota ne mora da prođe kroz nju već dovoljno blizu nje, uz ograničenje brzine vrha. Period perturbovanog kretanja traje 2τ i simetričan je u odnosu na prolaznu tačku. Data su vremena t_1 i t_2 kao i tačke $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$.

Rešenje:

Razmotrimo prvo ograničenja trajektorije po poziciji.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t_1 - \tau) &= \mathbf{p}_1 - \frac{\tau}{t_1} \Delta \mathbf{p}_1, \quad \text{gde je } \Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}(t_1 + \tau) &= \mathbf{p}_1 + \frac{\tau}{t_2} \Delta \mathbf{p}_2, \quad \text{gde je } \Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \end{aligned} \quad (33)$$

Ograničenja po brzinama dovode do relacija

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(t_1 - \tau) &= \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{t_1} \\ \dot{\mathbf{p}}(t_1 + \tau) &= \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{t_2} \end{aligned} \quad (34)$$

Ubrzanje je konstantno tokom tranzicije oko prolazne tačke

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{a}_p \quad (35)$$

gde ubrzanje \mathbf{a}_p još nije određeno. Integracijom (35), po osnovnoj relaciji

$s = V_0 t + at^2 / 2$, dobijamo rešenje

$$\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_1 - \tau) = \dot{\mathbf{p}}(t_1 - \tau)(t - t_1 + \tau) + \frac{\mathbf{a}_p}{2}(t - t_1 + \tau)^2 \quad (36)$$

Smenom iz (33) i (34) i preuredjivanjem, dobijamo

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_1 + \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{t_1}(t - t_1) + \frac{\mathbf{a}_p}{2}(t - t_1 + \tau)^2 \quad (37)$$

Da bi rešili \mathbf{a}_p moramo da odredimo (1.13) u na kraju tranzicije $t = t_1 + \tau$

$$\mathbf{a}_p = \frac{1}{2\tau} \left(\frac{\Delta \mathbf{p}_2}{t_2} - \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{t_1} \right)$$

čijom zamenom u (37) dobijamo

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_1 - \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{4\tau t_1} (t - t_1 - \tau)^2 + \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{4\tau t_2} (t - t_1 + \tau)^2 \quad (38)$$

Sumarno prikazano, trajektorija $\mathbf{p}(t)$ sa tranzicionom tačkom u \mathbf{p}_1 glasi

$$\mathbf{p}(t) = \begin{cases} \mathbf{p}_1 - \frac{t_1 - t}{t_1} \Delta \mathbf{p}_1 & 0 \leq t \leq t_1 - \tau \\ \mathbf{p}_1 - \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{4\tau t_1} (t - t_1 - \tau)^2 + \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{4\tau t_2} (t - t_1 + \tau)^2 & t_1 - \tau \leq t \leq t_1 + \tau \\ \mathbf{p}_1 + \frac{t - t_1}{t_2} \Delta \mathbf{p}_2 & t_1 + \tau \leq t \leq t_1 + t_2 \end{cases}$$

Zadatak 5.30

Date su vrednosti unutrašnjih koordinata $q(0) = 0$, $q(2) = 2$ i $q(4) = 3$. Naći polinom koji interpolira pravolinijske segmente definisane na parovima unutrašnjih koordinata $\{q(0), q(2)\}$ i $\{q(2), q(4)\}$. Polazna i završna brzina jednake su nuli.

Rešenje

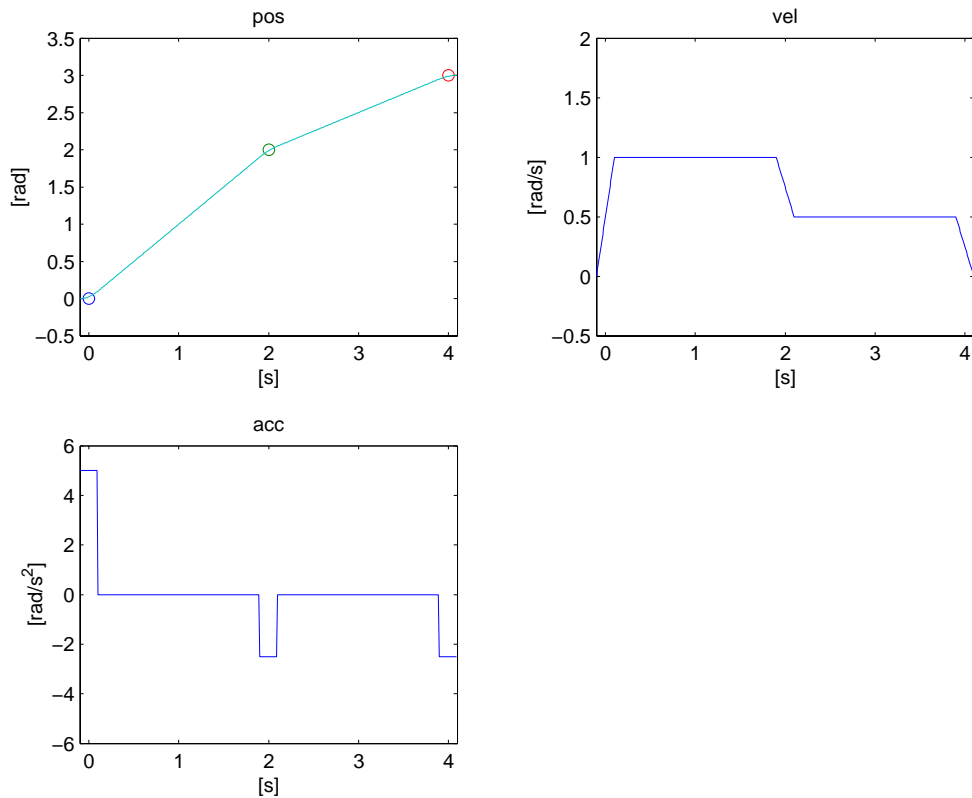
Rešenje ćemo odrediti primenom funkcije `lin_par.m`¹³

```
% vektor odbiraka vremena
t = [0;2;4];
% vektor definicije prolaznih tacaka
q_v = [0 2 3];
% vektor trajanja parabolicnog produzenja
D_t = 0.2*ones(size(t));
% pocetne i završne brzine
dq_i = 0;
dq_f = 0;
% vreme odabiranja
```

¹³ function [T,Q,dQ,ddQ] = lin_par(t,q_v,D_t,dq_i,dq_f,Ts)

```
Ts = 0.01;
% generisanje trajektorije
[time,q,dq,ddq] = lin_par(t,q_v,D_t,dq_i,dq_f,Ts);
```

Rezultat je prikazan na slici 54.



Slika 54. Interpoliraciona trajektorija u unutrašnjim koordinatama

Zadatak 5.31

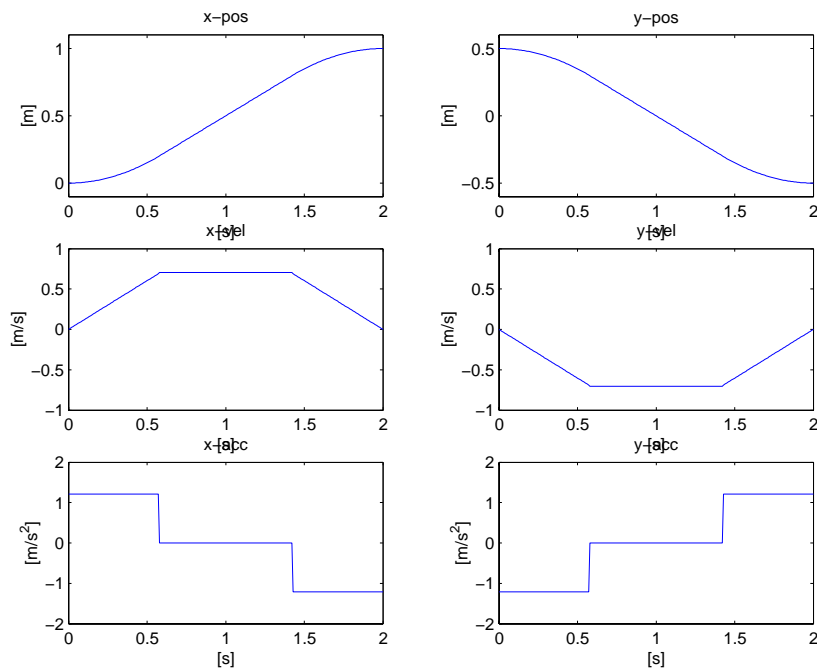
Naći zakon kretanja $\mathbf{p}(t)$ u radnom prostoru robota duž pravolinijskog segmenta sa trapeznim profilom brzine između tačaka $\mathbf{p}_0 = [0 \ 0.5 \ 0]^T$ i $\mathbf{p}_1 = [1 \ -1.5 \ 0]^T$.

Rešenje:

Delimično rešenje je dato sledećim MATLAB skriptom

```
% polazno i završno vreme
t = [0;2];
% polazna pozicija
p_i = [0;0.5;0];
% završna pozicija
p_f = [1;-0.5;0];
% vreme odabiranja
Ts = 0.01;
% maksimalna brzina koordinate puta
ds_c = 1;
% dužina segmenta
D_s = norm(p_f - p_i);
% trapezni profil brzine duž trajektorije za koordinatu puta od 0 do
1
[time,s,ds,dds,err] = trapez(0,1,ds_c/D_s,t(2)-t(1),Ts);
% generisanje trajektorije
p = ones(size(time))*p_i' + s*(p_f - p_i)';
dp = ds*(p_f - p_i)';
ddp = dds*(p_f - p_i)';
```

Rezultat je prikazan na slici 55.



Slika 55. Interpolacioni polinom sa trapeznim profilom brzine u spoljašnjim koordinatama

Zadatak 5.32¹⁴

Formirati model kinematike robota PUMA560 u DH notaciji. Formirati vektore vremena do 0.5 s i do 1 s, sa vremenima odabiranja 10 ms. Definisati nulti i radni položaj robota kao

$$\mathbf{q}_z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{q}_r = [\frac{\pi}{3} \ \frac{\pi}{4} \ -\frac{\pi}{4} \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Potom definisati unutrašnje trajektorije koje robot prevode iz nultog u radni položaj. Izračunati direktnu kinematiku robota za date trajektorije primenom funkcije fkine.m.

¹⁴ PUMA560 trajectories, dan5a.m

Rešenje:

Robot PUMA560 dat je na slici 56.



Slika 56. Robot serije PUMA500 od kojih se model 560 najčešće koristi u edukativne svrhe.

Postupak rešavanja zadatka obaviceemo u MATLAB-u korišćenjem funkcija iz Robotics tbx.

```
puma560;
t0=[0:0.01:0.5];
t1=[0.5:0.01:1];
t=[t0,t1];

qf=[pi/3,pi/4,-pi/4,0,0,0];

[q,qd,qdd]=jtraj(qz,qr,t0);
[qpom,qdpom,qddpom]=jtraj(qr,qf,t0);

q=[q;qpom];
qd=[qd;qdpom];
qdd=[qdd;qddpom];

figure(1);
plot(t,q*180/pi);
legend('q1','q2','q3','q4','q5','q6');

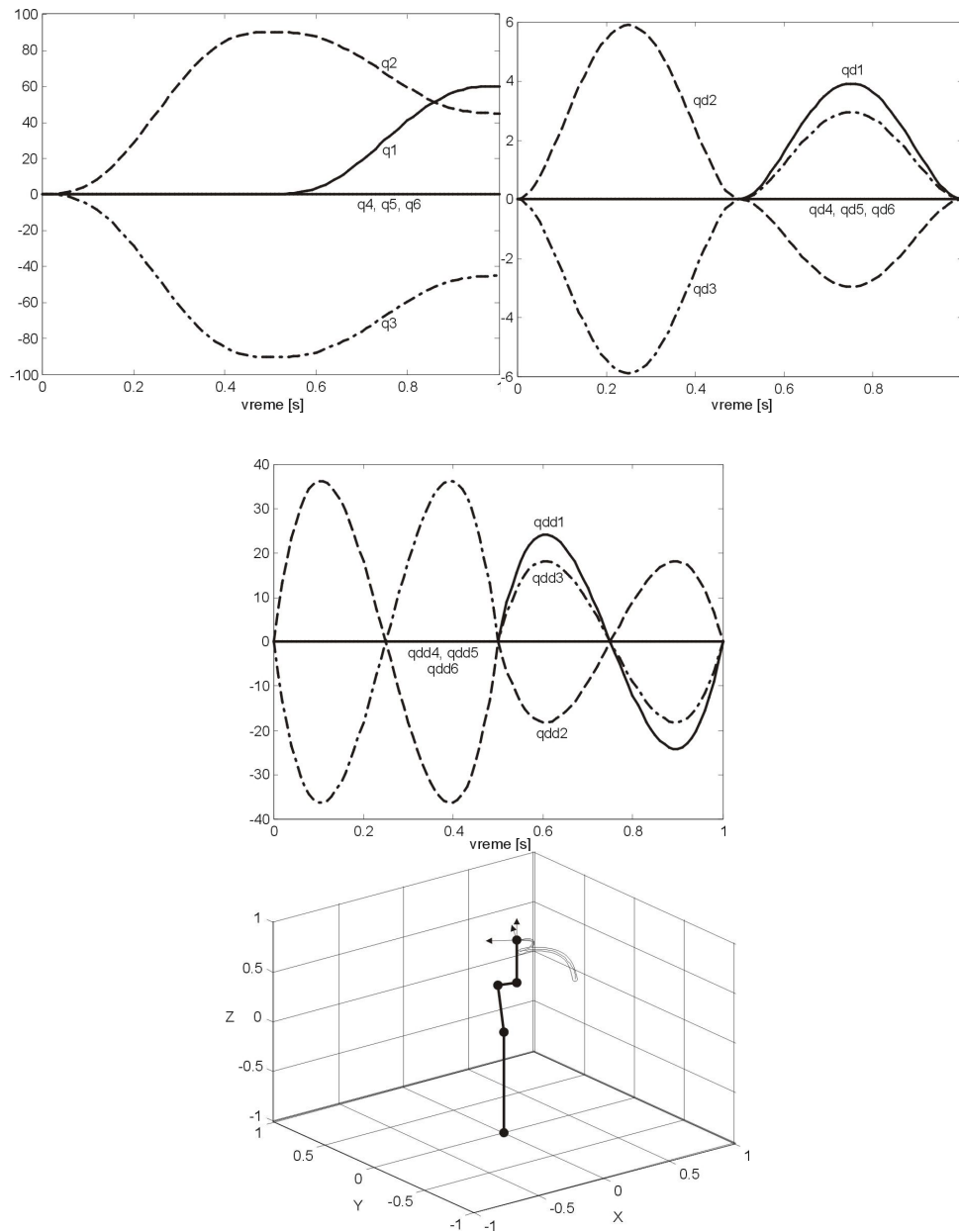
figure(2);
plot(t,qd);
legend('qd1','qd2','qd3','qd4','qd5','qd6');

figure(3);
plot(t,qdd);
legend('qdd1','qdd2','qdd3','qdd4','qdd5','qdd6');
```



```
disp('Pritisni razmaknicu radi animacije pokreta !');  
pause;  
  
FK=fkine(p560,q);  
  
figure(4);  
plot3(FK(:,13),FK(:,14),FK(:,15),'c');  
hold;  
plotpro2(p560,q);
```

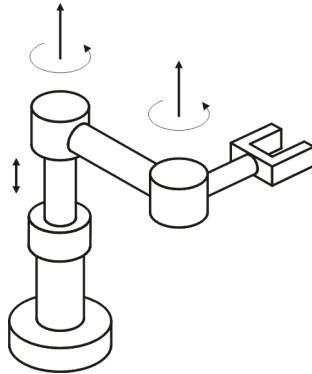
Rezultat je prikazan na slici 57.



Slika 57. Trajektorije, brzine i ubrzanja u unutrašnjim koordinatama PUMA560 robota

Zadatak 5.33

Za robot prikazan na slici 58, čije su dimenzije segmenata 0.8m, 0.6m i 0.4m, počev od osnove do hvataljke, potrebno je:



Slika 58. Cilindrični, TRR robot

Izvršiti modeliranje kinematike i dinamije robota u skladu sa DH notacijom. Segmente smatrati homogenim idealnim šipkama poluprečnika $r=0.05$ m.

Izvršiti sintezu trajektorije, tako da vrh robota prati trajektoriju zadatu parametarskom jednačinom

$$\rho = R \sin(3\phi), \phi \in [0, \pi],$$

gde su ρ i ϕ polarne koordinate u ravni, a $R=0.2$ m. Polarna ravan u kojoj leži kriva nagnuta je u odnosu na referentnu xy ravan pod uglom od 30° mereno od x ose, a centar krive izražen u referentnom koordinatnom sistemu, nalazi se u tački sa koordinatama $(0.5, 0.5, 0.4)$ m. Promena koordinate ϕ odvija se po trapeznom profilu brzine, pri čemu je ukupno vreme trajanja pokreta 4.5 s, a vreme ubrzavanja/usporavanja iznosi po 20% ukupnog trajanja pokreta. Rešiti inverznu kinematiku duž generisane trajektorije.

Rešenje:

Rešenje zadatka nalazi se u MATLAB skriptu `zadatak.m`

Deo skripta koji se odnosi na planiranje u spoljašnjim koordinatama dat je u nastavku.

```
% planiranje kretanja u spoljasnjim koordinatama

tf=4.5;
proc=20;
dt=1e-2;
tc=proc/100*tf;

X0=0.5;
Y0=0.5;
Z0=0.4;

a0= pi/(tc*(tf-tc)); % Ubrzanje
v0= a0/tc;           %brzina krstarenja

% inicijalizacija matrice "ispeglanih" homogenih transformacija
TC=[];
fivek=[];

jj=0;
% definisanje vektora vremenskih trenutaka pri ubrzanju
t=[0:dt:tc-dt];
for ii=1:numcols(t),
    jj=jj+1;
    fi=0.5*(a0)*t(ii)^2;
    fivek(jj)=fi;
    X1=0.2*sin(3*fi)*sin(fi);    Y1=0.2*sin(3*fi)*cos(fi);
    Z1=0;
    X(jj)=X1+X0;
    Y(jj)=Y1*cos(pi/6)-Z1*sin(pi/6)+Y0;
    Z(jj)=Z1*cos(pi/6)+Y1*sin(pi/6)+Z0;
% tekuca vrednost matrice homogene transformacije
    A=[1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, X(jj), Y(jj), Z(jj), 1];
    TC=[TC;A];
end

% definisanje vektora vremenskih trenutaka pri konst brzini
t=[tc:dt:tf-tc-dt];
for ii=1:numcols(t),
    jj=jj+1;
    fi=(v0)*(t(ii)-tc) + 0.5*a0*tc*tc; %+pi/8;
    fivek(jj)=fi;
    X1=0.2*sin(3*fi)*sin(fi);    Y1=0.2*sin(3*fi)*cos(fi);
    Z1=0;
    X(jj)=X1+X0;
    Y(jj)=Y1*cos(pi/6)-Z1*sin(pi/6)+Y0;
    Z(jj)=Z1*cos(pi/6)+Y1*sin(pi/6)+Z0;
% tekuca vrednost matrice homogene transformacije
    A=[1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, X(jj), Y(jj), Z(jj), 1];
    TC=[TC;A];
end

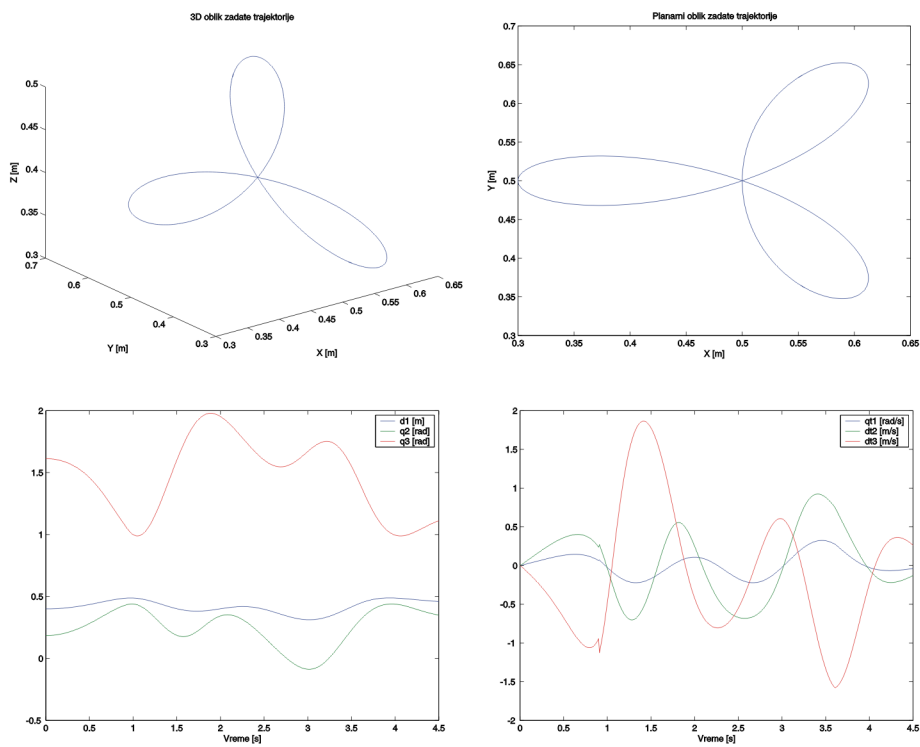
% definisanje vektora vremenskih trenutaka pri usporenju
t=[tf-tc:dt:tf];
for ii=1:numcols(t),
```

```

jj=jj+1;
%fi=-(32*pi/243)*t(ii)^2+(32*pi/27)*t(ii)-pi/3;
fi=-(0.5*a0)*(t(ii)-(tf-tc))^2+(v0)*(t(ii)-(tf-tc))+ pi/8+ v0*(tf-
2*tc);
fivek(jj)=fi;
X1=0.2*sin(3*fi)*sin(fi);    Y1=0.2*sin(3*fi)*cos(fi);
Z1=0;
X(jj)=X1+X0;
Y(jj)=Y1*cos(pi/6)-Z1*sin(pi/6)+Y0;
Z(jj)=Z1*cos(pi/6)+Y1*sin(pi/6)+Z0;
%_ tekuca vrednost matrice homogene transformacije
A=[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, X(jj), Y(jj), Z(jj), 1];
TC=[TC;A];
end

```

Trajektorije u spoljašnjim koordinatama, kao i trajektorije unutrašnjih koordinata i unutrašnjih brzina date su na sledećim slikama.



Slika 59. Trajektorija, trolisna rozeta, sa parametarskim profilom brzine, i unutrašnje koordinate cilindričnog robota dobijene inverznom kinematikom na bazi funkcije ikine.m

Zadatak 5.34

Robot poslužuje tri mašine za obradu koje imaju ista vremena ciklusa od 50 sekundi. Svaki ciklus se sastoji od vremena rada mašine od 30 sekundi i vremena punjenja odnosno pražnjenja od 20 sekundi. Odrediti kartu toka procesa za svaki uređaj u ćeliji kao i interferencu* izraženu u procentima.

Rešenje:

Sa karte toka procesa je data na slici možemo videti da robot poslužuje prvo mašinu M1, potom M2 i na kraju M3. Punjenje mašine M2 može započeti kada je napunjena mašina M1, a punjenje mašine M3 kada je završeno punjenje mašine M2. U drugom ciklusu se sistem rada ustali pa u njemu možemo da očitamo vrednosti praznih hodova i vreme trajanja ciklusa. Ako je vreme ciklusa (punjenje-rad) po mašini 50 sekundi vreme čekanja (praznog hoda) svake mašine između ciklusa (punjenje-rad) je 10 sekundi. Tako dobijamo da je ukupan ciklus (t_{CIK}) po mašini 60 sekundi.

Oznake korišćene na slici su:

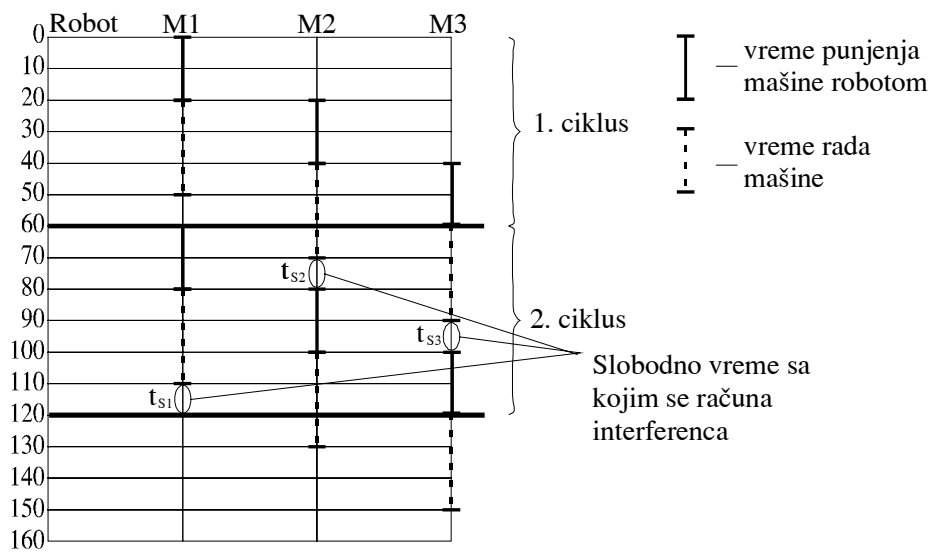
t_{S1} -vreme praznog hoda prve mašine (slobodno vreme)

t_{S2} -vreme praznog hoda druge mašine (slobodno vreme)

t_{S3} -vreme praznog hoda treće mašine (slobodno vreme)

t_{CIK} -ukupno vreme trajanja ciklusa (punjenje, rad, čekanje)

*) Robot često poslužuje više mašina. Interferenca je vreme dok mašina stoji a robot poslužuje drugu mašinu. Interferenca mašina može se meriti kao odnos ukupnog vremena i zastoja svih mašina i ciklusa robota. Najčešće se izražava u procentima.



Karta toka procesa

Pošto je vreme punjenja, rada i čekanja isto za sve tri mašine postoji samo jedna vrednost interference I_r koju možemo izračunati prema izrazu:

$$I_r = \frac{t_{s1} + t_{s2} + t_{s3}}{t_{cik}} \cdot 100\%$$

odakle sledi

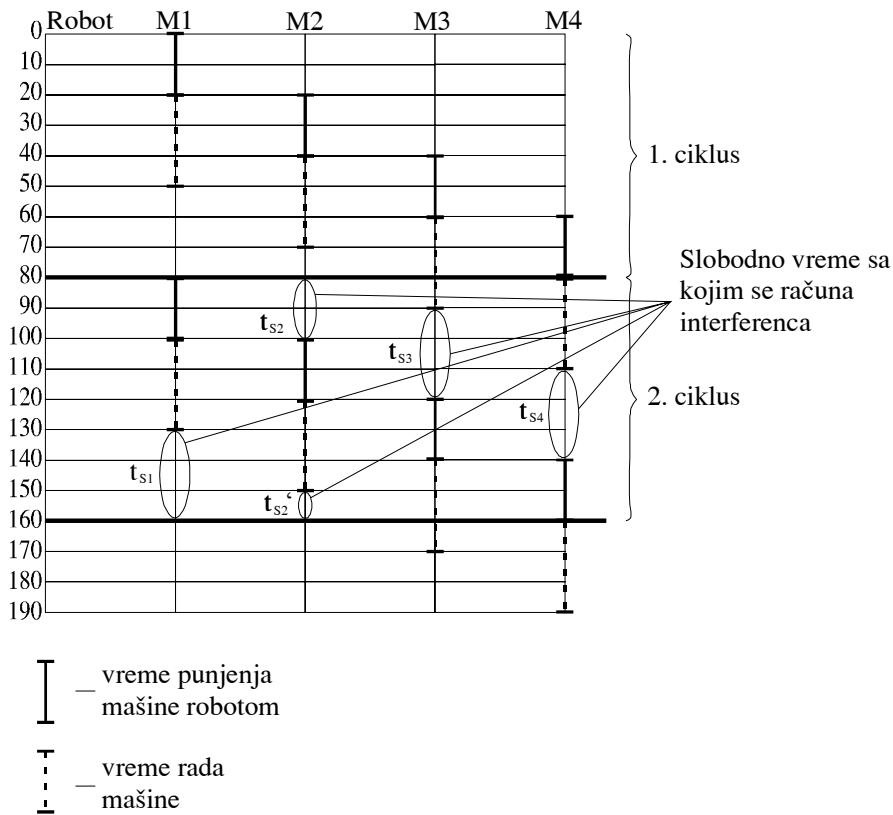
$$I_r = \frac{10 + 10 + 10}{60} \cdot 100\% = 50\%$$

Zadatak 5.35

Za ista vremena trajanja ciklusa kao u prethodnom zadatku odrediti vrednosti interference mašina kao i procenat neiskorišćenosti robota u robotizovanoj ćeliji sastavljenoj od četiri mašine.

Rešenje:

Karta toka procesa u ovom slučaju je data na sledećoj slici.

**Karta toka procesa**

Sa dijagrama možemo videti da robot poslužuje mašine M1, M2, M3 i na kraju mašinu M4. Vreme ciklusa (punjenje-rad) po mašini je ostalo isto. Vreme čekanja (praznog hoda) svake mašine između ciklusa (punjenje-rad) se povećalo na 30 sekundi, tako da je ukupan ciklus (t_{cik}) po mašini 80 sekundi. Sistem se ustaljuje u drugom ciklusu i iz njega očitavamo vrednosti praznog hoda.

Interesantno je da se primeti da se vreme praznog hoda kod mašine M2 deli na t_{s2} i t'_{s2} .

$$I_r = \frac{t_{s1} + (t_{s2} + t'_{s2}) + t_{s3} + t_{s4}}{t_{cik}} \cdot 100\%$$

$$I_r = \frac{30 + 30 + 30 + 30}{80} \cdot 100\% = 150\%$$

Zadatak 5.36

Tri mašine su organizovane u ćeliju sa robotom koji puni i prazni. Vremena ciklusa su dati na sledeći način.

	rad	poslu`ivanje
M1	30	20
M2	15	10
M3	20	10

Odrediti najbolji redosled aktivnosti koristeći kartu procesa rada, iznos interferenca mašina i procenat neiskorišćenog vremena robota.

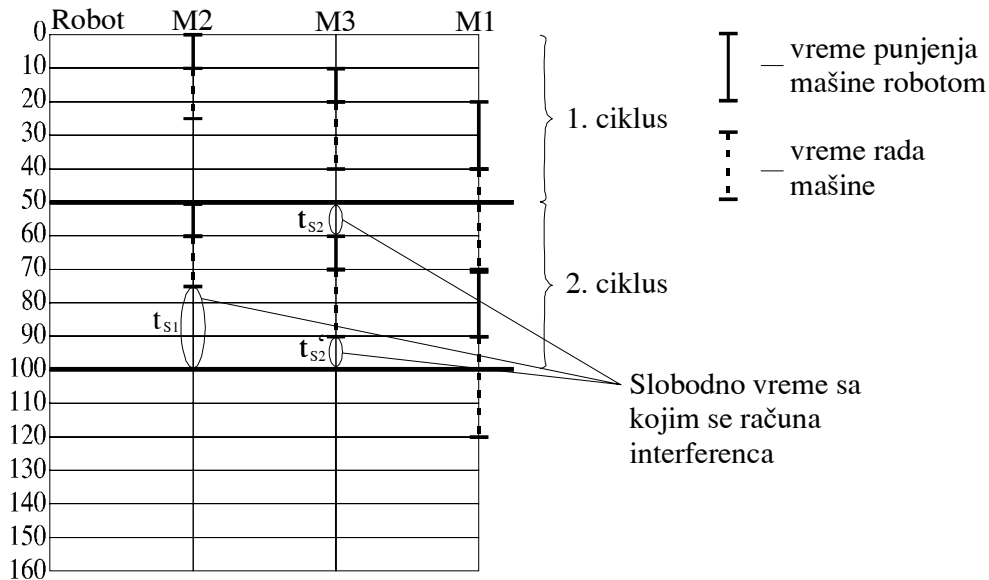
Rešenje:

Kod ovog zadatka vreme punjenja, rada i praznog hoda nije isto za sve mašine, pa se interferenca razlikuje zavisno od redosleda posluživanja mašina. Stoga treba da se razmotre moguće kombinacije redosleda posluživanja mašina koje su date u sledećoj tabeli.

Moguće kombinacije		
1	3	2
1	2	3
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

Detaljno ćemo razmotriti samo dve kombinacije i to: M2, M3, M1 i M1, M2, M3.

Razmotrimo najpre prvu kombinaciju redosleda posluživanja mašina: M2, M3, M1. Ako pogledamo drugi ciklus u kojem se sistem ustalio primećujemo da se vreme praznog hoda mašine M2 deli na dva segmenta od po 10 s, dok kod mašine M3 ne postoji vreme praznog hoda tj. $t_{s3}=0$.



Karta toka procesa za redosled posluživanja mašina: M2, M3, M1

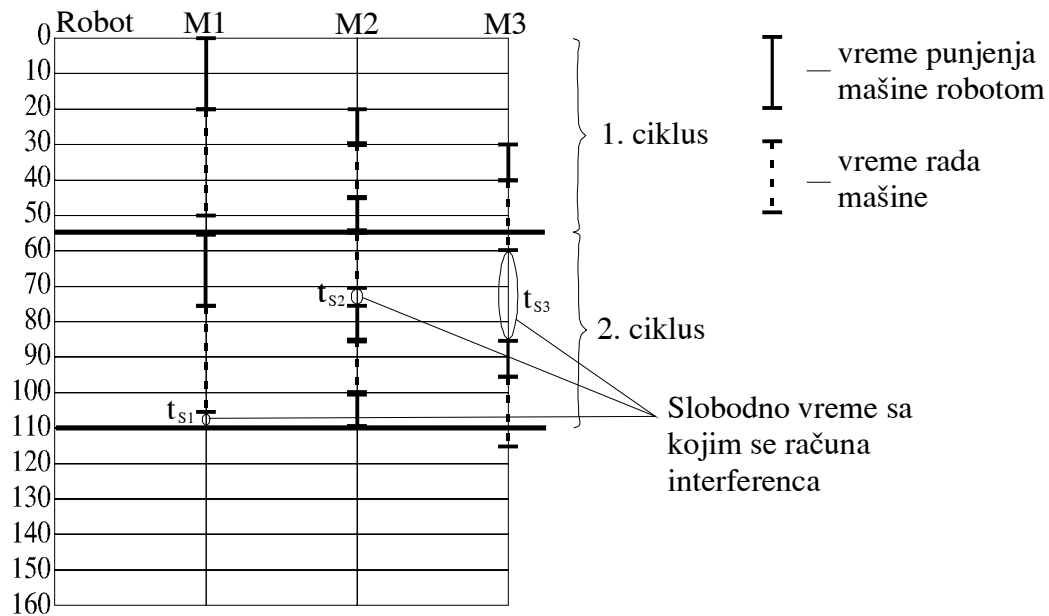
t_{s1} -vreme praznog hoda prve mašine
 t_{s2} -vreme praznog hoda druge mašine
 t_{s3} -vreme praznog hoda treće mašine
 t_{cik} -ukupno vreme trajanja ciklusa (punjenje, rad, ~ećanje)

U ovom slučaju sračunavamo interferencu prema izrazima

$$I_r = \frac{t_{s1} + (t_{s2} + t'_{s2}) + t_{s3}}{t_{cik}} \cdot 100\%$$

$$I_m = \frac{25 + (10 + 10) + 0}{50} \cdot 100\% = 90\%$$

Kod kombinacije M1, M2, M3 (isto posmatramo drugi ciklus kada se sistem ustalio) treba da primetimo da se kod mašine M2, javlja dva puta vreme punjenja. Ako robot nije zauzet punjenjem (opsluživanjem) mašine, dozvoljeno je opsluživanje mašina koje čekaju iako ciklus nije završen.



Karta toka procesa za redosled posluživanja mašina: M1, M2, M3

I ovde sračunavamo interferencu prema izrazima

$$I_r = \frac{t_{s1} + t_{s2} + t_{s3}}{t_{cik}} \cdot 100\%$$

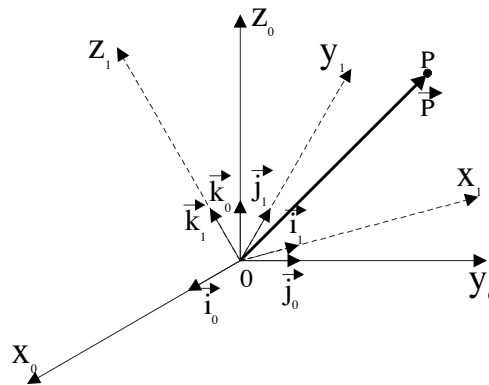
$$I_r = \frac{5 + 5 + 25}{55} \cdot 100\% = 63.64\%$$

Ova kombinacija je ujedno i najbolja jer daje najmanju vrednost interference.

D O D A T A K 1

ODREĐIVANJE MATRICE ROTACIJE IZMEĐU DVA KOORDINATNA SISTEMA

Neka su dva desna koordinatna sistema $O_o-x_o y_o z_o$ i $O_1-x_1 y_1 z_1$ (sa ortovima $\{\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\}$ i $\{\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\}$, respektivno) poklapaju samo koordinatnim počecima (koordinatne ose im se ne poklapaju) gde ćemo sistem $O_o-x_o y_o z_o$ smatrati nepokret-



Slika D1. Dva, međusobno zakrenuta, koordinatna sistema

nim. Veza između koordinata neke tačke P izražene u odnosu na ova dva koordinatna sistema se može prikazati matricom R_0^1 na sledeći način:

$$\vec{p}_0 = R_0^1 \cdot \vec{p}_1$$

pri čemu je matrica R_0^1 definisana na sledeći način.

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_0 & \vec{j}_1 \cdot \vec{i}_0 & \vec{k}_1 \cdot \vec{i}_0 \\ \vec{i}_1 \cdot \vec{j}_0 & \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_0 & \vec{k}_1 \cdot \vec{j}_0 \\ \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_0 & \vec{j}_1 \cdot \vec{k}_0 & \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_0 \end{bmatrix}$$

Dakle, matrica R_0^1 predstavlja transformaciju kojom treba pomnožiti koordinate tačke P izražene u odnosu na koordinatni sistem $O_1-x_1y_1z_1$ da bi se dobile koordinate iste tačke izražene u odnosu na koordinatni sistem $O_0-x_0y_0z_0$. Takođe se može videti da kolone matrice transformacije predstavljaju projekcije ortova zarotiranog koordinatnog sistema $O_1-x_1y_1z_1$ na ortove nepokretnog koordinatnog sistema $O_0-x_0y_0z_0$.

Na sličan način se može odrediti i matrica inverzne transformacije R_1^0

$$\vec{p}_1 = R_1^0 \cdot \vec{p}_0$$

koja je sada definisana kao:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \vec{i}_0 \cdot \vec{i}_1 & \vec{j}_0 \cdot \vec{i}_1 & \vec{k}_0 \cdot \vec{i}_1 \\ \vec{i}_0 \cdot \vec{j}_1 & \vec{j}_0 \cdot \vec{j}_1 & \vec{k}_0 \cdot \vec{j}_1 \\ \vec{i}_0 \cdot \vec{k}_1 & \vec{j}_0 \cdot \vec{k}_1 & \vec{k}_0 \cdot \vec{k}_1 \end{bmatrix}$$

Na osnovu ovih opštih izraza se mogu odrediti matrice rotacije koordinatnih sistema oko sopstvenih koordinatnih osa za neki ugao θ koje nazivamo osnovnim (bazičnim) matricama rotacije. Ako usvojimo skraćeni zapis $\sin \theta = S\theta$ i $\cos \theta = C\theta$, sledi:

- Matrica rotacije oko z – ose (Sl. D2):

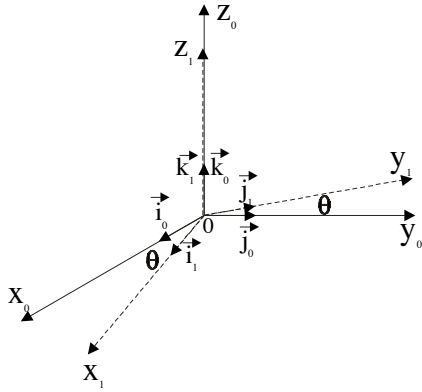
$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrica rotacije oko y – ose (Sl. D3):

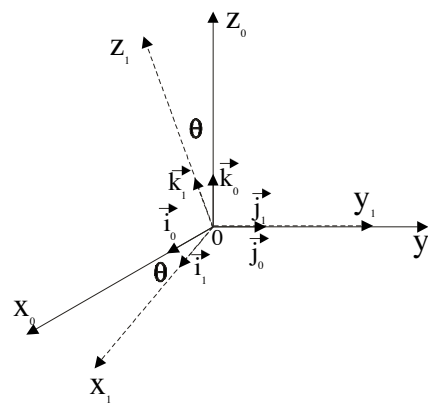
$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix}$$

- Matrica rotacije oko x – ose (Sl. - D4):

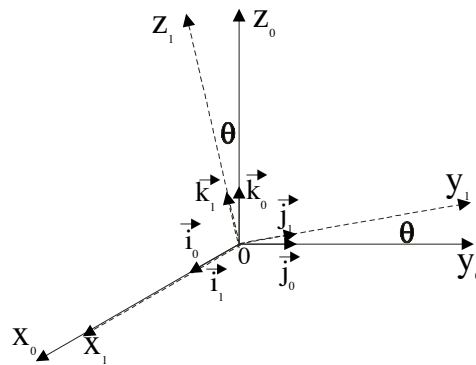
$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$



Slika D2. Rotacija koordinatnog sistema oko z – ose



Slika D3. Rotacija koordinatnog sistema oko y – ose



Slika D4. Rotacija koordinatnog sistema oko x – ose

Sva tri slučaja su ilustrovana na Sl. D2. – D4.

D O D A T A K 2

RAZLIČITI NAČINI ZADAVANJA MATRICA ROTACIJE

- **Ojlerovi uglovi**

Jedan od načina za definisanje željene orijentacije koordinatnog sistema je putem zadavanja Ojlerovih uglova θ , ϕ i ψ koji predstavljaju tri uzastopne rotacije izvedene na tačno određeni način. Postoji dvanaest načina definisanja Ojlerovih uglova, ali ćemo mi pomenuti samo dva koji se najčešće sreću.

ZYZ Ojlerovi uglovi

Da bi dobili krajnju orijentaciju koordinatnog sistema treba koordinatni sistem iz početnog položaja zarotirati oko z_0 ose za ugao ϕ , zatim oko novog položaja ose y izvršiti rotaciju za ugao θ , i na kraju, oko novog položaja ose z za ugao ψ . Matrica rotacije koja odgovara ovoj transformaciji je

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\theta \cdot C\psi - S\phi \cdot S\psi & -C\phi \cdot C\theta \cdot S\psi - S\phi \cdot C\psi & C\phi \cdot S\theta \\ S\phi \cdot C\theta \cdot C\psi + C\phi \cdot S\psi & -S\phi \cdot C\theta \cdot S\psi + C\phi \cdot C\psi & S\phi \cdot S\theta \\ -S\theta \cdot C\psi & S\theta \cdot S\psi & C\theta \end{bmatrix}.$$

ZYX Ojlerovi uglovi

U ovom slučaju, krajnju orijentaciju koordinatnog sistema dobijamo kada koordinatni sistem iz početnog položaja zarotiramo oko ose z_0 za ugao ϕ , zatim

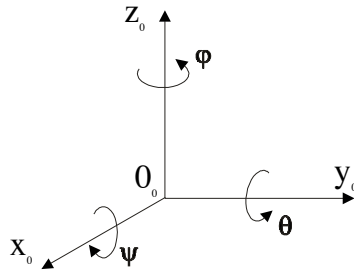
oko novog položaja ose y izvršimo rotaciju za ugao θ , i na kraju, oko novog položaja ose x izvršimo rotaciju za ugao ψ .

Konačna matrica rotacije se dobija u obliku:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\theta & C\phi \cdot S\theta \cdot S\psi - S\phi \cdot C\psi & C\phi \cdot S\theta \cdot C\psi + S\phi \cdot S\psi \\ S\phi \cdot C\theta & S\phi \cdot S\theta \cdot S\psi + C\phi \cdot C\psi & S\phi \cdot S\theta \cdot C\psi - C\phi \cdot S\psi \\ -S\theta & C\theta \cdot S\psi & C\theta \cdot C\psi \end{bmatrix}$$

- Rotacija definisana uglovima skretanja, valjanja i propinjanja

Matricu rotacije možemo definisati nizom uzastopnih rotacija oko osa nepokretnog koordinatnog sistema po određenom redosledu (Sl. D5.): rotacija oko z_0 ose za ugao ϕ , rotacija oko x_0 ose za ugao ψ i rotacija oko y_0 ose za ugao θ . Po analogiji sa kretanjem vozila (broda, aviona, ...) ugao ϕ nazivamo uglom skretanja (definiše



Sl. D5. Uglovi skretanja, valjanja i propinjanja

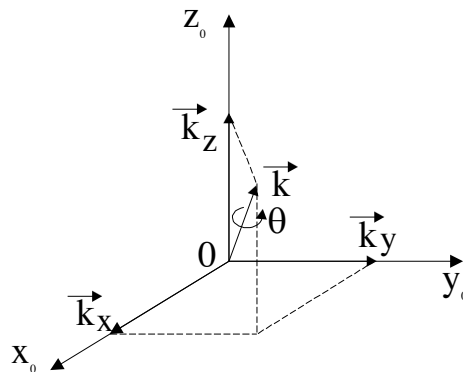
skretanje sa kursa), ugao ψ nazivamo uglom valjanja (odgovara bočnom valjanju broda) a ugao θ nazivamo uglom propinjanja. Zbog izuzetne rasprostranjenosti navodimo termine za ove uglove na engleskom jeziku: ugao skretanja se naziva *yaw*, ugao valjanja *roll*, a ugao propinjanja *pitch*.

Matrica rotacije ima sledeći oblik

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\theta \cdot C\psi - S\phi \cdot S\psi & -C\phi \cdot C\theta \cdot S\psi - S\phi \cdot C\psi & C\phi \cdot S\theta \\ S\phi \cdot C\theta \cdot C\psi + C\phi \cdot S\psi & -S\phi \cdot C\theta \cdot S\psi + C\phi \cdot C\psi & S\phi \cdot S\theta \\ -S\theta \cdot C\psi & S\theta \cdot S\psi & C\theta \end{bmatrix}$$

- Rotacija oko proizvoljne ose

Matricu rotacije, ukoliko je rotacija izvršena oko proizvoljne ose (Sl. D6) definisane ortom $\vec{t} = [t_x, t_y, t_z]^T$, koja se ne poklapa ni sa jednom od koordinatnih



Slika 60. Rotacija oko proizvoljne ose

osa, za određeni ugao θ možemo odrediti iz

$$R_{t,\theta} = \begin{bmatrix} t_x^2(1-C\theta) + C\theta & t_x t_y(1-C\theta) - t_z S\theta & t_x t_z(1-C\theta) + t_y S\theta \\ t_x t_y(1-C\theta) + t_z S\theta & t_y^2(1-C\theta) + C\theta & t_y t_z(1-C\theta) - t_x S\theta \\ t_x t_z(1-C\theta) - t_y S\theta & t_y t_z(1-C\theta) + t_x S\theta & t_z^2(1-C\theta) + C\theta \end{bmatrix}$$

gde je

$$\sin \alpha = \frac{t_y}{\sqrt{t_x^2 + t_y^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{t_x}{\sqrt{t_x^2 + t_y^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{t_z}{\sqrt{t_x^2 + t_y^2}}, \quad \cos \beta = t_z$$

- *Određivanje ose i ugla rotacije ako je poznata matrica rotacije*

Ukoliko je poznata matrica rotacije

$$\mathbf{R}_{\vec{k},\theta} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

onda je ekvivalentni ugao, obeležimo ga sa θ , dat sa

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} - 1}{2}\right)$$

a projekcije orta ose t su date sa

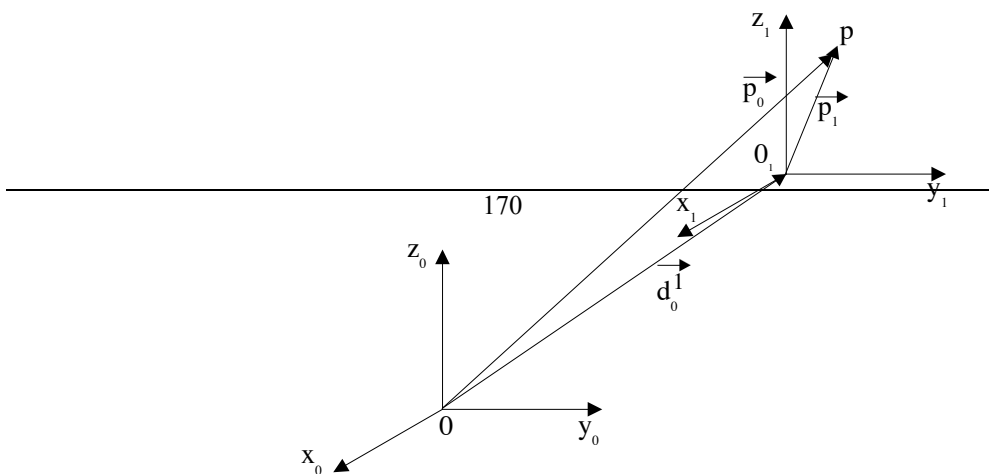
$$t = \frac{1}{2 \cdot \sin \theta} \cdot \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

D O D A T A K 3

HOMOGENE TRANSFORMACIJE

Veza dva koordinatna sistema kod kojih se koordinatni počeci ne poklapaju (postoji translacija) kao i čije ose nisu paralelne (postoji matrica rotacije) se može opisati sledećim izrazom

$$\vec{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \vec{p}_1 + \vec{d}_0^1$$



Slika D7. Koordinatni sistemi u proizvoljnom relativnom položaju

Međutim, uvođenjem homogenih transformacija se ova veza može izraziti na sledeći, jednostavniji, način

$$\vec{p}_0 = H_0^1 \cdot \vec{p}_1$$

gde je sa H_0^1 obeležena matrica homogene transformacije koja na sledeći način objedinjava matricu rotacije i vektor translacije

$$H = \begin{bmatrix} [R]^{3 \times 3} & [d]^{3 \times 1} \\ [0]^{1 \times 3} & [1]^{1 \times 1} \end{bmatrix}$$

gde je:

- $[R]^{3 \times 3}$ - matrica rotacije koordinatnog sistema
- $[d]^{3 \times 1}$ - vektor translacije koordinatnog početka
- $[0]^{1 \times 3}$ - vektor perspektive
- $[1]^{1 \times 1}$ - faktor skaliranja

U primenama koje ćemo mi razmatrati vektor perspektive i faktor skaliranja će biti konstantni i imaju uvek vrednosti date gornjim izrazom

U slučaju da nam je poznato \vec{p}_0 koordinate vektora \vec{p}_1 možemo da odredimo iz izraza:

$$\vec{p}_1 = H^{-1} \cdot \vec{p}_0$$

gde je:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \cdot \vec{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice homogenih transformacija za bazične transformacije su date sa:

Translacija duž ose **x** za dužinu **a**:

$$T_{ran.x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translacija duž ose **y** za dužinu **b**:

$$T_{ran.y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translacija duž ose **z** za dužinu **c**:

$$T_{ran.z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija oko ose **x** za ugao α :

$$R_{ot.x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija oko ose **y** za ugao φ :

$$R_{ot.y,\varphi} = \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

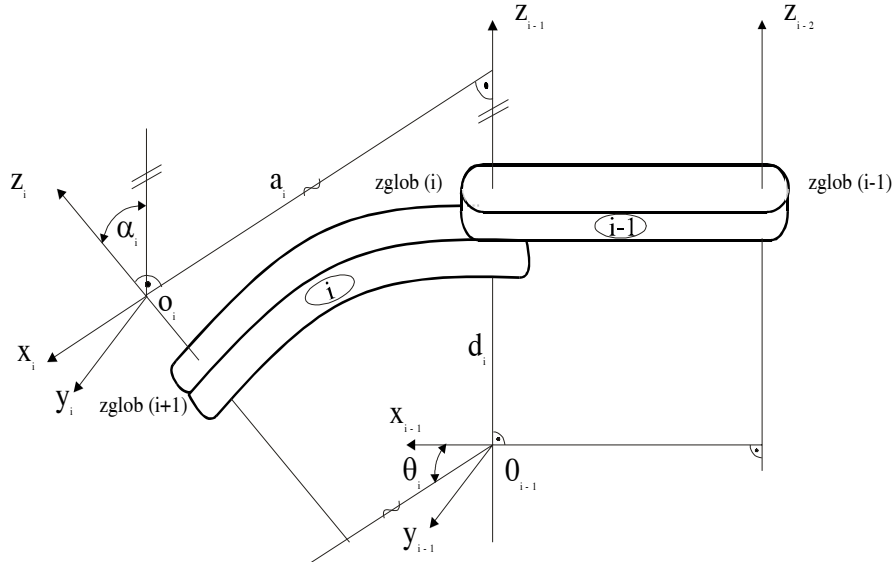
Rotacija oko ose **z** za ugao θ :

$$R_{ot.z,\theta} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D O D A T A K 4

DENAVIT-HARTENBERGOVA NOTACIJA

Razmotrimo dva susedna segmenta robota, $i-1$ -vog i i -tog, (na sl. D8. je pretpostavljeno da segmenti spojeni rotacionim zglobovima sa samo jednim stepenom slobode) gde su ose obrtanja zglobova obeležene sa z_i, z_{i-1} i z_{i-2} koje se, u opštem slučaju, mimoilaze u prostoru. Pretpostavimo, dalje, da je koordinatni sistem sa početkom O_{i-1} već postavljen. Tada je moguće odrediti zajedničku normalu između osa z_i, z_{i-1} kao zajedničku normalu između dve mimoilazne prave (na sl. D8. je ova zajednička normala obeležena sa a_i). Ako u pravcu zajedničke normale a_i postavimo osu x_i (smer se može birati proizvoljno), a osu y_i odredimo tako



Slika D8. DH parametri za rotacioni zglob

da sa x_i i z_i obrazuje desni koordinatni sistem tada koordinatni sistemi O_{i-1} i O_i predstavljaju dva koordinatna sistema koji su postavljeni u skladu sa Denavit-Hartenbergovom notacijom.

D-H parametre θ , α , d i a između ova dva koordinatna sistema možemo odrediti na sledeći način:

- parametar a je rastojanje između osa z_{i-1} i z_i mereno duž ose x_i
- parametar d je rastojanje koordinatnog početka O_{i-1} i preseka osa x_i i z_{i-1} mereno duž ose z_{i-1} ;
- parametar α je ugao između osa z_{i-1} i z_i (od ose z_{i-1} ka osi z_i) meren u ravni normalnoj na osu x_i ;
- parametar θ je ugao između osa x_{i-1} i x_i meren u ravni normalnoj na osu z_{i-1}

Parametre θ , α , d i a je moguće na sličan način odrediti i u slučaju linearnog (translatornog) zglobova, koji je prikazan na sl. D9. Koordinatni sistem koji odgovara translatorskom zglobovima se postavlja tako da se poklapa sa početkom narednog koordinatnog sistema koji je definisan. Osa x_i se postavlja u istom ili suprotnom smeru od vektora $z_{i-1} \times z_i$. Veličina d odgovara unutrašnjoj koordinati q_i . Nulta vrednost q_i odgovara položaju kada se koordinatni počeci O_i i O_{i-1} poklapaju. Za translatorski zglob ugao θ_i nije promenljiv već fiksni i predstavlja kinematički parametar, isto kao i ugao α_i .

Kada se za dati robot izvrši pridruživanje koordinatnih sistema pojedinim segmentima i odrede DH parametri tada su homogene matrice transformacije funkcije samo unutrašnjih koordinata q_i u zglobovima.

Parametar a_i reprezentuje dužinu segmenta, α_i ugao između osa zglobova istog segmenta (uvrnutost segmenta), parametar d_i predstavlja smaknutost (engl. *offset*) koordinatnih početaka O_{i-1} i O_i (u slučaju pravilnih geometrijskih oblika segmenata d_i predstavlja smaknutost "centara zglobova") dok parametar θ_i predstavlja ugao međusobnog zakretanja $i-1$ -vog i i -tog koordinatnog sistema što je u slučaju linearnog zglobova posledica savijenosti segmenta.

U slučaju rotacionog zglobova a_i , d_i i α_i predstavljaju fiksne parametre mehanizma dok θ_i predstavlja ugao zakretanja između dva segmenta (unutrašnja koordinata zglobova q_i), dok su u slučaju translatorskog zglobova parametri a_i , θ_i i α_i konstantni a d_i predstavlja pomeraj u zglobu (unutrašnja koordinata q_i). Treba obratiti pažnju da kod DH notacije postoji neslaganje u rednom broju zglobova i njemu pripadajućeg koordinatnog sistema. Naime, numeracija segmenata kinematičkog lanca kreće od segmenta vezanog za podlogu i **počinje sa 1** (1, 2, ..., n). Numeracija zglobova takođe počinje od podloge na isti način kao i kod segmenata, ali se koordinatni sistemi koji pripadaju svakom od zglobova numerišu drugačije. Osa baznog zglobova (zglob kojim se robot povezuje sa podlogom) obeležava se uvek sa z_0 tj. numeracija počinje od nule. To znači, da je i -ti zglob

prvi zglob i -tog segmenta dok je odgovarajući koordinatni sistem $i-1$ -vi što se može videti na slikama D8. i D9. Na isti način, prvi zglob početnog segmenta kinematičkog lanca (segment 1) je zglob 1, a njegov koordinatni sistem je O_0 .

Procedura formiranja kinematičkog modela (postavljanja koordinatnih sistema i formiranja matrica transformacije) počinje identifikacijom osa svih zglobova. Tip i raspored zglobova moraju biti poznati unapred.

Bazni koordinatni sistem se može postaviti bilo gde (Sl. D10) na osi z_0 (njegov položaj nije jednoznačno određen i može se izabrati najpovoljnija pozicija) a ose x_0 i y_0 treba odrediti tako da se oformi desni koordinatni sistem. Dalje se koordinatni sistemi postavljaju na način opisan ranije.

Razmotrimo, dalje, problem koji se javlja ako ose zglobova z_{i-1} i z_i pripadaju istoj ravni. Tu se mogu javiti dva slučaja:

- a) ose z_{i-1} i z_i se seku,
- b) ose z_{i-1} i z_i su paralelne.

U drugom slučaju, koji je sasvim čest u praksi, postoji beskonačno mnogo zajedničkih normala na ose z_{i-1} i z_i . Tada se osa x_i bira kao normala na z_{i-1} i da prolazi kroz O_{i-1} . Primetimo da je u tom slučaju \mathbf{d}_i jednako nuli, a zbog paralelnosti osa z_{i-1} i z_i parametar α_i je takođe jednak nuli. Kada je osa x_i određena, osa y_i se bira tako da oformi desni koordinatni sistem.

U prvom slučaju, kade se ose z_{i-1} i z_i seku, x_i se bira kao normala na ravan definisanu osama z_{i-1} i z_i dok je pravac x_i proizvoljan. Najprirodniji izbor koordinatnog početka O_i je u preseku osa z_{i-1} i z_i mada se može izabrati bilo koja tačka na osi z_i . Treba primetiti da je u ovom slučaju parametar a_i jednak nuli.

Takođe treba obratiti pažnju na postavljanje koordinatnog sistema poslednjeg (n -tog) segmenta, tj. koordinatnog sistema hvataljke. Koordinatni početak O_n se može izabrati proizvoljno, ali treba voditi računa da se DH parametri maksimalno uproste. Zbog toga se preporučuje (Sl. D10) da se O_n bira simetrično između prstiju hvataljke, jedino treba da se obezbedi da je osa x_n upravna na z_{n-1} . Ukoliko je poslednji zglob rotacioni treba osu z_n izabrati tako da je paralelna z_{n-1} ili da se sa njom poklapa.

Prema svemu izloženom moguće je propisati "algoritam" za definisanje kinematičkog modela robota proizvoljne mehaničke konfiguracije:

- Locirati i označiti sve ose zglobova od z_0 do z_{n-1} .
- Postaviti bazni koordinatni sistem bilo gde na z_0 osi.
- **Napomena:** korake 3 ÷ 5 ponavljati za $i = 1$ do $i = n-1$

- Locirati koordinatni početak O_i na mestu gde zajednička normala na ose z_i i z_{i-1} preseca osu z_i . Ako se z_i preseca sa z_{i-1} onda O_i postaviti u tačku preseka, a ako su z_i i z_{i-1} paralelni onda O_i postaviti u zglob z_i .
 - Postaviti osu x_i duž zajedničke normale između z_{i-1} i z_i kroz tačku O_i ili u pravcu normalnom na ravan z_i ; z_{i-1} ako se ove dve ose seku.
 - Postaviti y_i tako da se formira desni koordinatni sistem.
1. Postaviti koordinatni sistem hvataljke na pogodan način.
 2. Formirati tablicu parametara $a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i$.
 3. Formirati homogenu matricu transformacije zamenjujući vrednosti parametara iz tablice, formirati ukupnu matricu transformacije množeći sve matrice od početne do krajnje.

Odavde se može zaključiti sledeće:

- koordinatni sistemi se postavljaju u zglobove robota,
- na svakom segmentu se nalaze po dva koordinatna sistema,
- prvi koordinatni sistem (računato od početka (baze, osnove) kinematskog lanca je vezan za dotični segment, položaj drugog koordinatnog sistema zavisi od položaja narednog segmenta tj. pripada narednom segmentu u odnosu na

Matrica homogene transformacije između dva koordinatna sistema koji su postavljeni u skladu sa D-H notacijom (i izražena u funkciji D-H parametara) je data sa

$$A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i \cdot C\alpha_i & S\theta_i \cdot S\alpha_i & a_i \cdot C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i \cdot C\alpha_i & -C\theta_i \cdot S\alpha_i & a_i \cdot S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na opisani način je moguće u potpunosti definisati položaje svih koordinatnih sistema i oformiti ukupnu matricu transformacije koja povezuje poziciju i orijentaciju krajnjeg koordinatnog sistema kinematskog lanca (koordinatnog sistema hvataljke) izraženu u odnosu na bazni (nepokretni) koordinatni sistem

D O D A T A K 5

Jakobijan

Veza između linearne \bar{p} i ugaone $\bar{\omega}$ brzine hvataljke i brzina u zglobovima \dot{q} robota, se može napisati na sledeći način

$$\begin{aligned}\dot{p} &= J_L \dot{q} \\ \omega &= J_U \dot{q}\end{aligned}$$

Obe jednačine možemo objediniti u jedinstven izraz čime se dobija relacija

$$\dot{s} = v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q) \dot{q} \quad (\text{D5.1})$$

gde je \dot{s} ukupni vektor brzine hvataljke izražen u spoljašnjim koordinatama (objedinjeni su vektori linearne i ugaone brzine), $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$ je vektor brzina u zglobovima mehanizma. Matrica $J(q)$ kojom se povezuje kretanje u zglobovima mehanizma sa kretanjem hvataljke se naziva jakobijevom matricom ili jakobijanom. Prema tome, ***jakobijeva matrica povezuje brzine kretanja zglobova robotskog mehanizma sa linearnom i ugaonom brzinom kretanja hvataljke izražene u spoljašnjim (dekartovim pravouglim) koordinatama.***

Da bi bolje razumeli prirodu matrice J napišimo izraz (D5.1) u razvijenoj formi (posmatračemo mehanizam koji ima šest stepeni slobode),

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad (D5.2)$$

Posmatrajmo samo prvu jednačinu sistema

$$\dot{x} = J_{11}\dot{q}_1 + J_{12}\dot{q}_2 + J_{13}\dot{q}_3 + J_{14}\dot{q}_4 + J_{15}\dot{q}_5 + J_{16}\dot{q}_6 \quad (D5.3)$$

Iz forme izraza (D5.3) se vidi da su članovi (elementi) jakobijana u stvari parcijalni izvodi funkcije kojom se definiše pozicija i orijentacija vrha robota u spoljašnjim koordinatama po unutrašnjim uglovima u zglobovima mehanizma robota i mogu se odrediti analitički ili numerički.

- **Analitičko sračunavanje jakobijana**

Za određivanje Jakobijana analitičkim putem potrebno je imati funkciju kojom se povezuju spoljašnje koordinate hvataljke sa unutrašnjim koordinatama u zglobovima, koju zatim treba diferencirati po unutrašnjim koordinatama. Na primer, za minimalnu konfiguraciju (samo tri prva stepena slobode) funkcije $x = f(q_1, q_2, q_3)$, $y = f(q_1, q_2, q_3)$ i $z = f(q_1, q_2, q_3)$ predstavljaju poziciju vrha robota čijim diferenciranjem dobijamo

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \\ dy &= \frac{\partial y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \\ dz &= \frac{\partial z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \end{aligned} \quad (D5.4)$$

što se u vektorskoj formi može napisati kao

$$ds = J(q) dq \quad (D5.5)$$

gde je

$$ds = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}, \quad dq = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}.$$

pa sledi

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (D5.6)$$

Matrica J je, dakle, matrica parcijalnih izvoda funkcija $x(q_1, q_2, q_3)$, $y(q_1, q_2, q_3)$ i $z(q_1, q_2, q_3)$ u odnosu na uglove u zglobovima q_1, q_2 i q_3 . Prema tome, vrednosti elemenata matrice J se mogu dobiti diferenciranjem gornjih izraza.

- **Numeričko sračunavanje jakobijana**

Ako napišemo jakobijevu matricu u sledećem obliku

$$J = \begin{bmatrix} J_{L1} & J_{L2} & \cdots & J_{Ln} \\ J_{U1} & J_{U2} & \cdots & J_{Un} \end{bmatrix} \quad (D5.7)$$

tako da svaki element J_{Li} i J_{Ui} predstavlja vektor kolonu dimenzije (3x1), lako se može uočiti da prvi deo kolone (J_{Li}) odgovara doprinosu i-tog zgloba linearnom, a drugi deo (J_{Ui}) ugaonom kretanju hvataljke. Prema tome, u razvijenoj formi možemo pisati

$$\begin{bmatrix} v_H \\ \omega_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{L1}^1 \\ J_{L1}^2 \\ J_{L1}^3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} J_{L2}^1 \\ J_{L2}^2 \\ J_{L2}^3 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} J_{Ln}^1 \\ J_{Ln}^2 \\ J_{Ln}^3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} J_{U1}^1 \\ J_{U1}^2 \\ J_{U1}^3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} J_{U2}^1 \\ J_{U2}^2 \\ J_{U2}^3 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} J_{Un}^1 \\ J_{Un}^2 \\ J_{Un}^3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (D5.8)$$

Odavde se linearna brzina vrha robota može napisati kao

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{J}_{L1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{J}_{L2} \cdot \dot{\mathbf{q}}_2 + \dots + \mathbf{J}_{Ln} \cdot \dot{\mathbf{q}}_n \quad (\text{D5.9})$$

a ugaona brzina hvataljke kao

$$\boldsymbol{\omega}_H = \mathbf{J}_{U1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{J}_{U2} \cdot \dot{\mathbf{q}}_2 + \dots + \mathbf{J}_{Un} \cdot \dot{\mathbf{q}}_n \quad (\text{D5.10})$$

Razmotrimo kako možemo da odredimo elemente matrice \mathbf{J}_{Li} i \mathbf{J}_{Ui} .

Na sl. 3.3.a. je prikazan slučaj kada je i -ti zglob robota (rotacioni) i njegov položaj u odnosu na hvataljku, dok je na sl. 3.3.b. i -ti zglob robota translatorni. Neka su sa z_i obeležene ose zglobova koje su postavljene u prethodnom postupku određivanja DH parametara.

Razmotrimo najpre kako kretanje nekog od zglobova mehanizma može da doprinese promeni linearne brzine hvataljke.

U slučaju da je i -ti zglob translatoran (*pripadajuća z osa je tada z_{i-1}*)

a) rotacion zglob

b) translatorni zglob

Slika 61. Infinitesimalni pomeraji hvataljke zbog pomeranja rotacionog i linearnog (translatornog) zgloba

njegovo pomeranje izaziva samo translatorno pomeranje hvataljke pravcu z_{i-1} ose, intenziteta \dot{d}_i , tj.

$$\mathbf{J}_{Li} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{z}_{i-1} \cdot \dot{\mathbf{d}}_i \quad (\text{D5.11})$$

Ako je i -ti zglob rotacioni njegovim pokretanjem će deo mehanizma koji se nalazi između zglobova koji se pokreće i hvataljke dobiti ugaonu brzinu

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{z}_{i-1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i \quad (\text{D5.12})$$

koja će linearnu brzinu hvataljke robota, koja je od ose obrtanja udaljena za $r_{i-1,H}$, promeniti za

$$\mathbf{J}_{Li} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,H} = (\mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,H}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_i \quad (\text{D5.13})$$

Na sličan način ćemo odrediti kako kretanja u translatorskom i rotacionom zglobu doprinose promeni ugaone brzine hvataljke.

Ako je i -ti zglob translatorski on ne doprinosi promeni ugaone brzine hvataljke

$$\mathbf{J}_{Ui} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i = 0 \quad (\text{D5.14})$$

Ako je i -ti zglob rotacioni, ugaona brzina koja se generiše kretanjem zgloba, je data sa

$$\mathbf{J}_{Ui} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{z}_{i-1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i \quad (\text{D5.15})$$

Prema tome, jednačinama (D5.11, D5.13- D5.15) je moguće odrediti elemente jakobijana \mathbf{J}_{Li} i \mathbf{J}_{Ui} za slučaj translatorskih i rotacionih zglobova pa možemo rezimirati

- za translatorski zglob

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Li} \\ \mathbf{J}_{Ui} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{D5.16})$$

- za rotacioni zglob

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Li} \\ \mathbf{J}_{Ui} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,H} \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (\text{D5.17})$$

Pri sračunavanju jakobijana jedine veličine koje treba odrediti su vektori

z_{i-1} i $r_{i-1,H}$ koji su funkcije samo pomeraja u zglobovima robota. Vektor z_{i-1} predstavlja treću kolonu u matrici rotacije R_o^{i-1} i moguće ga je veoma jednostavno odrediti na sledeći način

$$z_{i-1} = R_0^1(q_1)R_1^2(q_2)\dots R_{i-2}^{i-1}(q_{i-1})z_0 \quad (D5.18)$$

gde je $z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$ što nam omogućava da se iz matrice R_o^{i-1} odaberemo samo treću kolonu.

Vektor položaja od $i-1$ -vog zgloba do hvataljke $r_{i-1,H}$ je moguće odrediti (slike 3.3.a i b) kao razliku vektora p_H od koordinatnog početka do hvataljke i vektora p_{i-1} od koordinatnog početka do $i-1$ -vog zgloba. Vektor p_H je moguće odrediti kao prva tri elementa četvrte kolone ukupne homogene matrice transformacije T_0^H koja je data sa

$$T_0^H = H_0^1(q_1)H_1^2(q_2)\dots H_{n-i}^H(q_n)$$

pa sledi

$$p_H = T_0^H p_0 \quad (D5.19)$$

gde je p_0 dato sa $p_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$. Sličnim postupkom je moguće odrediti i vektor p_{i-1} . Naime,

$$p_{i-1} = H_0^1(q_1)H_1^2(q_2)\dots H_{i-2}^{i-1}(q_{i-1})p_0 \quad (D5.20)$$

Prema tome, izrazi (D5.18-D5.20) omogućavaju jednostavno sračunavanje elemenata jakobijana numeričkim putem pod uslovom da su poznate matrice transformacije koje odgovaraju datoj (trenutnoj) pozi mehaničkestrukture robota.

DIFERENCIJALNA KINEMATIKA ROBOTA

Položaj vrha robota određen je vektorom

$$\mathbf{r} = [x \ y \ z \ \psi \ \theta \ \varphi]^T, \quad \dim \mathbf{r} = m \leq 6$$

a konfiguracija robota određena je vektorom

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T, \quad \dim \mathbf{q} = n \leq 6, \quad n \geq m;$$

za $n > m$ robot je redundantan.

Funkcija koja preslikava vektor unutrašnjih koordinata \mathbf{q} na vektor spoljašnjih koordinata \mathbf{x} naziva se direktnom kinematičkom funkcijom.

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{q}), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Značajno složeniji problem predstavlja izračunavanje inverzne kinematičke funkcije,

$$f^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Ukoliko je zadata tačka vrha robota van domašaja, inverzna kinematička funkcija f^{-1} ne postoji.

Posmatrajmo šta se događa sa diferencijalnim tumačenjem vektora položaja robota i vrha robota. Po diferenciranju direktne kinematičke funkcije dobija se

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}},$$

gde je $\dot{\mathbf{x}}$ - vektor poznatih brzina vrha, a $\dot{\mathbf{q}}$ - vektor nepoznatih brzina zglobova.

Uvedimo definiciju Jakobijana

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}$$

Ukoliko znamo matrice transformacija od nosnove do vrha robota, možemo odrediti Jakobijan.

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1 \cdot {}^1\mathbf{T}_2 \cdot \dots \cdot {}^{n-1}\mathbf{T}_n$$

gde su

$${}^i\mathbf{T}_{i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i & \mathbf{s}_i & \mathbf{a}_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Predpostavimo da Jakobijan ima sledeću po kolonama gde svaka kolona sadrži dva vektora dimenzije 3:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{p1} & \mathbf{j}_{p2} & \cdots & \mathbf{j}_{pn} \\ \mathbf{j}_{o1} & \mathbf{j}_{o2} & \cdots & \mathbf{j}_{on} \end{bmatrix}_{6 \times n}$$

gde su \mathbf{j}_{pi} - deo jakobijana koji se definiše doprinos ugaonih brzina translacionim brzinama vrha robota i \mathbf{j}_{oi} - deo jakobijana koji se definiše doprinos ugaonih brzina rotacionim brzinama vrha robota. Opšta definicija elemenata jakobijana glasi

$$\mathbf{j}_{pi} = \begin{cases} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \end{cases}, \quad \mathbf{j}_{oi} = \begin{cases} 0, & \text{translacija} \\ \mathbf{z}_{i-1}, & \text{rotacija} \end{cases} \quad (39)$$

gde je \mathbf{z}_{i-1} treća kolona matrice ${}^0\mathbf{T}_{i-1}$

$$\mathbf{z}_{i-1} = {}^0\mathbf{T}_{i-1} \cdot \mathbf{z}_0 = {}^0\mathbf{T}_{i-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a \mathbf{p} - vektor položaja na matricu ${}^0\mathbf{T}_n$ a \mathbf{p}_i - vektor položaja na matricu ${}^0\mathbf{T}_i$.

Algoritam za rešavanje inverzne kinematike

Podjimo od jednačine diferencijalne kinematike

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

Ako je Jakobijan kvadratna matrica i ako ima pun rang, jednak

$\dim(\mathbf{x}) = \dim(\mathbf{q}) = n$, onda postoji $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$ i mogu se izračunati unutrašnje brzine

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{x}}$$

Prethodna jednačina može se napisati i kao

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{v}$$

Za konačno vreme diskretizacije Δt može se napisati

$$\frac{\mathbf{q}(t_{k+1}) - \mathbf{q}(t_k)}{\Delta t} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t_k)) \cdot \mathbf{v}(t_k),$$

odnosno

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t_k)) \cdot \mathbf{v}(t_k) \cdot \Delta t, \mathbf{q}(t_0)$$

Time je linearizovan model $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$. Veoma je važno da pravilno odaberemo vrednost Δt . Premala vrednost dovodi do sporog rešavanja inverzne kinematike a preveliko dovodi do prevelike greške. Definišimo grešku ostvarene i željene trajektorije $\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$ gde je \mathbf{x}_d – željeni (desired) položaj vrha robota

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot [\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{e}}]\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je vremenska zavisnost promene greška, odstupanje od željene trajektorije, definisano diferencijalnom jednačinom prvog reda sa konstantnim koeficijentom k

$$\dot{\mathbf{e}} + k\mathbf{e} = 0$$

Tada je rešenje inverzne kinematike, kao funkcija greške

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot (\dot{\mathbf{x}}_d + k\mathbf{e}),$$

Što je k veće impulsni odziv brže teži nuli! Ali postoji gornja granica za k jer ako idemo preko nje, algoritam može postati nestabilan.

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t_k)) \cdot [\mathbf{v}_d(t_k) + k(\mathbf{x}_d(t_k)) - f(\mathbf{q}(t_k))]$$

REFERENCE

L. Sciavico, B. Siciliano, **Modeling and control of robot manipulators**,
Mc Graw-Hill, 1996.

Milan Rašić, **Diplomski rad**, Elektronski fakultet Univerziteta u Nišu, 1996.

Robotics Toolbox for MATLAB, ver 5, CSIRO, Australia

MATLAB, ver 4.5, Mathworks, Nantucket

E. Rivin, **Mechanical Design of Robots**, Mc Graw-Hill Inc, 1988.