MATEMATIČKE METODE U U RAČUNARSTVU – II računske vježbe

Zadatak 1.

Niz L_n je definisan rekurzivno:

$$L_0 = 5 \tag{1}$$
$$L_n = 2L_{n-1} - 7 \text{ za } n \geq 1. \tag{2}$$

Koristeći se matematičkom indukcijom pokažite da je:

$$L_n = 7 - 2^{n+1}. \tag{3}$$

Rješenje:
1. Po definiciji iz (2), za $n = 1$, biće

$$L_1 = 2 \cdot L_0 - 7 = 2 \cdot 5 - 7 = 3,$$

a po pretpostavci iz (3) biće

$$L_1 = 7 - 2^2 = 7 - 4 = 3,$$

dokazujući da je izraz tačan za $n = 1$.
2. Uzmimo neko $n \geq 1$ i pretpostavimo da za njega važi da je $L_n = 7 - 2^{n+1}$. Treba dokazati da će, uz uvedenu pretpostavku, niz dobijen za $n + 1$, biti

$$L_{n+1} = 7 - 2^{n+2}.$$

Iskoristimo rekurzivnu relaciju i napišimo L_{n+1} u obliku datom u (2)

$$2L_n - 7 = 7 - 2^{n+2}$$

$$2L_n = 7 - 2^n \cdot 2^2 + 7$$

$$2L_n = 14 - 2^n \cdot 4.$$

Ako podijelimo prethodni izraz sa 2, dobijamo:

$$L_n = 7 - 2^n \cdot 2 = 7 - 2^{n+1},$$

što smo i trebali dokazati.

Zadatak 2.

Riješiti diferencnu jednačinu $S(n) - 7S(n-1) + 10S(n-2) = 6 + 8 \cdot n$, *uz početne uslove:* $S(0) = 1$ *i* $S(1) = 2$.

Rješenje: U pitanju je nehomogena jednačina, ona se može rješavati tako što pronađemo opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine $S_H(n)$, i jedno partikularno rješenje nehomogene jednačine $S_P(n)$. Opšte rješenje nehomogene jednačine je jednako sumi opšteg rješenja odgovarajuće homogene jednačine $S_H(n)$ i partikularnog rješenja nehomogene jednačine $S_P(n)$:

$$S(n) = S_H(n) + S_P(n)$$

Najprije rješavamo odgovarajuću homogenu jednačinu:

$$S(n) - 7S(n-1) + 10S(n-2) = 0.$$

Njena karakteristična jednačina je:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

a njena rješenja (karakteristične vrijednosti) su:

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = 2$. Dakle, opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine biće:

$$S_H(n) = A_1 \cdot 5^n + A_2 \cdot 2^n$$

Partikularno rjesenje tražimo u obliku koji odgovara desnoj strani nehomogene jednačine:

$$S_P(n) = a \cdot n + b,$$

jer nijedna karakteristična vrijednost nije jednaka jedinici.

Uvrštavanjem $S_P(n)$ u polaznu jednačinu dobijaju se koeficijenti a i b:

$$a \cdot n + b - 7(a(n-1) + b) + 10(a(n-2) + b)) = 6 + 8 \cdot n,$$

$$(4a)n + (4b - 13a) = 6 + 8n.$$

Da bi gornji izraz bio tačan za svako n mora biti $4b - 13a = 6$ i $4a = 8$, odakle dobijamo $a = 2$ i $b = 8$. Dakle niz:

$$S_P(n) = 2n + 8$$

je rješenje polazne nehomogene jednačine.

Sada opšte rješenje polazne, nehomogene, jednačine dobijamo kao sumu $S(n) = S_H(n) + S_P(n)$, odnosno:

$$S(n) = A_1 \cdot 5^n + A_2 \cdot 2^n + 8 + 2n$$

Iskoristićemo početne uslove da bismo odredili konstante A_1 i A_2:
$S(0) = 1$ povlači $A_1 + A_2 + 8 = 1$
$S(1) = 2$ povlači $5A_1 + 2A_2 + 8 + 2 = 2$
Rješavanjem ovog sistema jednačina dobija se: $A_1 = 2$ i $A_2 = -9$, pa je traženo rješenje rekurzivne relacije niz:

$$S(n) = 2 \cdot 5^n - 9 \cdot 2^n + 8 + 2n.$$

Zadatak 3.

Riješiti diferencnu jednačinu $S(n) - 6S(n-1) + 5S(n-2) = -8n + 14$, *uz početne uslove:* $S(0) = 0$ *i* $S(1) = 2$.

Rješenje: U pitanju je nehomogena jednačina, ona se može rješavati tako što pronađemo opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine $S_H(n)$, i jedno partikularno rješenje nehomogene jednačine $S_P(n)$. Opšte rješenje nehomogene jednačine je jednako sumi opšteg rješenja odgovarajuće homogene jednačine $S_H(n)$ i partikularnog rješenja nehomogene jednačine $S_P(n)$:

$$S(n) = S_H(n) + S_P(n)$$

Najprije rješavamo odgovarajuću homogenu jednačinu:

$$S(n) - 6S(n-1) + 5S(n-2) = 0.$$

Njena karakteristična jednačina je:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

dok su rješenja karakteristične jednačine:

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

odnosno $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 5$, tako da će opšte rješenje homogene jednačine biti:

$$S_H(n) = A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot 5^n = A_1 + A_2 \cdot 5^n$$

U slučaju kada je desna strana rekurzivne jednačine oblika $a_0 \cdot n + b$, partikularno rješenje tražimo u obliku $S_P(n) = a \cdot n + b$ kada $\lambda = 1$ nije rješenje karakteristične jednačine. Budući da u našem slučaju $\lambda_1 = 1$ **jeste** jedno rješenje karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražićemo u obliku:

$$S_P(n) = n(a \cdot n + b),$$

Da bi odredili konstante a i b, uvrstimo $S_P(n)$ u polaznu jednačinu:

$$n(a\cdot n+b)-6(n-1)(a(n-1)+b)+5(n-2)(a(n-2)+b)=-8n+14$$
$$n^2(a-6a+5a)+n(-8a-b)-6a+6b+20a-10b=-8n+14$$
$$n(-8a-b)+14a-4b=-8n+14b$$

Da bi prethodni izraz bio tačan za svako n, treba da važe sljedeće jednakosti: $-8a-b=-8$ i $14a-4b=14$, odakle dobijamo da je $a=1$ i $b=0$. Dakle, jedno rješenje (partikularno) polazne nehomogene jednačine je:

$$S_P(n)=n(1\cdot n+0)=n\cdot n=n^2$$

Sada opšte rješenje polazne, nehomogene, jednačine dobijamo kao sumu $S(n)=S_H(n)+S_P(n)$, odnosno:

$$S(n)=A_1+A_2\cdot 5^n+n^2$$

Iskoristićemo početne uslove da bismo odredili konstante A_1 i A_2:
$S(0)=1$ povlači $A_1+A_2\cdot 5^0+0^2=A_1+A_2=0$