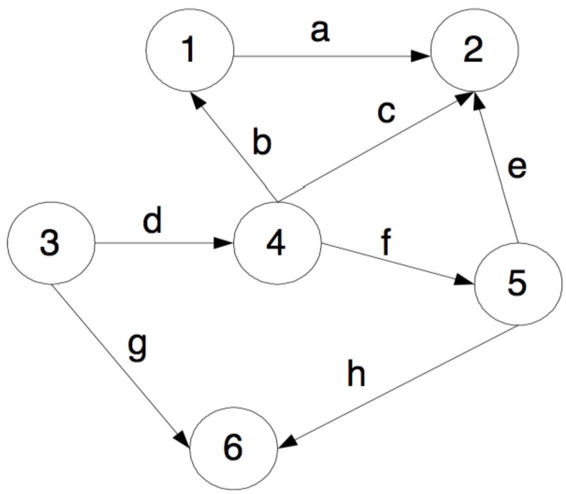
MATEMATIČKE METODE U U RAČUNARSTVU – V računske vježbe

Zadatak 1.

Za orijentisani graf sa slike 1 napisati matricu susjedstva i matricu incidencije.



Slika 1: Zadati graf.

Rješenje:

U matrici susjedstva $\mathbf{A}$ i vrste i kolone predstavljaju čvorove koji su na neki način označeni (brojevima od 1 do 6 u našem primjeru). Element a_{ij} matrice susjedstva $\mathbf{A}$, usmjerenog grafa, ima vrijednost 1 ukoliko je čvor koji je predstavljen u i-toj vrsti povezan sa čvorom koji je predstavljen u j-toj koloni granom koja je usmjerena od i ka j. Posmatrajmo graf sa slike 1 i pišimo matricu susjedstva. Vrste će biti redom čvorovi 1, 2, ..., 6, kolone će takođe predstavljati čvorove 1, 2, ..., 6. Matrica susjedstva će biti:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

U matrici $\mathbf{A}$ samo dio koji je napisan unutar uglastih matrica čine elementi matrice susjedstva, brojevi prije uglastih zagrada i iznad matrice ilustruju šta je zapisano u vrstama, a šta u kolonama.

Matrica incidencije $\mathbf{G}$ je matrica koja ima onoliko vrsta koliko graf ima čvorova i onoliko kolona koliko graf ima grana. Ona se definiše različito za slučaj orijentisanog i neorijentisanog grafa. Ako je graf orijentisan tada je

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ ako čvor } i \text{ nije ni polazni ni krajnji čvor grane } j \\ -1 \text{ ako je čvor } i \text{ polazni čvor grane } j \\ 1 \text{ ako je čvor } i \text{ krajnji čvor grane } j \end{cases}$$

Za dati graf, vrste će biti redom čvorovi 1, 2, ..., 6, a kolone će predstavljati grane a, b, ..., h. Matrica incidencije će biti:

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Primjetimo da matrica incidencije u svakoj koloni (koja odgovara toj grani) ima samo jednu vrijednost -1, na poziciji koja odgovara čvoru iz kojeg ta grana ističe, i jednu vrijednost 1, na poziciji koja odgovara čvoru u koji ta grana utiče. Sve ostalo su nule jer jedna grana povezuje tačno 2 čvora.

Zadatak 2.

Data je matrica susjedstva A orijentisanog grafa. Odrediti na osnovu nje matricu incidencije.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Rješenje:

Pođimo od definicije matrice susjedstva. U matrici susjedstva orijentisanog grafa element na poziciji $a_{ij} = 1$ ukoliko postoji direktna veza čvora i sa čvorom j. Ta direktna veza je zapravo grana koja izlazi iz čvora i a ulazi u čvor j.

Prvo što zaključujemo na osnovu matrice $\mathbf{A}$ i njene definicije jeste da imamo tačno 4 grane (označimo ih sa a, b, c, d). Ovaj zaključak smo izveli iz činjenice da su samo 4 elementa matrice $\mathbf{A}$ jednaka jedinici. Sada možemo odrediti i elemente matrice incidencije $\mathbf{G}$. Sa a označavamo granu koja odgovara jedinici na poziciji a_{12}, b $-$ jedinici na poziciji a_{13}, c $-$ jedinici na poziciji a_{41} i d $-$ jedinici na poziciji a_{43}. Ako grana za koju pišemo vrijednosti elemenata matrice incidencije (elementi u odgovarajućoj koloni) odgovara jedinici iz matrice susjedstva na poziciji a_{ij} to znači da grana izlazi iz čvora i (dakle, u toj koloni imamo -1 u i-toj vrsti) i ulazi u čvor j (1 u j-toj vrsti). Sve ostale vrijednosti u posmatranoj koloni su 0, jer jedna grana direktno povezuje samo dva čvora. Dakle, matrica incidencije koja odgovara matrici susjedstva $\mathbf{A}$ će biti:

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{1}$$

Za vježbu možete nacrtati graf čija je matrica incidencije upravo dobijeno $\mathbf{G}$ i provjeriti da li je matrica susjedstva tako dobijenog grafa zaista matrica $\mathbf{A}$ od koje smo krenuli.

Zadatak 3.

Matrica susjedstva u zadatku 2. data je za slučaj orijentisanog grafa. Napisati matricu susjedstva za odgovarajući neorijentisani graf. Nakon toga, na osnovu matice susjedstva neorijentisanog grafa napisati i ogovarajuću matricu incidencije.

Rješenje:

U slučaju neorijentisanog grafa matrica susjedstva je simetrična matrica. Neka su $a1_{ij}$ pojedinačni elementi matrice susjedstva $\mathbf{A}_1$ iz našeg zadatka, gdje su indeksi i i j indeksi vrste, odnosno kolone matrice $\mathbf{A}_1$ respektivno. Ako postoji grana između i-tog i j-tog čvora u matrici susjedstva orijentisanog grafa, tada će za iste indekse i i j u matrici susjedstva odgovarajućeg neorijentisanog grafa postojati i grana između j-og i i-og (to je ista grana). Drugim riječima, ako je element $a_{ij} = 1$ u matrici susjedstva orijentisanog grafa, tada za isto i i isto j u matrici odgovarajućeg neorijentisanog grafa važi da je i element $a1_{ji} = 1$.

U matici $\mathbf{A}$ iz zadatka 2. jednaki su jedinici sljedeći elementi: a_{12}, a_{13}, a_{41} i a_{43}.U matrici susjedstva odgovarajućeg neorijentisanog grafa biće jednaki jedinici elementi $a1_{12}, a1_{13}, a1_{41}$ i $a1_{43}$ i sljedeći elementi: $a1_{21}, a1_{31}, a1_{14}$ i $a1_{34}$.Uočimo da su u odnosu na glavnu dijagonalu svi elementi matrice susjedstva $\mathbf{A}_1$ neorijentisanog grafa simetični. Tražena matrica je:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Rekli smo da je matrica incidencije $\mathbf{G}$ matrica koja ima onoliko vrsta koliko graf ima čvorova i onoliko kolona koliko graf ima grana. Ona se definiše različito za slučaj orijentisanog i neorijentisanog grafa. Ako je graf neorijentisan tada je pojedinačni element matrice incidencije definisan kao:

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ ako čvor } i \text{ nije ni polazni ni krajnji čvor grane } j \\ 1 \text{ ako je čvor } i \text{ polazni ili krajnji čvor grane } j \end{cases}$$

Prvo što zaključujemo na osnovu matrice $\mathbf{A}_1$ i njene definicije za slučaj neorijentisanog grafa jeste da imamo tačno 4 grane (označimo ih sa a, b, c, d). Ovaj zaključak smo izveli iz činjenice da su elementi matrice $\mathbf{A}_1$: $a1_{12}, a1_{13}, a1_{41}$ i $a1_{43}$ jednaki jedinici, dok su elementi $a1_{21}, a1_{31}, a1_{14}$ i $a1_{34}$ takođe jednaki jedinici, ali je to posljedica činjenice da je graf neorijentisan pa je matrica $\mathbf{A}_1$ simetrična (odnosno, oni nam govore da se radi o istim granama o kojima govore elementi $a1_{12}, a1_{13}, a1_{41}$ i $a1_{43}$). Sada možemo odrediti i elemente matrice incidencije $\mathbf{G}_1$. Sa a označavamo granu koja odgovara jedinici na poziciji $a1_{12}$, b − jedinici na poziciji $a1_{13}$, c − jedinici na poziciji $a1_{41}$ i d − jedinici na poziciji $a1_{43}$. Ako grana za koju pišemo vrijednosti elemenata matrice incidencije (elementi u odgovarajućoj koloni) odgovara jedinici iz matrice susjedstva na poziciji $a1_{ij}$ to znači da postoji grana između čvorova i i j, pa na osnovu definicije matrice incidencije, za oba čvora pišemo vrijednost 1. Svi ostali elementi posmatrane kolone jednaki su 0, jer jedna grana povezuje tačno dva čvora. Dakle, matrica incidencije koja odgovara matrici susjedstva $\mathbf{A}_1$ će biti:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Zaključujemo da u slučaju jedne grane (jedna kolona matrice $\mathbf{G}_1$) tačno dva elementa imaju vrijednost 1 dok je u slučaju matrice incidencije orijentisanog grafa jedan element imao vrijednost −1 a drugi 1.

Zadatak 4.

Data je matrica susjedstva orijentisanog grafa. Odrediti da li postoji put dužine 2. Ukoliko postoji, koliko takvih puteva ima i koji su to putevi za čvorove:
a) 4 *i* 6   b) 4 *i* 1?

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Rješenje:

Koliko puteva dužine n postoji među čvorovima nekog grafa određujemo na osnovu vrijednosti elemenata matrice koja se dobije kao n-ti stepen matrice susjedstva $\mathbf{A}$.

Nas interesuju putevi dužine 2 pa bi tražili kvadrat matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} * \mathbf{A}$$

U pitanju je matrično množenje koje je moguće jer je matrica susjedstva po definiciji uvijek kvadratna matrica. Dalje, element matrice $\mathbf{A}_1$na poziciji ij, $a1_{ij}$ ima vrijednost koja je jednaka broju puteva stepena 2 između čvorova i i j. Ukoliko bi nam se tražilo da za sve čvorove ispitamo koliko postoji puteva stepena 2 imalo bi smisla tražiti kvadrat cijele matrice. Međutim, nama se u zadatku traži koliko puteva dužine 2 ima između čvorova a) $4-6$, b) $4-1$. Zaključujemo da je dovoljno odrediti elemente $a1_{46}$ i $a1_{41}$. Pri matričnom množenju $\mathbf{A} * \mathbf{A}$, element na poziciji ij, $a1_{ij}$ se dobija tako što se matrično pomnože $i-$ta vrsta i $j-$ ta kolona.

a) Dakle, biće za $a1_{46}$ - prva vrsta matrično pomnožena sa četvrtom kolonom:

$$\begin{aligned} a1_{46} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= 1*0+1*0+0*1+0*0+1*1+0*1 = 1 \end{aligned}$$

Postoji put dužine 2 između čvorova 4 i 6. Postoji tačno jedan takav put jer je $a1_{46}=1$. Koji čvorovi čine taj put određujemo tako što vidimo koji su to elementi čijim množenjem smo dobili ovu jedinicu. Na osnovu postupka za dobijanje $a1_{46}$ vidimo da je:

$$\begin{aligned} a1_{46} &= 1*0+1*0+0*1+0*0+1*1+0*1 = \\ &= a_{41}*a_{16}+a_{42}*a_{26}+a_{43}*a_{36}+a_{44}*a_{46}+a_{45}*a_{56}+a_{46}*a_{66} \end{aligned}$$

$a1_{46}=1$ zbog jedinice koja se dobija množenjem $a_{45}*a_{56}$. Znajući da, po definiciji matrice susjedstva čiji su a_{45} i a_{56} elementi, ovo znači da postoji grana od $4-5$ i od $5-6$, zaključujemo da će traženi put biti $4-5-6$.

Data matrica predstavlja matricu susjedstva grafa iz zadatka 1 predstavljenog na slici 1. Provjerimo da li smo dobili tačan rezultat. Pođimo iz čvora 4 i pokušajmo doći u čvor 6 kroz tačno dvije grane. Kandidati su grane f i h kao i d i g. Možemo doći samo granama f i h, dakle idući od čvora 4, preko čvora 5, pa u čvor 6. Grane d i g ne možemo koristiti jer grana d nije usmjerena od čvora 4 ka čvoru 5, već obratno, pa je ne možemo koristiti kao put do čvora 6.

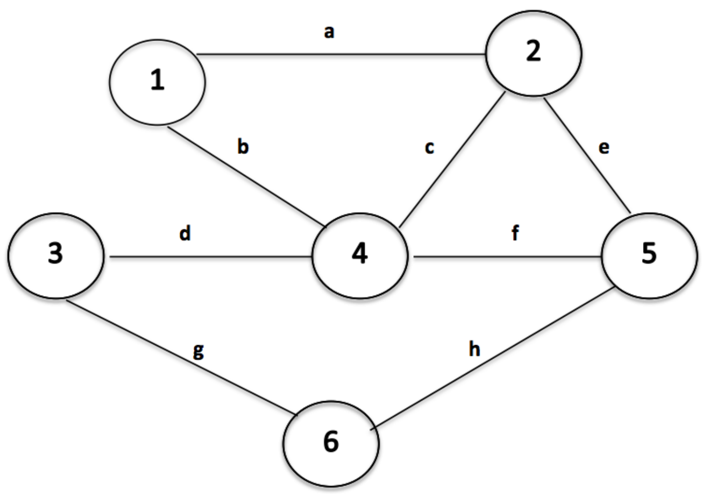
b)

$$\begin{aligned} a1_{41} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= 1*0+1*0+0*0+0*1+1*0+0*0 = 0 \end{aligned}$$

Zaključujemo da ne postoji put dužine 2 koji bi povezivao čvorove 4 i 1. Pogledajmo opet sliku 1 iz zadatka 1. Lako je uočiti da ne postoji nijedan put kojim bi mogli doći iz čvora 4 u čvor 1 prolazeći kroz tačno dvije grane u zadatom smjeru. Jedini kandidat dužine 2 je put koji čine grane c i a. Granu c zaista možemo koristiti za prelazak iz čvora 4 u čvor 2, ali iz čvora 2 ne možemo preći u čvor 1 granom a jer nam prelaženje u tom smjeru nije dozvoljeno. Sve ostale putanje su manje ili veće dužine od 2.

Zadatak 5.

Za neorjentisani graf sa slike 2 izračunati Laplasijanovu matricu.



Slika 2: Zadati graf.

Rješenje:
Laplasijan matrica se dobija kao:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$$

gdje je $\mathbf{A}$ matrica susjedstva, a matrica $\mathbf{D}$ je matrica stepena. Matrica stepena je dijagonalna matrica čiji elementi predstavljaju stepen odgovarajućeg čvora (broj grana koje su povezane sa odgovarajućim čvorom). Svaka grana je vrijedna 1, sem ako grana počinje i završava u istom čvoru, u tom slučaju je vrijednost 2. Matrica $\mathbf{D}$, kao i matrica $\mathbf{A}$ je kvadratna matrica (i vrste i kolone predstavljaju čvorove).

Za graf iz slike 2, matrica stepena je zapisana kao:

$$
\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{bmatrix} \end{array},
$$

a matrica susjedstva će biti:

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix} \end{array}.
$$

Obratite pažnju da je graf sa slike 2 neorjentisana verzija grafa iz Zadatka 1.

Kada smo izračunali matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{D}$, Laplasijan matrica će onda biti:

$$
\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix} \end{array}.
$$