

# MATEMATIČKE METODE U U RAČUNARSTVU

## – VII računske vježbe

Generatorska funkcija  $G(z)$  niza  $g(n)$  je definisana kao:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)z^n.$$

U svim zadacima ćemo smatrati da je  $g(n) = 0$  za  $n < 0$ .

Dvije tablične generatorske funkcije koje ćemo smatrati poznatim su:

1. Generatorska funkcija jediničnog niza  $g(n) = 1$  koja je  $G(z) = \frac{1}{1-z}$ .

Par niz  $\rightarrow$  generatorska funkcija ćemo označavati kao:

$$g(n) \rightarrow G(z),$$

pa će u ovom slučaju biti:

$$1 \rightarrow \frac{1}{1-z}.$$

2. Generatorska funkcija koja odgovara nizu  $g(n) = \delta(n)$  je  $G(z) = 1$  (pri čemu je  $\delta(n) = 1$  za  $n = 0$  i  $\delta(n) = 0$  za  $n \neq 0$ ).

$$\delta(n) \rightarrow 1.$$

Da bi mogli raditi zadatke vezane za generatorske funkcije neophodno je znati osobine generatorskih funkcija.

Osobina 1 Linearnost - linearnoj kombinaciji nizova odgovara linearna kombinacija njihovih generatorskih funkcija:

$$Ax(n) + By(n) \rightarrow AX(z) + BY(z)$$

gdje je  $x(n) \rightarrow X(z)$  i  $y(n) \rightarrow Y(z)$ , a  $A$  i  $B$  konstante.

Osobina 2 Pomjeranje u desno sa dodavanjem nula.

Ako je  $x(n) \rightarrow X(z)$  i niz  $y(n)$  dobijen pomjeranjem u desno niza  $x(n)$  pri čemu se slobodni članovi popunjavaju nulama:

$$y(n) = \begin{cases} x(n-N) & \text{za } n \geq N \\ 0 & \text{za } n < N \end{cases}$$

biće:

$$Y(z) = z^N X(z)$$

Gdje je  $N$  broj mjesta za koja je niz  $x(n)$  pomjeren u desno.

Osobina 3 Pomjeranje u lijevo sa ispuštanjem prvih elemenata

Ako je  $x(n) \rightarrow X(z)$  i niz  $y(n)$  dobijen pomjeranjem u lijevo niza  $x(n)$  pri čemu se prvi elementi ispuštaju:

$$y(n) = \begin{cases} x(n+N) & \text{za } n \geq 0 \\ 0 & \text{za } n < 0 \end{cases}$$

biće:

$$Y(z) = \frac{X(z) - \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^n}{z^N}$$

Gdje je  $N$  broj mjesta za koja je niz  $x(n)$  pomjeren u lijevo.

Osobina 4 Množenje eksponencijalnim nizom:

Ako je  $x(n) \rightarrow X(z)$  i niz  $y(n)$  dobijen množenjem niza  $x(n)$  eksponencijalnim nizom:

$$y(n) = c^n x(n),$$

gdje je  $c$  neka konstanta, biće:

$$Y(z) = X(c \cdot z)$$

Osobina 5 Izvod

Nizu  $y(n) = n \cdot x(n)$  odgovara generatorska funkcija  $Y(z) = z \frac{d}{dz} X(z)$ .  
Gdje je  $x(n) \rightarrow X(z)$ .

$$n \cdot x(n) \rightarrow z \frac{d}{dz} X(z).$$

Osobina 6 Konvoluciji dva niza odgovara množenje njihovih generatorskih funkcija.

Dakle, ako je  $x(n) \rightarrow X(z)$  i  $h(n) \rightarrow H(z)$  i niz  $y(n)$  zadat kao konvolucija ova dva niza  $y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k)$  biće:

$$Y(z) = X(z)H(z).$$

## Zadatak 1.

Naći generatorsku funkciju niza:

$$x(n) = 3^n - (-2)^n + n^2$$

Rješenje:

Niz  $x(n)$  je zadat kao linearna kombinacija tri niza:

$$x(n) = x_1(n) - x_2(n) + x_3(n) \tag{1}$$

Pa će koristeći osobinu 1 biti:

$$X(z) = X_1(z) - X_2(z) + X_3(z)$$

Poredeći jednačinu (1) sa nizom koji je zadat postavkom zadatka, zaključujemo da je:

$$\begin{aligned}x_1(n) &= 3^n \\x_2(n) &= (-2)^n \\x_3(n) &= n^2\end{aligned}$$

Nadjimo njihove generatorske funkcije. Krenimo od niza  $x_1(n)$ . Znamo da je:

$$1 \rightarrow \frac{1}{1-z}$$

kao i da se može pisati:

$$x_1(n) = 3^n \cdot 1.$$

Odnosno, kao jedinični niz pomnožen eksponencijalnim nizom, pa primjenjujemo osobinu 4. Vidimo da će biti  $c = 3$  i:

$$3^n \cdot 1 \rightarrow \frac{1}{1-3z}$$

Dakle:

$$X_1(z) = \frac{1}{1-3z}$$

Sada određujemo generatorsku funkciju niza  $x_2(n)$ . Slično kao i za niz  $x_1(n)$  pišemo:

$$x_2(n) = (-2)^n \cdot 1$$

Znamo da je:

$$1 \rightarrow \frac{1}{1-z}$$

Primijenimo osobinu 4, tako što će biti  $c = -2$  i zaključujemo da je:

$$(-2)^n \cdot 1 \rightarrow \frac{1}{1+2z}$$

Dakle:

$$X_2(z) = \frac{1}{1+2z}$$

Niz  $x_3(n) = n^2$  možemo pisati kao:

$$x_3(n) = n \cdot n \cdot 1$$

Znamo da je:

$$1 \rightarrow \frac{1}{1-z}$$

Množenje sa  $n$  je po osobini 5 ekvivalentno diferenciranju i množenju sa  $z$ , generatorske funkcije pa će biti:

$$n \cdot 1 \rightarrow z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = z \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Znajući ovo i primjenjujući još jedan put osobinu 5 biće:

$$n \cdot (n \cdot 1) \rightarrow z \frac{d}{dz} \frac{z}{(1-z)^2} = z \frac{(1-z)^2 - z \cdot 2(1-z)(-1)}{(1-z)^4} = z \frac{(1-z)(1-z+2z)}{(1-z)^4} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

Dakle:

$$X_3(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

Sada, znajući da je:

$$X(z) = X_1(z) - X_2(z) + X_3(z),$$

dobijamo:

$$X(z) = \frac{1}{1-3z} - \frac{1}{1+2z} + \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

## Zadatak 2.

Naći generatorsku funkciju signala  $x(n)$  zadatog kao:

$$x(n) = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k};$$

Rješenje:

Signal  $x(n)$  predstavlja konvoluciju signala  $x_1(n) = 2^n$  i  $x_2(n) = 3^n$ . Primijenimo osobinu 6, po kojoj će tražena generatorska funkcija biti:

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

Generatorske funkcije  $X_1(z)$  i  $X_2(z)$  odredjujemo koristeći osobinu 4 i znajući da je:

$$1 \rightarrow \frac{1}{1-z}$$

pa će za  $X_1(z)$  biti  $c = 2$ :

$$2^n 1 \rightarrow \frac{1}{1-2z},$$

za  $X_2(z)$ ,  $c = 3$ :

$$3^n 1 \rightarrow \frac{1}{1-3z}$$

Generatorska funkcija niza  $x(n)$  se sada dobija kao:

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-2z} \cdot \frac{1}{1-3z}.$$