MATEMATIČKE METODE U U RAČUNARSTVU – I računske vježbe

Zadatak 1.

Koristeći se matematičkom indukcijim dokazati da je $4^n - 1$ *djeljivo sa* 3 *za svako* $n \geq 1$

Rješenje:

1. Za $n = 1$ biće:

$$4^1 - 1 = 3$$

što je sigurno djeljivo sa 3.

2. Uzmimo neko $n \geq 1$ i pretpostavimo da za njega važi da je $4^n - 1$ djeljivo sa 3.

Treba dokazati da će za $n + 1$, $4^{n+1} - 1$ biti djeljivo sa 3. $4^{n+1} - 1$ se dalje može pisati kao:

$$4^{n+1} - 1 = 4 \cdot 4^n - 1 - 3 + 3 = 4 \cdot 4^n - 4 + 3 = 4 \cdot (4^n - 1) + 3$$

Izraz u zagradi je sigurno djeljiv sa tri, jer je to pretpostavka od koje smo krenuli, dakle, možemo ga pisati kao $3m$ gdje je m cio broj. Sada možemo pisati:

$$4^{n+1} - 1 = 4 \cdot 3m + 3 = 3\,(4m + 1)$$

ako je m cio broj i $m + 1$ će biti cio broj, dakle $4^{n+1} - 1$ će biti djeljivo sa 3. Slijedi da je tačna tvrdnja da je $4^n - 1$ djeljivo sa 3 za $n \geq 1$.

Zadatak 2.

Matematičkom indukcijim pokažite da je zbir prvih n *neparnih brojeva jednak* n^2,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Rješenje:

1. Za $n = 1$:

$$1 = 1^2$$

što je sigurno tačno.

2. Pretpostavimo da je za $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ tačno za neko n. Treba dokazati da jednakost važi i za $n + 1$, odnoso da važi za:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1$$

Ako prethodni izraz napišemo u obliku tako da vidimo i njegov pretposlednji član, tj.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1,$$

po pretpostavci znamo da je prvi dio lijeve strane jednak n^2, pa tako dobijamo da je:

$$n^2 + (2n+1) = n^2 + 2n + 1,$$

čime smo dokazali da je zbir prvih n neparnih brojeva jednak n^2.

Zadatak 3.

Koristeći se matematičkom indukcijim dokazati da važi

$$2^n > n^2$$

za $n \geq 5$.

Rješenje:

1. Za $n = 5$, važi

$$\begin{aligned} 2^5 &> 5^2 \\ 32 &> 25 \end{aligned}$$

što je sigurno tačno.

2. Pretpostavimo da za neko n, pri čemu je $n \geq 5$, važi polazna nejednakost, dakle:

$$2^n > n^2. \tag{1}$$

Treba pokazati da uz ovu pretpostavku polazna nejednakost važi i za $n+1$, odnosno da važi:

$$2^{n+1} > (n+1)^2.$$

Pretpostavku možemo dokazati na više načina. Ovdje predstavljamo tri načina (postoji još mnogo načina, bilo koji od njih može da se primijeni).

Prvi način:

Naša pretpostavka je da je

$$2^n > n^2,$$

tj.

$$\frac{2^n}{n^2} > 1. \tag{2}$$

S tim u vezi, treba da dokažemo da je

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} > 1$$

$$\frac{2^n \cdot 2}{(n+1)^2} > 1.$$

Ako ovaj izraz pomnožimo i podijelimo sa n^2, reorganizujući prethodni izraz, dobićemo

$$\frac{2^n}{n^2} \cdot \frac{2n^2}{(n+1)^2} > 1.$$

Po pretpostvci (2) znamo da je prvi dio lijeve strane nejednakosti veći od 1. Sada treba da dokažemo da je i drugi dio veći od 1, tačnije

$$\frac{2n^2}{(n+1)^2} > 1$$

$$\frac{2n^2}{n^2+2n+1} > 1.$$

Kada ovaj izraz podijelimo sa n^2, dobijamo

$$\frac{2}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} > 1. \tag{3}$$

Pošto ova nejednakost važi za $n \geq 5$, razlomci $\frac{2}{n}$ i $\frac{1}{n^2}$ će imati maksimalnu vrijednost kada je $n = 5$ (što je n veće, vrijednost razlomka je manja, npr. $\frac{2}{5} < \frac{2}{6} < \frac{2}{7}$ itd.). To znači da je dovoljno dokazati da je nejednakost (3) tačna za $n = 5$:

$$\frac{2}{1+\frac{2}{5}+\frac{1}{25}} > 1$$

$$\frac{2}{\frac{25+10+1}{25}} > 1$$

$$\frac{50}{36} > 1,$$

čime smo dokazali da je tvrdnja tačna.

Drugi način:

Treba da dokažemo da je

$$2^{n+1} > n^2 + 2n + 1$$

za $n \geq 5$. Ako dokažemo da je ova nejednakost tačna za $n^2 + 2n + n$, znamo da će sigurno biti tačna i za $n^2 + 2n + 1$ (jer su vrijednosti $n \geq 5$, tj. $n > 1$). To znači

$$2^{n+1} > n^2 + 2n + n$$

$$2^{n+1} > n^2 + 3n.$$

Opet, ako možemo da dokažemo da je ova nejednakost tačna za $n^2 + n \cdot n$ onda će sigurno biti tačna za $n^2 + 3n$ (opet, $n > 3$ jer je $n \geq 5$):

$$\begin{gathered} 2^{n+1} > n^2 + n \cdot n \\ 2^{n+1} > n^2 + n^2. \\ 2 \cdot 2^n > 2n^2 \\ 2^n > n^2, \end{gathered}$$

što je trebalo i dokazati.

Treći način:

Pokušajmo uspostaviti vezu između $(n+1)^2$ i n^2:

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \tag{4}$$

Znajući da je $n \geq 5$, zaključujemo da je:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{25}$$

Ako sumi u (4) dodamo umjesto $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{5}$, a znajući da je $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5}$, odnosno da dodajemo veću vrijednost zaključujemo da će cijela novodobijena suma sada biti veća, isto važi i kada $\frac{1}{n^2}$ zamijenimo sa $\frac{1}{25}$, odnosno biće:

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{25} < 2.$$

Radimo sa cijelim brojevima, zato smo tražili koji je prvi cijeli broj od kojeg će izraz biti manji. Sada imamo da je:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^2}{n^2} &< 2 \\ (n+1)^2 &< 2n^2 \end{aligned}$$

Da bi i u izrazu (1) dobili $2n^2$ pomnožimo ga sa 2 i dobijamo:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^n &> 2n^2 \\ 2^{n+1} &> 2n^2 \end{aligned}$$

Sada imamo da važi:

$$\begin{aligned} 2n^2 &< 2^{n+1} \\ (n+1)^2 &< n^2 \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &< 2n^2 < 2^{n+1} \\ (n+1)^2 &< 2^{n+1} \end{aligned}$$

Što je i trebalo dokazati.

Dakle, tvrdnja da je $2^n > n^2$ za svako $n \geq 5$ je tačna.