

# MATEMATIČKE METODE U U RAČUNARSTVU

## – III računske vježbe

### Zadatak 1.

Pronađite rješenje rekurzije:

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_\kappa$$

ako je  $C_0 = 0$ . Veličina  $C_n$  predstavlja prosječan broj operacija poređenja potrebnih za sortiranje  $n$  slučajno raspoređenih veličina primjenom „quicksort“ algoritma. (Savjet: napišite izraze za  $C_n$  i  $C_{n-1}$  i pokušajte ih iskombinovati da se oslobodite sume u definiciji rekurzije).

Rješenje:

Izraz za  $C_n$  je dat postavkom zadatka kao:

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_\kappa$$

napišimo na osnovu njega izraz za  $C_{n-1}$ :

$$C_{n-1} = n - 1 + 1 + \frac{2}{n-1} \sum_{\kappa=0}^{n-1-1} C_\kappa.$$

Dalje posmatrajmo dva dobijena izraza i pokušajmo ih iskombinovati tako da se eliminiše suma, dakle, imamo:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_\kappa \\ C_{n-1} &= n - 1 + 1 + \frac{2}{n-1} \sum_{\kappa=0}^{n-1-1} C_\kappa \end{aligned} \right\}.$$

Izraz za  $C_n$  ima jedan član više u sumi od izraza za  $C_{n-1}$ , izdvojimo taj član van sume u izrazu za  $C_n$ , a istovremeno sredimo i izraz za  $C_{n-1}$ :

$$\left. \begin{aligned} C_n &= n + 1 + \frac{2}{n} \left( \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_\kappa + C_{n-1} \right) \\ C_{n-1} &= n + \frac{2}{n-1} \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_\kappa \end{aligned} \right\}$$

Kada uporedimo ova dva izraza možemo primijetiti da u oba konfiguruje  $\sum_{\kappa=0}^{n-2} C_\kappa$ , izrazimo ovu sumu iz jednog od ova dva izraza, na primjer iz drugog:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= n + 1 + \frac{2}{n} \frac{n-1}{n-1} \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_\kappa + \frac{2}{n} C_{n-1} \\ C_{n-1} - n &= \frac{2}{n-1} \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_\kappa \end{aligned} \right\}$$

koristeći umjesto sume  $C_{n-1} - n$ , prva jednačina se svodi na:

$$C_n = n + 1 + \frac{n-1}{n} (C_{n-1} - n) + \frac{2}{n} C_{n-1}$$

Dalje, možemo pisati:

$$\begin{aligned} C_n &= n + 1 + \frac{n-1}{n} C_{n-1} - n + 1 + \frac{2}{n} C_{n-1} \\ C_n &= 2 + \frac{n-1+2}{n} C_{n-1} \\ C_n &= 2 + \frac{n+1}{n} C_{n-1} \\ nC_n &= 2n + (n+1) C_{n-1} \end{aligned}$$

Dobili smo rekurziju oblika

$$a_n C_n = b_n C_{n-1} + c_n \quad (1)$$

čije rješenje u zatvorenom obliku možemo dobiti kao:

$$C_n = \frac{1}{s_n a_n} \left( b_1 C_0 + \sum_{k=1}^n s_k c_k \right) \quad (2)$$

i

$$s_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_1}{b_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_2}.$$

Poredeći rekurziju koju želimo riješiti:

$$nC_n = (n+1) C_{n-1} + 2n$$

sa (1), zaključujemo da je u našem slučaju:  $a_n = n$ ,  $b_n = n+1$  i  $c_n = 2n$ .

Sada možemo izračunati  $s_n$ :

$$s_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n+1)n(n-1)\dots 4 \cdot 3} = \frac{2}{(n+1)n}$$

i zamijeniti u formuli za  $C_n$  (2):

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\frac{2}{(n+1)n} n} \left( 2 \cdot 0 + \sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)k} 2k \right) = \frac{1}{\frac{2}{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{4}{k+1} = \frac{n+1}{2} 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ C_n &= 2(n+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Što predstavlja rješenje rekurzije.

Pogledajmo kako bismo odredili nekoliko početnih elemenata definisanih datom rekurzijom. Pođimo prvo od izraza:

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_\kappa, \quad (3)$$

uz početni uslov  $C_0 = 0$ .

Želimo odrediti  $C_1, C_2, C_3$  i  $C_4$ . Određujemo ih tako što u izrazu za rekurziju umjesto  $n$  stavljamo 1, 2, 3, 4, respektivno. Dakle, za  $n = 1$  imamo:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 + 1 + \frac{2}{1} \sum_{\kappa=0}^{1-1} C_\kappa = 2 + 2 \sum_{\kappa=0}^0 C_\kappa = \\ &= 2 + 2C_0 = 2 + 2 \cdot 0 = 2. \end{aligned}$$

Za  $n = 2$  dobijamo:

$$\begin{aligned} C_2 &= 2 + 1 + \frac{2}{2} \sum_{\kappa=0}^{2-1} C_\kappa = 3 + \sum_{\kappa=0}^1 C_\kappa = \\ &= 3 + C_0 + C_1 = 3 + 0 + 2 = 5. \end{aligned}$$

Za  $n = 3$  dobijamo:

$$\begin{aligned} C_3 &= 3 + 1 + \frac{2}{3} \sum_{\kappa=0}^{3-1} C_\kappa = 4 + \frac{2}{3} \sum_{\kappa=0}^2 C_\kappa = \\ &= 4 + \frac{2}{3}(C_0 + C_1 + C_2) = 4 + \frac{2}{3}(0 + 2 + 5) = 4 + \frac{14}{3} = \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

Za  $n = 4$  dobijamo:

$$\begin{aligned} C_4 &= 4 + 1 + \frac{2}{4} \sum_{\kappa=0}^{4-1} C_\kappa = 5 + \frac{1}{2} \sum_{\kappa=0}^3 C_\kappa = \\ &= 5 + \frac{1}{2}(C_0 + C_1 + C_2 + C_3) = 5 + \frac{1}{2}\left(0 + 2 + 5 + \frac{26}{3}\right) = 5 + \frac{47}{6} = \frac{77}{6}. \end{aligned}$$

Iste vrijednosti bi se morale dobiti i ako pođemo od izraza dobijenog kao rješenje rekurzije, dakle:

$$C_n = 2(n+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}.$$

Za  $n = 1$  dobijamo:

$$C_1 = 2(1+1) \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k+1} = 4 \frac{1}{1+1} = 2$$

Za  $n = 2$  dobijamo:

$$C_2 = 2(2+1) \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k+1} = 6 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 6 \frac{5}{6} = 5$$

Za  $n = 3$  dobijamo:

$$C_3 = 2(3+1) \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k+1} = 8 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 8 \frac{6+4+3}{12} = \frac{26}{3}$$

Za  $n = 4$  dobijamo:

$$C_4 = 2(4+1) \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k+1} = 10 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = 10 \frac{30+20+15+12}{60} = \frac{77}{6}$$

Sasvim očekivano, oba puta smo dobili iste vrijednosti, jer je u pitanju ista rekurzija, samo zapisana na dva različita načina.