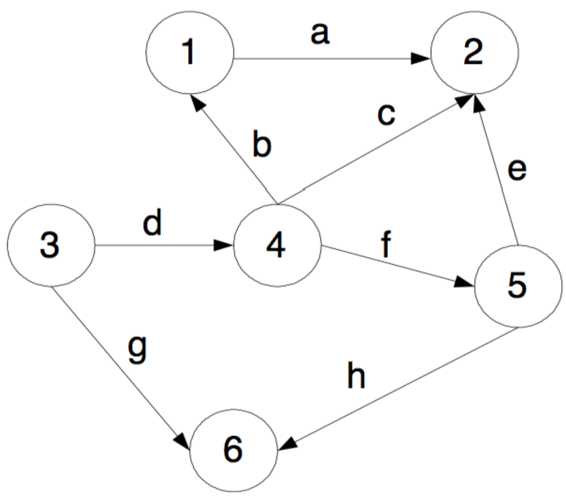
MATEMATIČKE METODE U U RAČUNARSTVU – IV računske vježbe

Zadatak 1.

Za orijentisani graf sa Slike 1 napisati matricu susjedstva.



Slika 1: Zadati graf.

Rješenje:

U matrici susjedstva **A** i vrste i kolone predstavljaju čvorove koji su na neki način označeni (brojevima od 1 do 6 u našem primjeru). Element a_{ij} matrice susjedstva **A**, usmjerenog grafa, ima vrijednost 1 ukoliko je čvor koji je predstavljen u i-toj vrsti povezan sa čvorom koji je predstavljen u j-toj koloni granom koja je usmjerena od i ka j. Posmatrajmo graf sa slike 1 i pišimo matricu susjedstva. Vrste će biti redom čvorovi 1, 2, ..., 6, kolone će takođe predstavljati čvorove 1, 2, ..., 6. Matrica susjedstva će biti:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

U matrici **A** samo dio koji je napisan unutar uglastih matrica čine elementi matrice susjedstva, brojevi prije uglastih zagrada i iznad matrice ilustruju šta je zapisano u vrstama, a šta u kolonama.

Zadatak 2.

Data je matrica susjedstva $\mathbf{A}$ *orijentisanog grafa. Napisati matricu susjedstva za odgovarajući neorijentisani graf.*

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

Rješenje:

U slučaju neoirjentisanog grafa matrica susjedstva je simetrična matrica. Neka su $a1_{ij}$ pojedinačni elementi matrice susjedstva $\mathbf{A}_1$ iz našeg zadatka, gdje su indeksi i i j indeksi vrste, odnosno kolone matrice $\mathbf{A}_1$ respektivno. Ako postoji grana između i-tog i j-tog čvora u matrici susjedstva orijentisanog grafa, tada će za iste indekse i i j u matrici susjedstva odgovarajućeg neoirjentisanog grafa postojati i grana između j-og i i-og (to je ista grana). Drugim riječima, ako je element $a_{ij} = 1$ u matrici susjedstva orijentisanog grafa, tada za isto i i isto j u matrici odgovarajućeg neorijentisanog grafa važi da je i element $a1_{ji} = 1$.

U matici $\mathbf{A}$ iz (1). jednaki su jedinici sljedeći elementi: a_{12}, a_{13}, a_{41} i a_{43}.U matrici susjedstva odgovarajućeg neorijentisanog grafa biće jednaki jedinici elementi $a1_{12}, a1_{13}, a1_{41}$ i $a1_{43}$ i sljedeći elementi: $a1_{21}, a1_{31}, a1_{14}$ i $a1_{34}$.Uočimo da su u odnosu na glavnu dijagonalu svi elementi matrice susjedstva $\mathbf{A}_1$ neorijentisanog grafa simetični. Tražena matrica je:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Zadatak 3.

Data je matrica susjedstva orijentisanog grafa. Odrediti da li postoji put dužine 2. Ukoliko postoji, koliko takvih puteva ima i koji su to putevi za čvorove:

a) 4 *i* 6 b) 4 *i* 1?

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Rješenje:

Koliko puteva dužine n postoji među čvorovima nekog grafa određujemo na osnovu vrijednosti elemenata matrice koja se dobije kao n-ti stepen matrice susjedstva $\mathbf{A}$.

Nas interesuju putevi dužine 2 pa bi tražili kvadrat matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} * \mathbf{A}$$

U pitanju je matrično množenje koje je moguće jer je matrica susjedstva po definiciji uvijek kvadratna matrica. Dalje, element matrice $\mathbf{A}_1$na poziciji ij, $a1_{ij}$ ima vrijednost koja je jednaka broju puteva stepena 2 između čvorova i i j. Ukoliko bi nam se tražilo da za sve čvorove ispitamo koliko postoji puteva stepena 2 imalo bi smisla tražiti kvadrat cijele matrice. Međutim, nama se u zadatku traži koliko puteva dužine 2 ima između čvorova a) $4-6$, b) $4-1$. Zaključujemo da je dovoljno odrediti elemente $a1_{46}$ i $a1_{41}$. Pri matričnom množenju $\mathbf{A} * \mathbf{A}$, element na poziciji ij, $a1_{ij}$ se dobija tako što se matrično pomnože $i-$ta vrsta i $j-$ ta kolona.

a) Dakle, biće za $a1_{46}$ - prva vrsta matrično pomnožena sa četvrtom kolonom:

$$\begin{aligned} a1_{46} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= 1*0+1*0+0*1+0*0+1*1+0*1 = 1 \end{aligned}$$

Postoji put dužine 2 između čvorova 4 i 6. Postoji tačno jedan takav put jer je $a1_{46} = 1$. Koji čvorovi čine taj put određujemo tako što vidimo koji su to elementi čijim množenjem smo dobili ovu jedinicu. Na osnovu postupka za dobijanje $a1_{46}$ vidimo da je:

$$\begin{aligned} a1_{46} &= 1*0+1*0+0*1+0*0+1*1+0*1 = \\ &= a_{41}*a_{16}+a_{42}*a_{26}+a_{43}*a_{36}+a_{44}*a_{46}+a_{45}*a_{56}+a_{46}*a_{66} \end{aligned}$$

$a1_{46} = 1$ zbog jedinice koja se dobija množenjem $a_{45} * a_{56}$. Znajući da, po definiciji matrice susjedstva čiji su a_{45} i a_{56} elementi, ovo znači da postoji grana od $4-5$ i od $5-6$, zaključujemo da će traženi put biti $4-5-6$.

Data matrica predstavlja matricu susjedstva grafa iz zadatka 1 predstavljenog na slici 1. Provjerimo da li smo dobili tačan rezultat. Pođimo iz čvora 4 i pokušajmo doći u čvor 6 kroz tačno dvije grane. Kandidati su grane f i h kao i d i g. Možemo doći samo granama f i h, dakle idući od čvora 4, preko čvora 5, pa u čvor 6. Grane d i g ne možemo koristiti jer grana d nije usmjerena od čvora 4 ka čvoru 5, već obratno, pa je ne možemo koristiti kao put do čvora 6.

b)

$$\begin{aligned} a1_{41} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= 1*0+1*0+0*0+0*1+1*0+0*0=0 \end{aligned}$$

Zaključujemo da ne postoji put dužine 2 koji bi povezivao čvorove 4 i 1. Pogledajmo opet sliku 1 iz zadatka 1. Lako je uočiti da ne postoji nijedan put kojim bi mogli doći iz čvora 4 u čvor 1 prolazeći kroz tačno dvije grane u zadatom smjeru. Jedini kandidat dužine 2 je put koji čine grane c i a. Granu c zaista možemo koristiti za prelazak iz čvora 4 u čvor 2, ali iz čvora 2 ne možemo preći u čvor 1 granom a jer nam prelaženje u tom smjeru nije dozvoljeno. Sve ostale putanje su manje ili veće dužine od 2.