1 MATEMATIKA U RAČUNARSTVU (napredni kurs) - VII računske vježbe

Zadatak 1.

Data je generatorska funkcija:

$$X(z) = \frac{2z}{1+3z} - \frac{3}{2-z} + \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Odrediti niz $x(n)$.

Rješenje:

Sada idemo obratno, znamo generatorsku funkciju i tražimo niz čija je to generatorska funkcija. Opet koristimo dvije šablonske funkcije i osobine generatorskih funkcija. $X(z)$ se može pisati kao:

$$X(z) = X_1(z) - X_2(z) + X_3(z)$$

pa će, koristeći osobinu 1, biti

$$x(n) = x_1(n) - x_2(n) + x_3(n) \tag{1}$$

gdje je

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{2z}{1+3z} \\ X_2(z) &= \frac{3}{2-z} \\ X_3(z) &= \frac{1}{(1-2z)^2} \end{aligned}$$

Polazimo od

$$X_1(z) = \frac{2z}{1+3z}$$

znamo da je

$$\frac{1}{1-z} \rightarrow 1$$

Pokušavamo koristeći osobine date na početku transformisati niz $u(n) = 1$ u niz čija je generatorska funkcija zadata kao $X_1(z)$ tako što je upoređujemo sa $\frac{1}{1-z}$.

Da bi dobili u imeniocu $+3z$ umjesto $-z$, iskoristićemo osobinu 4, gdje je $c = -3$, pa važi:

$$\frac{1}{1-(-3z)} \rightarrow 1 \cdot (-3)^n.$$

Sada želimo dobiti $\frac{z}{1-(-z)}$. Znamo da množenje sa z odgovara, na osnovu osobine 2, pomjeranju u desno i popunjavanju sa nulama. U našem slučaju je izvršeno pomjeranje samo za jedno mjesto, $z^N = z \Rightarrow N = 1$, pa će biti:

$$z\frac{1}{1-(-3z)} \rightarrow \begin{cases} 1 \cdot (-3)^{n-1} \text{ za } n \geq 1, \\ 0 \text{ za } n < 1. \end{cases}$$

Dalje, množenje konstantom generatorske funkcije odgovara množenju konstantom i samog niza:

$$2z\frac{1}{1-(-3z)} \to \begin{cases} 2\cdot(-3)^{n-1} \text{ za } n \geq 1, \\ 0 \text{ za } n < 1. \end{cases}$$

Dakle:

$$x_1(n) = \begin{cases} 2\cdot(-3)^{n-1} \text{ za } n \geq 1 \\ 0 \text{ za } n < 1. \end{cases}$$

Sada određujemo niz čija je generatorska funkcija oblika:

$$X_2(z) = \frac{3}{2-z}.$$

Opet je poredimo sa:

$$\frac{1}{1-z} \to 1.$$

Potrebno nam je da eliminišemo dvojku iz imenioca u $X_2(z)$ pa pišemo:

$$X_2(z) = \frac{3}{2(1-\frac{z}{2})}$$

Znamo da je

$$\frac{1}{1-z} \to 1$$

Primijenimo osobinu 4 da bi dobili $\frac{z}{2}$, pri čemu stavljamo da je $c = \frac{1}{2}$, i biće:

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z} \to \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1$$

Ostaje nam još samo množenje konstantom $\frac{3}{2}$ da bi dobili niz čija je generatorska funkcija $X_2(z)$ i dobijamo:

$$\frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \to \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 = \frac{3}{2}2^{-n}$$

Zaključujemo da je:

$$x_2(n) = \frac{3}{2}2^{-n}.$$

Ostaje još:

$$X_3(z) = \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Možemo koristiti osobinu 5, ali je lakše pisati:

$$\frac{1}{(1-2z)^2} = \frac{1}{1-2z}\frac{1}{1-2z}$$

Gledamo kako bismo dobili

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z}$$

Ovo je proizvod dvije generatorske funkcije, a na osnovu osobine 6 znamo da proizvodu generatorskih funkcija odgovara konvolucija odgovarajućih nizova:

$$x_{3''}(n) = \sum_{n=0}^{n} x_{3'}(n)h(n-k).$$

U našem slučaju je:

$$X_{3''}(z) = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z},$$

dakle:

$$\begin{aligned} X_{3'}(z) &= \frac{1}{1-z} \qquad (2) \\ H(z) &= \frac{1}{1-z} \\ X_{3''}(z) &= X_{3'}(z) \cdot H(z). \end{aligned}$$

Znamo da je:

$$\frac{1}{1-z} \to 1$$

pa je:

$$\begin{aligned} x_{3'}(n) &= 1 \\ h(n) &= 1 \end{aligned}$$

Takođe će biti i

$$h(n-k) = 1$$

Zamjenjujući ovo u:

$$x_{3''}(n) = \sum_{k=0}^{n} x_{3'}(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = n+1$$

Ovo je niz koji odgovara generatorskoj funkciji

$$X_{3''}(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

dakle:

$$\frac{1}{(1-z)^2} \to n+1$$

Nama treba:

$$X_3(z) = \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Iskoristimo osobinu 4, stavimo $c = 2$ i dobijamo:

$$\frac{1}{(1-2z)^2} \to 2^n\,(n+1)\,,$$

odnosno:

$$x_3(n) = 2^n\,(n+1)\,.$$

Vratimo se na početak zadatka kada smo zapisali da je:

$$x(n) = x_1(n) - x_2(n) + x_3(n).$$

Odredili smo:

$$x_1(n) = \begin{cases} 2\cdot(-3)^{n-1} \text{ za } n \geq 1 \\ 0 \text{ za } n < 1 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \frac{3}{2}2^{-n}$$

$$x_3(n) = n+1$$

Dakle:

$$x(n) = 2\cdot(-3)^{n-1} - \frac{3}{2}2^{-n} + 2^n\,(n+1) \text{ za } n \geq 1.$$

Za $x(0)$ uzimamo vrijednost za $x_1(n)$ koje važi za $n = 0$, a za ostale nizove samo umjesto n stavljamo 0, pa će biti:

$$x(0) = 0 - \frac{3}{2}2^{-0} + 2^0\,(0+1\;) = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}.$$

Zadatak za vježbu:

Data je generatorska funkcija $X(z) = (z+1)(z-2)^2$. Odrediti niz $x(n)$.

Zadatak 2.

Niz x_n je definisan rekurzivno:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_n &= x_{n-1} + 2x_{n-2} \text{ za } n \geq 2 \end{aligned}$$

Niz $y_n = 1 + 2n$. Odrediti generatorsku funkciju niza:

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$$

Rješenje:

Niz je zadat kao konvolucija nizova x_n i y_n. Na osnovu osobine 6 generatorskih funkcija slijedi da će njegova generatorska funkcija biti:

$$G(z) = X(z)Y(z) \tag{3}$$

gdje su $X(z)$ i $Y(z)$ generatorske funkcije nizova x_n i y_n respektivno.

Nađimo prvo generatorsku funkciju niza x_n. Niz x_n je definisan rekurzivno:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_n &= x_{n-1} + 2x_{n-2} \text{ za } n \geq 2 \end{aligned}$$

Da bi pronašli generatorsku funkciju moramo podesiti rekurziju tako da važi za $n \geq 0$. Za $n < 0$ podrazumijevamo da je $x_n = 0$. Pogledajmo šta bi smo dobili kada bi rekurziju koristili za $n = 0$. Bilo bi:

$$x_0 = x_{0-1} + 2x_{0-2} = x_{-1} + 2x_{-2} = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

Nama je početnim uslovom dato da je $x_0 = 1$. Da bi ovo postigli, koristićemo Dirakov niz δ_n :

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 0 \\ 0, & \text{za } n \neq 0 \end{cases} .$$

Znajući da δ_n ima vrijednost različitu od nule samo u $n = 0$, zaključujemo da dodajući našoj rekurzivnoj relaciji δ_n nećemo promijeniti ništa za $n \geq 2$, što nam je i cilj. Za $n = 0$, postižemo da važi rekurzija, odnosno da je $x_0 = 1$. Dakle, rekurzija sada ima oblik:

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} + \delta_n \quad \text{za } n \geq 2 \text{ i } n = 0$$

Provjerimo da li je potrebna još neka korekcija da bi nam rekurzija važila i za $n = 1$.

$$x_1 = x_{1-1} + 2x_{1-2} + \delta_1 = x_0 + 2x_{-1} + 0 = 1 + 2 \cdot 0 + 0 = 1$$

što se poklapa sa početnim uslovom $x_1 = 1$. Dakle, uključen je i slučaj $n = 1$, pa možemo pisati da je:

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} + \delta_n \quad \text{za } n \geq 0.$$

Sada možemo tražiti generatorsku funkciju niza x_n. Koristeći osobine linearnosti, osobina 1, pomjeranja u lijevo, osobina 3, kao i tabličnu generatorsku funkciju za niz δ_n, možemo pisati:

$$X(z) = zX(z) + 2z^2X(z) + 1$$

dalje će biti:

$$\begin{aligned} X(z) - zX(z) - 2z^2X(z) &= 1 \\ X(z)(1 - z - 2z^2) &= 1 \\ X(z) &= \frac{1}{1 - z - 2z^2} \end{aligned}$$

Generatorsku funkciju možemo pisati kao:

$$X(z) = -\frac{1}{2z^2 + z - 1}.$$

Generatorsku funkciju datu u ovom obliku ne možemo povezati sa tabličnom generatorskom funkcijom:

$$1 \to \frac{1}{1 - z}$$

pa ćemo je zapisati na sledeći način:

$$X(z) = -\frac{1}{2z^2 + z - 1} = -\frac{1}{2(z - z_1)(z - z_2)} \tag{4}$$

Pri čemu su z_1 i z_2 nule kvadratne jednačine $2z^2 + z - 1 = 0$.

Napomena: Kvadratna jednačina opšteg oblika $az^2 + bz + c = 0$ se može zapisati kao $a(z - z_1)(z - z_2) = 0$, pri čemu se z_1 i z_2 dobijaju kao:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

U našem slučaju je: $a = 2$, $b = 1$ i $c = -1$, pa će biti:

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

pa je:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2} \\ z_2 &= \frac{-1 - 3}{4} = -1 \end{aligned}$$

Uvrstimo ovo u (4) i dobijamo:

$$X(z) = -\frac{1}{2z^2 + z - 1} = -\frac{1}{2(z - z_1)(z - z_2)} = -\frac{1}{2(z - \frac{1}{2})(z + 1)} = -\frac{1}{(2z - 1)(z + 1)}$$

Sada je potrebno pronaći generatorsku funkciju niza y_n zadatog kao:

$$y_n = 1 + 2n$$

Opet koristimo svojstvo linearnosti kao i činjenicu da je:

$$1 \to \frac{1}{1 - z}$$

i, na osnovu osobine 5,

$$n \cdot 1 \to z \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - z} = \frac{z}{(1 - z)^2}$$

Pa će biti:

$$1 + 2n \to \frac{1}{1-z} + 2\frac{z}{(1-z)^2}$$

Znači:

$$Y(z) = \frac{1-z+2z}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{(1-z)^2}$$

Generatorska funkcija niza g_n, će biti na osnovu (3):

$$G(z) = -\frac{1}{(2z-1)(z+1)}\frac{1+z}{(1-z)^2} = -\frac{1}{(2z-1)(1-z)^2}$$

Što je ujedno i rješenje zadatka.

U nastavku je dat postupak za određivanje nizova x_n i g_n na osnovu njihovih generatorskih funkcija.

Niz x_n ima generatorsku funkciju oblika:

$$X(z) = \frac{-1}{(2z-1)(z+1)}$$

dalje:

$$X(z) = \frac{-1}{(2z-1)(z+1)} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{z+1}$$

Ovo možemo dalje zapisati kao:

$$\frac{-1}{(2z-1)(z+1)} = \frac{A(z+1) + B(2z-1)}{(2z-1)(z+1)}$$

Da bi ova jednakost važila mora biti:

$$\begin{aligned} -1 &= A(z+1) + B(2z-1) \\ -1 &= Az + A + B2z - B \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 = A - B \\ 0 = A + 2B \end{array} \right. \end{aligned}$$

Riješimo dobijeni sistem, tako što ćemo od drugog oduzeti prvi:

$$\left. \begin{array}{c} -1 = A - B \\ 0 = A + 2B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} 1 = 3B \\ 0 = A + 2B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} B = \frac{1}{3} \\ A = -2\frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

Pa dobijamo da je

$$X(z) = \frac{-1}{(2z-1)(z+1)} = -\frac{2}{3}\frac{1}{2z-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{z+1}$$

Koristeći svojstva linearnosti i množenje eksponencijalnim nizom zaključujemo da je:

$$\begin{aligned}
1 &\rightarrow \frac{1}{1-z} \\
-2^n \cdot 1 &\rightarrow -\frac{1}{1-2z} = \frac{1}{2z-1} \\
\frac{2}{3} \cdot 2^n \cdot 1 &\rightarrow \frac{2}{3}\frac{1}{1-2z} = -\frac{2}{3}\frac{1}{2z-1}
\end{aligned}$$

Dalje:

$$\begin{aligned}
1 &\rightarrow \frac{1}{1-z} \\
(-1)^n \cdot 1 &\rightarrow \frac{1}{z+1} \\
\frac{1}{3} \cdot (-1)^n \cdot 1 &\rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1}
\end{aligned}$$

Generatorska funkcija niza g_n je:

$$G(z) = -\frac{1}{(2z-1)(1-z)^2}$$

rastavljamo je na sledeći način:

$$\begin{aligned}
G(z) &= -\frac{1}{(2z-1)(1-z)^2} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{(1-z)^2} \\
G(z) &= -\frac{1}{(2z-1)(1-z)^2} = \frac{A(1-z)^2 + B(2z-1)(1-z) + C(2z-1)}{(2z-1)(1-z)^2}
\end{aligned}$$

Dalje:

$$\begin{aligned}
-1 &= A(1-z)^2 + B(2z-1)(1-z) + C(2z-1) \\
-1 &= A(1-2z+z^2) + B(2z-2z^2-1+z) + C(2z-1) \\
-1 &= A - 2Az + Az^2 + B3z - 2Bz^2 - B + C2z - C
\end{aligned}$$

Mora da važi:

$$\left.\begin{array}{c} -1 = A - B - C \\ 0 = -2A + 3B + 2C \\ 0 = A - 2B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -1 = A - B - C \\ 0 = -2 \cdot 2B + 3B + 2C \\ A = 2B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -1 = A - B - C \\ 0 = -B + 2C \\ A = 2B \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} -1 = A - B - C \\ C = \frac{B}{2} \\ A = 2B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -1 = 2B - B - \frac{B}{2} \\ C = \frac{B}{2} \\ A = 2B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -1 = \frac{4B-2B-B}{2} \\ C = \frac{B}{2} \\ A = 2B \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} B = -2 \\ C = -1 \\ A = -4 \end{array}\right\}$$

Pa je:

$$G(z) = -\frac{1}{(2z-1)(1-z)^2} = -\frac{4}{2z-1} - \frac{2}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2}$$

Jedan dio generatorskih funkcija od kojih je sačinjena $G(z)$ i odgovarajući nizovi su se pojavili prilikom traženja x_n, drugi dio u prethodnim vježbama, pa je ovdje dat samo krajnji rezultat:

$$-\frac{4}{2z-1} - \frac{2}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2} \to 4 \cdot 2^n - 2 - (n+1)$$