MATEMATIČKE METODE U U RAČUNARSTVU – IX računske vježbe

Zadatak 1.

U kutiji je 6 bijelih i 4 crne kuglice. Kuglice se izvlače slučajno, po jedna, bez vraćanja. Kolika je vjerovatnoća da će se bijela kuglica izvući u manje ili tačno:
a) k=3 b)k=5
pokušaja? Napomena: Smatramo da se izvlačenje prekida nakon što se izvuče prva bijela kuglica

Rješenje:

Tražimo vjerovatnoću dogadjaja: W_k={Izvučena je bijela kuglica prvi put u manje ili tačno k pokušaja}

Interesuje nas kolika je vjerovatnoća da je izvučena bijela kuglica. Posmatramo kako se to može desiti. Može biti izvučena već pri prvom pokušaju, može se desiti da se prvo izvuče crna kuglica pa nakon nje bijela, da se izvuku dvije crne kuglice pa bijela, da se izvuče tek u četvrtom pokušaju, petom... ili k-tom pokušaju. Važno je naglasiti da su ovi dogadjaji medjusobno isključivi. Znači, kada počnemo izvlačenje, sa svim kuglicama u kutiji, samo se jedan od ovih dogadjaja može desiti. Kuglica će biti izvučena ILI u prvom, ILI u drugom ... ILI u k-tom pokušaju.

Označimo ove dogadjaje sa X_i : X_i ={U prvih $i - 1$ pokušaja je izvučeno $i - 1$ crnih kuglica, a nakon njih, u i-tom pokušaju je izvučena bijela kuglica}. Jasno je da će biti $i = 1, 2, ..., k$ (bijela kuglica izvučena u prvom, drugom, ..., k-tom pokušaju).

Naš dogadjaj W_k će se realizovati ako se realizuje jedan od dogadjaja X_i, pa pišemo:

$$W_k = X_1 + X_2 + ... + X_k.$$

Plus ćemo koristiti da označimo da su dogadjaji medjusobno isključivi. Biće izvučena bijela kuglica u manje ili tačno k pokušaja ako bude izvučena ILI u prvom ILI u drugom, ..., ILI u k - tom pokušaju. Svi su ovi dogadjaji medjusobno nezavisni, pa možemo pisati da je vjerovatnoća dogadjaja W_k (vjerovatnoću označavamo velikim slovom P) biti jednaka sumi vjerovatnoća pojedinih dogadjaja:

$$P(W_k) = P(X_1 + X_2 + ... + X_k) = P(X_1) + P(X_2) + ... + P(X_k) \qquad (1)$$

Vjerovatnoća dogadjaja X_1 - kuglica je izvučena u prvom pokušaju kada imamo u kutiji 10 kuglica od kojih je 6 bijelih i 4 crne, će biti:

$$P(X_1) = P(b) = \frac{6}{10},$$

b označava dogadjaj izvučena je bijela kuglica, c - dogadjaj izvučena je crna kuglica, $P(b|c)$ označava vjerovatnoću da je izvučena bijela kuglica ako je već izvučena crna.

Interesuje nas vjerovatnoća dogadjaja X_2 - u prvom pokušaju je izvučena crna kuglica, a nakon nje bijela. U početku u kutiji imamo 10 kuglica od kojih su 4 crne, izvučemo crnu, ostaje devet kuglica i to 6 bijelih i 3 crne, pa će biti:

$$P(X_2) = P(cb) = P(c)P(b|c) = \frac{4}{10}\frac{6}{9}.$$

Interesuje nas sada vjerovatnoća dogadjaja X_3 - u prva dva pokušaja su izvučene crne kuglice, a nakon njih bijela. U početku u kutiji imamo 10 kuglica od kojih su 4 crne, izvučemo crnu, ostaje devet kuglica i to 6 bijelih i 3 crne, nakon toga izvučemo još jednu crnu, ostaje 8 kuglica - 2 crne i 6 bijelih i u trećem pokušaju izvučemo bijelu. Vjerovatnoća će biti:

$$P(X_3) = P(ccb) = P(c)P(c|c)P(b|cc) = \frac{4}{10}\frac{3}{9}\frac{6}{8}.$$

U zadatku pod a) je k=3. Obuhvatili smo čitav skup dogadjaja koji čine dogadjaj izvučena je kuglica u manje ili tačno 3 pokušaja W_3. Uvrstimo ove vjerovatnoće u (1), znajući da je pod a) k=3 i dobijemo:

$$P(W_3) = P(X_1)+P(X_2)+P(X_3) = \frac{6}{10}+\frac{4}{10}\frac{6}{9}+\frac{4}{10}\frac{3}{9}\frac{6}{8} = \frac{6}{10}(1+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\frac{3}{8}) = 0.9667$$

b) Vjerovatnoća da će kuglica biti izvučena u $k = 5$ ili manje pokušaja je 1, to je siguran dogadjaj. Bijela kuglica mora biti izvučena u toku 5 prvih pokušaja jer je najgori slučaj koji se može desiti da stalno izvlačimo crne kuglice, dok ih ima u kutiji, znači prva četiri puta, već peti put nema više crnih kuglica i sigurno ćemo izvući bijelu.