

Jednačine matematičke fizike – završni ispit

20. septembar 2022.

1. Riješite Cauchy-jev problem

$$\partial_t u + \partial_x u^2 = 0$$
$$u(0, x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ -x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

do trenutka do kog postoji Lipschitz neprekidno rješenje.

2. Odrediti udarni talas koji predstavlja uopšteno rješenje Cauchy-jevog problema

$$\partial_t u + \partial_x u = 0$$
$$u(0, x) = \begin{cases} a, & x < 0 \\ b, & x > 0 \end{cases}.$$

3. Posmatrajmo

$$\partial_t u + \partial_x u^2 = 0$$
$$u(0, x) = 0$$

Postoje li konstante a , b i c takve da je funkcija .

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq at \\ 1, & at \leq x \leq bt \\ -1, & bt \leq x \leq ct \\ 0, & x \geq ct \end{cases}.$$

4. Dokazati da glatko rješenje jednačine

$$\partial_t u + \partial_x u^2 = \partial_{xx} u$$

zadovoljava za proizvoljnu konveksnu funkciju $\eta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) \leq \partial_{xx} \eta(u)$$

gdje je

$$\psi(u) = \int_0^u 2\lambda \eta'(\lambda) d\lambda.$$

Pokazati $\psi(u) = 2u\eta(u) - 2 \int_0^u \eta(\lambda) d\lambda$.