

# Jednačine matematičke fizike – završni ispit

20. septembar 2022.

1. Odrediti dopustivo rješenje Riemannovog problema

$$\begin{aligned}\partial_t u + \partial_x u^2 &= 0 \\ u(0, x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x \geq 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

2. Za koje vrijednosti  $a, b \in \mathbf{R}$  Riemannov problem

$$\begin{aligned}\partial_t u + \partial_x u^4 &= 0 \\ u(0, x) &= \begin{cases} a, & x < 0 \\ b, & x > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

ima razrjeđujući talas (rarefaction wave) kao rješenje? Odrediti ga.

3. Posmatrajmo

$$\begin{aligned}\partial_t u + \partial_x u^2 &= 0 \\ u(0, x) &= 0\end{aligned}$$

Postoje li konstante  $a, b$  i  $c$  takve da je funkcija .

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq at \\ 1, & at \leq x \leq bt \\ -1, & bt \leq x \leq ct \\ 0, & x \geq ct \end{cases}.$$

4. Dokazati da glatko rješenje jednačine

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \partial_{xx} u$$

zadovoljava za proizvoljnu konveksnu funkciju  $\eta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) \leq \partial_{xx} \eta(u)$$

gdje je

$$\psi(u) = \int_0^u f'(\lambda) \eta'(\lambda) d\lambda.$$