Sopstveni vektori i sopstvene vrijednosti autokorelacione matrice. Metod najbržeg spuštanja.

-ZADACI-

1. Data je autokorelaciona matrica $\mathbf{R}$ i vektor kroskorelacije $\mathbf{r_{dx}}$:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1 & 0.9\\ 0.9 & 1\end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{r_{dx}}=\begin{bmatrix}3.8\\ 1.9\end{bmatrix}$$

   a) Odrediti njene sopstvene brojeve i sopstvene vektore. Zadatak uraditi analitički.
   b) Dobijeno rješenje provjeriti u MATLAB-u/Octave-u.
   c) Zapisati autokorelacionu matricu preko matrice sopstvenih vrijednosti i sopstvenih vektora.
   d) Odrediti minimalnu srednju kvadratnu grešku adaptivnog linearnog sabirača sa optimalnim koeficijentima.

2. Neka su dati autokorelaciona matrica $\mathbf{R}$ i vektor kroskorelacije $\mathbf{r_{dx}}$:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1 & 0.9\\ 0.9 & 1\end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{r_{dx}}=\begin{bmatrix}3.8\\ 1.9\end{bmatrix}$$

   a) Pronaći koeficijente adaptivnog sitema korišćenjem inverzije autokorelacione matrice.
   b) Nakon toga odrediti optimalne koeficijente metodom najbržeg spuštanja. Posmatrati tri slučaja sa vrijednostima koraka: $\mu_1=0.5$, $\mu_2=1$ i $\mu_3=1.5$. Algoritam se izvršava sve dok greška u određivanju optimalnih koeficijenata, koja se računa po formuli $\|\mathbf{H}_n - \mathbf{H}^*\|_2$, ne padne ispod vrijendosti 0.01. Kao početnu iteraciju uzeti vektor $\mathbf{H}_0=[0 \quad 0]^T$.
   c) U sva tri slučaja potrebno je pronaći nakon koliko iteracija je ostvarena greška u određivanju optimalnih koeficijenata ($\|\mathbf{H}_n - \mathbf{H}^*\|_2$,) manja od 0.01.
   d) Koji uslov mora zadovoljavati korak μ, da bi metod spuštanja konvergirao u srednjem (odnosno, koji korak garantuje da devijacija koeficijenata teži nuli)? Kako se ovaj uslov može aproksimirati u posmatranom slučaju tako da se izbjegne dekompozicija autokorelacione matrice na sopstvene vrijednosti i sopstvene vektore?
   e) Koja je vrijednost koraka μ kojom se postiže optimalna brzina konvergencije metoda najbržeg spuštanja?

3. (Za vježbu) Autokorelaciona matrica ulaznog signala i vektor kroskorelacije dati su respektivno:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}6 & -0.03 & -2 & 0.1\\ -0.03 & 6 & -0.03 & -2\\ -2 & -0.03 & 6 & -0.03\\ 0.1 & -2 & -0.03 & 6\end{bmatrix}, \quad \mathbf{r_{dx}}=\begin{bmatrix}-4\\ 1.5\\ 1.3\\ -0.6\end{bmatrix}.$$

a) Metodom najbržeg spuštanja odrediti optimalne koeficijente adaptivnog sistema. Iteracije treba obavljati sve dok greška u određivanju optimalnih koeficijenata, $\| \mathbf{H}_n - \mathbf{H}^* \|_2$, ne padne ispod 0.01. Kao početnu iteraciju uzeti vektor $\mathbf{H}_0 = [0 \quad 0]^T$.
b) Za uzeti korak odrediti nakon koliko iteracija, N_{it} se ostvaruje greška manja od 0.01.
c) Koji uslov mora zadovoljavati korak μ, da bi metod spuštanja konvergirao u srednjem (odnosno, garantuje da devijacija koeficijenata teži nuli)? Kako se ovaj uslov može aproksimirati u posmatranom slučaju tako da se izbjegne dekompozicija autokorelacione matrice na sopstvene vrijednosti i sopstvene vektore?
d) Koja je optimalna vrijednost koraka μ, kojim se postiže najbolja konvergencija?

4. Na ulazu u adaptivni linearni sabirač dolazi bijeli Gauss-ov šum $x(n)$ jedinične varijanse i srednje vrijednosti nula. Željeni signal $d(n)$ dobija se prolaskom ovog signala kroz LTI sistem sa koeficijentima impulsnog odziva $\mathbf{w} = [5, -1, 3, 2, 4]$. Algoritam se zaustavlja kada je norma razlike između vektora koeficijenata sistema u dvije susjedne iteracije manja od ε_w, odnosno, algoritam se zaustavlja za $\left\| \mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{H}_n \right\| < \varepsilon_w$.
   a) Odrediti koeficijente Wienner-ovog filtra inverzijom autokorelacione matrice.
   b) Zatim naći optimalno rješenje korišćenjem metoda najbržeg spuštanja, i uporediti ih, računajući $\| \mathbf{H} - \mathbf{H}^* \|$, gdje je sa $\mathbf{H}$ označen krajnji vektor koeficijenata koji je rezultat metoda najbržeg spuštanja.
   c) Nakon koliko iteracija je greška u određivanju ovih koeficijenata manja od $\varepsilon_w = 0.001$, odnosno, kada je zadovoljen uslov $\left\| \mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{H}_n \right\| < \varepsilon_w$?
   d) Koliki je korak μ korišćen u iterativnoj proceduri?
   e) Za vježbu varirati korak μ i prikazati grafički zavisnost minimalnog broja iteracija u kojima se postiže zadovoljenje uslova $\left\| \mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{H}_n \right\| < \varepsilon_w$ u funkciji od vrijednosti koraka. U početnoj iteraciji koristiti vektor koeficijenata $\mathbf{H}_0 = [0 \quad \cdots \quad 0]^T$.
   f) Koji uslov mora zadovoljavati korak μ, da bi metod spuštanja konvergirao u srednjem (odnosno, koji korak garantuje da devijacija koeficijenata teži nuli)? Kako se ovaj uslov može aproksimirati u posmatranom slučaju tako da se izbjegne dekompozicija autokorelacione matrice na sopstvene vrijednosti i sopstvene vektore?
   g) Estimirati prethodni uslov bez korišćenja autokorelacione matrice.
   h) Koja je vrijednost koraka μ kojom se postiže optimalna brzina konvergencije metoda najbržeg spuštanja?

5. Sa sajta ETF-a preuzmite m-fajl koji posjeduje unaprijed kreiran ulazni i zadati signal. Potrebno je, na osnovu njega, metodom najbržeg spuštanja odrediti koeficijente optimalnog sistema šestog reda, $N = 6$.
   a) Nakon koliko iteracija je pronađeno optimalno rješenje.
   b) Koji uslov mora zadovoljavati korak μ, da bi metod spuštanja konvergirao u srednjem?
   c) Odrediti korak μ koji garantuje optimalnu konvergenciju metoda najbržeg spuštanja.