Slučajni procesi
Vježbe 1

16. mart 2022.

Osnovne statističke veličine

1. Razmatra se slučajni signal $x(n)$, čija je jedna realizacija predstavljena u tabeli 1.

   (a) Koristeći MATLAB/Octave, odrediti srednju vrijednost kao i koliko se odbiraka signala nalazi u intervalima
   $$[1,10],[11,20],\dots,[91,100]$$
   (b) Grafički prikazati signal.

   (c) Grafički prikazati broj pojavljivanja vrijednosti signala $x(n)$ unutar ovih intervala, kao funkciju od opsega njihovih vrijednosti.

   (d) Odrediti medijan signala.

   (e) Odrediti varijansu signala.

Tabela 1: Realizacija slučajnog signala

54	62	58	51	70	43	99	52	57	76
56	53	38	61	28	69	87	41	72	80
23	26	66	47	69	71	69	81	68	79
31	55	52	23	60	34	83	39	66	59
37	12	54	42	67	95	89	67	42	63
35	55	54	55	49	77	18	64	73	70
67	56	42	66	50	47	49	25	50	57
61	84	48	67	71	74	35	59	60	42
40	77	52	63	57	42	44	64	36	71
66	39	50	31	11	75	45	62	60	55

Rješenje:

```
x=[ 54 62 58 51 70 43 99 52 57 76 56 53 38 61 28 69 87 41 72 80,...
    23 26 66 47 69 71 69 81 68 79 31 55 52 23 60 34 83 39 66 59,...
    37 12 54 42 67 95 89 67 42 63 35 55 54 55 49 77 18 64 73 70,...
    67 56 42 66 50 47 49 25 50 57 61 84 48 67 71 74 35 59 60 42,...
    40 77 52 63 57 42 44 64 36 71 66 39 50 31 11 75 45 62 60 55];

x=x(:);

%(a)
MV=mean(x)
```

```
MV3=sum(x)/length(x)

%(b)
figure(1)
n=1:length(x);
stem(n,x,'.')
hold on
plot(n,ones(length(n))*MV,'r--')

%(c)
figure(2)
H=hist(x,5:10:100)
bar(5:10:100,H,.95), grid on

Ni1 = length(find(x>=1 & x<=10))
Ni2 = length(find(x>=11 & x<=20))
Ni3 = length(find(x>=21 & x<=30))
Ni4 = length(find(x>=31 & x<=40))
Ni5 = length(find(x>=41 & x<=50))
Ni6 = length(find(x>=51 & x<=60))
Ni7 = length(find(x>=61 & x<=70))
Ni8 = length(find(x>=71 & x<=80))
Ni9 = length(find(x>=81 & x<=90))
Ni10 = length(find(x>=91 & x<=100))

%(d)
median(x)
%sort(x)
%(e)
N=length(x)
v=var(x) %st=std(x)
v1=sum(abs(x-MV).^2)/N
v2=sum(abs(x-MV).^2)/(N-1)
```

2. Implementirati primjer 2 i primjer 3 sa predavanja.

3. Dostupno je M realizacija realne slučajne varijable $x_i(n)$, $i = 1, 2, \ldots, M$, u trenutku n. Varijansa $x(n)$ se estimira u dva moguća scenarija:

   (a) Srednja vrijednost je poznata unaprijed i jednaka je nuli, $\mu_x(n) = 0$.

   (b) Srednja vrijednost nije poznata i estimira se iz podataka kao

   $$\mu_x(n) = \frac{1}{M}\left(x_1(n) + x_2(n) + \cdots + x_M(n)\right)$$

   Kako je rezultat estimacije varijanse iz zadatka pod (a) povezan sa rezultatom iz zadatka pod (b)?

   Rješenje

   (a) U scenariju kada je očekivana vrijednost poznata unaprijed, $\mu_x(n) = 0$, estimacija varijanse je

   $$\sigma_x^2(n) = \frac{1}{M}\Big(x_1^2(n) + x_2^2(n) + \cdots + x_M^2(n)\Big).$$

Za $\mu_x(n) \neq 0$ u opštem slučaju imamo:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(n) &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}|x_i(n)-\mu_x(n)|^2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}x_i^2(n) - 2\mu_x(n)\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}x_i(n) + \mu_x^2(n) \\ &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}x_i^2(n) - \mu_x(n)(2\hat{\mu}_x(n)-\mu_x(n))\end{aligned}$$

Budući da je pretpostavljeno da je srednja vrijednost $\mu_x(n)$ poznata, u prethodnoj relaciji se aproksimacija srednje vrijednosti $\hat{\mu}_x(n)$ može zamijeniti sa egzaktnom (unaprijed poznatom) srednjom vrijednošću $\mu_x(n)$. Tada prethodni izraz postaje:

$$\sigma_x^2(n) \approx \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}x_i^2(n) - \mu_x^2(n),$$

uz grešku $\hat{\mu}_x(n) - \mu_x(n)$.

(b) Kada se srednja vrijednost takođe estimira iz podataka, varijansa, označena sa $\hat{\sigma}_x^2(n)$, je jednaka:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x^2(n) &= \frac{1}{M}\left(\Big(x_1(n) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}x_i(n)\Big)^2 + \cdots + \Big(x_M(n) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}x_i(n)\Big)^2\right) \\ &= \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\Big(x_j(n) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}x_i(n)\Big)^2 = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}x_j^2(n) - \Big(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}x_i(n)\Big)^2 \\ &= \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}x_j^2(n) - \frac{1}{M^2}\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}x_i(n)x_j(n) \\ &= \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}x_j^2(n) - \frac{1}{M^2}\sum_{j=1}^{M}x_j^2(n) - \frac{1}{M^2}\sum_{j=1}^{M}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{M}x_i(n)x_j(n) \\ &= \frac{M-1}{M^2}\sum_{j=1}^{M}x_j^2(n) - \frac{M^2-M}{M^2}\frac{1}{M^2-M}\sum_{j=1}^{M}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{M}x_i(n)x_j(n).\end{aligned}$$

U prethodnom sabiranju, imenilac (M^2-M) se koristi zato što postoji tačno (M^2-M) sabiraka, pa je estimirana srednja vrijednost:

$$\hat{\mu}_x^2(n) \approx \frac{1}{M^2-M}\sum_{j=1}^{M}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{M}x_i(n)x_j(n).$$

Stoga, varijansa, $\hat{\sigma}_x^2(n)$, može biti zapisana u formi:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x^2(n) &= \frac{M-1}{M}\Big(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}x_j^2(n) - \frac{1}{M^2-M}\sum_{j=1}^{M}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{M}x_i(n)x_j(n)\Big) \\ &= \frac{M-1}{M}\Big(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}x_j^2(n) - \hat{\mu}_x^2(n)\Big) \approx \frac{M-1}{M}\sigma_x^2(n)\end{aligned}$$

Ovo dalje znači da se varijansa sa pravom srednjom vrijednošću, $\sigma_x^2(n)$, može aproksimativno povezati sa varijansom dobijenom na bazi estimirane srednje vrijednosti, $s_x^2(n)$, na sljedeći način:

$$\sigma_x^2(n) \approx \frac{M}{M-1}\hat{\sigma}_x^2(n)$$
$$= \frac{1}{M-1}\left(\left(x_1(n) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i(n)\right)^2 + \cdots + \left(x_M(n) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i(n)\right)^2\right).$$