



UNIVERZITET CRNE GORE
MAŠINSKI FAKULTETE

PRENOS TOPLOTE I MASE

PETAR VUKOSLAVČEVIĆ

PREDAVANJA PRIPREMLJENA U SARADNJI SA

w u s a u s t r i a
right to education
COURSE DEVELOPMENT PROGRAM -

Supported by the
Austrian
 Cooperation

PREDGOVOR

Predavanja iz Prenosa toplote i mase su pripremljena za studente Mašinskog fakulteta na smjeru za energetiku i mehanizaciju. S obzirom da je za analizu problema prenosa toplote i mase neophodno poznavati osnove iz Mehanike fluida i Termodinamike kao i odgovarajući matematički aparat, u posebnom poglavlju su date osnove iz Mehanike fluida i Termodinamike. Predavanja su tako koncipirana da se svi fizički procesi prenosa toplote i mase mogu pratiti uz poznavanje najosnovnijih matematičkih modela koji se predaju na kursevima iz Matematike na Mašinskom fakultetu. U dijelu u kome je za egzatnu analizu problema prenosa toplote i mase potrebno poznavati složeni matematički aparat, kao što su: parcijalne diferencijalne jednačine, specijalne funkcije, teorija polja i sl. sve matematičke procedure koje zahtijevaju navedene oblasti su date u posebnim dodacima. Materija je tako izložena da se njena fizička suština može pratiti i bez uvida u ove dodatke. Imajući to u vidu, predavanja se mogu koristiti i za posdiplomske studije, za koje bi matematički aparat u dodacima bio od posebnog značaja, kao i za dizajn sistema za grijanje i provjetravanje.

Predvidjeno je da se u okviru svakog poglavlja pripremi odredjen broj uradjenih primjera koji bi na najbolji način prezentirali mogućnost inžinjerske primjene izložene materije. Pored predavanja, suštinu kursa čine auditorne i laboratorijske vježbe. Za svaku laboratorijsku vježbu je pripremljeno posebno upustvo a za auditorne vježbe odgovarajuća zbirka zadataka. Konačno oblikovanje i štampanje ovog materijala kao i izbor uradjenih primjera koji će biti uključeni u predavanja će biti uradjeno u toku izvodjenja auditornih i laboratorijskih vježbi u sk. ??? g.

Podgorica, Oktobar 2014 g.

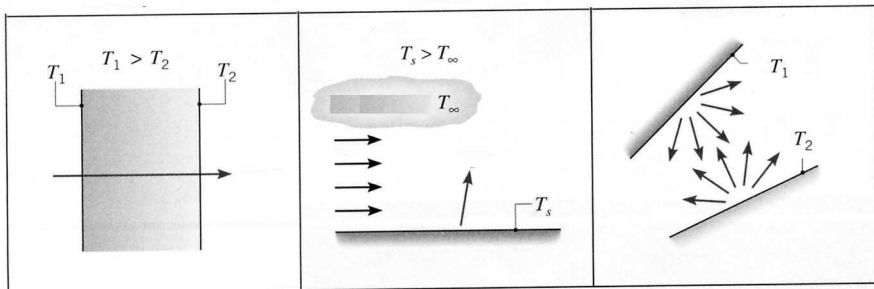
SADRŽAJ

GLAVA 1 – Fizički mehanizmi prenosa toplote	5
Uvod	6
1.1 Kondukcija	6
1.2 Konvekcija	7
1.3 Zračenje-radijacija	9
1.4 Toplotne karakteristike materij	12
Literatura	14
GLAVA 2 – Osnove Mehanike fluida	15
Uvod	16
2.1 Reynolds-ova transportna teorema	17
2.2 Jednačina kontinuiteta u integralnom obliku	19
2.3 Jednačina kontinuiteta u diferencijalnom obliku	20
2.4 Jednačina kretanja u integralnom obliku	22
2.5 Jednačina kretanja u diferencijalnom obliku – Navier-Stokesova jednačina	23
2.6 Diferencijalne jednačine kretanja pri turbulentnom strujanju fluida – Reynolds-ove jednačine	26
2.7 Bernoulli-eva jednačina	29
GLAVA 3 – Energijska jednačina	31
Uvod	32
3.1 Energijska jednačina u integralnom obliku	33
3.2 Energijska jednačina u diferencijalnom obliku	36
3.3 Jednačina toplotne energije	37
3.4 Jednačina toplotne difuzije	39
3.5 Karakteristična jednačina	40
3.6 Početni i granični uslovi	41
GLAVA 4 – Jednačine graničnog sloja	43
Uvod	44
4.1 Jednačine ravanskog graničnog sloja – Prandtl-ove jednačine	44
4.2 Debljina graničnog sloja	49
4.3 Odvajanje graničnog sloja	50
4.4 Univerzalni oblik jednačina graničnog sloja	52
4.5 Diferencijalni oblik energijske jednačine ravanskog graničnog sloja	54
4.6 Diferencijalne jednačine turbulentnog graničnog sloja nest. fluida	56
4.7 Debljina istiskivanja i debljina gubitka impulsa	56
4.8 Integralna jednačina kretanja u graničnom sloju	58
4.9 Integralna energijska jednačina graničnog sloja	59
4.10 Prandtl-ova i Reynolds-ova analogija	61
Literatura	64
GLAVA 5 – Jednodimenziona stacionarna kondukcija	65
Uvod	66
5.1 Ravan i cilindričan zid sa površinama konstantne temperature	66
5.2 Ravan zid sa promenljivim koeficijentom toplotne provodnosti	68
5.3 Ravan i cilindričan zid sa generacijom toplote i konstantnom	

toplotnom provodnošću	69
5.4 Ravan i cilindričan zid sa konvektivnim graničnim uslovima	71
5.5 Orebrene površine	73
GLAVA 6 – Višedimenziona stacionarna kondukcija	79
Uvod	80
6.1 Analitička rješenja	80
6.2 Nmerička analiza – ravanski problem	84
GLAVA 7 – Nestacionarna kondukcija	88
Uvod	89
7.1 Biott-ov broj	90
7.2 Sistem sa malim unutrašnjim otporom – Fourier-ov broj	91
7.3 polubeskonačno tijelo	92
7.4 Jednodimenzioni sistem sa konvekcijom na spoljnim površinama	94
7.5 Numerička analiza – eksplicitni i implicitni metod	100
Literatura	103
GLAVA 8 – Prinudna konvekcija	104
Uvod	105
8.1 Nusselt-ov broj	105
8.2 Laminarno strujanje duž ravne površine – diferencijalna analiza	106
8.3 Laminarno strujanje duž ravne površine – integralna analiza	110
8.4 Turbulentno strujanje duž ravne površine – diferencijalna analiza	113
8.5 Turbulentno strujanje duž ravne površine – integralna analiza	118
8.6 Strujanje kroz prave kružne cijevi	120
Literatura	125
GLAVA 9 – Slobodna konvekcija	126
Uvod	127
9.1 Jednačine graničnog slja pri slobodnoj konvekciji	127
9.2 Slobodna konvekcija pri laminarnom strujanju na vertikalnoj površini konstantne temperature	130
9.3 Empirijska korelacije	133
Literatura	135
GLAVA 10 – Ključanje i kondenzacija	137
Uvod	138
10.1 Ključanje u posudi	139
10.2 Ključanje u struji fluida	142
10.3 Filmska kondenzacija na vertikalnom zidu	143
Literatura	147
GLAVA 11 – Razmjenjivači toplote	148
Uvod	149
11.1 Rekuperativni razmjenjivači	149
11.2 Toplotna analiza rekuperativnih razmjenjivača	151
11.3 Koeficijent efektivnosti razmjenjivača – NTU metod	156
11.4 Metodologija proračuna	159
Literatura	160

GLAVA 1

FIZIČKI MEHANIZMI PRENOSA TOPLOTE

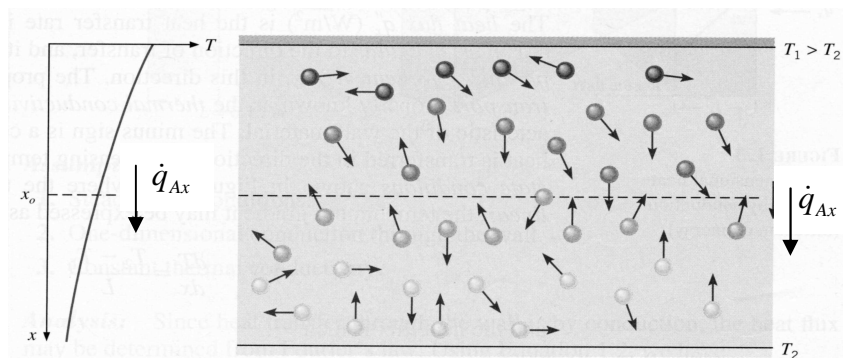


Uvod

Toplotna energija ili toplota predstavlja energiju čiji se transport (prenos) odvija na molekularnom i atomskom nivou. Prenos (transport) toplotne energije se može odvijati sa jednog sistema na drugi ili unutar jednog sistema. Odvija se uvijek kad postoji temperaturna razlika (neravnoteža) između ili unutar sistema. Od izuzetne važnosti je poznavanje fizičkih mehanizama koji karakterišu procese prenosa toplote kao i jednačina koje definišu količine toplote prenesene u jedinici vremena. Postoje tri mehanizma prenosa toplote: kondukcija, konvekcija i zračenje - radijacija.

1.1 Kondukcija

To je proces koji se odvija na molekularnom i atomskom nivou. Karakteriše ga interakcija molekula i atoma. Može se posmatrati kao prenos energije sa čestica višeg na čestice nižeg energetskog nivoa kao posledica njihove interakcije. Fizički mehanizam kondukcije je najlakše objasniti posmatrajući materiju koja kao cjelina miruje između dvije ploče različitih temperatura, sl.1.1.



Sl.1.1
Prenos energije usled
molekularnog kretanja

Kod idealnog gasa temperatura je proporcionalna srednjoj kinetičkoj energiji translacionog kretanja molekula dok kod realnih gasova i čvrstih tijela zavisi i od vibracija atoma i molekula i međumolekulskih sila. Oblast veće temperature karakteriše veći energetski nivo u odnosu na oblast niže temperature. Kada se molekuli određenog energetskog nivoa, koji se haotično kreću i vibriraju, sudare sa susjednim molekulima manjeg energetskog nivoa, dolazi do transfera energije sa višeg na niži energetski nivo. Intenzitet kretanja molekula višeg energetskog nivoa se smanjuje a nižeg povećava. Kondukcija se odvija uvijek sa višeg ka nižem energetskom nivou odnosno u pravcu niže temperature. Prenos energije, kao posledica haotičnog kretanja molekula je poznat i kao difuzija energije ili toplote. Za razliku od gasova, molekuli su kod tečnosti i čvrste materije na mnogo manjem rastojanju, njihove interakcije su intenzivnije i češće. Kod metala je dominantna vibracija molekula u rešetkama kristala. Pored vibracije, do prenosa energije dolazi i usled kretanja tzv. slobodnih elektrona kod čvrstih tijela. Dobre provodnike toplote karakteriše relativno veliki broj ovih elektrona. Tipičan primjer kondukcije je prolaz toplote kroz metalni štapić čiji je jedan kraj zaronjen u toplotni izvor. Poslije određenog vremenskog perioda doći će, usled kondukcije, do zagrijavanja slobodnog kraja štapa.

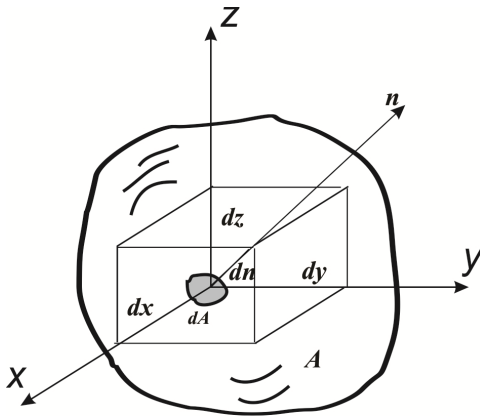
Količina toplote koja se prenosi odnosno prolazi kroz materiju usled kondukcije u x pravcu, po jedinici površine dA_x , je definisana sledećim izrazom,

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad 1.1$$

u kome je, \dot{q}_x (W/m^2), količina toplote u jedinici vremena po jedinici površine normalne na x pravac, λ ($W/m^\circ K$), koeficijent toplotne provodnosti ili kondukcije i, T , temperatura materije.

Ovaj izraz je poznat kao Furijeov (Fourier) zakon ili Furijeova jednačina konduktivnog prenosa toplote. Predložio je francuski fizičar i matematičar Fourier 1822 g. Količina toplote koja se prenosi putem kondukcije u nekom pravcu je, prema tome, proporcionalna gradijentu temperature u tom pravcu. Koeficijent proporcionalnosti, λ , je karakteristika materije. Negativan znak je posledica činjenice da se prenos energije vrši u smjeru niže temperature. Samo ako je $\partial T/\partial x < 0$ doći će do prenosa energije u pozitivnom x smjeru i obratno. Analogno izrazu (1.1) slijede sledeće relacije za y, z ili pravac n čiji je jedinični vektor \vec{n}_0 normalan na element dA neke proizvoljne površine A prikazane na sl.1.2:

$$\dot{q}_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \dot{q}_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \dot{q}_n = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}. \quad 1.2$$



Sl.1.2. Element dA , proizvoljne površine A

Imajući u vidu da je $d\vec{n} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = \vec{n}_0 dn$ i $\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dn}$, slijedi:

$$\dot{q}_n = -\lambda \text{grad} T \vec{n}_0 = \vec{q} \vec{n}_0. \quad 1.3$$

Izraz

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} = \dot{q}_x \vec{i} + \dot{q}_y \vec{j} + \dot{q}_z \vec{k}, \quad 1.4$$

predstavlja vektor toplotnog fluksa usled kondukcije. Odredjen je gradijentom temperature pa je, prema tome, normalan na izotermne površine $T = \text{const}$. Može imati proizvoljan pravac u odnosu na datu površinu dA , čiji je položaj odredjen jediničnim vektorom \vec{n}_0 normale n . Količine toplote koje usled kondukcije prolaze u jedinici vremena kroz projekcije dA_x , dA_y i dA_z elementarne površine dA su:

$$d\dot{Q}_x = \dot{q}_x dA_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dA_x, \quad d\dot{Q}_y = \dot{q}_y dA_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} dA_y, \quad d\dot{Q}_z = \dot{q}_z dA_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} dA_z, \quad 1.5$$

dok će toplotni fluks kroz površinu A biti:

$$d\dot{Q}_A = d\dot{Q}_n = \dot{q}_n dA = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dA = \vec{q} d\vec{A}. \quad 1.6$$

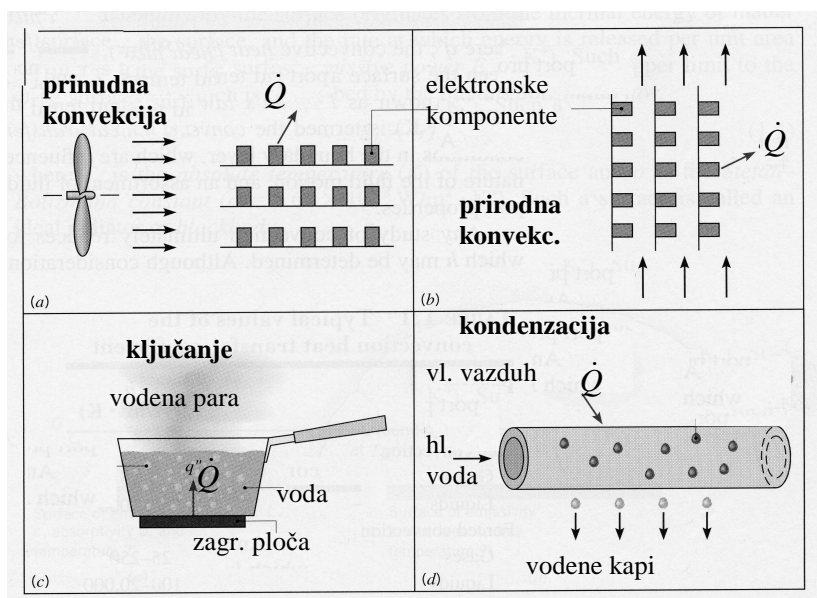
1.2

Konvekcija

Konvekciju karakteriše simultano dejstvo dva mehanizma prenosa toplote. Pojavljuje se kada pored haotičnog kretanja molekula postoji i kretanje djelića materije. To znači da se veliki broj molekula kreće kao cjelina kroz prostor od jednog do drugog energetskog nivoa. Ovakvo kretanje u pravcu temperaturnog gradijenta doprinosi prenosu energije. Pored prenosa energije usled haotičnog kretanja molekula karakterističnog za kondukciju, do intenzivnijeg prenosa energije će doći kada se djelići materije kreću kao cjelina od jedne do druge pozicije različitih temperatura. Do procesa konvekcije dolazi pri kretanju fluida duž neke površine kada su temperature fluida i površine različite. Strujanje fluida može biti prinudno, uslovljeno nekom pumpom ili ventilatorom ili prirodno, usled sila potiska na djeliće različite gustine. Proces se može odvijati na unutrašnjim ili spoljnim površinama. Primjeri konvektivnog prenosa toplote su prikazani na sl.1.2. Može doći i do kombinovane prirodne i prinudne konvekcije. Ako je npr. brzina strujanja usled dejstva ventilatora, sl.1.2(a), mala onda se usled dejstva sila potiska može ostvariti strujanje čiji je pravac približno normalan na pravac strujanja usled prinudne konvekcije. Oba strujanja igraju značajnu ulogu u procesu prenosa toplote. Postoje i konvektivni procesi u kojima dolazi do promjene faze, kao npr. pri ključanju i kondenzaciji, u kojima toplota isparavanja odnosno kondenzacija ima posebnu ulogu.

U blizini čvrste površine brzina fluida je jednaka nuli, tako da je u ovoj oblasti dominantna kondukcija odnosno difuzija toplote. Na samoj površini će se odvijati prenos samo putem kondukcije. Sa povećanjem rastojanja od površine povećava se i intenzitet kretanja djelića duž površine kao i u pravcu normalnom na površinu usled čega dolazi do transfera energije od površine kada je njena temperatura veća od temperature fluida i obratno.

Količina toplote koja se prenosi usled konvekcije je složena funkcija ne samo karakteristika materije i temperaturnog gradijenta već u uslova strujanja fluida u blizini čvrstih površina.



Sl.1.2

Prenos toplote konvekcijom.

(a) Prinudna konvekcije.

(b) Prirodna konvekcija.

(c) ključanje.

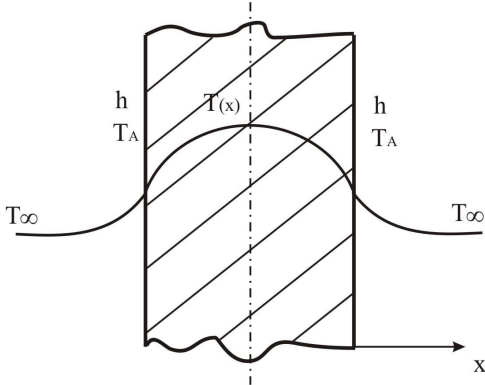
(d) kondenzacija.

Može se definisati sledećom jednačinom,

$$\dot{q}_A = h(T_A - T_\infty),$$

1.7

u kojoj je, $\dot{q}_A (W/m^2)$, količina prenesene toplote u jedinici vremena po jedinici površine, $h (W/m^2 \cdot K)$, koeficijent konvektivnog prenosa toplote a T_A i T_∞ temperature površine i fluida dovoljno daleko od površine. Izraz je poznat kao Njutnov (Newton) zakon konvekcije ili Njutnova jednačina konvektivnog prenosa toplote. Iako na prvi pogled jednostavan, ovaj izraz je veoma složen jer je koeficijent konvekcije, h , složena funkcija strujnog i temperaturnog polja i fizičkih karakteristika fluida. Analiza problema prenosa toplote usled konvekcije se svodi na analizu koeficijenta konvektivnog prenosa toplote u različitim uslovima. Na sl.1.3 je prikazano tijelo sa čijih se površina, temperature T_A odvodi toplota na okolni fluid temperature T_∞ .



Sl.1.3
Zagrijano tijelo u struji fluida

Da bi toplota koja se prenosi u pozitivnom pravcu x -ose uvijek bila pozitivna, lokalni toplotni fluks na desnoj površini mora biti

$$\dot{q}_A = h(T_A - T_\infty), \quad 1.8$$

a na lijevoj,

$$\dot{q}_A = h(T_\infty - T_A). \quad 1.9$$

Smjer prenosa toplote može biti značajan pri upoređivanju količina toplote razmijenjenih usled konvekcije na površini i kondukcije kroz površinu tijela, kada se konvekcija pojavljuje kao granični uslov pri kondukciji. Ukoliko smjer prostiranja toplote nije bitan, može se, bez obzira na položaj površine, koristiti izraz (1.7). Toplota koja se odvodi sa površine će, u tom slučaju, uvijek biti pozitivna, bez obzira na položaj površine i pravac prostiranja i obratno.

Protok toplote kroz neku elementarnu površinu će biti,

$$d\dot{Q} = \dot{q}_A dA = h(T_A - T_\infty) dA, \quad 1.10$$

dok je protok toplote kroz površinu A ,

$$\dot{Q} = \int_A h(T_A - T_\infty) dA. \quad 1.11$$

U slučaju kada je temperatura površine konstantna slijedi,

$$\dot{Q} = (T_A - T_\infty) \int_A h dA, \quad 1.12$$

što se može napisati i u obliku,

$$\dot{Q} = \bar{h} A (T_A - T_\infty), \quad 1.13$$

u kome je

$$\bar{h} = \frac{1}{A} \int_A h dA, \quad 1.14$$

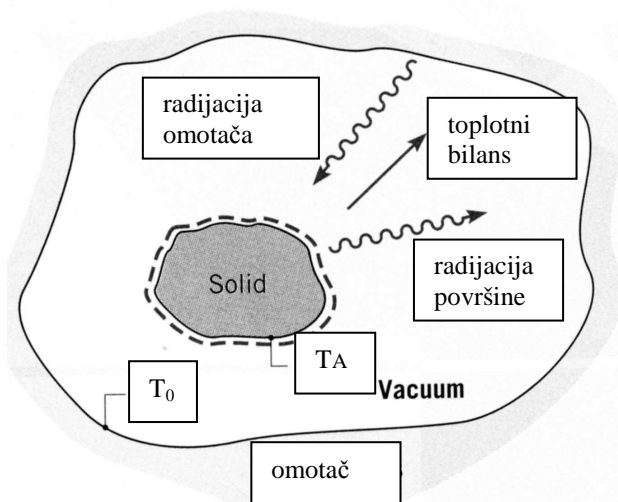
srednji koeficijent konvekcije na površini A . Ako se mora voditi računa o pravcu prostiranja toplotne energije, onda će toplotni protok na desnoj površini tijela, sl.1.3, biti definisan izrazom (1.10) dok će na lijevoj površini biti

$$\dot{Q} = \bar{h}A(T_{\infty} - T_A). \quad 1.15$$

1.4

Zračenje - radijacija

Toplotno zračenje ili radijacija je energija koju emituje tijelo date temperature. Predpostavimo da se neko tijelo temperature T_A nalazi u zatvorenom prostoru temperature T_0 , pri čemu je $T_A > T_0$, sl.1.4.



Sl.1.4

Hladjenje zagrijanog tijela u vakumu usled radijacije

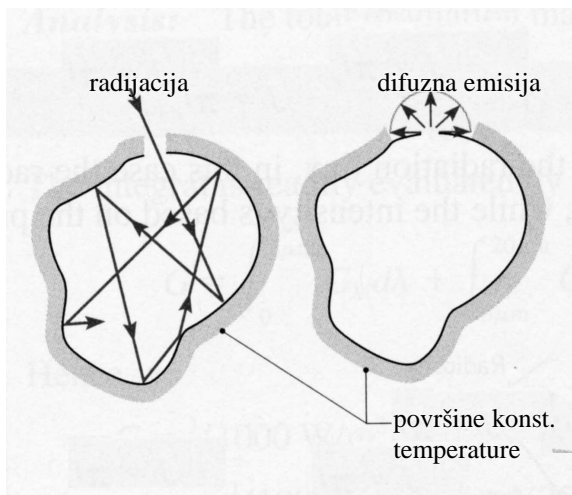
U slučaju kad oko tijela vlada vakum neće doći do razmjene topline kondukcijom ili konvekcijom između tijela i omotača. Kad ne bi bilo razmjene topline između tijela i omotača, temperature tijela i omotača se ne bi mijenjale. Iskustvo, međutim, pokazuje da će se poslije

određenog vremena ove temperature izjednačiti. To znači da je ipak došlo do razmjene energije sa okolinom. Postoje dvije teorije koje objašnjavaju prirodu ove razmjene, poznate kao zračenje ili radijacija toplotne energije. Prema prvoj pretpostavci energija se emituje i prenosi putem elektromagnetnih talasa, a prema drugoj energiju prenose fotoni koje emituje tijelo. Za razliku od kondukcije i konvekcije koje zahtijevaju prisustvo materije kroz koju prolazi toplota, za radijaciju ovo prisustvo nije neophodno. Ustvari, radijacija se najefektivnije odvija u vakumu. Energija se putem radijacije može emitovati sa neke površine, što je najčešći slučaj od praktičnog interesa. Ovu vrstu energije emituju sva tijela temperature $T > 0$, bez obzira na njihov oblik i prirodu, kao što su npr. gasovi i tečnosti. Radijacija se može posmatrati kao propagacija elektromagnetnih talasa frekvence $\nu(1/s)$ i talasne dužine $\lambda(m)$. Za radijaciju koja se prostire kroz određenu sredinu ovi parametri su povezani relacijom $\lambda = c/\nu$, pri čemu je $c(m/s)$ brzina prostiranja svjetlosti kroz tu sredinu. Zavisno od vrste materije odnosno stanja površine, dio energije koja dolazi zračenjem na neko tijelo se absorbuje, propušta ili reflektuje.

Gornja granica energije koju može emitovati neko tijelo po jedinici površine je definisana Stefan-Boltzman-ovim zakonom,

$$\dot{e}_{Ab} = \sigma T^4, \quad 1.16$$

u kome je \dot{e}_{Ab} (W/m^2) maksimalna energija koju može emitovati tijelo po jedinici površine ili energija crnog tijela, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} (W/m^2 K^4)$ Stefan-Boltzman-ova konstanta, a T apsolutna temperatura površine tijela u stepenima Kelvina. Crno tijelo se može zamisliti kao neko tijelo koje absorbuje cjelokupne energiju kojoj je izloženo usled radijacije. U ravnotežnom stanju emitovana energija mora biti jednaka apsorbovanoj, da bi temperatura tijela bila konstantna. Imajući to u vidu, slijedi da je crno tijelo istovremeno idealni emiter i apsorber. Cjelokupna primljena energija se emituje bez refleksije. Crno tijelo se može zamisliti kao zatvoren idealno izolovan prostor sa jednim malim otvorom kroz koji ulazi energija usled radijacije iz nekog izvora, sl.1.5.



Sl.1.5

Crno tijelo u obliku šupljine sa malim otvorom.

S obzirom da će se zrak koji udje u šupljinu bezbroj puta reflektovati prije nego eventualno izađe iz nje, slijedi da će njegova energija biti praktično u potpunosti apsorbovana unutar šupljine, bez obzira na nivo apsorpcije koju ima njena unutrašnja površina. To znači da je jedan ovakav sistem idealan apsorber. S druge strane, da bi temperatura sistema bila konstantna, što se mora ostvariti u ravnotežnom stanju, energija koju emituje ovaj sistem mora biti jednaka apsorbovanoj. Prema tome, otvor na tijelu će emitovati cjelokupnu primljenu energiju. Otvor se ponaša kao emiter energije, koja se prenosi preko niza elektromagnetnih talasa ili fotona u svim pravcima podjednako – difuzna emisija. Energija predata okolini je u potpunosti emitovana (bez refleksije) tako da se ovo tijelo ponaša istovremeno i kao idealan (difuzni) emiter energije.

Kada kroz mali otvor na crnom tijelu ne bi ulazio nikakav zrak, energija koju bi tijelo emitovalo bi takodje bila jednaka σT_0^4 , ali bi se temperatura tijela T_0 smanjivala tokom vremena. Očigledno je da kada bi se otvor zatvorio, površina zatvarača bi takodje bila izložena energiji σT_0^4 . S obzirom da intezitet ove energije ne zavisi od položaja otvora slijedi da će svaki djelić unutrašnje površine crnog tijela biti izložen energiji σT_0^4 . Ako unutar crnog tijela ubacimo neko tijelo malih dimenzija onda se prostor izmedju površine tog i crnog tijela može takodje smatrati crnim tijelom. To znači da će i površina ovog tijela biti takodje izložena energiji zračenja crnog tijela σT_0^4 .

Apsolutno crna tijela ne postoje u praksi, medjutim, postoje tijela bliska crnim. S druge strane, crno tijelo služi kao pogodan etalon za uporedjvanje sa ostalim tijelima odnosno površinama. Energija koju emituje neka proizvoljna, površina će biti manja od energije crnog tijela iste temperature i data je izrazom,

$$\dot{e}_A = \varepsilon \sigma T^4, \quad 1.17$$

u kome je $0 \leq \varepsilon \leq 1$, koeficijent emisije tijela. Ovaj koeficijent je fizička karakteristika površine i pokazuje intezitet emisije sive, za razliku od crne površine. Zavisí od vrste materijala i stanja površine (temperature i stepena obradjenosti) i dat je u dodatku **B1**.

Energija zračenja kojoj je izloženo neko tijelo po jedinici površine zavisi od geometrijskog oblika tijela i njegovog položaja u odnosu na izvor zračenje. Ako se ova energija označi sa \dot{g} , onda će dio energije koju tijelo absorbuje biti,

$$\dot{g}_{abs} = \alpha \dot{g}. \quad 1.18$$

Koeficijent α , koji se kreće u granicama $0 \leq \alpha \leq 1$, je poznat kao koeficijent apsorpcije sivog tijela ili površine. Koeficijent apsorpcije zavisi od stanja površine kao i od vrste radijacije odnosno talasne dužine spektra radijacije. Specijalan slučaj, koji je često prisutan u inženjerskoj praksi, je razmjena energije putem zračenja između nekog tijela relativno male površine, temperature T_A i okolne površine, omotača, uniformne temperature T_0 , koji u potpunosti opkoljava dato tijelo, sl.1.4.

Okolna površina može biti, npr. površina zidova neke prostorije u kojoj se nalazi dato tijelo relativno malih dimenzija čija površina ima uniformnu temperaturu $T_A \neq T_0$. Energija koju emituje omotač po jedinici površine se u tom slučaju može aproksimirati energijom crnog tijela, odnosno

$$\dot{e}_{Ab} = \sigma T_0^4. \quad 1.19$$

Energija zračenja \dot{g} kojoj je tijelo izloženo u ovom slučaju je jednaka energiji zračenja okolne površine, odnosno energiji koju zrači crno tijelo, $\dot{g} = \dot{e}_{Ab} = \sigma T_0^4$, što predstavlja jednu od karakteristika crnog tijela.

Ukupna energija koju tijelo po jedinici površine razmijeni u vidu toplote sa okolinom je jednaka razlici absorbovane i emitovane energije,

$$\dot{q}_A = \varepsilon \sigma T_A^4 - \alpha \dot{g} = \sigma (\varepsilon T_A^4 - \alpha T_0^4) \quad 1.20$$

U ravnotežnom stanju će biti $T_A = T_0$ odnosno $\dot{q}_A = 0$, na osnovu čega slijedi da je $\alpha = \varepsilon$. Može se pokazati da ova jednakost važi i u opštem slučaju difuzne radijacije kada je energija kojoj je izložena površina i energija emisije površine u približno istom spektru, što je čest slučaj u inženjerskoj praksi. Takve površine su poznate kao sive površine. U slučaju solarnog zračenja spektar solarne energije se može znatno razlikovati od spektra zračenje odgovarajuće površine, pa se koeficijent solarne apsorpcije α_s može razlikovati od koeficijenta emisije ε . Odnos α_s / ε predstavlja značajan inženjerski parametar i dat je u **Tab**.

Imajući u vidu da je, za sivo tijelo $\alpha = \varepsilon$, i da su temperature površina tijela i omotača uniformne, slijedi da je razmijenjena energija (toplota) usled radijacije,

$$\dot{Q} = \dot{q}_A A = A \varepsilon \sigma (T_A^4 - T_0^4). \quad 1.21$$

Pogodno je u pojedinim slučajevima, ovu energiju izraziti i u obliku,

$$\dot{Q} = h_r A (T_A - T_0), \quad 1.22$$

u kome je h_r radijativni koeficijent konvekcije. Upoređujući izraze (1.20) i (1.21) dobije se da je,

$$h_r \equiv \varepsilon \sigma (T_A + T_0) (T_A^2 + T_0^2). \quad 1.23$$

Ukoliko oko tijela postoji neki fluid onda se prenos energije pored zračenja može odvijati i putem konvekcije, tako da će ukupna razmijenjena količina energije biti,

$$\dot{Q} = (\dot{Q}_r + \dot{Q}_k) = (h_r + h) A (T_A - T_0). \quad 1.24$$

1.5

Toplotne karakteristike materije

U cilju analize problema prenosa toplote neophodne je poznavati određene fizičke karakteristike materije. Tako npr. da bi odredili toplotu koja usled kondukcije prolazi kroz neko tijelo neophodno je poznavati koeficijent toplotne provodnosti, λ , koji predstavlja toplotnu karakteristiku materije. Ovaj koeficijent po svojoj fizičkoj suštini pripada grupi transportnih karakteristika materije jer se preko njega definiše prenos ili transport toplote putem kondukcije. U grupu transportnih karakteristika spada i koeficijent kinematske viskoznosti ν ili dinamičke μ , koji definišu prenos količine kretanja. U grupu termodinamičkih karakteristika materije spadaju: gustina ρ , specifična zapremina v , specifične toplote c_p i c_v itd. Analiza fizičkih karakteristika materije se može naći u klasičnim udzbenicima iz Termodinamike i Mehanike fluida. U ovom poglavlju će biti analizirane samo neke karakteristike materije koje su od posebnog značaja za analizu problema prenosa toplote. Brojni podaci za fizičke karakteristike materije se mogu naći u različitoj literaturi kao npr.[1], [2],[3].

- **koeficijent toplotne provodnost**

Fourier-ova jednačina toplotne provodljivosti (1.1), definiše koeficijent proporcionalnosti između prenesene toplote i gradijenta temperature u x-pravcu, poznat kao koeficijent toplotne provodnosti, λ ,

$$\lambda = -\frac{\dot{q}_{Ax}}{(\partial T / \partial x)}. \quad 1.25$$

Na osnovu izraza (1.2) takodje slijedi da je,

$$\lambda = -\frac{\dot{q}_{Ay}}{(\partial T / \partial y)} = -\frac{\dot{q}_{Az}}{(\partial T / \partial z)} = -\frac{\dot{q}_{An}}{(\partial T / \partial n)}. \quad 1.26$$

Ovi izrazi važe samo za izotropnu materiju za koju koeficijent toplotne provodnosti, λ , neće zavisiti od pravca u kome se prenosi toplota. Dimenzija ovog koeficijenta je $(W / m^0 K)$.

Koeficijent toplotne provodljivosti je analogan koeficijentu viskoznosti imajući u vidu da njegova vrijednost zavisi od kinetičke energije molekula kao i u predhodnom slučaju. Molekuli sa većom kinetičkom energijom (većom temperaturom) se sudaraju sa sporijim molekulima i predaju im dio svoje energije. Porast temperature povećava kinetičku energiju molekula i uslovljava transport energije iz oblasti više ka nižoj temperaturi. S obzirom na analogiju koeficijenata viskoznosti i toplotne provodljivosti, analogni su i procesi prenosa količine kretanja i toplote.

Koeficijent toplotne provodnosti je funkcija pritiska, a naročito temperature. Za čvrste i tečne materije uticaj pritiska je zanemarljiv, dok se uticaj temperature može aproksimirati sledećom relacijom,

$$\lambda = \lambda_0 (1 + b_1 \theta + b_2 \theta^2 + \dots), \quad 1.27$$

u kojoj je $\theta = T - T_0$, dok je λ_0 koeficijent toplotne provodnosti na temperaturi T_0 . U najvećem broju slučajeva dovoljno tačan je izraz,

$$\lambda = \lambda_0 (1 + b \theta). \quad 1.28$$

Za gasove koeficijent toplotne provodnosti raste sa porastom temperature dok praktično ne zavisi od pritiska u oblasti u kojoj je pritisak manji od kritičnog. Sa približavanjem kritičnoj vrijednosti uticaj pritiska se mora uzeti u obzir.

Do prenosa toplote u čvrstoj materiji dolazi usled vibracije elektrona u koji se nalaze u kristalnim rešetkama kao i usled migracije slobodnih elektrona. Dobri provodnici toplote sadrže relativno veliki broj slobodnih elektrona, dok se kod izolatora prenos vrši samo usled vibracije. Intenzitet prenosa usled vibracije zavisi od uredjenosti kristalnih rešetki. Toplotna provodnost čvrste materije je veća od toplotne provodnosti tečnosti, dok je toplotna provodnost tečnosti veća od toplotne provodnosti gasova. Toplotna provodnost čvrste materije može biti i za četiri reda veličine veća od toplotne provodnosti gasova. Dobri izolatori se mogu napraviti kombinacijom materije u čvrstom i gasovitom stanju, na takav način da se gas izoluje unutar čvrste materije u malim mjehurovima koji sprečavaju kretanje gasa.

Vrijednosti koeficijenta toplotne provodljivosti, za razne vrste materije, su date u posebnom dodatku **B1**.

- *koeficijent toplotne difuzije*

Koeficijent toplotne difuzije je definisan sledećim izrazom,

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}. \quad 1.29$$

Ovaj koeficijent predstavlja odnos svojstava materije da provodi i konzervira energiju. Materijali sa velikim koeficijentom a će mnogo brže reagovati u slučaju promjene temperature u okruženju za razliku od materijala sa malim a . U slučaju gasova znatno zavisi od pritiska i temperature. Brojni podaci za različite vrste materije su dati u Dodatku **B1**, zajedno sa koeficijentom toplotne provodnosti i ostalim fizičkim karakteristikama.

Literatura

1. Touloukian, Y. S., and Ho, C.Y., Thermophysical Properties of Mater, Plenum Press, New York, 1970-1977.
2. Incropera, F.P., DeWitt, D.P., Heta and Mass Transfer, John Wiley and Sons, 2002.
3. Mills, A.F., Heat Transfer, Irwin INC, 1992.

GLAVA 2

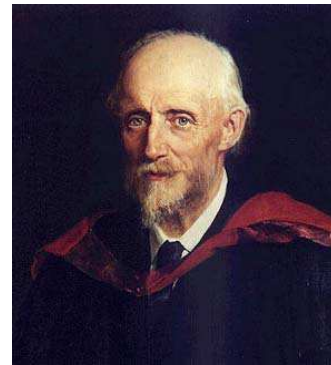
OSNOVE MEHANIKE FLUIDA



Leonhard Euler
1707-1783



George Stokes
1819-1903



Osborne Reynolds
1842-1912

Uvod

Analiza bilo kog problema u Mehanici fluida počinje direktnom ili indirektnom upotrebom osnovnih zakona koji definišu kretanje fluida. Ti zakoni, koji važe za bilo koju vrstu fluida su:

- Zakon o održanju mase iz koga slijede razni oblici jednačine kontinuiteta
- Drugi Newton-ov zakon iz koga slijede razni oblici jednačine kretanja
- Zakon o održanju energije iz koga slijedi prvi princip termodinamike odnosno razni oblici energijske jednačine.

Ovi zakoni su isti kao i zakoni koji se primjenjuju u Mehanici krutog tijela i Termodinamici. Potrebno ih je, međjutim, formulisati u obliku koji je najpogodniji za rješavanje problema kojima se bavi Mehanika fluida. U mnogim slučajevima je neophodna primjena samo nekih od ovih zakona, dok se pri rješavanju pojedinih problema, primjenom ovih zakona dobijaju jednačine koje se praktično ne mogu riješiti. U takvim slučajevima se traže približna rješenja upotrebom raznih formula dobijenih eksperimentalnim putem. Ponekad je neophodno analizirati dodatne relacije, koje opisuju fizičko ponašanje fluida pod određenim uslovima, kao što su jednačina stanja, razne hipoteze i sl.

Prvi korak pri rješavanju nekog problema je definisanje sistema koji se analizira. Postoje različite definicije sistema u Mehanici fluida i Termodinamici. Najpogodnije su se pokazale sledeće definicije:

- Kontrolna masa
- Kontrolna zapremina

U prvom slučaju se analizira fluid mase M . Granice sistema su površine koje odvajaju taj fluid od okoline. One mogu biti promenljivog položaja i oblika u prostoru (pokretne ili nepokretne), međjutim, fluid ne struji kroz njih. Prema tome, analizira se uvijek ista količina fluida, koja se kreće ili miruje, ali ne prolazi kroz granične površine.

U drugom slučaju se analizira fluidna masa koja se nalazi u određenoj kontrolnoj zapremini u datom trenutku vremena. Granice sistema su stvarne ili zamišljene površine koje ograničavaju tu zapreminu i njihov oblik se ne mijenja u toku vremena. Kontrolna zapremina je najčešće nepokretana, međjutim, može se kretati kroz prostor proizvoljnom brzinom ubrzanjem. Fluid struji kroz kontrolne površine, tako da je količina fluida koja se nalazi u kontrolnoj zapremini u opštem slučaju funkcija vremena. Brzina strujanja fluida se određuje u odnosu na kontrolnu zapreminu i može biti apsolutna ili relativna u zavisnosti od toga da li je kontrolna zapremina nepokretna ili se kreće kroz prostor. U literaturi se često govori o sistemu i kontrolnoj zapremini, pri čemu se pod sistemom podrazumijeva kontrolna masa.

Osnovni zakoni mogu biti formulisani za elementarno malu kontrolnu masu odnosno zapreminu ili za masu odnosno zapreminu čije su dimenzije istog reda veličine kao i prostor koji fluid zauzima. Prvi prilaz je poznat kao diferencijalni i iz njega slijede diferencijalne jednačine, dok je drugi prilaz poznat kao integralni i iz njega slijede integralne jednačine. Diferencijalne jednačine su složenije ali omogućavaju analizu fluidne mase djelić po djelić. U drugom slučaju se dobijaju podaci o zbirnom uticaju svih djelića odnosno cjelokupne fluidne mase na okolinu i obratno.

2.1

Reynoldsova (Reynolds) transportna teorema

Reynolds-ova transportna teorema daje vezu izmedju promjena (izvoda) veličina stanja definisanih za sistem kao kontrolnu masu i sistem kao kontrolnu zapreminu. Ona omogućava transformaciju fizičkih zakona definisanih za kontrolnu masu na oblik koji odgovara kontrolnoj zapremini. Imajući u vidu da je sistem kao kontrolna zapremina izuzetno pogodan za anлізу niza problema, Reynolds-ova transportna teorema je od izuzetnog značaja u Mekanici fluida.

Neka je N bilo koja veličina stanja (vektor ili skalar) koja odgovara kontrolnoj masi fluida zapremine V , a n veličina stanja koja se odnosi na jedinicu mase dm . Izmedju njih postoji sledeća veza,

$$N = \int_m ndm = \int_V n\rho dv. \quad 2.1$$

Tako npr. za $n \equiv 1$, sledi da je $N \equiv M$, pri čemu je M kontrolna masa fluida, odnosno

$$M = \int_V \rho dV. \quad 2.2$$

Za $n \equiv \vec{v}$, dobija se količina kretanja \vec{K} kontrolne mase,

$$\vec{K} = \int_V \rho \vec{v} dV, \quad 2.3$$

a za $n = v^2 / 2$, ukupna kinetička energija E_k kontrolne mase,

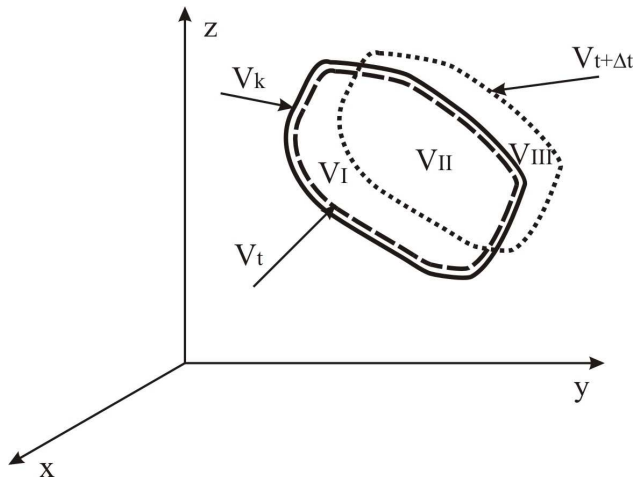
$$E_k = \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV. \quad 2.4$$

Integrali (2.1-2.4) predstavljaju totalni iznos neke veličine stanja koja odgovara određenoj masi (materiji) fluida, koja se može kretati ili deformisati ali tako da je uvijek sastavljena od istih fluidnih djelića (djelića materije). Imajući to u vidu poznati su i kao materijalni integrali. Promjena ili izvod po vremenu ovih integrala je od suštinskog značaja za definiciju osnovnih zakona u Mekanici fluida i fizici uopšte. Tako, npr. promjena ili izvod kontrolne mase po vremenu je jednak nuli, jer se kontrolna masa sastoji uvijek od istih fluidnih djelića, dok će promjena količine kretanja u jedinici vremena biti jednaka sumi svih sila koje djeluju na kontrolnu masu itd. Promjena u jedinici vremena ili izvod ovih integrala se označava sa velikim slovima,

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho n dV. \quad 2.5$$

Ova oznaka je usvojena da bi se uočila razlika izmedju izvoda po vremenu za neku veličinu stanja koja se odnosi na kontrolnu masu i istu veličinu stanja koja se odnosi na kontrolnu zapreminu. Vezu izmedju ovih izvoda, koji u principu ne moraju biti identični, definiše Reynolds-ova transportna teorema.

Na sl.2.1 je prikazana kontrolna masa zapremine V_t i $V_{t+\Delta t}$ u dva susjedna vremenska trenutka t i $t + \Delta t$. Neka je V_k (puna linija) dio prostora (kontrolna zapremina) površine A_k , u kojoj se nalazi kontrolna masa fluida zapremine V_t u trenutku t . U tom trenutku će biti $V_k \equiv V_t$. U narednom trenutku kontrolna masa fluida, usled kretanja, zauzima neku novu zapreminu $V_{t+\Delta t}$ (tačkasta linija), dok kontrolna zapremina V_k ostaje nepromijenjena.



Sl.2.1
Kontrolna zapremina i masa u dva susjedna vremenska trenutka

Izvod materijalnog integrala (2.5) će po definiciji biti

$$\frac{DN}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t}.$$

U dodatku **A1** je data analiza ove granične vrijednosti, na osnovu koje slijedi izvod

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V n\rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} n\rho dV + \int_{A_k} n\rho \left(\vec{v} \cdot d\vec{A} \right), \quad 2.6$$

poznat kao Reynolds-ova transportna teorema.

Ako se sa N_{V_k} označi veličina stanja koja odgovara masi fluida koja se nalazi unutar kontrolne zapremine V_k , slijedi

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial N_{V_k}}{\partial t} + \int_{A_k} n\rho \left(\vec{v} \cdot d\vec{A} \right). \quad 2.7$$

Značenje pojedinih članova u ovom izrazu je:

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V n\rho dV \quad \text{ukupna promjena (izvod) bilo koje veličine stanja koja se odnosi na kontrolnu masu.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} n\rho dV = \frac{\partial N_{V_k}}{\partial t} \quad \text{promjena bilo koje veličine stanja materije koja se nalazi unutar kontrolne zapremine.}$$

$$\int_{A_k} n\rho \left(\vec{v} \cdot d\vec{A} \right) \quad \text{protok bilo koje veličine stanja kroz kontrolnu površinu.}$$

Imajući to u vidu, slijedi da je ukupna promjena (izvod) neke veličine stanja koja se odnosi na kontrolnu masu, jednaka zbiru promjene te veličine stanja unutar kontrolne zapremine i njenog protoka kroz kontrolne površine.

Ukoliko se kontrolna zapremina kreće kroz prostor a pri tome ne mijenja oblik i veličinu, onda izrazi (2.6) i (2.7) važe i za takav slučaj, za sve veličine definisane u odnosu na kontrolnu zapreminu. Vrijednost skalara (pritisak, temperatura i sl.) će biti ista u datoj tački prostora bez obzira na koordinatni sistem u kome je definisana, što nije slučaj sa brzinom i ubrzanjem. To znači da se članovi koji sadrže brzinu i ubrzanje moraju rastaviti na prenosnu i

relativnu komponentu i izvedene izraze primijeniti samo na integrale koji sadrže relativne komponente. Integrali sa prenosnim komponentama se mogu lako sračunati jer su prenosna i ugaona brzina iste za sve djelećice unutar kontrolne zapremine. Brzina \vec{v} u površinskim integralima izvedenih izraza je očigledno relativna brzina.

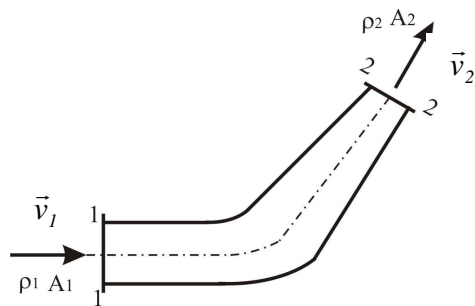
2.2

Jednačina kontinuiteta u integralnom obliku

Jednačina kontinuiteta proizilazi iz zakona o održanju mase. Na osnovu definicije sistema kao kontrolne mase slijedi da se masa sistema neće mijenjati pri njegovom kretanju kroz prostor. Promjena mase u jedinici vremena će, prema tome biti jednaka nuli,

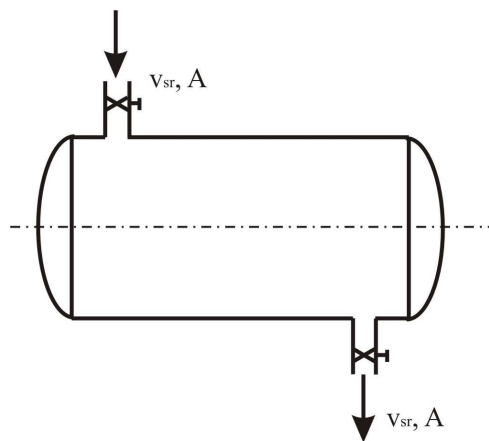
$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad 2.8$$

Pri rješavanju praktičnih problema pogodnije je, u najvećem broju slučajeva, posmatrati sistem kao kontrolnu zapreminu, odnosno analizirati strujanje fluida u nekom odredjenom prostoru kontrolne zapremine V_k , kao npr. na sl.2.2 i sl.2.3.



Sl.2.2

Strujanje fluida kroz cijevni vod



Sl.2.3

Punjenje i pržnjenje rezervoara

Primjenom Reynolds-ove transportne teoreme, imajući u vidu da je u ovom slučaju $n=1$, izraz (2.6) se svodi na sledeći oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} \rho dV + \int_{A_k} \rho (\vec{v} d\vec{A}) = 0. \quad 2.9$$

Količina fluida unutar kontrolne zapremine, M_k , je funkcija samo od vremena, na osnovu čega slijedi,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} \rho dV = \frac{\partial M_k}{\partial t} = \frac{dM_k}{dt},$$

odnosno,

$$\frac{dM_k}{dt} + \int_{A_k} \rho(\vec{v} d\vec{A}) = 0. \quad 2.10$$

Dobijeni izraz predstavlja jednačinu kontinuiteta u integralnom obliku pri strujanju nestišljivog ili stišljivog fluida. U slučaju stacionarnog strujanja prvi član je jednak nuli, pa se jednačina kontinuiteta svodi na sledeći oblik,

$$\int_{A_k} \rho(\vec{v} d\vec{A}) = 0. \quad 2.11$$

Za kontrolnu zapreminu prikazanu na sl.2.2, koja predstavlja dio nekog cjevovoda u kome fluid struji u pravcu normale na poprečni presjek, će biti

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 dA_1 = \int_{A_2} \rho_2 v_2 dA_2, \quad 2.12$$

odnosno

$$\rho_1 v_{1,sr} A_1 = \rho_2 v_{2,sr} A_2 = const. \quad 2.13$$

Kada fluid struji nestacionarno onda svaki slučaj predstavlja poseban problem u zavisnosti od stišljivosti fluida i nestacionarnosti. Ako je u slučaju prikazanom na sl.2.2 fluid nestišljiv i u potpunosti ispunjava kontrolnu zapreminu, onda masa fluida unutar kontrolne zapremine mora biti konstantna i pri nestacionarnom strujanju. Slijedi da će jednačina (2.13) važiti i u tom slučaju, pri čemu će gustine biti iste u oba presjeka.

Na sl.2.3 je prikazan tipičan primjer nestacionarnog strujanja stišljivog fluida – punjenje odnosno pražnjenje rezervoara. N osnovu izraza (2.10) slijedi promjena mase fluida unutar rezervoara,

$$\frac{dM_k}{dt} = - \int_{A_k} \rho(\vec{v} d\vec{A}) = \pm \rho v_{sr} A. \quad 2.14$$

Znak u ovom izrazu će biti pozitivan u slučaju punjenja rezervoara i obratno. Analognim putem, ko što je prikazano za dio cijevi i rezervoar, može se odrediti jednačina kontinuiteta za bilo kakv strujni prostor.

2.3

Jednačina kontinuiteta u diferencijanom obliku

Elementarna kontrolna masa, $dm = \rho dV$, fluidnog djelića se neće mijenjati pri njegovom kretanju kroz strujno polje. Imajući to u vidu, slijedi da je

$$\frac{D(dm)}{Dt} = \frac{D(\rho dV)}{Dt} = 0, \quad 2.15$$

odnosno,

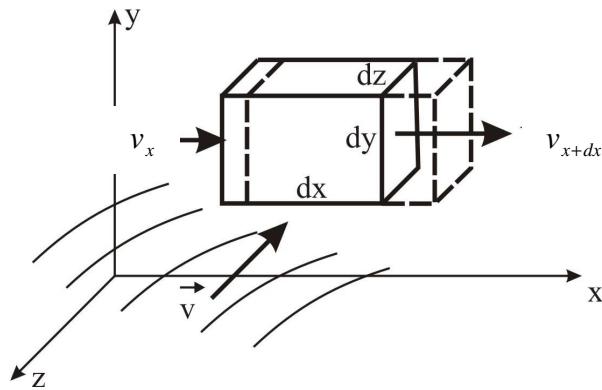
$$\frac{D\rho}{Dt} dV + \frac{D(dV)}{Dt} \rho = 0. \quad 2.16$$

Izvod $D\rho/Dt$ predstavlja totalnu promjenu, materijalni izvod, gustine sa vremenom. S obzirom da je $\rho = \rho(x, y, z, t)$ i da je za djelić koji se kreće: $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$,

dobija se da je

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}\rho. \quad 2.17$$

Promjena zapremine $D(dV)$, pri kretanju djelića kroz prostor se može odrediti analizirajući dva uzastopna položaja djelića prikazanog na sl.2.4.



Sl.2.4

Promjena zapremne fluidnog djelića pri kretanju u pravcu ose x

Promjena zapremine usled strujanja samo u pravcu ose x, $D(dV)|_x$, u dva susjedna vremenska trenutka će biti

$$D(dV)|_x = dV_{t+dt}|_x - dV_t|_x = v_{x+dx} dt dy dz - v_x dt dy dz.$$

S obzirom na proizvoljno male dimenzije fluidnog djelića, može se smatrati da je promjena brzine djelića duž ose x linearna,

$$v_{x+dx} = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx,$$

na osnovu čega slijedi da je

$$D(dV)|_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz dt. \quad 2.18$$

Analognim putem se može dobiti promjena zapremine usled kretanja djelića u z i y pravcu:

$$D(dV)|_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} dx dy dz dt, \quad D(dV)|_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz dt, \quad 2.19$$

odnosno ukupna promjena zapremine,

$$\frac{D(dV)}{Dt} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = \text{div} \vec{v} dV. \quad 2.20$$

Smjenom (2.17) i (2.20) u (2.16) dobija se opšti diferencijalni oblik jednačine kontinuiteta, koji važi za sve vrste fluida i strujanja,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0. \quad 2.21$$

Za stacionarno strujanje će biti

$$\text{div}(\rho\vec{v}) = 0, \quad 2.22$$

dok se za nestišljiv fluid ($\rho = const$) svodi na oblik,

$$\text{div}(\vec{v}) = 0. \quad 2.23$$

Jednačina kontinuiteta u cilindričnom koordinatnom sistemu,

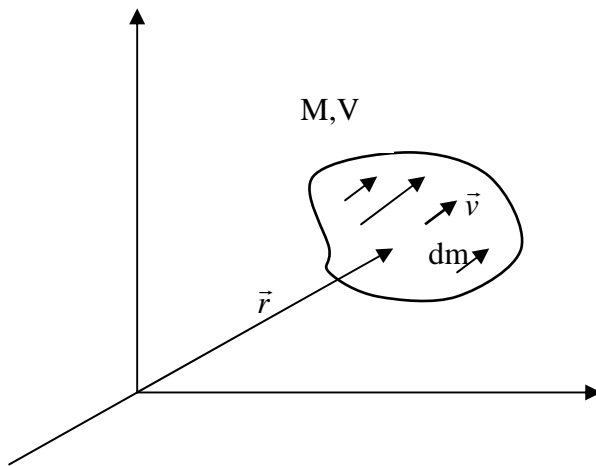
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0, \quad 2.24$$

je pogodna za analizu osnosimetričnih strujnih polja.

2.4

Jednačina kretanja u integralnom obliku

Fluidni djelići kontrolne fluidne mase M , zapremine V , sl.2.5, kreću se brzinom \vec{v} , koja je u opštem slučaju funkcija koordinata i vremena, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$



Sl.2.5

Kontrolna masa M zapremine V u brzinskom polju $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$

Količina kretanja nekog fluidnog djelića mase dm će biti

$$d\vec{K} = \vec{v} dm, \quad 2.25$$

dok je ukupna količina kretanja kontrolne mase M , zapremine V ,

$$\vec{K} = \int_V \vec{v} dm = \int_V \rho \vec{v} dV \quad 2.26$$

Prema drugom Newton-ovom zakonu, promjena količine kretanja u jedinici vremena jednaka je rezultanti svih sila koje djeluju na fluidnu masu,

$$\frac{D\vec{K}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \vec{R}. \quad 2.27$$

Izvod materijalnog integrala je definisan Reynolds-ovom transportnom teoremom (2.6) na osnovu koje, s obzirom da je u ovom slučaju $N \equiv \vec{K}$ i $n \equiv 1$, slijedi

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} \rho \vec{v} dV + \int_{A_k} \rho \vec{v} (\vec{v} d\vec{A}), \quad 2.28$$

odnosno,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} \rho \vec{v} dV + \int_{A_k} \rho \vec{v} (\vec{v} d\vec{A}) = \vec{R}. \quad 2.29$$

Ovako dobijena matematička formulacija, koja proizilazi iz Drugog Newton-ovog zakona, odnosi se na fluidnu masu koja se u datom trenutku vremena nalazi u kontrolnoj zapremini. Poznata je kao dinamička jednačina kretanja u integralnom obliku. Prvi član u ovom izrazu predstavlja parcijalnu promjenu količine kretanja u jedinici vremena unutar kontrolne zapremine, dok drugi član definiše protok količine kretanja kroz kontrolne površine.

Rezultantu sila koja se pojavljuju na desnoj strani jednakosti sačinjavaju:

- Spoljašnje ili zapreminske sile \vec{F} , najčešće sila polja zemljine teže \vec{G} , ili nekog drugog polja, npr. elektromagnetne sile za slučaj provodnog fluida u elektromagnetnom polju.
- Površinske sile \vec{F}_p (sile pritiska ili trenja na spoljnim površinama fluida).

2.5

Jednačina kretanja u diferencijalnom obliku: Navije-Stoksova (Navier-Stokes) jednačina

Diferencijalni oblik jednačine kretanja se dobija primjenom Drugog Newton-ovog zakona na elementarni fluidni djelić mase dm , koji se kreće kroz prostor brzinom \vec{v} . Promjena količine kretanja fluidnog djelića $d\vec{K}$ u jedinici vremena jednaka je rezultanti $d\vec{R}$, svih elementarnih sila koje djeluju na fluidni djelić,

$$\frac{D(d\vec{K})}{Dt} = \frac{D(\vec{v}dm)}{Dt} = d\vec{R}. \quad 2.30$$

Na osnovu jednačine kontinuiteta (2.15) je $D(dm)/Dt = 0$. Imajući to u vidu slijedi da je,

$$dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{R}, \quad 2.31$$

odnosno,

$$\rho dV \frac{Dv_x}{Dt} = d\vec{R}_x \quad \rho dV \frac{Dv_y}{Dt} = d\vec{R}_y \quad \rho dV \frac{Dv_z}{Dt} = d\vec{R}_z. \quad 2.32$$

Komponente rezultujuće elementarne sile u pravcu pojedinih osa predstavljaju zbir zapreminskih i površinskih sila koje djeluju na fluidni djelić u tim pravcima. Analiza ovih sila je data u odjeljku **A2**, u kome su izvedeni sledeći izrazi:

$$\begin{aligned} dR_x &= \left(\rho X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dV, \\ dR_y &= \left(\rho Y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) dV, \\ dR_z &= \left(\rho Z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dV, \end{aligned} \quad 2.33$$

u kojima su σ_{ij} komponente površinskih napona na stranicama fluidnog djelića a X, Y i Z komponente zapreminske sile, najčešće sile zemljine teže \vec{G} . Smjenom u jednačine (2.32) dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja:

$$\frac{Dv_x}{Dt} = X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right),$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right), \quad 2.34$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right).$$

Imajući u vidu da je totalno ubrzanje fluidnog djelića koji se kreće u polju brzine $\vec{v}(x, y, z, t)$,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z},$$

diferencijalne jednačine kretanja se mogu napisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad 2.35$$

ili, koristeći pravila tenzorskog računa, u skraćenom vidu,

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = F_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}. \quad 2.36$$

u kome indeksi i i j predstavljaju redom kordinate x , y i z .

Diferencijalne jednačine kretanja u opštem obliku (2.34) i (2.35) važe za sve vrste fluida, za laminarno i turbulentno strujanje. Broj nepoznatih u ovim jednačinama je deset (tri komponente brzine, gustina i šest komponenti tenzora napona), a ukupan broj jednačina, zajedno sa jednačinom kontinuiteta je četiri. Potrebno je, prema tome, uvesti nove jednačine u vidu hipoteza o vezama između napona i brzine deformisanja jer je kretanje i deformisanje fluidnog djelića uslovljeno naponima koji na njega djeluju. Do ovih hipoteza se dolazi analognim putem kao i u teoriji elastičnosti, polazeći od sledećih hipoteza:

- Naponi su linearne funkcije brzina deformisanja
- Fluid je izotropan (njegove osobine ne zavise od pravca)
- Kada je brzina deformisanja jednaka nuli, tj. Fluid miruje, zakon kretanja se svodi na Euler-ovu jednačinu za miran fluid u kome djeluje samo normalni napon $-p$, jednak u svim pravcima.

U dodatku **A3** je detaljno izveden postupak kojim se, polazeći od ovih hipoteza, dobijaju sledeći izrazi za devet komponenti tenzora napona:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}, \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}, \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}, \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad 2.37$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right).$$

Koristeći pravila tenzorskog računa, izrazi za napone se mogu napisati i u skraćenom obliku

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}^d = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}. \quad 2.38$$

u kome indeksi i i j predstavljaju redom kordinate x , y i z , dok je δ_{ij} Kroneker-ov simbol, koji je jednak jedinici za $i \equiv j$ i nuli za $i \neq j$. Prvi član u izrazu (2.38) je poznat ka sferni dio napona, jer se pod dejstvom pritiska mijenja zapremina djelića dok oblik ostaje nepromijenjen (sfera ostaje sfera), dok je drugi devijatorski dio napona koji izaziva promjenu oblika djelića materije.

Jednačine (2.37) su poznate kao Stokes-ov zakon o viskoznaosti i predstavljaju šest dopunskih veza izmedju napona i brzine. Komponente napona su definisane kao liearne funkcije komponenti brzina deformisanja i u slučaju mirovanja fluida se svode na pritisak $-p$, što je u skladu sa navedenim hipotezama. Isto tako, može se uočiti da se za slučaj nestišljivog strujanja u paralelnim slojevima (npr. duž x -ose), jednačine (2.37) svode na Newton-ov zakon o viskoznosti,

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \tau,$$

pa se, prema tome, mogu smatrati uopštenim zakonom o viskoznosti.

Uvodjenjem izraza (2.37) jednačine kretanja (2.34) dobijaju sledeći oblik

$$\begin{aligned} \frac{Dv_x}{Dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{v}), \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \vec{v}), \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{v}). \end{aligned} \quad 2.39$$

Ovim skalarnim jednačinama odgovara jedna vektorska,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}, \quad 2.40$$

poznata kao Navier-Stokes-ova jednačina., koja se s obzirom na (2.35) može napisati i u obliku,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}. \quad 2.41$$

Kada je fluid nestišljiv, ($\operatorname{div} \vec{v} = 0$), Navier-Stokes-ova jednačina se pojednostavljuje,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v}. \quad 2.42$$

Pri strujanju savršenog (bezviskoznog fluida, $\nu = 0$) Navier-Stokes-ova jednačina se svodi na Euler-ovu jednačinu za strujanje savršenog fluida,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad 2.43$$

a u slučaju mirovanja viskoznog ili savršenog fluida na Euler-ovu jednačinu za fluid u stanju mirovanja,

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad 2.44$$

Navier-Stokes-ova jednačina zajedno sa jednačinom kontinuiteta, sa odgovarajućim početnim i graničnim uslovima u potpunosti definiše laminarno strujanje viskozng nestišljivog fluida. Pri strujanju stišljivog fluida pojavljuje se još jedna nepoznata, gustina fluida ρ , koja je u opštem slučaju funkcija pritiska i temperature, tako da je neophodna upotreba jednačine stanja i energijske jednačine.

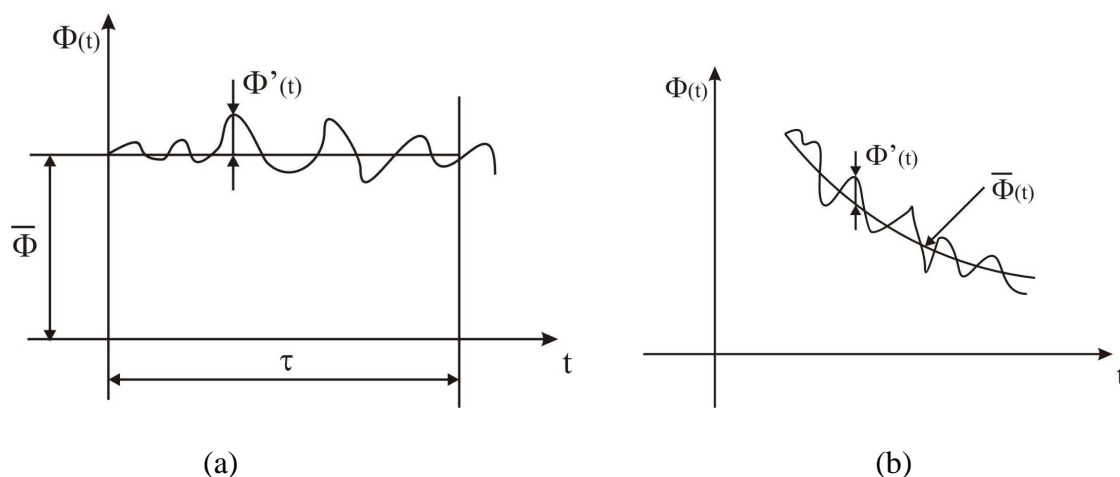
Navier-Stokes-ova jednačina i Stokes-ov zakon o viskoznosti su, s obzirom na njihov značaj, date u ostalim koordinatnim sistemima u dodatku **A3**.

2.6

Diferencijalne jednačine kretanja pri turbulentnom strujanju viskoznog fluida: Reynoldsove (Reynolds) jednačine

Turbulentno strujanje karakteriše intezivna razmjena, ne samo fluidnih djelića izmedju susjednih slojeva (transport mase), već i svih ostalih karakterističnih strujnih veličina (količine kretanja, toplote itd.). Pored toga, prisutne su i pulzacije napona, brzine, pritiska, temperature i sl. Strujanje se ne odvija u slojevima, tako da će i u najjednostavnijim slučajevima (strujanje izmedju dvije paralelne ploče, strujanje kroz pravu kružnu cijev i sl.) sve tri komponente brzine biti različite od nule i izrazito nestacionarne. Navedene karakteristike turbulentnih strujanja stvaraju ozbiljne teškoće pri formiranju pogodnog matematičkog modela - sistema jednačina koje bi u potpunosti opisale turbulentno strujanje. Čak i pod pretpostavkom da Navier-Stokes-ove jednačine važe i pri turbulentnom strujanju neophodno je, s obzirom na izrazitu nestacionarnost, pored graničnih poznavati i početne uslove. To podrazumijeva poznavanje brzina u datom trenutku vremena u svim tačkama strujnog polja. Imajući u vidu karakter turbulentnog strujanja, do ovog podatka nije moguće doći ni u slučaju najjednostavnijih strujnih polja.

Prve korake ka rješavanju ovog problema je napravio Osborne Reynolds, koji je izveo diferencijalne jednačine prosječnog kretanja nestišljivog fluida uvodeći u račun prosječne i pulzacione vrijednosti svih veličina koje ulaze u Navier-Stokes-ove jednačine, sl.2.6.



Sl.2.6. Proizvoljna funkcija $\phi(t)$. (a) Prosječna vrijednost funkcije nezavisna od vremena. (b) Prosječna vrijednost funkcije zavisna od vremena

Prosječna vrijednost neke funkcije $\phi(t)$, date na sl.2.6a, je definisana kao srednja vrijednost funkcije za neki interval vremena τ ,

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \phi(t) dt, \quad 2.45$$

pri čemu je τ vremenski interval dovoljno dug, tako da se prosječna vrijednost funkcije $\phi(t)$ ne mijenja daljim povećanjem ovog intervala. Funkcija $\phi(t)$ se u nekom trenutku vremena t može izraziti kao zbir prosječne vrijednosti $\bar{\phi}$, koja ne zavisi od vremena, i pulzacije ili fluktuacije, $\phi'(t)$,

$$\phi(t) = \bar{\phi} + \phi'(t). \quad 2.46$$

Na sl.2.6b je prikazana funkcija $\phi(t)$, čija će prosječna vrijednost zavistiti od vremena t . Prosječna vrijednost funkcije u ovom slučaju se ne može definisati izrazom (2.45).

Za vremensko osrednjavanje funkcija $\phi(t)$, $\phi_1(t)$ i $\phi_2(t)$ će, očigledno, važiti sledeće relacije:

$$C\bar{\phi} = C\bar{\phi}, \quad \overline{\phi'} = \bar{\phi'}, \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} = \frac{\partial \phi'}{\partial s}, \quad \bar{\phi'} = 0, \quad \overline{\phi_1 + \phi_2} = \bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2, \quad \overline{\phi_1 \phi_2} = \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2. \quad 2.47$$

Polazeći od pretpostavke da Navier-Stokes-ova jednačina (2.41) i jednačina kontinuiteta (2.21), koje se za slučaj nestišljivog fluida svode na sledeći oblik,

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \bar{v}, \quad 2.48$$

$$\text{div} \bar{v} = 0, \quad 2.49$$

važe i pri turbulentnom strujanju nestišljivog fluida, Reynolds je definisao pritisak i brzinu u ovim jednačinama kao zbir prosječnih i pulzacionih vrijednosti:

$$p = \bar{p} + p', \quad \bar{v} = \bar{v} + v'; \quad v_x = \bar{v}_x + v'_x, \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y, \quad v_z = \bar{v}_z + v'_z, \quad 2.50$$

na osnovu čega slijedi:

$$\frac{\partial \bar{v} + v'}{\partial t} + (\bar{v}_x + v'_x) \frac{\partial \bar{v} + v'}{\partial x} + (\bar{v}_y + v'_y) \frac{\partial \bar{v} + v'}{\partial y} + (\bar{v}_z + v'_z) \frac{\partial \bar{v} + v'}{\partial z} = \quad 2.51$$

$$\bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p + p') + \nu \Delta (\bar{v} + v')$$

$$\text{div}(\bar{v} + v') = \frac{\partial (\bar{v}_x + v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}_y + v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v}_z + v'_z)}{\partial z} = 0. \quad 2.52$$

Transformacijom vektorske jednačine (2.51) na skalarni oblik, a zatim osrednjavanjem svakog člana u ovim jednačinama za vremenski interval τ , imajući u vidu relacije (2.47), u slučaju kada prosječne vrijednosti brzine ne zavise od vremena, dobijaju se sledeće jednačine:

$$\rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) = \rho X - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{v}_x - \rho \left[\frac{\partial \bar{v}'_x v'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'_y v'_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'_z v'_x}{\partial z} \right],$$

$$\rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} \right) = \rho Y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v}_y - \rho \left[\frac{\partial \bar{v}'_x v'_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'_y v'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'_z v'_y}{\partial z} \right], \quad 2.53$$

$$\rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right) = \rho Z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \Delta \bar{v}_z - \rho \left[\frac{\partial \bar{v}'_x v'_z}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'_y v'_z}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'_z v'_z}{\partial z} \right],$$

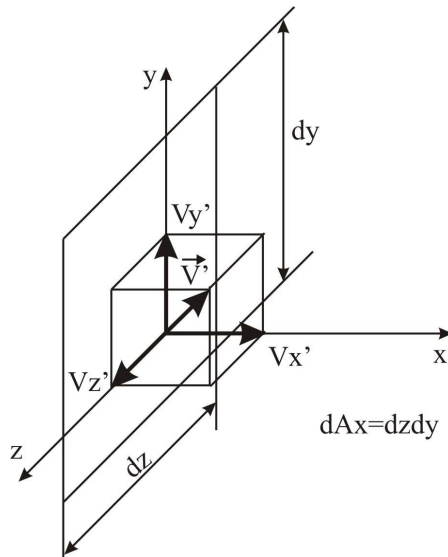
$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0. \quad 2.54$$

Ove jednačine su poznate kao Reynolds-ove jednačine prosječnog kretanja pri turbulentnom strujanju nestišljivog fluida. Članovi na desnoj strani ovih jednačina, koji zavise od pulzacija brzine v'_x , v'_y i v'_z imaju karakter napona. Njihova fizička suština se može najbolje uočiti ako se posmatra pulzaciono kretanje fluidnih djelića iz jednog sloja u drugi. Neka dva susjedna sloja razdvaja ravan y-z, sl.2.7, i neka fluid struji kroz element dydz te ravni brzinom \vec{v}' . Količina fluida koja prodje kroz tu elementarnu ravan je,

$$d(dm) = -\rho v'_x dA_x dt$$

sa količinom kretanja

$$d(d\vec{K}) = d(dm)\vec{v}' = -\rho v'_x dA_x \vec{v}' dt .$$



Sl.2.7

Strujanje fluida usled pulzacionog kretanja kroz elementarnu ravan dydz

Sila koja djeluje na elementarni djelić će biti

$$d\vec{F}' = \frac{d(d\vec{K})}{dt} = -\rho v'_x dA_x \vec{v}'$$

a odgovarajući vektor napona na ravan dA_x ,

$$\vec{\sigma}'_x = \frac{d\vec{F}'}{dA_x} = -\rho v'_x \vec{v}' .$$

Prosječna vrijednost ovog vektora napona je

$$\overline{\vec{\sigma}'_x} = -\rho \overline{v'_x v'_x} \vec{i} - \rho \overline{v'_x v'_y} \vec{j} - \rho \overline{v'_x v'_z} \vec{k} = \overline{\sigma'_{xx}} \vec{i} + \overline{\sigma'_{xy}} \vec{j} + \overline{\sigma'_{xz}} \vec{k} .$$

Na sličan način se mogu dobiti i izrazi koji odgovaraju strujanju kroz elementarne ravni dx dz i dx dy. Imajući to u vidu, članovi na desnoj strani Reynolds-ovih jednačina se mogu napisati u obliku:

$$\begin{aligned} -\rho \left[\frac{\partial \overline{v'_x v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_y v'_x}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'_z v'_x}}{\partial z} \right] &= \frac{\partial \overline{\sigma'_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma'_{yx}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\sigma'_{zx}}}{\partial z} , \\ -\rho \left[\frac{\partial \overline{v'_x v'_y}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_y v'_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'_z v'_y}}{\partial z} \right] &= \frac{\partial \overline{\sigma'_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma'_{yy}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\sigma'_{zy}}}{\partial z} , \\ -\rho \left[\frac{\partial \overline{v'_x v'_z}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_y v'_z}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'_z v'_z}}{\partial z} \right] &= \frac{\partial \overline{\sigma'_{xz}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma'_{yz}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\sigma'_{zz}}}{\partial z} , \end{aligned} \tag{2.55}$$

u kome su naponi

$$\sigma'_{ij} = -\rho v'_i v'_j, \quad 2.56$$

poznati kao Reynolds-ovi naponi. Njihove prosječne vrijednosti se mogu predstaviti u vidu sledeće matrice

$$\begin{pmatrix} \overline{\sigma'_{xx}} & \overline{\sigma'_{yx}} & \overline{\sigma'_{zx}} \\ \overline{\sigma'_{xy}} & \overline{\sigma'_{yy}} & \overline{\sigma'_{zy}} \\ \overline{\sigma'_{xz}} & \overline{\sigma'_{yz}} & \overline{\sigma'_{zz}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho v'_x v'_x} & -\overline{\rho v'_y v'_x} & -\overline{\rho v'_z v'_x} \\ -\overline{\rho v'_x v'_y} & -\overline{\rho v'_y v'_y} & -\overline{\rho v'_z v'_y} \\ -\overline{\rho v'_x v'_z} & -\overline{\rho v'_y v'_z} & -\overline{\rho v'_z v'_z} \end{pmatrix} \quad 2.57$$

Ovi naponi ne potiču od viskoznih već od inercionih nelinearnih članova u Navier-Stokes-ovim jednačinama, pa bi se pojavili i pri turbulentnom strujanju neviskoznog fluida.

Reynolds-ove jednačine sadrže deset nepoznatih; tri komponente brzine, pritisak i šest komponenti pulzacionih napona (s obzirom da je $\overline{\sigma'_{ij}} = \overline{\sigma'_{ji}}$ za $i \neq j$). Da bi sistem postao zatvoren potrebno je, u opštem slučaju, pored jednačine kontinuiteta još šest dopunskih veza (jednačina) u kojima se ne bi nalazile nove nepoznate.

Ove dopunske veze nijesu do danas formulisane za opšti slučaj strujanja. Rješavanju problema se prišlo proučavanjem međusobne zavisnosti karakteristika turbulencije (pulzacionih komponentu napona i brzine) i brzine prosječnog kretanja. Na ovaj način su nastale dopunske jednačine koje povezuju već postojeće fizičke veličine. Pojedine konstante koje se pojavljuju u ovakvim jednačinama se moraju odrediti eksperimentalnim putem. Ovakav prilaz rješavanju problema i rezultati koji su proizašli su poznati kao puluempirijske teorije turbulencije. Najpoznatije su: Prantlova (Prandtl), Tajlorova (Taylor), Karmanova (Karman), Reynolds-ova (Reynolds) i druge. Pored ovih teorija, u poslednje vrijeme su sve više prisutna numerička rešenja koja se dobijaju direktnim integraljenjem Navije-Stoksovih (Navier-Stokes) ili Reynolds-ovih (Reynolds) jednačina.

2.7

Bernulijeva (Bernoulli) jednačina.

Ojlerova (Euler) i Navije-Stoksova (Navier-Stokes) jednačina su veoma složene i mogu se integraliti u zatvorenom obliku u relativno malom broju slučajeva. Jedan od njih, koji ima izuzetan praktičan značaj, je strujanje duž strujnice s u polju zemljine teže ($\vec{F} = \text{grad}U$). S obzirom da je brzina u tom slučaju $\vec{v} = \vec{v}(s, t)$ sledi

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \quad 2.58$$

što poslije smjene u Ojlerovu (Euler) jednačinu (2.43) daje

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \text{grad}U - \frac{1}{\rho} \text{grad}p. \quad 2.59$$

Množeći ovaj izraz sa elementom strujnice $d\vec{s}$, i imajući u vidu da je za neku funkciju φ , $\text{grad}\varphi d\vec{s} = d\varphi$, u polju zemljine teže ($U = -gz$), će biti

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{s} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + g dz = 0. \quad 2.60$$

Integrišući ovaj izraz duž strujnice izmedju dva proizvoljna presjeka sledi

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_{s_1}^{s_2} \frac{dp}{\rho} + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0. \quad 2.61$$

Kada je strujanje nestišljivo i stacionarno, dobijeni izraz se svodi se na sledeći oblik,

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2, \quad 2.62$$

koji predstavlja zakon o održanju kinetičke i potencijalne (mehaničke) energije i ima izuzetan značaj za praktičnu primjenu. Dobijeni izraz je poznat kao Bernoulli-jeva jednačina za strujanje savršenog fluida duž strujnice.

Sličan izraz se može dobiti i integraljenjem Navier-Stokes-ove jednačine u obliku

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \int_{s_1}^{s_2} \frac{dp}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + gh_{in} + gh_m, \quad 2.63$$

u kome su:

$$gh_{in} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds, \quad gh_m = \int_{s_1}^{s_2} v \left(\Delta \vec{v} - \frac{1}{3} \text{grad div} \vec{v} \right) ds \quad 2.64$$

Za slučaj strujanja nestišljivog fluida slijedi,

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + gh_m; \quad gh_m = \int_{s_1}^{s_2} v \Delta \vec{v} d\vec{s}. \quad 2.65$$

Poslednji član u ovoj jednačini predstavlja energiju po jedinici mase koja se razmjenjuje između presjeka s_1 i s_2 usled dejstva tangentskih napona (sila trenja). U najvećem broju slučajeva u pitanju je dio mehaničke energije koji se usled trenja transformiše u unutrašnju energiju. Ovaj član se može analitički odrediti samo u strujnim poljima jednostavnog geometrijskog oblika. Najčešće se označava sa gh_m i određuje eksperimentalnim putem.

Dobijeni izraz važi i za slučaj turbulentnog strujanja sa prosječnim vrijednostima brzine i pritiska, duž strujnice prosječnog strujnog polja.

GLAVA 3

ENERGIJSKA JEDNAČINA



James Prescott Joule
1818-1889



Daniel Bernoulli
1700-1782

Uvod

Na osnovu niza eksperimentalnih rezultata i iskustva uopšte zaključeno je da se energija ne može uništiti ili stvoriti već samo transformisati iz jednog oblika u drugi. Izuzetak predstavljaju nuklearni procesi koji nijesu predmet analize u ovom poglavlju. To znači da je energija koja ulazi u neki sistem jednaka zbiru energije koja izlazi iz sistema i energije koja se akumulirala u njemu, što predstavlja formulaciju zakona o održanju energije. Slijedi da je energija izolovanog sistema konstantna

Prvi princip termodinamike proizilazi iz zakona o održanju energije kada se uzme energija u onom vidu u kome se sreće u Termodinamici. S obzirom da se u Mehanici fluida energija sreće u istom vidu kao i u Termodinamici, prvi princip termodinamike predstavlja napogodniji oblik zakona o održanju energije za analizu transportnih procesa.

Sve energije se mogu podijeliti u dvije osnovne grupe. Nazivi grupa nijesu univerzalni, međjutim obje grupe imaju neke bitne karakteristike po kojima se razlikuju. U prvu grupu spadaju one vrste energije koje posjeduje određena masa materije zapremine V ili dV u datom trenutku vremena t . Može se upotrijebiti naziv zapreminska energije. To su:

- Kinetička energija, E_k (J) ili e_k (J/kg), koja je funkcija kretanja mase.
- Potencijalna energija, E_p (J) ili e_p (J/kg), koja je funkcija položaja mase u nekom spoljašnjem polju sila.
- Unutrašnja energija, U (J) ili u (J/kg), koja je funkcija energije molekula i atoma unutar mase određenog sistema.

S obzirom da je kinetička energija elementarnog djelića materije $dE_k = dm v^2 / 2$, promjena kinetičke energije u toku nekog procesa zavisi samo od početne i krajnje brzine djelića materije. Promjena potencijalne energije u polju konzervativnih sila je jednaka radu ovih sila koji zavisi samo od početne i krajnje pozicije djelića. Konačno, unutrašnja energija se sastoji od kinetičke i potencijalne energije atome i molekula u polju unutrašnjih sila. Promjena ovih vrsta energije u toku nekog procesa zavisi samo od vrijednosti koje imaju na početku i kraju procesa, bez obzira na način odvijanja procesa. Na osnovu izloženog proizilazi da su ove vrste energije veličine stanja. One definišu stanje sistema u datom trenutku vremena, jer sistem sadrži određenu kinetičku, potencijalnu ili unutrašnju energiju.

U drugu grupu spadaju one vrste energije koje prelaze sa jednog sistema na drugi, može se upotrijebiti naziv tranzitna energije. To su:

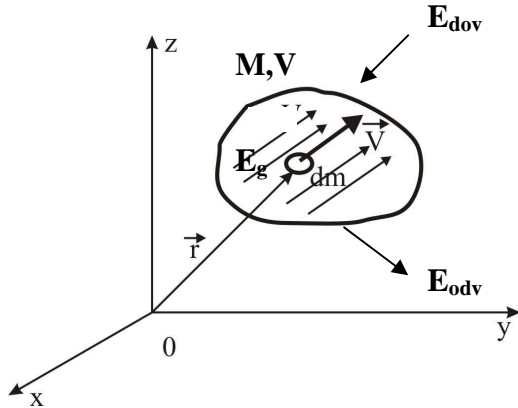
- Toplota, Q (J) ili q (J/kg), energija koja prelazi sa jednog sistema na drugi kao rezultat termičke neravnoteže, nejednakih temperatura dva sistema ili sistema i okoline. Razmjena ove energije se odvija na molekularnom nivou.
- Rad, W (J) ili w (J/kg), energija koju može odati ili primiti sistem kao rezultat mehaničke neravnoteže dva sistema ili sistema i okoline. Energija se razmjenjuje u vidu rada kada sile koje djeluju na sistem izazivaju pomjeranje djelića sistem.

Ove vrste energije zavise ne samo od početnog i krajnjeg stanja u kome se sistem nalazi već i od puta između krajnjih tačaka, tj. od načina na koji sistem mijenja stanje. One nijesu veličine stanja već veličine procesa. Sistem ne sadrži toplotu ili rad već ih samo razmjenjuje.

3.1

Energijska jednačina u integralnom obliku

Na sl.3.1 je prikazan sistem kao kontrolna masa M , zapremine V , koja se može kretati i deformisati.



Sl.3.1

Kontrolna masa M zapremine V u polju brzine $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$

Ako je E ukupna energija koju sadrži sistem u bilo kom trenutku vremena t , E_{dov} energija koja se dovodi sistemu, E_{odv} energija koja se odvodi iz sistema i E_g energija koja se generiše u sistemu, na osnovu zakona o održanju energije, slijedi da je za neki proces koji se odvija u vremenskom intervalu Δt bilans dovedene, generisane i odvedene energije jednak promjeni energije sistema ΔE ;

$$E_{dov} + E_g - E_{odv} = \Delta E, \quad 3.1$$

Za dovoljno mali vremenski interval dt , ovaj izraz se može napisati i u diferencijalnom obliku

$$\frac{dE_{dov}}{dt} + \frac{dE_g}{dt} - \frac{dE_{odv}}{dt} = \frac{DE}{Dt}. \quad 3.2$$

Promjena energije sistema u jedinici vremena je označena sa velikim slovima, u skladu sa objašnjenjem datim u poglavlju 2.1.

Energija sistema je jednaka zbiru kinetičke, potencijalne i unutrašnje energije,

$$E = E_k + E_p + U. \quad 3.3$$

Ako se energija po jedinici mase označi sa e onde je specifična energije sistema,

$$e = e_k + e_p + u = \frac{v^2}{2} + gz + u, \quad 3.4$$

dok će ukupna energija sistema biti

$$E = \int_V e \rho dV. \quad 3.5$$

Energija koja se dovodi ili odvodi je tranzitna energije. U tu energiju spadaju rad W i toplota Q , kao i energija razmijenjena zračenjem. Generisana energija je najčešće energija koja se generiše u nekom toplotnom grijaču ili u nekom hemijskom procesu. U zavisnosti od toga da li se dovode ili odvođe, rad i toplota će u izrazu (3.2) ući sa pozitivnim ili negativnim znakom. Može se pretpostaviti bilo kaja kombinacija; da se rad i toplota dovode ili odvođe ili da se rad dovodi a toplota odvodi. Treba imati u vidu da se znak za rad ili toplotu u finalno dobijenom izrazu mora promijeniti ako se izraz koristi u uslovima suprotnim od pretpostavljenih. Uobičajena pretpostavka je da se toplota dovodi a rad odvodi, jer na tom

principu rade motori sa unutrašnjim sagorijevanjem, parne mašine i turbine. Imajući to vidu slijedi

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dE_g}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{DE}{dt}, \quad 3.6$$

što predstavlja uobičajenu formulaciju prvog principa termodinamike.

U cilju analize rada razmijenjenog sa okolinom, pogodno je izvršiti klasifikaciju rada u dvije osnovne grupe. U prvu grupu spada rad koji materija prima ili predaje okolini kao rezultat površinskih sila odnosno napona koji djeluju na kontrolne površine. Ovaj rad se sreće pod nazivom strujni rad W_f . U drugu grupu najčešće se pojavljuje rad koji se preko neke osovine odvodi iz kontrolne zapremine ili obratno, poznat kao osovinski rad W_o . To bi npr. bio rad koji turbina dobija od fluida ili pumpa predaje fluidu. Ako na element kontrolne površine dA , djeluje sila $d\vec{F}$, onad je vektor napona na tom elementu površine $\vec{T} = d\vec{F}/dA$, odnosno $d\vec{F} = \vec{T}dA$. Rad ove sile na elementarnoj površini dA je $\vec{T}dA d\vec{l}$, pri čemu je $d\vec{l}$ elementarna putanja djelića, dok će na čitavoj kontrolnoj površini, A_k , biti

$$dW_f = \int_{A_k} \vec{T}dA d\vec{l}, \quad 3.7$$

odnosno,

$$\frac{dW_f}{dt} = \int_{A_k} \vec{T}\vec{v}dA. \quad 3.8$$

Ukoliko je ugao između vektora \vec{T} i \vec{v} manji od 90° , rad koji razmjenjuje sistem će, očigledno, biti doveden a proizvod vektora \vec{T} i \vec{v} pozitivan. S obzirom na usvojenu koncepciju pri formiranju izraza (3.6), mora se promijeniti znak u izrazu (3.8) pri njegovom uključivanju u izraz (3.6). Primjenom Reynolds-ove transportne teoreme (2.6), za $N \equiv E$ i $n \equiv e$, slijedi da će promjena energije sistema biti,

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V e\rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} \rho e dV + \int_{A_k} \rho e(\vec{v}d\vec{A}). \quad 3.9$$

Smjenom (3.8) i (3.9) u (3.6), za slučaj kada nema generacije energije u sistemu, slijedi

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_o}{dt} + \int_{A_k} \vec{T}\vec{v}dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} \rho e dV + \int_{A_k} \rho e(\vec{v}d\vec{A}). \quad 3.10$$

Postoje dva slučaja kada se dobijeni izraz svodi na jednostavniji oblik. Prvi je strujanje savršenog fluida. Tada je vektor napona normalan na kontrolnu površinu dA , postoji samo normalni napon na pritisak,

$$\vec{T} = \frac{d\vec{F}}{dA} = \frac{-pd\vec{A}}{dA},$$

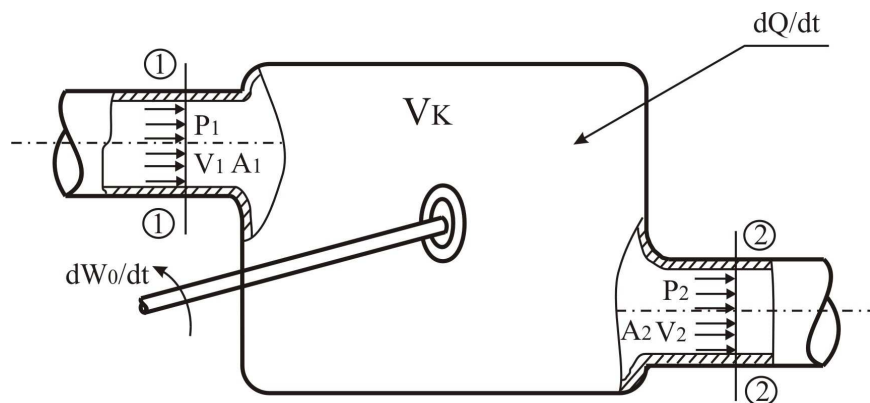
pa će strujni rad biti,

$$\frac{dW_f}{dt} = - \int_{A_k} p(\vec{v}d\vec{A}) = - \int_{A_k} \frac{p}{\rho}(\rho\vec{v}dA). \quad 3.11$$

Drugi slučaj se javlja pri strujanju viskoznog nestišljivog fluida i stacionarnom strujanju viskoznog stišljivog fluida ako su elementi kontrolne površine definisani tako da fluid struji u pravcu normale na kontrolnu površinu. Rad normalne komponente vektora napona je isti kao i u slučaju savršenog fluida dok će rad tangentnih komponenti biti jednak nuli jer je komponenta brzine u tom pravcu jednaka nuli. Može se, konačno, prvi princip termodinamike za ova dva slučaja, imajući u vidu (3.4) napisati u sledećem obliku,

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_o}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} \left(\frac{v^2}{2} + gz + u \right) \rho dV + \int_{A_k} \left(\frac{v^2}{2} + gz + u + \frac{p}{\rho} \right) (\rho \vec{v} d\vec{A}). \quad 3.12$$

Jedan od karakterističnih primjera, koji se često mogu sresti, je stacionarno strujanje fluida u nekom uređaju prikazanom na sl.3.2, u kome fluid struji u pracu normale kroz ulazni i izlazni presjek.



Sl.3.2
Kućište pumpe ili turbine

To može biti npr. turbina ili pumpa gdje kontrolisana zapremina predstavlja prostor u kome je smješteno radno kolo. Ako se zanemari promjena gustine i pritiska na ulaznom i izlaznom presjeku, onda za stacionarno strujanje slijedi:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_o}{dt} = \left(\alpha \frac{v_{2,sr}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + u_2 \right) \rho_2 v_{2,sr} A_2 - \left(\alpha \frac{v_{1,sr}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + u_1 \right) \rho_1 v_{1,sr} A_1, \quad 3.13$$

Koeficijent α zavisi od raspodjele brzine po poprečnom presjeku i može se uzeti da je $\alpha \approx 1$, za turbulentno strujanje. Iz zakona o održanju mase slijedi da je, $dm/dt = \rho_1 v_{1,sr} A_1 = \rho_2 v_{2,sr} A_2$

Ako se uvedu sledeće oznake: $q = dQ/dm$ i $w_o = dW_o/dm$, onda se prvi princip termodinamike odnosno zakon o održanju energije može napisati u sledećem, najčešće korišćenom, obliku:

$$\frac{v_{1,sr}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + u_1 + q = \frac{v_{2,sr}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + u_2 + w_o, \quad 3.14$$

koji važi za savršen ili viskoznan, stišljiv ili nestišljiv fluid, pod uslovom da je strujanje stacionarno i da fluid struji u npravcu normale kroz kontrolne površine. Ukoliko se, suprotno od uvedene pretpostavke, toplota odvodi a rad dovodi sistemu onda se moraju promijenti znaci ispred specifične toplote q i rada w .

Za razliku od Bernoulli-jeve jednačine (2.74),

$$\frac{v_{1,sr}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 = \frac{v_{2,sr}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + gh_m, \quad 2.74$$

koja predstavlja zakon o održanju mehaničke (kinetičke i potencijalne) energije, izraz (3.14) predstavlja zakon o održanju ukupne energije. Upoređujući ove dvije jednačine za slučaj adijabatnog strujanja duž strujnice dobija se da je

$$gh_m = u_2 - u_1. \quad 3.15$$

To znači da se energija struje "izgubljena" usled trenja transformisala u unutrašnju energiju. Ako se sistemu koji kao cjelina miruje dovodi toplota, slijedi da je u stacionarnom stanju $dQ = dU$, odnosno da se dovedena toplota transformisala u unutrašnju energiju. Do

povećanja unutrašnje energije će doći i ako se sistemu, koji kao cjelina miruje, dovodi osovinski rad, jer je tada u stacionarnom stanju $dW_o = dU$. Prema tome, toplota i rad su ekvivalentni u energetsom pogledu. Do ovog zaključka je prvi došao engleski naučnik James Joule.

3.2

Energijska jednačina u diferencijalnom obliku

Za djelić materije koji razmjenjuje energiju sa okolinom će, na osnovu zakona o održanju energije, biti

$$dE_{dov} + dE_g - dE_{odv} = dE, \quad 3.16$$

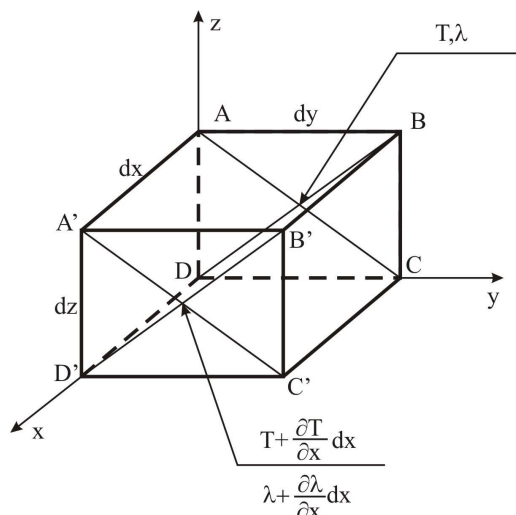
odnosno

$$\frac{d(dE_{dov})}{dt} + \frac{d(dE_g)}{dt} - \frac{d(dE_{odv})}{dt} = \frac{D(dE)}{Dt}. \quad 3.17$$

U ovom izrazu su: dE_{dov} dovedena, dE_{odv} odvedena, dE_g generisana i dE ukupna energija djelića. Ako se djeliću materije prikazanom na sl.3.3 dovodi količina toplote dQ a odvodi rad dW slijedi da je

$$\frac{d(dQ)}{dt} + \frac{d(dE_g)}{dt} - \frac{d(dW)}{dt} = \frac{D(dE)}{Dt}. \quad 3.18$$

Može se, kao i u slučaju integralne analize, prepostaviti da se rad i toplota dovode ili odvode ili da se rad dovodi a toplota odvodi. Treba imati u vidu da se znak za rad ili toplotu u konačnom izrazu mora promijeniti ako se izraz koristi u uslovima suprotnim od prepostavljenih. To isto važi i za generisanu energiju.



Sl.3.3

Kontrolna elementarna masa

Zanemarivanjem radijacije, što je opravdano ukoliko se ne radi o relativno visokim temperaturama, razmijenjena toplota kroz površine djelića će se odvijati samo usled kondukcije. Količina toplote koja prodje kroz stranicu ABCD u pravcu ose x je

$$d(dQ)|_{x_0} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydzdt, \quad 3.19$$

dok će kroz stranicu $A'B'C'D'$ proći

$$d(dQ)|_{x_0+dx} = -\left(\lambda + \frac{\partial\lambda}{\partial x} dx\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx\right) dydzdt. \quad 3.20$$

Bilans toplote dovedene usled kondukcije u pravcu ose x će, prema tome, biti

$$d(dQ)|_x = d(dQ)|_{x_0} - d(dQ)|_{x_0+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dVdt. \quad 3.21$$

Ako se uzme u obzir i prolaz toplote u pravcu osa y i z onda je ukupna dovedena količina toplote

$$d(dQ) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) \right] dVdt, \quad 3.22$$

odnosno

$$\frac{d(dQ)}{dVdt} = \text{div}(\lambda \text{grad}T). \quad 3.23$$

Rad površinskih sila, dW_p , koji djelić razmjenjuje sa okolinom je analiziran u dodatku **A2**, u kome je izveden sledeći izraz za rad doveden fluidnom djeliću

$$\begin{aligned} \frac{d(dW_p)}{dVdt} = & v_x \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} \right) + v_y \left(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z} \right) + v_z \left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) \\ & + \sigma_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \sigma_{xz} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \sigma_{yx} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma_{yz} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \sigma_{zx} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \sigma_{zy} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \sigma_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad 3.24$$

Ovaj izraz se primjenom tenzorskog računa, kao što je navedeno u dodatku **A2**, može napisati u skraćenom obliku

$$\frac{d(dW_p)}{dVdt} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j). \quad 3.25$$

Rad zapreminskih sila je jednak promjeni potencijalne energije, koja je uzeta u ukupnom zbiru energija (3.4). Smjenom (3.23), (3.25) i (3.4) u (3.18), imajući u vidu da je $dE = edm$, slijedi zakon o održanju energije u diferencijalnom obliku

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} + gz + u \right) = \text{div}(\lambda \text{grad}T) + \dot{e} + \frac{\partial(\sigma_{ij} u_j)}{\partial x}, \quad 3.26$$

u kome je $\dot{e}_{g,v} = \frac{d(dE_g)}{dVdt}$ energija generisana u jedinici vremena po jedinici zapremine fluidnog djelića.

3.3

Jednačina toplotne energije

Zakon o održanju energije u diferencijalnom obliku (3.26) nije pogodan za rješavanje praktičnih problema osim u slučaju mirovanja materije koji će biti analiziran u posebnom poglavlju. Međutim, kombinovanjem sa jednačinom kretanja može se svesti na jednostavniji oblik pogodan za praktičnu primjenu. Množenjem izraza (2.31) sa brzinom kretanja fluidnog djelića \vec{v} , i imajući u vidu da je

$$\vec{v} \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right),$$

slijedi

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \rho dV = \vec{v} d\vec{R}.$$

Elementarna rezultujuća sila $d\vec{R}$ je jednaka zbiru zapreminskih $\vec{F}dm$ i površinskih sila $d\vec{F}_p$, koje su date u dodatku **A2**, na osnovu čega je

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \rho dV = \rho \vec{F} dV + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} u_j dV, \quad 3.27$$

što se može napisati i u bliku

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \rho dV = \rho \vec{F} \vec{v} dV + \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] dV. \quad 3.28$$

Zapreminska sila u polju zemljine teže je $\vec{F} = \text{grad}U$, pri čemu je funkcija potencijala $U = -gz$ kada je osa z usmjerena vertikalno naviše. Imajući to u vidu, slijedi da je rad zapreminskih sila u jedinici vremena

$$\vec{F} \vec{v} = \frac{DU}{Dt} = -g \frac{Dz}{Dt}. \quad 3.29$$

Smjenom izraza za rad zapreminskih sila u jednačinu (3.28) i razlaganjem napona na sferni i defiatorski dio, izraz (2.38), dobija se zakon o održanju mehaničke (kinetičke i potencijalne) energije u diferencijalnom obliku

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) + p \text{div} \vec{v} - \sigma_{ij}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad 3.30$$

Kombinovanjem zakona o održanju energije (3.26) i zakona o održanju mehaničke energije (3.30) dobija se tzv. jednačina toplotne energije

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \text{div}(\lambda \text{grad}T) + \dot{e}_{g,v} - p \text{div} \vec{v} + \sigma_{ij}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad 3.31$$

u kojoj je generisana energija $\dot{e}_{g,v}$ najčešće jednaka toploti \dot{q}_v generisanoj u jedinici vremena po jedinici zapremine materije.

Poslednji izraz u ovoj jednačini predstavlja deformacioni rad površinskih sila koji se transformiše u toplotu. Pri laminarnom strujanju viskoznog fluida, za koje su naponi dati u funkciji brzine deformisanja Stokes-ovim zakonom viskoznosti (2.37), ovaj rad se svodi na sledeći oblik

$$\sigma_{ij}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} = \mu \Phi^*, \quad 3.32$$

poznat kao funkcija disipacije mehaničke energije $\mu \Phi^*$. Može se pokazati da je ova funkcija uvijek veća ili jednaka nuli. Konačno se zakon o održanju energije, zakon o održanju mehaničke energije i Jednačina toplotne energije mogu napisati u sledećem obliku:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} + gz + u \right) = \text{div}(\lambda \text{grad}T) + \dot{e}_{g,v} + \frac{\partial (\sigma_{ij}^d u_j)}{\partial x_i}, \quad 3.33$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) + p \operatorname{div} \bar{v} - \mu \Phi^*, \quad 3.34$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \dot{e}_{g,v} - p \operatorname{div} \bar{v} + \mu \Phi^*. \quad 3.35$$

Jednačina toplotne energije se može izraziti i u funkciji entalpije, $i = u + p/\rho$, umjesto unutrašnje energije,

$$\rho \frac{Di}{Dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \dot{e}_{g,v} + \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi^*. \quad 3.36$$

3.4

Jednačina toplotne difuzije

Kada djelići materije miruju, zakon o održanju mehaničke energije (3.33) je indentički zadovoljen, dok se zakon o održanju energije (3.34) i jednačina toplotne energije (3.35) svode na jednačinu toplotne difuzije,

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \dot{e}_{g,v} = \rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 3.37$$

odnosno

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \dot{e}_{g,v} = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}. \quad 3.38$$

Za tečnosti i čvrste materije je $c_p \approx c_v = c$, dok je generisana energija najčešće toplota generisana u električnom grijaču, $\dot{e}_{g,v} = \dot{q}_v$. U najvećem broju slučajeva je koeficijent toplotne provodnosti (kondukcije) λ konstantan.

Specijalni oblici jednačine (3.38) su:

- **Fourier**-ova jednačina (nema generisanja toplote)

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}. \quad 3.39$$

Za $\lambda = \text{const}$ slijedi,

$$\Delta T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad 3.40$$

- **Poisson**-ova jednačina (stacionaran problem)

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \dot{q}_v = 0. \quad 3.41$$

Za $\lambda = \text{const}$ slijedi,

$$\Delta T + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0. \quad 3.42$$

- **Laplace**-ova jednačina (stacionaran problem bez generacije toplote)

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = 0. \quad 3.43$$

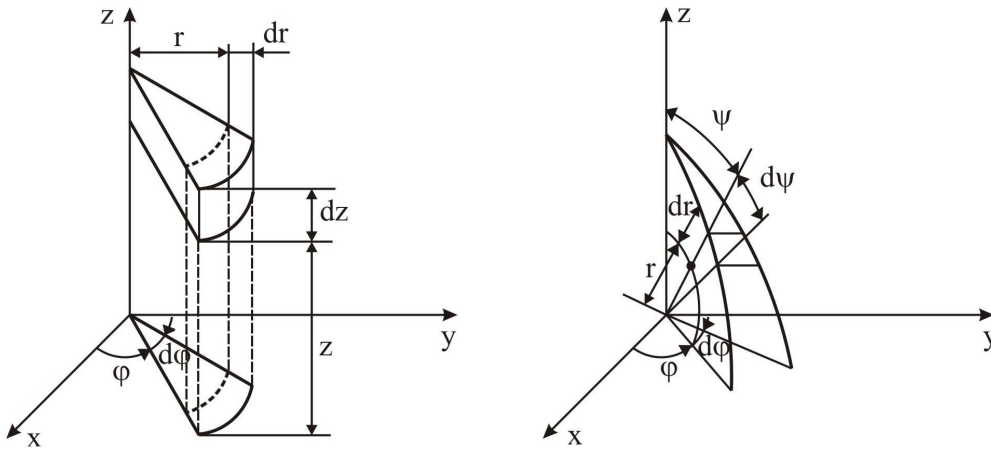
Za $\lambda = \text{const}$ slijedi,

$$\Delta T = 0. \quad 3.44$$

Laplace-ov operator ΔT u cilindričnim (r, ϕ, z) i sfernim (r, ϕ, ψ) koordinatama, sl.3.4, ima sledeći oblik

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad 3.45$$

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}. \quad 3.46$$



SI.3.4 Cilindrični i sferni koordinatni sistemi

3.5

Karakteristična jednačina

Pri strujanju savršenog fluida energija disipacije $\mu \Phi^*$ će biti jednaka nuli jer je u tom slučaju viskoznost fluida $\mu = 0$. Pri strujanju viskozno fluida sa intenzivnom razmjenom toplote sa okolnim graničnim površinama, energija disipacije će biti zanemarljiva u odnosu na energiju razmijenjenu usled kondukcije ili mehaničkog rada. Imajući to u vidu, zakon održanja energije (3.33), zakon o održanju mehaničke energije (3.34) i jednačina toplotne energije (3.35) se, u slučaju kada nema generisanja toplote, svode na sledeći oblik:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} + gz + u \right) = \text{div}(\lambda \text{grad} T) - \text{div}(p\vec{v}), \quad 3.47$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) = -\vec{v} \text{grad} p, \quad 3.48$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) - p \text{div} \vec{v}. \quad 3.49$$

Jednačina toplotne energije se može napisati i u funkciji entalpije,

$$\rho \frac{Di}{Dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \frac{Dp}{Dt}. \quad 3.50$$

Prvi član na desnoj strani jednačine (3.49) predstavlja razmijenjenu količinu toplote usled kodukcije, izraz (3.23),

$$\text{div}(\lambda \text{grad} T) = \frac{d(dQ)}{dvdt},$$

a drugi, $p \text{div} \vec{v}$, mehanički rad koji djelić razmjenjuje sa okolinom.

Imajući u vidu da je:

$$dm = \rho dV, \quad v = 1/\rho \quad i \quad q = \frac{dQ}{dm},$$

poslije smjene u jednačinu toplotne enrgije (3.50) slijedi

$$di = dq + vdp, \tag{3.51}$$

odnosno,

$$du = dq - pdv. \tag{3.52}$$

Dobijeni oblici jednačine toplotne energije će, kao što je navedeno, važiti pri strujnju savršenog fluida, kao i u slučaju strujanja viskoznog fluida kada su rad i toplota razmijenjeni sa okolinom mnogo veći od energije disipirane usled trenja.

Na osnovu definicije specifične toplote, $c = dq/dT$, slijedi da je $dq = cdT$, dok će za idealne gasove biti $du = c_v dT$ i $pv = RT$. Smjenom ovih izraza u jednačinu toplotne energije (3.52), za slučaj politropskih promjena stanja ($c = const$) dobija se sledeća veza

$$\frac{p}{\rho^n} = const, \quad n = \frac{c - c_p}{c - c_v}, \tag{3.53}$$

poznata kao karakteristična jednačina.

Ova jednačina se može upotrijebiti umjesto energijske jednačine za idealne savršene (bezviskozne) fluide, kao i za idealne viskozne fluide u slučajevima kada se energija disipacije može zanemariti.

3.6

Početni i granični uslovi

Da bi se dobijene jednačine mogle integraliti potrebno je poznavati početne i granične uslove. Početni uslovi su uslovi koje moraju zadovoljiti brzina, pritisak i temperatura u početnom ili nekom drugom vremenskom trenutku t_o :

$$t = t_o; \quad \vec{v} = \vec{v}(x, y, z), \quad p = p(x, y, z), \quad T = T(x, y, z). \tag{3.54}$$

Granični uslovi podrazumijevaju poznavanje brzine, pritiska i temperature na graničnim površinama. S obzirom da se viskozni fluid lijepi za granične površine, brzina na ovim površinama mora biti jednaka nuli. Pri strujanju savršenog (bezviskoznog) fluida brzina u pravcu normale na strujne površine mora biti jednaka nuli. Brzina i pritisak mogu biti zadati i na ulaznim ili izlaznim presjecima kroz koje fluid prolazi pri strujanju kroz neki strujni prostor. Temperatura takodje može biti zadata na graničnim površinama. Medjutim, umjesto temperature može biti poznat toplotni fluks kroz granične površine.

Za materiju u stanju mirovanja, za koju je temperatursko polje definisano jednačinama toplotne difuzije (3.37-3.44), granični uslovi se mogu svrstati u tri karakteristične grupe. U prvu grupu spadaju uslovi kada je definisana temperatura na graničnim površinama, T_A , u svakom vremenskom trenutku,

$$T_A = f(x_A, y_A, z_A, t), \tag{3.55}$$

pri čemu su x_A, y_A i z_A koordinate graničnih površina. Specijalan slučaj prve grupe je konstantna temperatura na graničnim površinama,

$$T_A = T_c = const. \tag{3.56}$$

Za drugu grupu je karakterističan toplotni fluks definisan za neke granične površine,

$$\dot{q}_A = f(x_A, y_A, z_A, t), \tag{3.57}$$

koji kao i temperatura može biti konstantan kroz određenu površinu,

$$\dot{q}_A = \dot{q}_c = const. \tag{3.58}$$

Granični uslovi ne moraju biti specificirani samo za spoljne granice, već se mogu odrediti i za neku unutrašnju granicu, npr. neku ravan simetrije.

Trećoj grupi pripadaju najsloženiji granični uslovi. To je slučaj kada je određena temperatura spoljne okoline. Ove granične uslove karakteriše zakon transporta toplote između graničnih površina i spoljne okoline, najčešće konvektivni transport toplote. To je, kao što je navedeno u uvodnom dijelu, veoma složen proces koji se definiše Newton-ovom jednačinom (zakonom) prelaza toplote (1.4). Količina toplote koja se prenosi sa desne površine tijela prikazanog na sl.1.3 je definisana izrazom (1.5),

$$\dot{q}_A = h(T_A - T_\infty), \quad 3.59$$

u kome je h ($W/m^2 \cdot K$), koeficijent konvekcije, T_A temperatura površine tijela a T_∞ temperatura spoljne okoline. Količina toplote koja se prenosi putem kondukcije na spoljnoj površini mora biti jednaka količini toplote razmijenjenoj putem konvekcije sa spoljnom okolinom, na osnovu čega, s obzirom na (1.2), slijedi

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_A = h(T_A - T_\infty), \quad 3.60$$

odnosno,

$$T_A = T_\infty - \frac{\lambda}{h} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_A. \quad 3.61$$

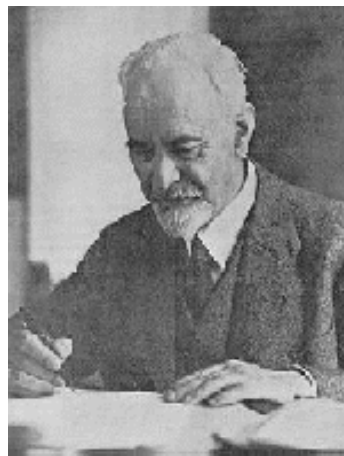
Temperature T_A i T_∞ će biti približno jednake ($T_A \approx T_\infty$), za velike vrijednosti koeficijenta h , što je karakteristično za slučaj ključanja, kondenzacije i intenzivne turbulencije.

Kada je spoljna okolina čvrsta nepokretna materija, čiji je koeficijent kondukcije λ_1 , u neposrednom kontaktu sa graničnom površinom, iz uslova neposrednog dodira slijedi:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_A = -\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_{A_1}, \quad T_A = T_{A_1}. \quad 3.62$$

GLAVA 4

JEDNAČINE GRANIČNOG SLOJA



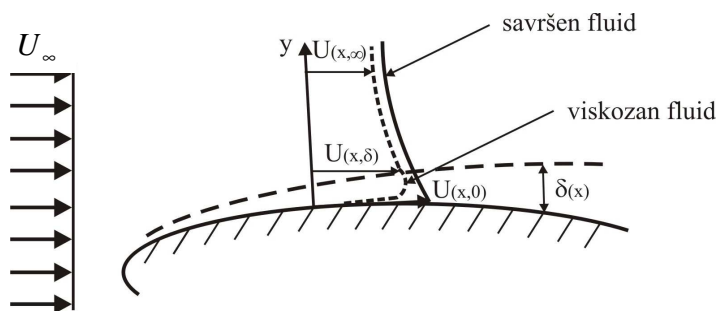
**Ludwig Prandtl
1875-1953**

Uvod

U drugoj polovini devetnaestog vijeka Mehanika fluida se razvijala u dva strogo odvojena pravca. Jednačine kretanja viskozno fluida su formulisane još 1845 god. (Navier-Stokes - ove jednačine), zahvaljujući u prvom redu radovima Navier-a, Poissona-a, St. Venant-a i Stokes-a. Ove jednačine su, kao što je navedeno, veoma složene (nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda) tako da je njihovo rješavanje bilo veoma komplikovano i u najvećem broju slučajeva praktično nemoguće u tom periodu. Imajući to u vidu, s obzirom na male vrijednosti viskoznosti vode i vazduha, niz naučnika je smatrao da se viskoznost može zanemariti što je dovelo do intezivnog razvoja mehanike savršenog fluida (fluida bez trenja) krajem devetnaestog i početkom dvadesetog vijeka.

Suočavajući se sa nizom praktičnih problema inženjeri nijesu bili oduševljeni teorijom savršenog fluida s obzirom na niz paradoksalnih rezultata do kojih je vodio ovakav prilaz To su, u prvom redu, nepostojanje sile otpora pri kretanju nekog objekta kroz fluid ili pada pritiska pri strujanju fluida kroz cijevi. Inženjeri su se usmjerili ka eksperimentalnim istraživanjima formirajući, poseban pravac razvoja mehanike fluida. Osnovna karakteristika ovog pravca je bila maksimalna primjena eksperimentalnih rezultata.

Oba pravca (teorijski i eksperimentalni) su se razvijeli gotovo nezavisno sve do početka dvadesetog vijeka kada je Prandtl, 1904 god., prezentirao svoj rad "O kretanju fluida sa veoma malim trenjem". On je u ovom radu pokazao, eksperimentalno i teorijski, da se strujno polje oko nekog čvrstog tijela, pri relativno velikoj brzini strujanja i maloj viskoznosti, može podijeliti u dvije oblasti; granični sloj debljine $\delta(x)$, neposredno uz samo tijelo, sl.4.1, u kome viskozni efekti dolaze do punog izražaja i spoljašnje strujno polje za koje važi teorija savršenog fluida.



Sl.4.1

Granični sloj i spoljašnje strujno polje

To znači da viskozni fluid struji kao da je savršen u spoljašnjoj oblasti dovoljno daleko od konture tijela, dok se strujne slike viskozno i savršenog fluida znatno razlikuju u graničnom sloju neposredno uz samo tijelo. Njegova ideja je bila prihvaćena, proučavana i razvijana u Njemačkoj, Engleskoj, Britaniji i USA. Danas predstavlja jednu od najpoznatijih teorija u Mehanici fluida uopšte. Detalji o teoriji graničnog sloja se mogu naći u mnogobrojnim literaturnim izvorima. Jedan od najpopularnijih je Shlichting-ova Teorija graničnog sloja [1]

4.1

Jednačine ravanskog graničnog sloja - Prandtl-ove jednačine

Prandtl-ove jednačine ravanskog graničnog sloja nestišljivog fluida slijede iz Navier-Stokes-ovih (N.S.) jednačina (2.39) i jednačine kontinuiteta (2.23) za ravansko ($v_z = 0, \partial/\partial z = 0$) strujanje viskozno nestišljivog ($\rho = const$) fluida u polju zemljine teže ($X = g_x, Y = g_y$) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \quad 4.1$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \quad 4.2$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad 4.3$$

Polazeći od Prandtl-ove pretpostavke o postojanju tankog sloja male debljine $\delta(x)$ neposredno uz konturu, N.S. jednačine se mogu znatno pojednostaviti u ovoj oblasti. To se postiže procjenom reda veličine pojedinih članova u N.S. jednačinama. Zanemarivanje članova višeg reda vodi ka poznatim Prandtl-ovim jednačinama graničnog sloja.

Predpostavka o postojanju tankog sloja neposredno uz konturu tijela, sa dominantnim viskoznom silama, vodi ka zaključku da će koordinata y biti za jedan red veličine manja od koordinate x u tom sloju. Komponenta brzine strujanja u pravcu ose x (v_x) će se mijenjati od nule na zidu do brzine strujanja savršenog fluida $U(x, \delta)$ na rastojanju δ od zida, sl.4.1.

Imajući u vidu relativno malu vrijednost debljine graničnog sloja δ slijedi da je $U(x, \delta) \approx U(x, 0) = U(x)$, pri čemu je $U(x)$ brzina strujanja savršenog fluida na konturi tijela.

Neka maksimalna brzina i maksimalna koordinata u graničnom sloju imaju red veličine jednak jedinici. To su, očigledno, komponenta brzine v_x i koordinata x , što se može matematički formulirati kao

$$v_x = O(1), \quad x = O(1), \quad 4.4$$

dok će koordinata y biti za red veličine manja

$$y = O(1)\sigma(\varepsilon), \quad 4.5$$

pri čemu je $\sigma(\varepsilon)$ neka funkcija male veličine ε .

Oba člana u jednačini kontinuiteta (4.3) moraju biti istog reda veličine (inače bi se dobilo trivijalno rješenje; $\partial v_x / \partial x = 0, \partial v_y / \partial y = 0$), na osnovu čega slijedi da komponenta brzine v_y mora biti istog reda veličine kao i koordinata y , odnosno

$$v_y = O(1)\sigma(\varepsilon). \quad 4.6$$

Imajući u vidu izvedenu procjenu reda veličine mogu se u N.S. jednačinama uvesti bezdimenzione promenljive, sve istog reda veličine. Na osnovu reda veličine koeficijenata koji se pojavljuju uz pojedine članove, može se utvrditi red veličine svakog člana u ovako dobijenim jednačinama. Ako se za razmjeru, kao karakteristična dužina, uzme neka dimenzija tijela L a kao karakteristična brzina $U(x)=U$, bezdimenzione promenljive će biti:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L\sigma(\varepsilon)}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad v_x^* = \frac{v_x}{U}, \quad v_y^* = \frac{v_y}{U\sigma(\varepsilon)}, \quad p^* = \frac{p - p_0}{\rho U^2},$$

$$g_i^* = \frac{g_i}{U^2/L} = \frac{1}{F_{R,i}}, \quad F_{R,i} = \frac{U}{Lg_i}, \quad R_e = \frac{UL}{\nu}. \quad 4.7$$

Koordinata y i komponenta brzine v_y su podijeljene sa malom veličinom $\sigma(\varepsilon)$ da bi bezdimenziona koordinata y^* i bezdimenziona brzina v_y^* bile istog reda veličine kao i koordinate x^* i v_x^* . Poslije smjene u N.S. jednačine i jednačinu kontinuiteta slijedi:

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = \frac{1}{F_{R,x}} - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} - \frac{1}{\sigma^2(\varepsilon)} \right), \quad 4.8$$

$$\sigma^2(\varepsilon) \left[\frac{\partial v_y^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \right] = \frac{\sigma(\varepsilon)}{F_{R,y}} - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{R_e} \left(\sigma^2(\varepsilon) \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad 4.9$$

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = 0. \quad 4.10$$

Pri relativno velikim brzinama strujanja U i maloj viskoznosti ν , recipročna vrijednost R_e će biti jednaka nekoj maloj veličini ε ,

$$\varepsilon = \frac{1}{R_e} = \frac{1}{UL/\nu}. \quad 4.11$$

Svi članovi u jednačinama (4.8-4.10) koji sadrže malu veličinu ε ili $\sigma(\varepsilon)$ su najmanje za jedan red veličine manji od ostalih, pa se kao takvi mogu zanemariti. S obzirom da ove jednačine opisuju strujno polje u neposrednoj blizini zida gdje, prema Prandtl-u, viskozne sile imaju dominantan uticaj, mora bar jedan član u ovim jednačinama koji reprezentuje viskozne sile biti različit od nule. To se može ostvariti samo ako je

$$\sigma^2(\varepsilon) = \varepsilon, \quad 4.12$$

odnosno

$$\sigma(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} = 1/\sqrt{R_e}. \quad 4.13$$

Tada će viskozni član koji sadrži $\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}}$ biti istog reda veličine kao inercijalni članovi $v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*}$,

..... itd. Smjenom izraza (4.11) i (4.13) u jednačine (4.8-4.10), i zanemarivanjem članova manjeg reda veličine slijede poznate Prandtl-ove jednačine ravanskog graničnog sloja pri strujanju nestišljivog fluida u bezdimenzionoj formi:

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = \frac{1}{F_{R,x}} - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}}, \quad 4.14$$

$$\frac{\sigma(\varepsilon)}{F_{R,y}} - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0, \quad 4.15$$

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = 0, \quad 4.16$$

odnosno, poslije smjene koordinata (4.7), u dimenzionoj formi:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad 4.17$$

$$g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad 4.18$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad 4.19$$

sa graničnim uslovima:

- uslov lijepljenja fluida za čvrstu konturu, $v_x(x,0,t) = v_y(x,0,t) = 0$. 4.20
- početni uslov,

$$v_x(x, y, 0) = v_{x,0}(x, y, 0), \quad v_y(x, y, 0) = v_{y,0}(x, y, 0). \quad 4.21$$

- uslov spajanja na spoljnoj granici graničnog sloja ($y = \delta$) sa spoljašnjim strujnim poljem u kome je zanemarena viskoznost

$$v_x(x, \delta, t) = U(x, \delta, t), \quad 4.22$$

S obzirom na malu debljinu graničnog sloja δ može se uzeti da je,

$$U(x, \delta, t) \approx U(x, 0, t) = U,$$

pa se granični uslov (4.22) može napisati u obliku

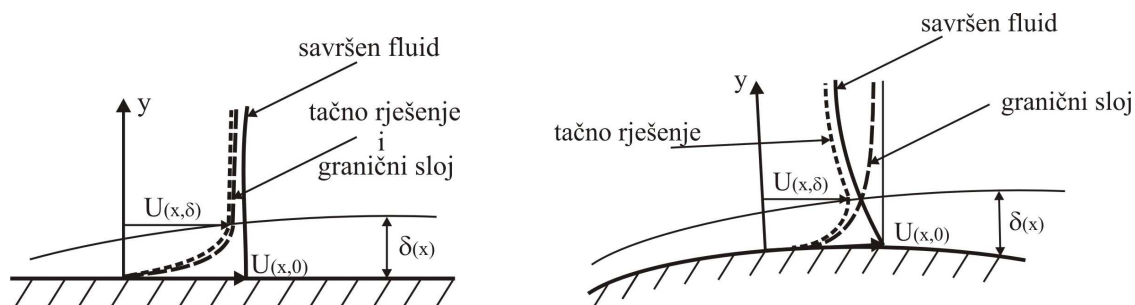
$$v_x(x, \delta, t) = U(x, 0, t) = U. \quad 4.23$$

Brzina strujanja na spoljnoj granici graničnog sloju, prema tome, teži vrijednosti koju savršen fluid ima na zidu. Debljina graničnog sloja nije unaprijed poznata veličina, tako da je granični uslov u obliku (4.23) praktično neupotrebljiv osim pri strujanju preko ravnog zida, sl.4.2(a). za koje je $U(x, 0, t) = U(x, \delta, t) = U(x, \infty, t) = U$, pa se granični uslov (4.23) u tom slučaju može napisati u obliku,

$$y \rightarrow \infty, \quad v_x(x, y, t) \rightarrow U, \quad 4.24$$

koji se primjenjuje i pri strujanju oko kontura proizvoljnog oblika, čija je zakrivljenost relativno mala (aeroprofilu isl.).

Na sl.4.2a i sl.4.2b su šematski prikazani profili brzine koji odgovaraju tačnom rješenju, strujanju u graničnom sloju sa trećim graničnim uslovom u obliku (4.23) i (4.24) i strujanju savršenog fluida, pri opstrujavanju ravne i zakrivljene površine.



Sl.4.2 Profili brzine u graničnom sloju. (a) Ravna površina. (b) Zakrivljena kontura.

Brzina strujanja u graničnom sloju dostiže približno vrijednost brzine strujanja savršenog fluida na zidu na gornjoj granici graničnog sloja, a zatim ostaje nepromijenjena tako da je jednaka brzini strujanja savršenog fluida na zidu i na beskonačno velikom rastojanju od zida. Prema tome, treći granični uslov je približno zadovoljen u obliku (4.23) a tačnije i obliku (4.24).

Strogo uzev, sa matematičke tačke gledišta, granični uslov 4.24 je diskutabilan pri strujanju oko konture proizvoljnog oblika. Opravdanost njegove primjene i njegovu matematičku suštinu je, međjutim, pored ostalih, objasnio Friedrichs 1942 god. [2], čiji je prilaz prezentiran u dodatku **A4**.

U neposrednoj blizini zida (unutrašnjoj oblasti) postoji dobro slaganje između tačnog rješenja i graničnog sloja, dok se dovoljno daleko od zida (spoljašnja oblast) rješenje koje odgovara savršenom fluidu dobro slaže sa tačnim rješenjem. Pri strujanju preko ravne površine, sl.4.2a, granični sloj se dobro slaže sa tačnim rješenjem i u spoljašnjoj oblasti, jer je pri strujanju preko ravne površine $U(x, 0, t) = U(x, \delta, t) = U(x, \infty, t) = const$. To, međjutim nije slučaj pri strujanju preko zakrivljenih površine, sl.4.2b. Između unutrašnje i spoljašnje

oblasti, na spoljnoj granici graničnog sloja, postoji medjuoblast u kojoj teorija o graničnom sloju i savršenom fluidu ne daju zadovoljavajuća rješenja. Mada se specijalnim metodama slaganja spoljašnjeg i unutrašnjeg rješenja može naći aproksimativno rješenje zadovoljavajuće tačnosti i za ovu oblast ono nije od nekog posebnog značaja. Za rješavanje niza problema prenosa toplote i mase najvažnije je strujno polje u neposrednoj blizini zida. Rješenje dobijeno primjenom teorije o graničnom sloju u ovoj oblasti se odlično slaže sa tačnim rješenjem.

Imajući u vidu da se strujanje sa velikim Re brojevima može ostvariti samo pod uticajem neke strujne mašine, uticaj polja zrmiljine teže se može zanemariti, pa se jednačine graničnog sloja najčešće sreću u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad 4.25$$

U oblasti dovoljno daleko od zida (van graničnog sloja) obje komponente brzine i koordinate su istog reda veličine. U cilju analize reda veličine pojedinih članova u NS jednačinama u ovoj (spoljašnjoj) oblasti mogu se uvesti sledeće bezdimenzione promenljive:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad v_x^* = \frac{v_x}{U}, \quad v_y^* = \frac{v_y}{U}, \quad p^* = \frac{p - p_0}{\rho U^2}, \\ g_i^* &= \frac{g_i}{U^2 / L} = \frac{1}{F_{R,i}}, \quad F_{R,i} = \frac{U}{Lg_i}, \quad R_e = \frac{UL}{\nu}. \end{aligned}$$

S obzirom da su istog reda veličine, obje koordinate i komponente brzine su svedene na bezdimenzioni oblik upotrebom istih parametara U i L . Poslije smjene u N.S. jednačine i jednačinu kontinuiteta (4.1-4.3) slijedi:

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = \frac{1}{F_{R,x}} - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad 4.26$$

$$\frac{\partial v_y^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = \frac{1}{F_{R,y}} - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad 4.27$$

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = 0. \quad 4.28$$

Za dovoljno velike R_e brojeve, član $1/R_e$ će biti jednak nekoj maloj veličini ε , tako da se članovi u zagradama, u predhodnim jednačinama mogu zanemariti. Poslije ponovne smjene koordinata (4.25) slijede jednačine koju opisuju strujanje u tzv. spoljašnjoj oblast van graničnog sloja:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 4.29$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 4.30$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad 4.31$$

Ovo su Euler-ove jednačine (2.43) za slučaj ravanskog strujanja savršenog fluida i jednačina kontinuiteta, čime je dokazana Prandtl-ova hipoteza o neviskoznom strujanju van graničnog sloja.

S obzirom da je, na osnovu izraza (4.18), promjena pritiska u pravcu y ose u graničnom sloju jednaka nuli, pritisak u graničnom sloju je jednak pritisku na spoljnoj granici graničnog sloja, koji se može odrediti iz jednačine (4.17). Imajući u vidu da kad

$$y \rightarrow \infty (\delta), v_x \rightarrow U(x, \infty, t), \partial v_x / \partial y \rightarrow 0 \text{ i } \partial^2 v_x / \partial y^2 \rightarrow 0,$$

dobija se

$$\frac{\partial U(x, \infty, t)}{\partial t} + U(x, \infty, t) \frac{\partial U(x, \infty, t)}{\partial x} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad 4.32$$

Brzina na spoljnoj granici graničnog sloja praktično je jednaka brzini na zidu, izraz (4.23), na osnovu čega slijedi da je

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad 4.33$$

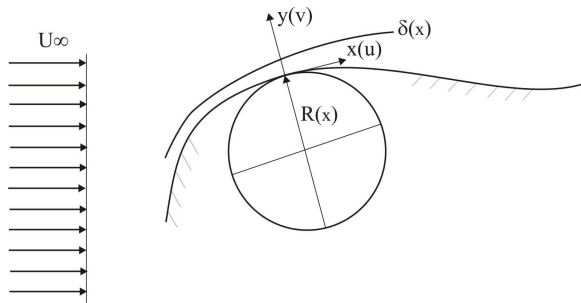
Za stacionarno strujanje će biti

$$U \frac{dU}{dx} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad 4.34$$

Na prvi pogled, dobijene jednačine graničnog sloja sa odgovarajućim graničnim uslovima važe samo u Dekart-ovom koordinatnom sistemu duž ravnog zida jer se samo u tom slučaju uslov lijepljenja na zidu može izraziti u obliku (4.20) u suprotnom bi bilo

$$v_x(x_k, y_k, t) = v_y(x_k, y_k, t) = 0, \quad 4.35$$

pri čemu su x_k i y_k koordinate konture tijela. Međutim, može se pokazati da one također važe i za strujanje duž zakrivljenog zida prikazanog na sl.4.3 pod uslovom da je debljina graničnog sloja δ mnogo manja od radijusa krivine na zidu $R(x)$.



Sl.4.3
Granični sloj na zakrivljenoj konturi

Egzaktne jednačine graničnog sloja na ovako zakrivljenoj konturi u krivolinijskom koordinatnom sistemu je dao Tollmien 1931 god. [3]. Glavna razlika između Dekart-ovih i krivolinijskih koordinata je u gradijentu pritiska u pravcu normale na zidu, koji nije jednak nuli u krivolinijskom koordinatnom sistemu. Procjenom reda veličine pojedinih članova može se pokazati da je razlika pritiska na zidu i gornjoj granici graničnog sloja sledećeg reda veličine

$$p^*(\delta) - p^*(0) = \delta / R(x), \quad 4.36$$

što je zanemarljivo malo kada je $\delta \ll R(x)$. Prema tome, dobijene jednačine graničnog sloja za Dekart-ov koordinatni sistem, će važiti i za krivolinijski koordinatni sistem (x,y), sl.4.3,

uvijek kada je ispunjen uslov $\delta \ll R(x)$. Ovaj uslov neće biti ispunjen kod oštih ivica koje dovode do pojave odvajanja graničnog sloja od konture tijela.

4.2

Debljina graničnog sloja

Sa sl.4.2a i sl.4.2b se vidi da je na beskonačnom rastojanju od zida brzina strujanja u graničnom sloju jednaka brzini savršenog fluida na konturi tijela. Međutim, već na nekom rastojanju $\delta(x)$, brzina strujanja u graničnom sloju dostiže vrijednost koju ima savršen fluid na graničnoj površini. Vrijednost nezavisno promenljive koordinate y za koju se brzina u graničnom sloju razlikuje veoma malo (npr. 1%) od brzine strujanja savršenog fluida na graničnoj konturi je poznato kao debljina graničnog sloja $\delta(x)$.

Do predstave o debljini graničnog sloja pri laminiranom strujanju viskozno fluida se može doći i upoređivanjem sila u pojedinim oblastima. U spoljašnjoj oblasti su viskozne sile zanemarljive jer su mnogo manje od inercijalnih. U graničnom sloju su prisutne sve sile. Može se pretpostaviti da su u medjuoblasti, na gornjoj granici graničnog sloja, inercijalne i viskozne sile istog reda veličine. Ako se kao predstavnik viskoznih sila uzme član $\nu \partial^2 v_x / \partial y^2$, a kao predstavnik inercijalnih član $v_x \partial v_x / \partial x$ slijedi:

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad 4.37$$

S obzirom da je na gornjoj granici graničnog sloja $v_x = U(x,0,t) = U$, može se, u grubom približenju, uzeti da je

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \nu \frac{U}{\delta^2}, \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \approx U \frac{U}{x}. \quad 4.38$$

Poslije smjene u izraz (4.37) dobija se

$$\delta \approx x \sqrt{\nu / Ux} = x \sqrt{1 / R_e}. \quad 4.39$$

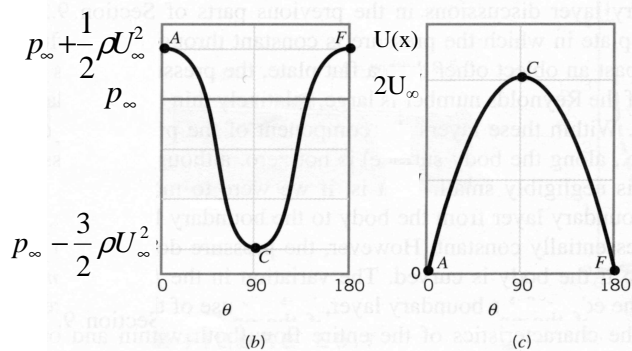
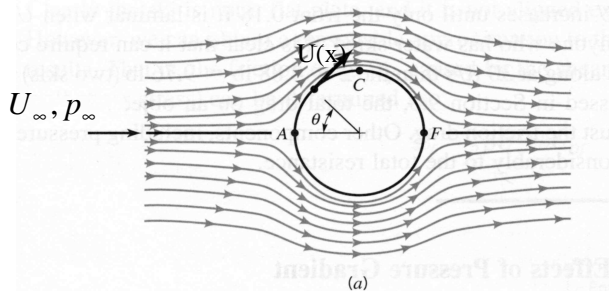
Debljina graničnog sloja će rasti od nule na početku strujne oblasti sa rastojanjem x . U slučaju ravne ploče debljina graničnog sloja će biti proporcionalna sa \sqrt{x} . Za savršen fluid, za koji $R_e \rightarrow \infty$, debljina graničnog sloja teži nuli. Imajući to u vidu, teorija graničnog sloja ima smisla samo ako je Reznolds-ov broj dovoljno velik.

4.3

Odvajanje graničnog sloja

Ova pojava je u tijesnoj vezi sa rasporedom pritisaka u graničnom sloju. U cilju objašnjenja ove pojave posmatra se strujanje oko kružnog cilindra, pri čemu se dobijeni zaključci mogu primijeniti i na tijelo proizvoljnog oblika.

Pri potencijalnom strujanju savršenog fluida, sl.4.4(a), djelići se ubrzavaju od tačke A do tačke C, usled smanjenja poprečnog presjeka, dok se usporavaju od tačke C do tačke F, sl.4.4(c). Pritisak će, prema Bernoulli-jevoj jednačini, opadati u oblasti AC, dok će u oblasti CF gradijent pritiska biti pozitivan, sl.4.4(b). Prema tome, pri strujanju savršenog fluida, energija pritiska se pretvara u kinetičku na prednjem dijelu cilindra, a na zadnjem dijelu kinetička u energiju pritiska u istom odnosu, tako da djelić stiže u tačku F sa istom brzinom koju je imao na prednjoj stranici cilindra.



SI.4.4

Strujanje savršenog fluida oko kružnog cilindra.

(a) Strujno polje.

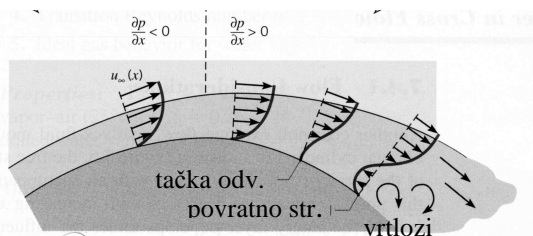
(b) Pritisak.

(c) Brzina.

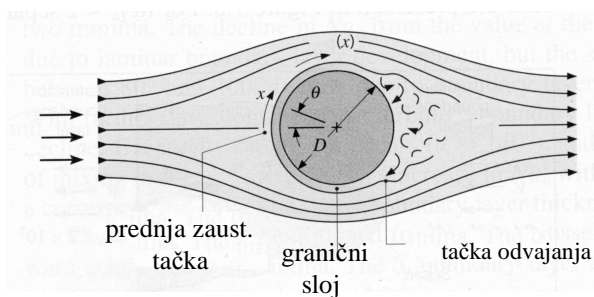
Raspodjela brzine i pritiska na tijelu je simetrična, pa će i rezultajuća sila na cilinduru biti jednaka nuli.

Pri strujanju viskoznog fluida strujna slika

se mijenja. Iako je raspored pritiska u graničnom sloju sličan kao u slučaju potencijalnog strujanja ($\partial p / \partial y = 0$) dio kinetičke energije djelića se gubi usled trenja tako da nasuprot rastućem pritisku djelić nije u stanju da stigne do tačke F. On se zaustavlja negdje na putu CF a zatim počinje da se kreće u suprotnom smjeru obrazujući vrtlog, kao na sl.4.5(a). Fluid počinje da kruži, vrtlozi se otkidaju i plove nizvodno od tijela a granični sloj se odvaja od tijela u zoni pojave vrtloga, sl.4.5(b).



(a)



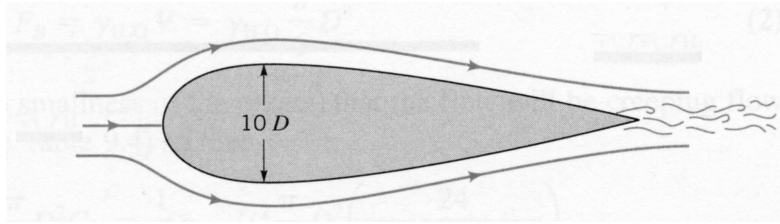
(b)

SI.4.5 Strujanje viskoznog fluida. (a) Odvajanje graničnog sloja u zoni povećanja pritiska. (b) Vrtložna zona iza kružnog cilindra.

U vrtložnoj zoni je ptitisak znatno manji u poredjenju sa slučajem strujanja bezviskoznog fluida, što rezultira u pojavu sile otpora koja djeluje na tijelo u pravcu strujanja. To je tzv. otpor pritiska ili oblika. Na taj način teorija graničnog sloja, pored otpora trenja, objašnjava i pojavu otpora pritiska preko odvajanja graničnog sloja. Na osnovu izloženog slijedi da se granični sloj odvaja u oblasti povećanog pritiska.

Do istog zaključka se može doći analizom problema strujanja izmedju dvije paralelne ploče od kojih se jedna kreće. Samo za $\partial p / \partial x > 0$ postoji povratno strujanje koje rezultira u pojavu vrtloga i odvajanja graničnog sloja. Kod zaobljenih kontura promjena pritiska a samim tim i tačka odvajanja zavise od oblika konture. Ako je kontura sa izduženom zadnjom ivicom,

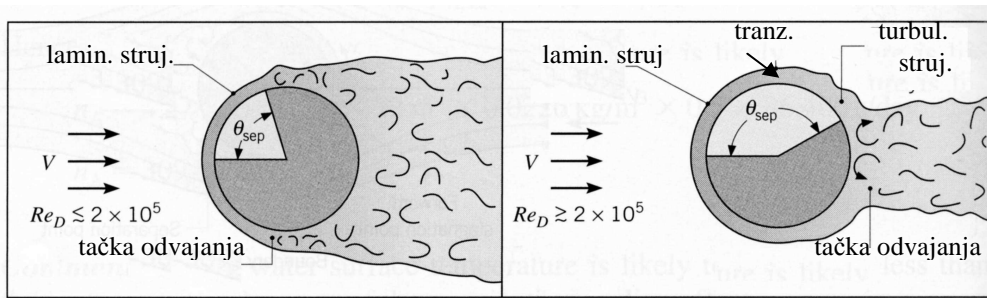
priraštaj pritiska duž konture je minimalan, pa je tačka odvajanja u blizini zadnje zaustavne tačke, kao npr. kod aeroprofila, sl.4.6.



Sl.4.6 Strujno polje i raspored pritiska kod aeroprofila

Raspodjela pritiska pri strujanju savršenog i viskoznog fluida je gotovo indentična izuzev u blizini zadnje zaustavne tačke gdje dolazi do odvajanja graničnog sloja. Kao rezultat ovakve raspodjele pritiska, sila otpora oblika a samim tim i ukupna sila otpora je svedena na minimum. Za aerofil prikazan na slici, sila otpora je ekvivalentna sili otpora pri strujanju oko cilindra čiji je prečnik D deset puta manji od visine aeroprofila. Nasuprot, kod tijela sa zaobljenim zadnjim krajem usled naglog porasta pritiska tačka odvajanja graničnog sloja je pomjerena naprijed. Razlike pritisaka pri strujanju savršenog i viskoznog fluida su velike, naročito na zadnjem dijelu konture, što ima za posledicu relativno veliku silu otpora.

Na tačku odvajanja, a samim tim i na silu otpora utiče i pojava turbulencije. Na sl.4.7 je prikazano strujno polje oko cilindra na granici pojave turbulencije.



Sl.4.7 Vrtložna zona iza cilindra. (a) Laminarni granični sloj. (b) Pojava turbulencije

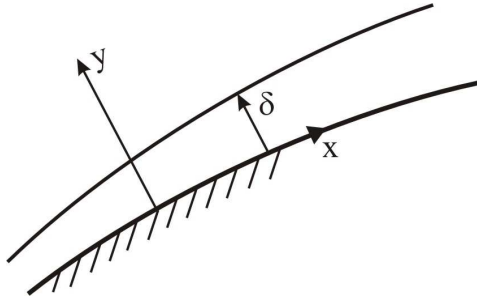
Usled promjene profila brzine pri tanziciji od laminarnog ka turbulentnom graničnom sloju, dolazi do pomjeranja tačke odvajanja, smanjenja vrtložne zone a samim tim i sile otpora.

4.4

Univerzalni oblik jednačina graničnog sloja

Iako su jednačine graničnog sloja znatno jednostavnije od NS jednačina, iz kojih slijede pod određenim uslovima, i dalje su usled nelinearnosti veoma složene za rješavanje. Ovaj problem je bio naročito izražen sve dok savremeni računari nijesu ušli u masovnu upotrebu. U tom periodu je niz naučnika nastojalo da raznim transformacijama svede ove jednačine na univerzalan oblik koji bi bio opšteg karaktera (primenljiv za razne slučajeve strujanja) i koji bi se mogao riješiti razvijanjem u redove ili primjenom računara. Dodatnim, relativno jednostavnim, računskim operacijama dobijeni rezultati bi se mogli primijeniti za svaki konkretan slučaj. Niz naučnika je postigao rezultate koji su se razlikovali uglavnom po nivou tačnosti i pogodnosti primjene. Mada su ove metode danas potisnute zahvaljujući primjeni računara koji omogućuju brza i tačna rješenja, one zaslužuju posebnu pažnju imajući u vidu njihovu istorijsku ulogu i bolji uvid u fizičku suštinu problema u odnosu na numerički prilaz.

Zajedničko za sve ove metode je odgovarajuća transformacija koordinata karakteristična za svaku metodu posebno. Imajući u vidu princip dobijanja jednačina graničnog sloja slijedi da je transformacija y-koordinate dominantna mada su prisutni i pokušaji transformacije x-koordinate. Koordinata y se svodi na bezdimenzioni oblik a zatim transformiše pomoću male veličine $\sigma(\varepsilon)$. Dalje je karakteristično uvođenje strujne funkcije ψ (što proizilazi iz jednačine kontinuiteta) i njeno svodjenje na bezdimenzioni oblik, čime su određene komponente brzine v_x i v_y . Sve metode su razvijene za slučaj strujanja preko blago zakrivljene konture, sl.4.8.



Sl.4.8
Granični sloj na blago zakrivljenoj konturi

Jedan od prvih i najjednostavnijih prilaza, i danas aktuelan, je baziran na Prandtl-ovim transformacijama (4.7), pri čemu je za karakterističnu dužinu uzeta koordinata x, mala veličina je $\varepsilon = 1/R_e$ a $\sigma(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$. Imajući to u vidu slijede bezdimenziona koordinta η i bezdimenziona brzina u^* :

$$\eta = \frac{y}{x\sigma(\varepsilon)} = \frac{y}{\sqrt{vx}/U}, \quad u^* = \frac{v_x}{U}. \quad 4.40$$

Jednačina kontinuiteta (4.3), kao što je navedeno, omogućava uvođenje strujne funkcije ψ , tako da je:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad 4.41$$

Imajući u vidu drugu i treću relaciju (4.40) slijedi:

$$u^*U = \frac{1}{\sqrt{vx}/U} \frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

odnosno,

$$u^* = \frac{\partial(\psi/\sqrt{vx}U)}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}. \quad 4.42$$

Na taj način je određena najjednostavnija razmjera (transformacija) funkcije ψ koja je, kao i koordinata η i brzina u^* , svedena na bezdimenzioni oblik

$$\psi^* = \psi / \sqrt{vx}U. \quad 4.43$$

Komponente brzine, u funkciji bezdimenzione strujne funkcije, će biti:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U\psi_\eta^*, \quad 4.44$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \eta\psi_\eta^* \frac{v}{2\sqrt{vx}U} (U - xU') - \sqrt{vx}U\psi_x^* - (xU' + U) \frac{v}{2\sqrt{vx}U} \psi^*. \quad 4.45$$

(indeksi η i x funkcije ψ^* u ovim izrazima označavaju izvode po tim koordinatama, dok je $U' = dU/dx$).

Smjenom (4.44), (4.45) i (4.34) u osnovne jednačine ravanskog graničnog sloja (4.17), poslije diferenciranja i sredjivanja, dobija se sledeća jednačina

$$\psi_{\eta\eta\eta}^* + \frac{1}{2} \left(\frac{xU'}{U} + 1 \right) \psi^* \psi_{\eta\eta}^* + \frac{xU'}{U} \left(1 - (\psi_{\eta}^*)^2 \right) = x \left(\psi_{\eta}^* \psi_{\eta x}^* - \psi_x^* \psi_{\eta\eta}^* \right), \quad 4.46$$

$$\eta = 0, \quad \psi^* = \psi_{\eta\eta}^* = 0,$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \psi_{\eta}^* \rightarrow 1.$$

Ovako dobijena jednačina je, izuzev parametra $U'x/U$, univerzalnog oblika za sva stacionarna dvodimenziona strujna polja u laminarnom graničnom sloju nestišljivog fluida. Može se relativno jednostavno napraviti odgovarajući program za numeričku integraciju sa samo jednim parametrom, funkcijom $U'x/U$, koja se definiše kao ulazna veličina za svaki konkretan slučaj.

U periodu kada se nije raspolagalo savremenim računarima ulagani su posebni napor u cilju dobijanja potpuno univerzalnog oblika jednačina graničnog sloja koji ne bi zavisio od U , U' i x . To se postizalo uglavnom intuitivnim uvodjenjem različitih razmjera za koordinatu y i strujnu funkciju ψ , što je rezultiralo u pojavu parametara različitog oblika umjesto parametra $U'x/U$. Zatim je, umjesto izvoda po koordinati x uveden stepeni red izvoda po ovim parametrima. Od izuzetnog značaja je bila konvergencija ovog reda jer je integraljenje ove jednačine u slučaju uzimanja više od jednog člana ovog reda bilo izuzetno složeno a primjena ovako dobijenih rezultata veoma komplikovana. Između ostalih, najpoznatije razmjere potiču od Gortler-a, Loicianskii-og i Saljnikova. S obzirom na približnu tačnost ovako dobijenih rezultata i široku mogućnost integraljenja jednačine (4.46) u savremenim uslovima, ove metode nijesu posebno analizirane.

Jedan od prvih metoda za numeričku integraciju jednačina ravanskog graničnog sloja, za svaku datu vrijednost $U(x)$ i $U'(x)$, potiče od Crank-Nikolson-a. Ovaj metod uz odgovarajući numerički program su opisali Panton [4] i Blottner [5,6]. Pored ovog popularan je i metod koji su predložili Keller i Cebeci 1971g. [7]. Zajedničko za sve ove metode je izvodjenje dvije simultane jednačine, analogne jednačini (4.46) za koje je dat odgovarajući numerički metod za njihovo rješavanje.

U slučaju kada je $U'x/U = const$ odnosno $U = cx^n$, može se pretpostaviti da funkcija ψ ne zavisi od η (lijeva strana jedn. (4.46) ne zavisi od η). Slijedi da je $\psi_x^* = 0$, pa se jednačina (4.46) svodi na sledeći oblik,

$$\psi_{\eta\eta\eta}^* + \frac{1}{2} (n+1) \psi^* \psi_{\eta\eta}^* + n \left(1 - (\psi_{\eta}^*)^2 \right) = 0, \quad 4.47$$

koji su prvi definisali Falkner i Skan 1931g. [8]. Rješenje ove jednačine ima univerzalan karakter za sva strujanja oblika $U = cx^n$ (strujanja oko klinastih kontura) i daje se tabelarno za razne vrijednosti parametra n . Specijalan slučaj ovog strujanja je strujanje oko ravne ploče, za koje je $U = const$ ($n=0$). Jednačina (4.46) se svodi na najjednostavniji mogući oblik

$$\psi_{\eta\eta\eta}^* + \frac{1}{2} \psi^* \psi_{\eta\eta}^* = 0, \quad 4.48$$

koji je definisao Blasius 1908 g. [9].

4.5

Diferencijalni oblik energijske jednačine ravanskog graničnog sloja

Za rješavanje problema transporta energije u graničnom sloju od posebnog značaja je jednačina toplotne energije u obliku (3.35) i (3.36). U slučajevima kada se disipacija energije

može zanemariti (strujanje savršenog fluida), jednačine toplotne energije se svode na oblik (3.49) i (3.50). Ove jednačine imaju poseban značaj i u slučaju strujanja zagrijanog fluida preko hladne površine ili obratno, kada dominantan uticaj na promjenu unutrašnje energije ili entalpije ima dovedena količina toplote, dok se disipacija energije može praktično zanemariti.

Analizom reda veličine pojedinih članova u jednačini (3.50) pri laminarnom stacionarnom strujanju nestišljivog fluida u graničnom sloju, dobija se odgovarajući diferencijalni oblik energijske jednačine graničnog sloja,

$$\rho \left(v_x \frac{\partial i}{\partial x} + v_y \frac{\partial i}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 4.49$$

koja se za slučaj strujanja idealnog gasa ($i=c_p T$, $\lambda=\text{const}$) i tečnosti svodi na sledeći oblik

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{v_x}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 4.50$$

$$y = 0, \quad v_x = v_y = 0, \quad T = T_s,$$

$$y \rightarrow \infty, \quad v_x \rightarrow U, \quad T \rightarrow T_\infty.$$

Dobijene jednačine slijede iz osnovne jednačine (3.50), poslije jednostavne analize imajući u vidu da je u graničnom sloju:

$$v_y \ll v_x, \quad \frac{\partial i}{\partial x} \ll \frac{\partial i}{\partial y}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad 4.51$$

Ako se uvede bezdimenziona temperatura

$$\theta = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}, \quad 4.52$$

jednačina (4.52) se svodi na oblik

$$v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{v_x}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 4.53$$

sa graničnim uslovima

$$y = 0, \quad v_x = v_y = 0, \quad \theta = 0$$

$$y \rightarrow \infty, \quad v_x \rightarrow U, \quad \theta \rightarrow 1,$$

pri čemu je $a = \lambda / \rho c_p$ koeficijent toplotne difuzije.

Svi navedeni oblici jednačine toplotne energije sadrže komponente brzine v_x i v_y što znači da se moraju rješavati simultano sa odgovarajućim jednačinama graničnog sloja.

Pri strujanju preko ravne ploče je $\partial p / \partial x = 0$, pa se energijska jednačina svodi na najjednostavniji oblik

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad 4.54$$

ili

$$v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad 4.55$$

sa graničnim uslovima:

$$y = 0, \quad v_x = v_y = 0, \quad \theta = 0$$

$$y \rightarrow \infty, \quad v_x \rightarrow U, \quad \theta \rightarrow 1. \quad 4.56$$

Pri stacionarnom strujanju ($\partial/\partial t = 0$) preko ravne ploče ($\partial p/\partial x = 0$), jednačina ravanskog graničnog sloja (4.17) se, poslije uvođenja smjene $u^* = v_x/U$, može napisati u obliku

$$v_x \frac{\partial u^*}{\partial x} + v_y \frac{\partial u^*}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}, \quad 4.57$$

sa graničnim uslovima:

$$y = 0, u^* = 0,$$

$$y \rightarrow \infty, u^* \rightarrow 1. \quad 4.58$$

Jednačine (4.55) i (4.57) će biti indentične kada je $\nu = a$ odnosno $P_r = \nu/a = 1$. Imajući u vidu da se Prandtl-ov broj kreće u granicama od 0.6-1 za najveći broj gasova na normalnim uslovima, profili brzine i temperature kao i debljine brzinskog i temperaturnog graničnog sloja će biti slični u velikom broju slučajeva.

Pri turbulentnom strujanju fluida za analizu je najpogodnija jednačina toplote u obliku (3.51) ili (3.52).

4.6

Diferencijalne jednačine turbulentnog graničnog sloja nestišljivog fluida

Ako se, polazeći od Reynolds-ovih jednačina (2.53), na sličan način kao i pri laminarnom strujanju izvrši procjena reda veličine pojedinih članova pri turbulentnom ravanskom strujanju nestišljivog fluida, za slučaj relativno velikih R_e brojeva dobijaju se jednačine turbulentnog graničnog sloja:

$$\rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \overline{\sigma'_{xy}}}{\partial y}, \quad 4.59$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0,$$

sa graničnim uslovima:

$$y = 0, \bar{v}_x = \bar{v}_y = 0,$$

$$4.60$$

$$y \rightarrow \infty, \bar{v}_x \rightarrow U(x,0).$$

Do istog rezultata se može doći i ako se podje od realne pretpostavke da je u graničnom sloju $\bar{v}_y \ll \bar{v}_x$ i $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$.

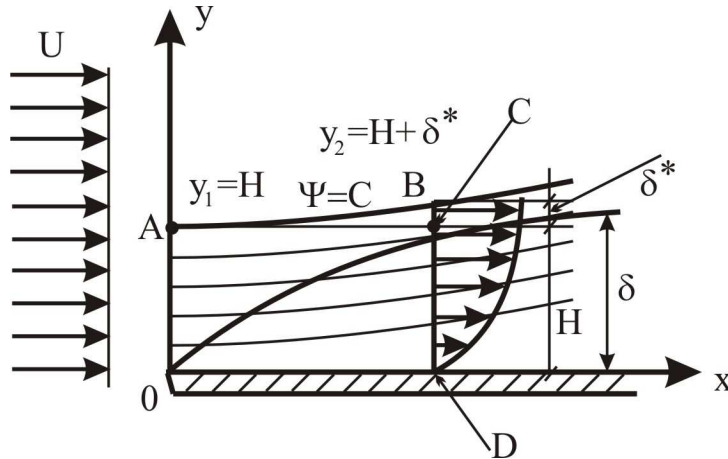
Za razliku od odgovarajućih jednačina laminarnog graničnog sloja, ove jednačine sadrže još jednu nepoznatu, komponentu Reynolds-ovog napona $\overline{\sigma'_{xy}} = -\rho \overline{v'_x v'_y}$.

U cilju zatvaranja sistema jednačina (4.59) neophodno je formulirati dopunske veze između komponente Reynolds-ovog napona i prosječnih veličina turbulentnog graničnog sloja.

4.7

Debljina istiskivanja i debljina gubitka impulsa

Na sl.4.9 je prikazana strujna slika pri strujanju viskoznog fluida preko ravne ploče. Za razliku od savršenog fluida, kod koga su strujnice paralelne ravnoj ploči ($v_x = U_0, v_y = 0$), kod viskoznog fluida strujnice su krive linije koje se blago udaljavaju od ploče.



Sl.4.9
Granični sloj na ravnoj površini

Usled lijepljenja fluida za čvrstu površinu, protok kroz presjek CD mora biti manji od protoka kroz presjek AO. Imajući to u vidu, iz jednačine kontinuiteta slijedi da fluid struji i kroz presjek AC, što znači da je komponenta brzine u y-pravcu različita od nule. Strujnice čiji su elementi $d\vec{l}$ u istom pravcu sa vektorima brzine \vec{v} ($\psi = const, \vec{v} \times d\vec{l} = 0$) moraju, prema tome, biti krive linije koje se udaljavaju od ploče. Primjenom zakona o održanju mase (jednačine kontinuiteta) na prostor ograničen strujnicom $\psi = C$, koja se nalazi van graničnog sloja, i presjecima OA i BD dobija se:

$$-\int_0^H \rho U dy + \int_0^{H+\delta^*} \rho v_x dy = 0, \quad 4.61$$

na osnovu čega slijedi,

$$\delta^* = \int_0^H \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy. \quad 4.62$$

Dobijena vrijednost pokazuje u kojoj se mjeri strujnica udaljena od ravne ploče na nekom rastojanju x u odnosu na početni položaj. Poznata je kao debljina istiskivanja i zavisi samo od koordinate x za dato strujno polje. Dobijeni izraz važi i za laminarno i turbulentno strujanje fluida bez obzira na oblik konture tijela.

Primjenom zakona o promjeni količine kretanja na isti prostor slijedi izraz

$$-\int_0^H \rho U U dy + \int_0^{H+\delta^*} \rho v_x v_x dy = P_{OA} + P_{AB,x} - P_{BD} - F_{OD}, \quad 4.63$$

u kome su P_{OA} , $P_{AB,x}$, P_{BD} , sile pritiska u odgovarajućim presjecima u pravcu ose x, dok je F_{OD} sila otpora na površini konture. S obzirom da je pri strujanju preko ravne ploče $\partial p / \partial x = 0$, suma sila pritiska $P_{OA} + P_{AB,x} - P_{BD}$ će biti jednaka nuli. Imajući to u vidu, dobija se, poslije integracije, izraz za silu F_{OD} koja se pojavljuje usled trenja fluida na površini konture,

$$\frac{F_{OD}}{\rho U^2} = \frac{F_x}{\rho U^2} = \int_0^H \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy = \int_0^\delta \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy = \int_0^\infty \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy. \quad 4.64$$

Integral na desnoj strani ove jednačine je poznat kao debljina gubitka impulsa i označava se sa

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy. \quad 4.65$$

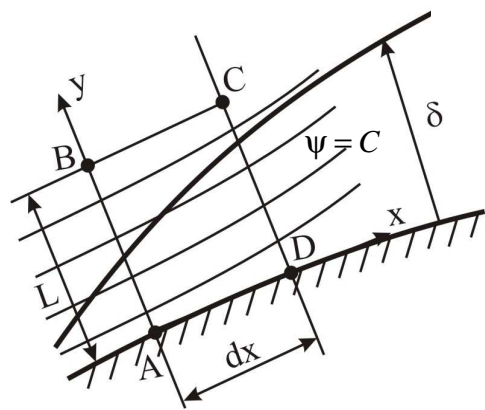
Pri strujanju preko ravne ploče je proporcionalan sili trenja odnosno sili otpora, što nije slučaj kod tijela proizvoljnog oblika.

Treba imati u vidu da samo debljina istiskivanja ima fundamentalni karakter u opštem slučaju, dok debljina gubitka impulsa ima fundamentalni karakter samo pri strujanju preko ravne ploče, mada se kao karakteristična veličina srijeće pri rješavanju problema strujanja u graničnom sloju oko tijela proizvoljnog oblika. Imajući u vidu blagu zakrivljenost graničnih površina u velikom broju praktičnih problema, debljina istikivanja će biti proporcionalna sili trenja i u tim slučajevima.

4.8

Integralna jednačina kretanja u graničnom sloju

Na sl.4.10 je prikazan granični sloj debljine $\delta(x)$ na blago zakrivljenoj konturi proizvoljnog oblika. Primjenom zakona o promjeni količine kretanja na kontrolnu zapreminu ograničenu presjecima AB i CD visine $L > \delta$, na rastojanju dx , slijedi;



Sl.4.10

Granični sloj na blago zakrivljenoj konturi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} \rho \vec{v} dV + \int_{A_k} \rho \vec{v} (\vec{v} d\vec{A}) = \vec{R}. \quad 4.66$$

Komponenta rezultujuće sile u x-pravcu, pri stacionarnom strujanju će biti

$$R_x = \int_{A_k} \rho v_x (\vec{v} d\vec{A}). \quad 4.67$$

Integral po kontrolnoj površini A_k se može predstaviti kao zbir četiri integrala po površinama jedinične širine;

$$\int_{A_k} \rho v_x (\vec{v} d\vec{A}) = \int_{A_1} \rho v_x (\vec{v} d\vec{A}) + \int_{A_2} \rho v_x (\vec{v} d\vec{A}) + \int_{A_3} \rho v_x (\vec{v} d\vec{A}) + \int_{A_4} \rho v_x (\vec{v} d\vec{A}),$$

čije su vrijednosti:

$$\int_{A_1} \rho v_x (\vec{v} d\vec{A}) = - \int_0^L \rho v_x^2 dy \Big|_x, \quad \int_{A_2} \rho v_x (\vec{v} d\vec{A}) = U \int_B^C \rho (\vec{v} d\vec{A}),$$

$$\int_{A_3} \rho v_x (\vec{v} d\vec{A}) = \int_0^L \rho v_x^2 dy \Big|_{x+dx}, \quad \int_{A_4} \rho v_x (\vec{v} d\vec{A}) = 0$$

Primjenom zakona o održanju mase u integralnom obliku slijedi:

$$\int_{A_k} \rho (\vec{v} d\vec{A}) = - \int_0^L \rho v_x dy \Big|_x + \int_B^C \rho (\vec{v} d\vec{A}) + \int_0^L \rho v_x dy \Big|_{x+dx} = 0$$

odnosno

$$\int_B^C \rho (\vec{v} d\vec{A}) = - \frac{d}{dx} \left(\int_0^L \rho v_x dy \right) dx. \quad 4.68$$

Ako se napon trenja na konturi označi sa τ_0 , s obzirom da je u graničnom sloju $\partial p / \partial y = 0$, rezultujuća sila u x-pravcu će biti

$$R_x = \int_0^L p dy \Big|_x - \int_0^L p dy \Big|_{x+dx} - \tau_0 dx = -L \frac{dp}{dx} dx - \tau_0 dx, \quad 4.69$$

Promjena pritiska duž konture se, na osnovu izraza (4.34), može izraziti u funkciji brzine strujanja na spoljnoj granici graničnog sloja

$$U \frac{dU}{dx} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad 4.70$$

Strujanje u graničnom sloju se najčešće odvija pod dejstvom gradijenta pritiska duž strujnog toka (prinudno strujanje), tako da se zapreminske sile mogu zanemariti, na osnovu čega slijedi

$$U \frac{dU}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad 4.71$$

Smjenom dobijenih rezultata u polaznu jednačinu, dobija se integralni oblik jednačine kretanja u graničnom sloju

$$\frac{d}{dx} \int_0^L \rho (U - v_x) v_x dy + \frac{dU}{dx} \int_0^L \rho (U - v_x) dy = \tau_0. \quad 4.72$$

S obzirom na izraze za debljinu istiskivanja i gubitka impulsa, može se napisati i u sledećem obliku

$$\frac{d}{dx} (\rho U^2 \delta^{**}) + \frac{dU}{dx} \rho U \delta^* = \tau_0, \quad 4.73$$

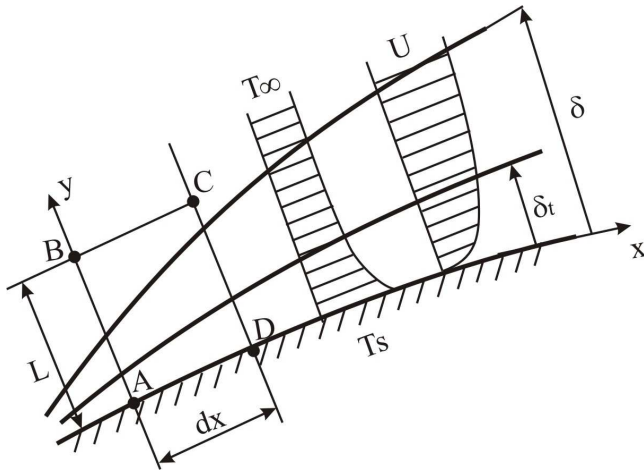
koji je definisao Von Karman 1921 g., pa je poznata i kao integralna Karman-ova jednačina graničnog sloja.

4.9

Integralna energijska jednačina graničnog sloja

Pri strujanju hladnog fluida preko zagrijane površine doći će do zagrijavanja fluida u neposrednoj blizini zida. Temperatura fluida će se mijenjati od $T=T_s$ na zidu do $T=T_\infty$ dovoljno daleko od zida. Rastojanje δ_t od zida na kome je razlika $T-T_\infty$ manja od neke unaprijed zadane male veličine, npr. 1%, je poznata kao debljina temperaturskog graničnog sloja. Do slične pojave dolazi i pri strujanju zagrijanog fluida preko hladne površine. Debljina

temperaturskog graničnog sloja δ_t i brzinskog graničnog sloja δ ne moraju biti indentične, mada su za najveći broj gasova istog reda veličine. Na sl.4.11 su prikazani brzinski i temperaturski granični sloj na blago zakrivljenoj konturi.



Sl.4.11
Brzinski i temperaturski granični slojevi na blago zakrivljenoj konturi

Polazi se od integralne energijske jednačine u opštem obliku (3.12). Ova jednačina važi samo ako viskoznan fluid struji u pravcu normale kroz kontrolne površine. U graničnom sloju to nije u potpunosti tačno ($v_y \neq 0$). Međutim, $v_y \ll v_x$, pa se jednačina (3.12) može primijeniti sa relativno visokom tačnošću.

Pri prinudnom strujanju u graničnom sloju uticaj zapreminskih sila se može zanemariti, dok je osovinski rad jednak nuli. Imajući to u vidu, jednačina (3.12) se, pri stacionarnom strujanju svodi na sledeći oblik

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{A_k} \left(\frac{v^2}{2} + i \right) (\rho \vec{v} d\vec{A}), \quad 4.74$$

u kome je entalpija $i = u + p / \rho$.

Pri strujanju hladnog fluida preko zagrijane površine, ili obratno, doći će do promjene njegove temperature na dijelu AD, usled čega će se promijeniti i entalpija fluida. U slučajevima kada je ovaj uticaj dominantan može se zanemariti promjena kinetičke energije između presjeka A i D u odnosu na promjenu entalpije u istim presjecima;

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{A_k} \rho i (\vec{v} d\vec{A}). \quad 4.75$$

Dobijeni izraz je približan ali dovoljno tačan u najvećem broju strujanja fluida preko čvrstih kontura pri intezivnom prelazu toplote sa zida na fluid ili obratno.

Integral po kontrolnoj površini A_k se može napisati kao zbir četiri integrala:

$$\int_A^B \rho i (\vec{v} d\vec{A}) = - \int_0^L \rho i v_x dy \Big|_x, \quad \int_B^C \rho i (\vec{v} d\vec{A}) = i_\infty \int_B^C \rho (\vec{v} d\vec{A}),$$

$$\int_C^D \rho i (\vec{v} d\vec{A}) = \int_0^L \rho i v_x dy \Big|_{x+dx}, \quad \int_D^A \rho i (\vec{v} d\vec{A}) = 0,$$

dok se primjenom jednačine kontinuiteta dobija izraz (4.68)

$$\int_B^C \rho (\vec{v} d\vec{A}) = - \frac{d}{dx} \left(\int_0^L \rho v_x dy \right) dx \quad 4.68$$

Razmijenjena količina toplote kroz presjeka AB i CD je zanemarljiva s obzirom na mali temperaturski gradijent u x-pravcu u odnosu na gradijent temperature u y-pravcu. Razmijenjena količina toplote kroz površinu BC je jednaka nuli jer je temperatura fluida van graničnog sloja konstantna. Ostaje, prema tome, samo količina toplote razmijenjena na zidu

$$\left. \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dt} \right|_{AD} = -\lambda dx \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} . \quad 4.76$$

Smjenom dobijenih rezultata u polaznu jednačinu dobija se integralna energijska jednačina graničnog sloja

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^L \rho v_x (i_\infty - i) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_i} \rho v_x (i_\infty - i) dy . \quad 4.77$$

Pri strujanju idealnog fluida, $i = c_p T$, i tečnosti, $i \approx c_p T$, integralna energijska jednačina se svodi na sledeći oblik,

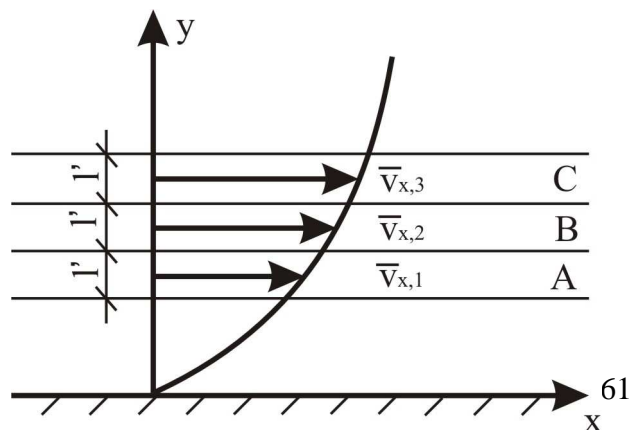
$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_i} \rho c_p v_x (T_\infty - T) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho c_p v_x (T_\infty - T) dy . \quad 4.78$$

4.10

Prandtl-ova i Reynolds-ova analogija

Diferencijalne jednačine turbulentnog graničnog sloja kao i Reynolds-ove jednačine predstavljaju otvoren sistem jednačina (broj nepoznatih veličina je veći od broja jednačina). U cilju zatvaranja ovog sistema neophodno je formulisati dopunske relacije između Reynolds-ovih napona i prosječnih karakteristika turbulentnog strujnog polja. Dopunske veze kojima bi se na zadovoljavajući način zatvorio sistem Reynolds-ovih jednačina do danas nijesu formulisane za opšti slučaj strujanja. Rješavanju problema se pristupilo proučavanjem međusobne zavisnosti karakteristika turbulencije (pulzacionih komponenti napona i brzine) i prosječnog kretanja. Na ovaj način su nastale dopunske jednačine koje povezuju već postojeće nepoznate veličine. Pojedine konstante u ovim vezama se određuju eksperimentalnim putem. Ovakav prilaz rješavanju problema i rezultati koji su proizašli poznati su kao poluempirijske teorije turbulencije. Ove teorije su formulisane prvo za slučaj kada je prosječno kretanje nestišljivog fluida pravolinijsko, paralelno i ravansko ili osnosimetrično. Razvijene su različite teorije od kojih su najpoznatije; Taylor-ova, Karman-ova i Prandtl-ova teorija o putu miješanja koja predstavlja jedan od najinteresantnijih rezultata u ovoj oblasti.

Prandtl je pošao od pretpostavke da je pulzaciona komponenta brzine u x-pravcu posledica prelaza fluidnih djelića iz sloja u sloj sa različitim prosječnim brzinama. Prema tome, pulzaciona komponenta brzine bi trebala biti proporcionalna razlici prosječnih brzina u dva susjedna sloja koja se nalaze na nekom rastojanju l' , sl.4.12.



Sl.4.12

Profil prosječne brzine pri turbulentnom strujanju preko ravne površine

Koeficijent proporcionalnosti je neka bezdimenziona funkcija vremena. Pri prelazu djelića iz sloja C u sloj B će biti

$$v'_x = \bar{v}_{x,3} - \bar{v}_{x,2} = l' \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}, \quad 4.79$$

a iz sloja A u sloj B,

$$v'_x = \bar{v}_{x,1} - \bar{v}_{x,2} = -l' \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}. \quad 4.80$$

Pulzaciona komponenta brzine u pravcu ose x će, prema izloženom, u opštem slučaju biti

$$v'_x = l' f(t) \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}, \quad 4.81$$

pri čemu je, očigledno,

$$-1 \leq f(t) \leq 1, \quad \int_0^T f(t) dt = 0.$$

Imajući u vidu da se na osnovu prve pretpostavke pulzaciona komponenta brzine javlja kao posledica prelaza djelića iz sloja u sloj mora postojati neka veza izmedju ove komponente i pulzacione komponente brzine kojom se djelići kreću u pravcu ose y. Prandtl je pretpostavio da je ova veza linearna u obliku

$$v'_y = -k v'_x = -k l' f(t) \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}. \quad 4.82$$

Negativan znak se pojavljuje jer pozitivnoj komponenti pulzacione brzine u pravcu ose x odgovara negativna vrijednost pulzacije u pravcu ose y i obratno.

Na osnovu matrice (2.57), koja definiše tenzor pulzacionih napona, slijedi da je

$$\overline{\sigma'_{yx}} = -\overline{\rho v'_x v'_y} = \rho k l'^2 \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2 \overline{(f(t))^2}. \quad 4.83$$

Prosječna vrijednost funkcije $\overline{(f(t))^2}$ predstavlja neku konstantu koja zajedno sa konstantom k i rastojanjem l' može biti tako kombinovana da daje neko novo rastojanje l, poznato kao putanja miješanja. Imajući to u vidu, slijedi

$$\overline{\sigma'_{xy}} = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2. \quad 4.84$$

Dobijeni rezultat predstavlja poznatu Prandtl-ovu teoriju (hipotezu) o putu miješanja. Logično je pretpostaviti da se putanja miješanja može definisati u funkciji rastojanja od zida y pa će, prema tome, napon σ'_{xy} zavisiti samo od prosječnih karakteristika turbulentnog strujnog polja (prosječne brzine) i neke eksperimentalne konstante od koje zavisi putanja miješanja.

Prandtl-ova teorija je uspješno primijenjena pri rješavanju niza turbulentnih strujnih polja kao što su: strujanje u mlazu, preko ravne površine u cijevi i sl. Ova teorija ima, međjutim, jedan očigledan nedostatak. Iz izraza (4.84) slijedi da će pulzacioni napon biti jednak nuli u tački u kojoj je $\partial \bar{v}_x / \partial y = 0$, kao što je centar kanala, cijevi i sl., što očigledno nije tačno. Prandtl je formirao novu hipotezu u cilju korekcije ovog nedostatka, ali ona nije od nekog posebnog značaja. U svakom slučaju treba očekivati da se kao rezultat Prandtl-ove teorije dobije takav profil brzine čiji gradijent u osi cijevi ili kanala neće biti jednak nuli ako se pulzacioni napon ne zanemari u toj oblasti.

Prandtl-ova teorija omogućava uspješno rješavanje jednačina kretanja graničnog sloja dok je u cilju rješavanja energijske jednačine neophodno uvesti nove hipoteze. Reynolds je uspostavio analogiju izmedju prenosa količine kretanja i prenosa toplote. Tangentni Reynolds-ov napon

se pojavljuje kao posledica prenosa količine kretanja iz sloja u sloj usled pulzacija brzine. Na osnovu Prandtl-ove teorije, izraz za trenutni napon pri prelazu djelića iz sloja A u sloj B, sl.4.11, se može napisati u obliku

$$\sigma'_{xy} = -\rho v'_x v'_y = -\rho v'_y (\bar{v}_{x,1} - \bar{v}_{x,2}) = \rho v'_y l' \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}. \quad 4.85$$

Na sličan način se može doći i do analognog izraza za prenesenu količinu toplote. Razmijenjena količina toplote po jedinici mase fluidnog djelića koji prelazi iz sloja u sloj u graničnom sloju je

$$dq = di, \quad 4.86$$

odnosno

$$q_{12} = i_2 - i_1, \quad 4.87$$

što slijedi iz jednačine toplote (3.51), s obzirom da se disipacija energije pri intezivnoj razmjeni toplote može zanemariti i da je promjena pritiska u pravcu y ose u graničnom sloju jednaka nuli. Analogno Prandtl-ovoj pretpostavci o fluktuaciji brzine (4.80), Reynolds uvodi sličnu pretpostavku za fluktuaciju toplote

$$q' = \bar{i}_2 - \bar{i}_1, \quad 4.88$$

što je u skladu sa izrazom (4.87).

Trenutna količina toplote koju razmijeni djelić mase $d(dm) = -\rho v'_y dt dA_y$ će, prema tome biti,

$$d(dQ') = q' d(dm) = -\rho v'_y (\bar{i}_2 - \bar{i}_1) dA_y dt. \quad 4.89$$

Na osnovu izloženog slijedi da je razmijenjena količina toplote po jedinici površine koja razdvaja dva susjedna sloja u y-pravcu u jedinici vremena pri turbulentnom strujanju,

$$\dot{q}'_{A,y} = \frac{d(dQ')}{dA_y dt} = -\rho v'_y (\bar{i}_2 - \bar{i}_1). \quad 4.90$$

Kombinujući ovaj izraz i izraz za tangenti napon (4.85) dobija se relacija

$$\dot{q}'_{A,y} = \frac{\sigma'_{xy}}{v_{x,1} - v_{x,2}} (\bar{i}_2 - \bar{i}_1). \quad 4.91$$

ili u diferencijalnoj formi

$$\dot{q}'_{A,y} = -\sigma'_{xy} \frac{d\bar{i}}{dv_x}. \quad 4.92$$

Poslije osrednjavanja po vremenu i uvođenja oznaka $\dot{q}'_{A,y} = \dot{q}_{A\tau}$ i $\overline{\sigma'_{xy}} = \tau_\tau$, slijedi

$$\dot{q}_{A\tau} = -\tau_\tau \frac{d\bar{i}}{dv_x}. \quad 4.93$$

Za idelne gasove će biti $di = c_p dT$, a za tečnosti $di \approx c_p dT$, odnosno,

$$\dot{q}_{A\tau} = -c_p \tau_\tau \frac{d\bar{T}}{dv_x}. \quad 4.94$$

Ovaj rezultat se može primijeniti samo u turbulentnom jezgru (dovoljno daleko od zida) jer samo u toj oblasti važi izraz (4.85) za turbulentni napon (strujanje u neposrednoj blizini zida je usled male brzine laminarno). Uz pretpostavku o postojanju laminarnog podsloja usled male brzine strujanja u neposrednoj blizini zida, razmjena toplote na samom zidu kao i kroz cjelokupni podsloj je samo usled kondukcije

$$\dot{q}_{Al} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad 4.95$$

dok je tangenti napon u ovoj oblasti

$$\tau_l = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad 4.96$$

na osnovu čega slijedi,

$$\dot{q}_{Al} = -\frac{\lambda}{\mu} \tau_l \frac{dT}{dv_x}. \quad 4.97$$

Imajući u vidu da je u graničnom sloju $\tau_l \approx \tau_t \approx \tau_0$ (GLAVA 8) slijedi da će, u slučaju kada je $\lambda/\mu = c_p$, odnosno $P_r = \mu/\lambda c_p = 1$, važiti isti izraz za prenos toplote u laminarnom podsloju i turbulentnom jezgru. Može se, prema tome, uzeti da izraz (4.94) važi po cjelokupnom presjeku graničnog sloja sa graničnim uslovima određenim na zidu i na gornjoj granici graničnog sloja.

Literatura

- [1] Schlichting, H., Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [2] Friedrichs, K. O., Theory of Viscous Fluids. Fluid Dynamics, Chapter 4, Brown University, 1942.
- [3] Tollmein, W., Handbuch der experimentalischen Physik, vol. IV, pt. 1, Leipzig, 1931.
- [4] Panton, R.L., Incompressible Flow, Chapter 20.6, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [5] Blottner, F.G., AIAA J., 8, p. 193, 1970.
- [6] Blottner, F.G., NATO-AGARD Lecture Series No. 73, Chapter 3, 1975.
- [7] Keller, H.B., and Cebeci, T., Lecture Notes in Physics, Vol. 8 Procc. of the Second International Conference on Numerical Methods in fluid Dynamics, p. 92, 1971.
- [8] Falkner, V.M., and Skan, S.W., Phil. Mag., vol. 12, no. 7, pp. 865-896, 1931.
- [9] Blasus, H., Z. Angew. Math. Phys., vol. 56. pp. 1-37, 1908.

GLAVA 5

JEDNODIMENZIONA STACIONARNA KONDUKCIJA



**Joseph Fourier
1768-1830**

Uvod

Proces stacionarnog provodjenja toplote za materiju u stanju mirovanja, sa izvorima ili ponorima energije, je definisan Poisson-ovom jednačinom (3.41) u sledećem obliku;

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \pm \dot{q}_v = 0. \quad 5.1$$

Ukoliko se proces provodjenja odvija prvenstveno u jednom pravcu, npr. x ili r , promjena temperature u ostalim pravcima se može zanemariti, na osnovu čega sledi;

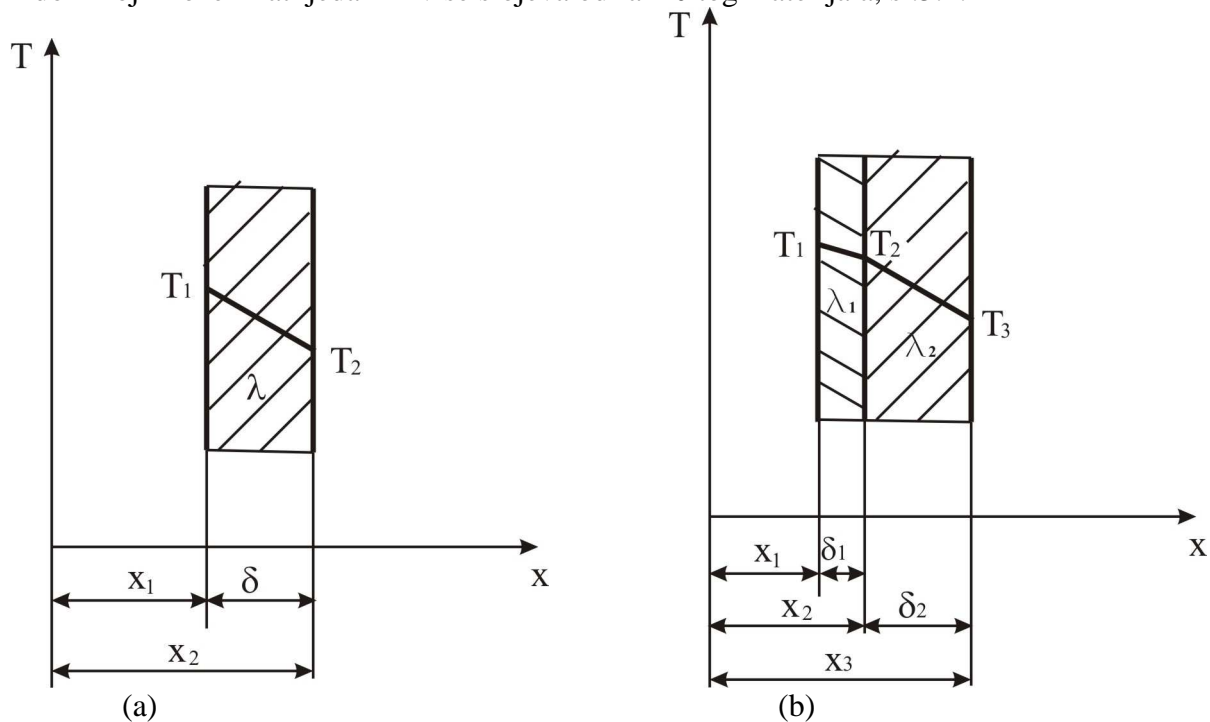
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \pm \dot{q}_v = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \pm \dot{q}_v = 0. \quad 5.2$$

Ovakvi, jednodimenzioni problemi provodjenja toplote su karakteristični za zidove relativno velike širine i dužine ili cilindre velike dužine na čijim površinama vladaju uniformni stacionarni granični uslovi. Zavisno od vrste graničnih uslova, veze $\lambda=f(T)$, broja slojeva i geometrije zida i inteziteta toplotnih izvora ili ponora razlikuju se razni slučajevi.

5.1

Ravan i cilindričan zid sa površinama konstantne temperature

Zid čije su dvije dimenzije znatno veće od treće sa dvije paralelne stranice se smatra ravnim zidom koji može imati jedan ili više slojeva od različitog materijala, sl.5.1.



Sl.5.1 Kondukcija kroz ravan zid. (a) Jednoslojan zid. (b) Višeslojan zid

Energijska jednačina u ovom slučaju će imati oblik (5.2) sa odgovarajućim graničnim uslovima:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \pm \dot{q}_v = 0, \quad 5.3$$

$$x = x_1, T = T_1; \quad x = x_2, T = T_2.$$

Kada nema toplotnih izvora (ponora), $\dot{q}_v = 0$, pri konstantnom koeficijentu toplotne provodljivosti λ , problem se svodi na jednačinu temperaturnog polja $\partial^2 T / \partial x^2 = 0$, čije je rješenje,

$$T = (T_2 - T_1)x / \delta + (T_1 x_2 - T_2 x_1) / \delta. \quad 5.4$$

Za slučaj kada je koordinatni početak postavljen na površini zida ($x_1=0$ i $x_2=\delta$) slijedi,

$$T = T_1 + (T_2 - T_1)x / \delta. \quad 5.5$$

Na osnovu Fourier-ove jednačine (1.1) slijedi da je toplotni fluks \dot{Q} , kroz bilo koji presjek na rastojanju x ,

$$\dot{Q} = \dot{q}_{Ax} A = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_1 - T_2}{\delta / \lambda A}. \quad 5.6$$

Toplotni fluks ne zavisi od položaja presjeka, što je očigledno s obzirom na stacionarnost problema i uslov da je $\dot{q}_v = 0$.

U slučaju dvoslojnog zida, sl.5.2(b), toplotni fluks kroz svaki sloj će, analogno izrazu (5.6), biti:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\delta_1 / \lambda_1 A}, \quad \dot{Q} = \frac{T_2 - T_3}{\delta_2 / \lambda_2 A}. \quad 5.7$$

Kombinovanjem ova dva izraza dobija se temperatura dodirnih površina zidova,

$$T_2 = \frac{\lambda_1 T_1 / \delta_1 + \lambda_2 T_3 / \delta_2}{\lambda_1 / \delta_1 + \lambda_2 / \delta_2}. \quad 5.8$$

Temperaturno polje drugog sloja se može odrediti na analogan način kao i temperaturno polje prvog sloja.

Toplotni fluks kroz višeslojni zid se može dobiti u obliku analognom Ohm-ovom zakonu, $I=U/R$,

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_3}{\delta_1 / \lambda_1 A + \delta_2 / \lambda_2 A}, \quad 5.9$$

koji slijedi iz (5.7) poslije smjene temperature dodirnih površina T_2 date izrazom (5.8). Funkcija potencijala U odgovara razlici temperatura krajnjih površina a ukupni otpor sumi redno vezanih toplotnih otpora $\delta_i / \lambda_i A$. Za zid koji se sastoji od n slojeva, analogno dvoslojnom zidu, će biti,

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i A}. \quad 5.10$$

Cilindričan (radijalan) zid, čija je dužina mnogo veća od spoljnog prečnika, sa jednim ili više slojeva, je prikazan na sl.5.2.

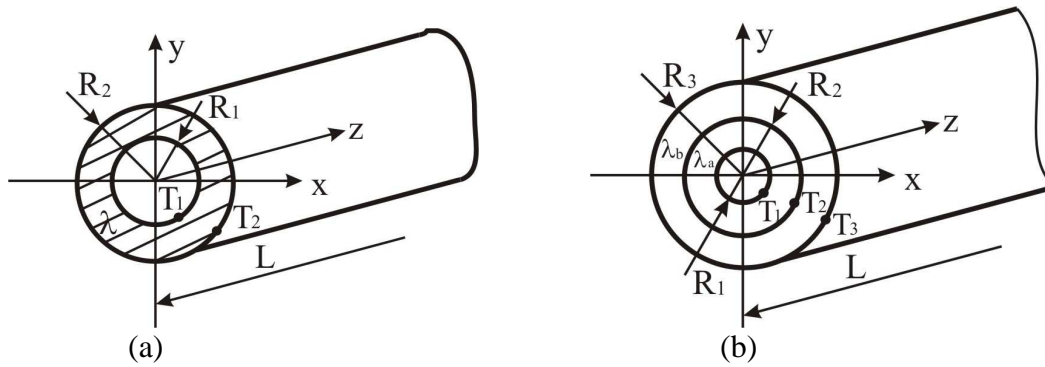
Kada nema toplotnih izvora ili ponora, pri konstantnom koeficijentu toplotne provodnosti, energijska jednačina (5.2) se svodi na oblik

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad 5.11$$

sa graničnim uslovima:

$$r = R_1, T = T_1; r = R_2, T = T_2.$$

Smjenom $\partial T / \partial r = u$ i $s = ur$ slijedi rješenje ove jednačine, $T = C \ln r + C_1$.



Sl.5.2 Kondukcija kroz cilindrični zid. (a) Jednoslojni cilindrični zid. (b) Dvoslojni cilindrični zid

Određivanjem konstanti C i C_1 iz graničnih uslova dobija se temperaturno polje u cilindru,

$$T = \frac{T_1 \ln(r/R_2) - T_2 \ln(r/R_1)}{\ln(R_1/R_2)} = T_2 + \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(R_1/R_2)} \ln(r/R_2). \quad 5.12$$

Toplotni fluks kroz neku cilindričnu površinu na rastojanju r će biti

$$\dot{Q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r L,$$

odnosno,

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_2/R_1) / 2\pi\lambda L} \quad 5.13$$

i neće zavisiti od radijalnog rastojanja r .

Analognim putem, kao i u slučaju ravnog zida, za dvoslojni cilindrični zid prikazan na sl.3.2(b), slijedi

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_3}{\ln(R_1/R_2) / 2\pi\lambda_1 L + \ln(R_3/R_2) / 2\pi\lambda_2 L}, \quad 5.14$$

dok će za zid sa n slojeva biti

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \ln(R_{i+1}/R_i) / 2\pi\lambda_i L}. \quad 5.15$$

5.2

Ravan zid sa promenljivim koeficijentom toplotne provodnosti

Koeficijent toplotne provodnosti je, u opštem slučaju, funkcija temperature (1.24). Za najveći broj materijala se sa dovoljnom tačnošću može uzeti linearna zavisnost,

$$\lambda = \lambda_0 (1 + b\theta), \quad \theta = T - T_{ref}, \quad 5.16$$

u kojoj je λ_0 koeficijent toplotne provodnosti na nekoj referentnoj temperaturi T_{ref} . Smjenom (5.16) u energijsku jednačinu (5.3), za slučaj kada nema toplotnih izvora ili ponora i kada su temperature zidova konstantne, slijedi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_0 (1 + b\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = 0, \quad 5.17$$

$$x = x_1, \theta = \theta_1, \quad x = x_2, \theta = \theta_2.$$

Rješenje ove jednačine je

$$\lambda_0(1+b\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} = C,$$

odnosno

$$\lambda_0\theta + \lambda_0b\frac{\theta^2}{2} = Cx + C_1. \quad 5.18$$

Za određivanje toplotnog fluksa dovoljno je odrediti konstantu C, s obzirom da je, prema Fourier-ovom zakonu,

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda A \frac{\partial \theta}{\partial x} = -AC,$$

dok je za temperatursko polje neophodna i druga konstanta C_1 . Na osnovu datih graničnih uslova slijedi:

$$C = \frac{\theta_2 - \theta_1}{x_2 - x_1} \lambda_m, \quad \lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \lambda_0 \left[1 + \frac{b}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right],$$

$$C_1 = \frac{x_2 [\lambda_0 \theta_1 + \lambda_0 b \theta_1^2 / 2] - x_1 [\lambda_0 \theta_2 + \lambda_0 b \theta_2^2 / 2]}{x_2 - x_1}.$$

Toplotni fluks će, prema tome, biti

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1} \lambda_m A, \quad 5.19$$

što je analogno izrazu sa konstantnom toplotnom provodnošću ako se umjesto stvarne (promenljive) uzme srednja vrijednost koeficijenta toplotne provodnosti λ_m .

Temperatursko polje $T=f(x)$ se može odrediti iz kvadratne jednačine (5.18), koja se poslije smjene konstanti C i C_1 , svodi na sledeći oblik,

$$\frac{b}{2}\theta^2 + \theta - \left[\theta_1 + \frac{b}{2}\theta_1^2 + \frac{\lambda_m(x-x_1)}{\lambda_0(x_2-x_1)}(\theta_2 - \theta_1) \right] = 0. \quad 5.20$$

Analogno izrazu (5.10) za ravan višeslojni zid sa konstantnom provodnošću, slijedi odgovarajući izraz za slučaj promenljive provodnosti,

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\Delta x_1 / \lambda_{m1} A + \Delta x_2 / \lambda_{m2} A + \dots}. \quad 5.21$$

S obzirom da su temperature na dodirnim površinama nepoznate, problem se mora rješavati iterativnim putem. U prvoj iteraciji se pretpostave temperature dodirnih površina na osnovu poznatih temperatura T_1 i T_{n+1} , izračunaju srednji koeficijenti toplotne provodnosti λ_{mi} , a zatim odredi toplotni fluks iz izraza (5.21). Temperature dodirnih površina u drugoj iteraciji se mogu odrediti iz izraza (5.19) za svaki sloj posebno. Zatim se izvrši korekcija koeficijenta λ_{mi} i odredi toplotni fluks u narednoj iteraciji, sve dok dvije uzastopne iteracije ne budu dovoljno bliske. Postupak veoma brzo konvergira.

5.3

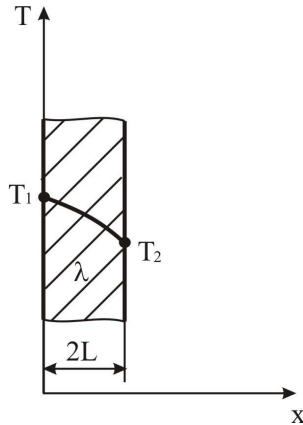
Ravan i cilindričan zid sa generacijom toplote i konstantnom toplotnom provodnošću

Toplota se u nekom sistemu može generisati u električnim provodnicima, pri nuklearnim i hemijskim reakcijama i sl. Kada je generacija toplote uniformna i stacionarna pri konstantnom

koeficijentu toplotne provodnosti, energijska jednačina (5.2) za ravan i cilindričan zid ima sledeći oblik;

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0, \quad \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0, \quad 5.22$$

u kome je \dot{q}_v (W/m³) generisana toplota po jedinici zapremine.



Sl.5.3
Ravan zid sa generacijom toplote

Granični uslovi za ravan zid, sl.5.3, će biti: $x=0, T=T_1; x=2L, T=T_2$.

Rješenje jednačine (5.22), za date granične uslove, ima sledeći oblik

$$T = \left[\frac{T_2 - T_1}{2L} + \frac{\dot{q}_v}{2\lambda} (2L - x) \right] x + T_1. \quad 5.23$$

Za $T_1=T_2=T_s$ sledi

$$T = T_s + \frac{\dot{q}_v}{2\lambda} (2L - x)x. \quad 5.24$$

Gradijent temperature je, u oba slučaja, funkcija koordinate x pa je, prema tome, i toplotni fluks \dot{Q} (W) funkcija koordinate x;

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda A \left[\frac{T_2 - T_1}{2L} + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} (L - x) \right]. \quad 5.25$$

Toplotni fluks kroz lijevu i desnu polovinu će biti:

$$\dot{Q}_l = -\lambda A \left[\frac{T_2 - T_1}{2L} + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} L \right], \quad \dot{Q}_d = -\lambda A \left[\frac{T_2 - T_1}{2L} - \frac{\dot{q}_v}{\lambda} L \right].$$

Za slučaj kada je $T_1=T_2=T_s$ sledi:

$$\dot{Q}_l = -\dot{q}_v AL, \quad \dot{Q}_d = \dot{q}_v AL,$$

što znači da je toplotni fluks kroz lijevu površinu zida jednak toploti koja se generiše u lijevoj polovini zida i analogno za desnu površinu.

Rješenje energetske jednačine (5.22) u cilindričnim koordinatama ima sledeći oblik:

$$T = -\frac{r^2}{4} \frac{\dot{q}_v}{\lambda} + C_1 \ln r + C_2.$$

Za puni cilindar mora biti $C_1=0$ dok se konstanta C_2 može odrediti iz uslova da je na spoljnoj površini cilindra ($r=R_s$) $T=T_s$, na osnovu čega sledi,

$$T - T_s = \frac{R_s^2 \dot{q}_v}{4\lambda} \left[1 - \left(\frac{r}{R_s} \right)^2 \right]. \quad 5.26$$

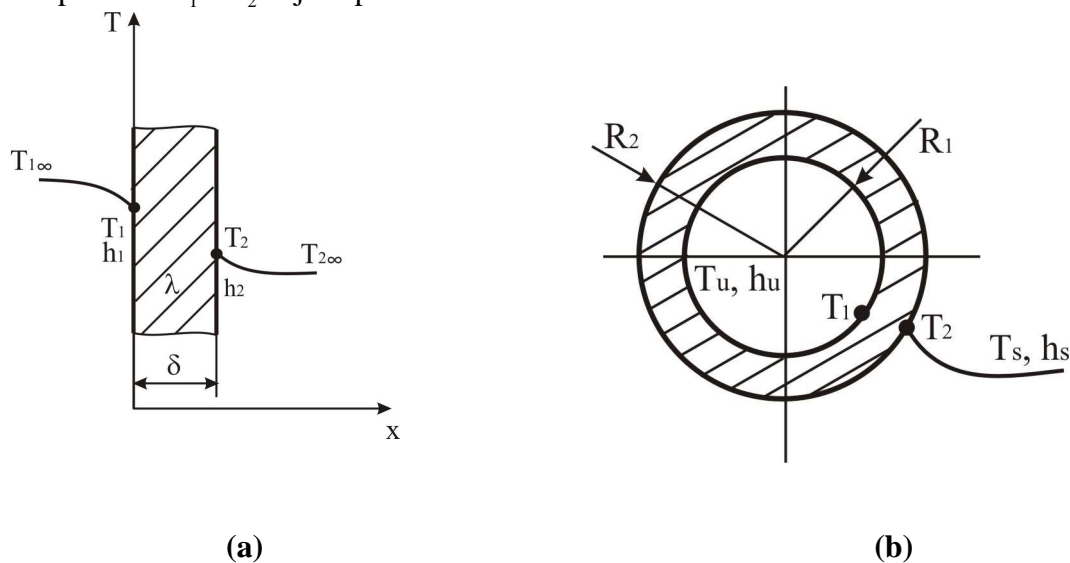
Ako se temperatura u centru cilindra označi sa T_c , može se temperaturno polje izraziti i u bezdimenzionoj formi

$$\frac{T - T_s}{T_c - T_s} = 1 - \left(\frac{r}{R_s}\right)^2.$$

5.4

Ravan i cilindričan zid sa konvektivnim graničnim uslovima

Na sl.5.4 su prikazani ravan i cilindričan zid sa poznatim temperaturama okolnog fluida $T_{1\infty}$ i $T_{2\infty}$ i koeficijentima konvekcije h_1 i h_2 na graničnim površinama ravnog zida, čije temperature T_1 i T_2 nijesu poznate.



Sl.5.4 Prenos toplote sa konvektivnim graničnim uslovima. (a) Ravan zid. (b) Cilindričan zid

Razmijenjena količina toplote sa okolinom usled konvekcije na ravnom zidu se može odrediti pomoću Newton-ovog zakona konvektivnog prelaza toplote (1.6) i (1.12):

$$\dot{Q}_1 = h_1 A (T_1 - T_{1\infty}), \quad \dot{Q}_2 = h_2 A (T_2 - T_{2\infty}). \quad 5.27$$

Iz bilansa energije pri stacionarnom prolazu toplote slijedi da su ove količine toplote jednake,

$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$. One, takodje, moraju biti jednake količini toplote \dot{Q}_k koja usled konvekcije prolazi kroz zid u stacionarnom stanju i koja će, na osnovu izraza (5.5), biti

$$\dot{Q}_k = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{\delta}.$$

Polazeći od uslova jednakosti ovih toplota,

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}_k = \dot{Q},$$

moгу se odrediti temperature površina zida kao i razmijenjena količina toplote

$$\dot{Q} = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{\frac{1}{Ah_1} + \frac{\delta}{A\lambda} + \frac{1}{Ah_2}}. \quad 5.28$$

Analogno Ohm-ovom zakonu, slijedi da je

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{\sum R_i}, \quad 5.29$$

pri čemu je $\sum R_i$ rezultujući toplotni otpor usled kondukcije i konvekcije;

$$\sum R_i = \frac{1}{h_1 A} + \frac{\delta}{\lambda A} + \frac{1}{h_2 A}. \quad 5.30$$

Toplotni fluks se može izraziti i u obliku

$$\dot{Q} = UA\Delta T, \quad 5.31$$

u kome je, s obzirom na (5.29),

$$U = \frac{1}{A \sum R_i} = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}}, \quad 5.32$$

rezultujući koeficijent prolaza toplote.

Analognim putem za neki cilindrični zid, sl.5.4(b), će biti:

$$\dot{Q}_u = h_u 2\pi R_1 L (T_u - T_1), \quad \dot{Q}_s = h_s 2\pi R_2 L (T_2 - T_s), \quad \dot{Q}_k = 2\pi \lambda L (T_1 - T_2) / \ln(R_2 / R_1)$$

Imajući u vidu da je $\dot{Q}_u = \dot{Q}_s = \dot{Q}_k = \dot{Q}$ slijedi;

$$\dot{Q} = \frac{T_u - T_s}{\sum R_i},$$

pri čemu je

$$\sum R_i = \frac{\ln(R_2 / R_1)}{2\pi \lambda L} + \frac{1}{2\pi R_1 L h_u} + \frac{1}{2\pi R_2 L h_s}. \quad 5.33$$

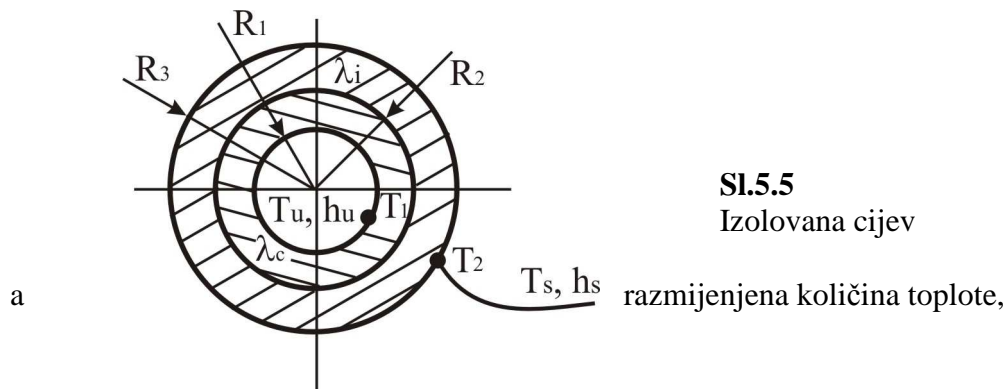
Može se, kao i u slučaju ravnog zida, toplotni fluks izraziti preko rezultujućeg koeficijenta prolaza toplote

$$\dot{Q} = UA_s \Delta T; \quad U = \frac{1}{A_s \sum R_i} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1 h_u} + \frac{R_2}{\lambda} \ln(R_2 / R_1) + \frac{1}{h_s}}, \quad A_s = 2\pi R_2 L. \quad 5.34$$

Kritična debljina izolacije

Rezultujući toplotni otpor za neku izolovanu cijev, sl.5.5, će analogno izrazu (5.33) biti

$$\sum R_i = \frac{1}{2\pi R_1 L h_u} + \frac{\ln((R_2 / R_1))}{2\pi \lambda_c L} + \frac{\ln(R_3 / R_2)}{2\pi \lambda_i L} + \frac{1}{2\pi R_3 L h_s}, \quad 5.35$$



SI.5.5
Izolovana cijev

$$\dot{Q} = \frac{T_s - T_u}{\sum R_i}$$

S obzirom da je $h_u \gg h_s$ i $\lambda_c \gg \lambda_i$, mogu se prva dva člana u izrazu (5.35) zanemariti. Imajući to u vidu slijedi;

$$\dot{Q} \approx \frac{T_u - T_s}{\frac{\ln(R_3/R_2)}{2\pi\lambda_i L} + \frac{1}{2\pi R_3 L h_s}} \quad 5.36$$

Sa porastom poluprečnika R_3 , odnosno debljine izolacije, toplotni fluks ne mora u opštem slučaju da opada već se može desiti da prvo raste do neke maksimalne vrijednosti a tek onda da opada. Maksimalna vrijednost toplotnog fluksa se može naći iz uslova

$$\partial \dot{Q} / \partial R_3 = 0,$$

iz koga slijedi kritična debljina izolacije

$$R_3 = \lambda_i / h_s = R_{kr} \quad 5.37$$

Sa porastom R_3 raste i debljina izolacije usled čega raste i toplotni otpor kondukciji. Međutim, dolazi i do porasta spoljašnje površine izolacije što ima suprotan efekat. Povećava se površina na kojoj se razmjenjuje toplota usled konvekcije i smanjuje toplotni otpor konvekciji. Rezultujući toplotni otpor se smanjuje sa porastom R_3 sve do $R_3 = R_{kr}$, a zatim raste. Da bi efekat izolacije došao do izražaja mora spoljni prečnik izolacije biti dovoljno veći od kritične vrijednosti. Samo ako je $R_2 > R_{kr}$, toplotni otpor raste sa porastom debljine izolacije počev od nulte vrijednosti.

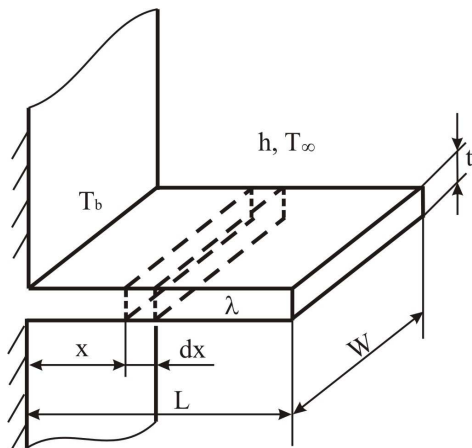
5.5

Orebrene površine

Orebrene površine ili rebra se koriste u cilju povećanja efektivne površine na kojoj se toplota razmjenjuje sa okolinom konvektivnim putem. Time se povećava efikasnost razmjenjivača toplote, intezitet hladjenja motora SUS, transformatora i sl. Razlikuju se dvije karakteristične vrste rebara; rebra konstantnog i rebra promjenljivog poprečnog presjeka.

Rebra konstantnog poprečnog presjeka

To su uglavnom rebra pravougaonog uniformnog poprečnog presjeka i štapovi konstantnog poprečnog presjeka. Na sl.5.6 je prikazano pravougaono rebro čija je temperatura osnove T_b , dok je temperatura okolnog vazduha T_∞ .



Sl.5.6

Rebro pravougaonog poprečnog presjeka

Iz energijskog bilansa za element dužine dx i širine w slijedi:

$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} + \dot{Q}_{konv}.$$

Zanemarujući promjenu temperature u y i z pravcu mogu se dobiti razmijenjene količine toplote:

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \left. \frac{dT}{dx} \right|_x, \quad \dot{Q}_{x+dx} = -\lambda A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+dx}, \quad \dot{Q}_{konv} = hpdx(T - T_\infty),$$

pri čemu je $p = 2(w + t)$, obim elementa rebra. Imajući u vidu da je $T_x = T - (dT/dx)(dx/2)$ i $T_{x+dx} = T + (dT/dx)(dx/2)$ dobija se, za $\lambda = const$, diferencijalna jednačina temperaturskog polja rebra,

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hp}{\lambda A} (T - T_\infty) = 0, \quad 5.38$$

koja se poslije uvođenja smjena $\theta = T - T_\infty$ i $n = \sqrt{2h(t + w) / \lambda A}$, svodi na oblik

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - n^2 \theta = 0, \quad 5.39$$

čije je opšte rješenje

$$\theta = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}. \quad 5.40$$

Prvi granični uslov je $\theta(0) = T_b - T_\infty = \theta_b$, dok se drugi granični uslov može javiti u jednom od sledeća tri karakteristična oblika:

- | | |
|--|--|
| I. $\theta(\infty) = 0,$ | - veoma dugo rebro čija je temperatura drugog kraja jednaka temperaturi okoline. |
| II. $d\theta/dx = 0,$ za $x=L,$ | - rebro konačne dužine čija je čeonu površina izolovana ili razmijenjena količina toplote kroz čeonu površinu zanemarljivo mala. |
| III. $-\lambda d\theta/dx = h_L \theta_L,$ za $x=L,$ | - rebro konačne dužine sa konvektivnim prenosom toplote na čeonj površini. |

Primjenom navedenih graničnih uslova slijede odgovarajući izrazi za temperatursko polje:

$$\text{I. } \theta = \theta_b e^{-nx}, \quad 5.41$$

$$\text{II. } \theta = \theta_b \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)}, \quad 5.42$$

$$\text{III. } \theta = \theta_b \frac{\cosh[n(L-x)] + (h_L/n\lambda) \sinh[n(L-x)]}{\cosh(nL) + (h_L/n\lambda) \sinh(nL)}. \quad 5.43$$

Toplotni fluks sa rebra na okolni fluid je jednak toploti koja usled kondukcije prodje kroz osnovu rebra;

$$\dot{Q} = -\lambda A_b \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -\lambda A_b \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0},$$

na osnovu čega slijedi:

$$\text{I. } \dot{Q} = \lambda A_b n \theta_b, \quad 5.44$$

$$\text{II. } \dot{Q} = \lambda A_b n \theta_b \tanh(nL), \quad 5.45$$

$$\text{III. } \dot{Q} = \lambda A_b n \theta_b \left[\frac{\sinh(nL) + (h_L/n\lambda) \cosh(nL)}{\cosh(nL) + (h_L/n\lambda) \sinh(nL)} \right], \quad 5.46$$

Zanemarivanjem toplotnog fluksa na čeonj površini rebra ($h_L = 0$), slučaj III se svodi na slučaj II, a slučaj II na slučaj I kad $L \rightarrow \infty$, što je u skladu sa odgovarajućim graničnim uslovima. Za tanko rebro, $w \gg t$, će biti

$$n = \sqrt{2h / \lambda t}. \quad 5.47$$

Za rebro u obliku cilindričnog štapa, poluprečnika r , se dobijaju indentični izrazi za temperaturno polje i toplotni flux, kao i za rebro pravougaonog poprečnog presjeka, stim što je koeficijent n u tom slučaju,

$$n = \sqrt{2h / \lambda r}. \quad 5.48$$

Rebra promenljivog poprečnog presjeka

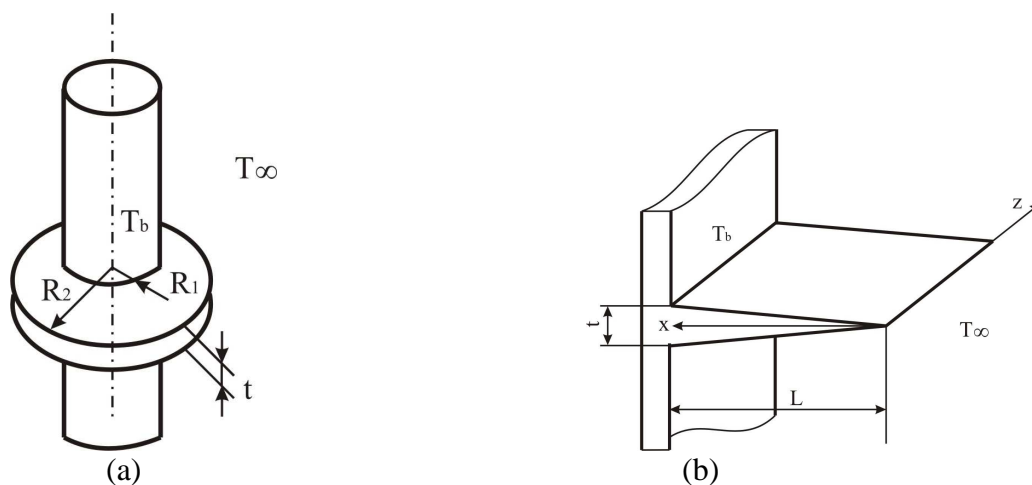
Diferencijalna jednačin temperaturnog polja za rebro promenljivog poprečnog presjeka ima oblik

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \frac{1}{A} \frac{dA}{d\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{h}{\lambda} \left(\frac{1}{A} \frac{dS}{d\xi} \right) \theta = 0, \quad 5.49$$

u kome je: $A=A(\xi)$ promenljiva površina poprečnog presjeka rebra
 $S=S(\xi)$ promenljiva spoljna površina rebra sa koje se toplota odvodi konvekcijom.

Za rebro u obliku diska, sl.5.7(a), za koje je $t \ll R_2 - R_1$, će biti: $\xi=r$, $A(r)=2\pi r t$ i $S(r)=2\pi(r^2 - R_1^2)$, na osnovu čega slijedi:

$$\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{2h}{\lambda t} \theta = 0. \quad 5.50$$



Sl. 5.7 Rebro promenljivog poprečnog presjeka. (a) Disk. (b) Trougao.

Dobijena jednačina je Bessel-ova diferencijalna jednačina nultog reda čije je opšte rješenje

$$\theta = C_1 I_0(nr) + C_2 K_0(nr), \quad 5.51$$

u kome je: $n = \sqrt{2h / \lambda t}$,

I_0 - modificirana bessel-ova funkcija nultog reda prve vrste

K_0 - modificirana bessel-ova funkcija nultog reda druge vrste.

Za granične uslove

$$\theta(R_1) = T_b - T_\infty = \theta_b, \quad \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=R_2} = 0$$

dobija se slijedeće rješenje:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{I_0(nr)K_1(nR_2) + K_0(nr)I_1(nR_2)}{I_0(nR_1)K_1(nR_2) + K_0(nR_1)I_1(nR_2)}, \quad 5.52$$

$$\dot{Q} = 2\pi\lambda t \theta_b (nR_1) \frac{K_1(nR_1)I_1(nR_2) - I_1(nR_1)K_1(nR_2)}{I_0(nR_1)K_1(nR_2) + K_0(nR_1)I_1(nR_2)}, \quad 5.53$$

u kome je:

I_1 – modificirana Bessel-ova funkcija prvog reda prve vrste,

K_1 – modificirana Bessel-ova funkcija prvog reda druge vrste.

Diferencijalna jednačina temperaturskog polja za trouglasto rebro, sl.5.7(b), će biti

$$x \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - n^2\theta = 0, \quad 5.54$$

pri čemu je $n = \sqrt{h/\lambda \tan \varphi}$. Rješenje ove jednačine je

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{I_0(2n\sqrt{x})}{I_0(2n\sqrt{L})}, \quad \dot{Q} = t\theta_b \sqrt{\frac{h\lambda}{L \tan \varphi}} \frac{I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})}. \quad 5.55$$

Efikasnost rebra

Osnovna funkcija rebra je povećanje efektivne površine na kojoj se razmjenjuje toplota konvektivnim putem sa okolinom. Medjutim, rebro predstavlja toplotni otpor usled kondukcije pri transferu toplote sa osnove na kojoj je postavljeno rebro na okolni fluid. Imajući to u vidu, transfer toplote se ne mora uvijek povećati postavljanjem rebra. Nivo efikasnosti rebra se definiše preko koeficijenta efektivnosti koji predstavlja odnos razmijenjene količine toplote sa površine rebra i toplote koja bi se razmijenila sa površine osnove, A_b , na kojoj je montirano rebro

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{hA_b\theta_b}. \quad 5.56$$

Mada koeficijenti konvekcije na osnovi i rebru nijesu isti, smatra se da je razlika ovih koeficijenata za ovu analizu zanemarljiva. Za svako racionalno rješenje, treba težiti da koeficijent efektivnosti bude što veći. Da bi rebro bilo efikasno treba ispuniti uslov $\varepsilon \geq 2$.

Koeficijent efektivnosti rebra konstantnog poprečnog presjeka, obima $p = 2(w+t)$, prikazanog na sl.5.6 ($A_b = A$), za beskonačno dugo rebro će biti

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda p}{hA}}. \quad 5.57$$

Očigledno je da će efikasnost rebra biti povećana sa izborom materijala visoke toplotne provodnosti, kao što su npr. legure bakra i aluminijuma. Posebno su pogodne legure aluminijuma zbog manje cijene i težine iako im je toplotna provodnost manja od bakra. Efikasnost rebra se takodje povećava sa povećanjem odnosa obima rebra P i poprečnog presjeka A . Imajući to u vidu treba koristiti više tankih rebara, vodeći računa da međuprostor ne bude suviše mali da ne dodje do blokiranja strujnog toka u prostoru između rebara i do velike razlike u koeficijentima konvekcije na osnovi i rebru. Na osnovu izraza 5.57, takodje slijedi da je upotreba rebara opravdanija u slučajevima kada je koeficijent konvekcije h mali. Imajući to u vidu, slijedi da rebra treba koristiti u slučajevima kada se površina hladi gasovima, za razliku od tečnosti, i kada je izložena slobodnoj, za razliku od prinudne konvekcije. Ako se rebra koriste na površinama koje rzdvajaju gas i tečnost, onda se ona postavljaju na gasnoj strani. Tipičan oprimgjer je hladnjak automobila. Ako se kao kriterijum opravdanosti upotrebe rebra uzme uslov $\varepsilon \geq 2$, na osnovu 5.57 slijedi

$$\frac{\lambda p}{hA} \geq 4. \quad 5.58$$

Upoređujući rebra beskonačne i konačne dužine sa izolovanom čeonom površinom, može se zaključiti da će koeficijent efektivnosti rebra konačne dužine bit jednak 98% od koeficijenta rebra beskonačne dužine za $nL=2.3$. Imajući to u vidu slijedi da nema potreba praviti rebra čija je dužina veća od $2.3/n$, $n = \sqrt{2h(t+w)/\lambda A}$.

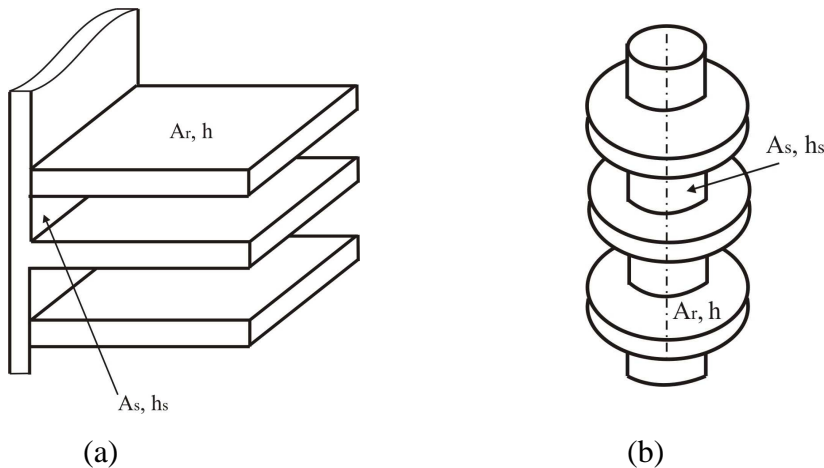
Druga mjera efikasnosti rebra je koeficijent korisnog dejstva rebra, koji predstavlja odnos razmijenjene toplote i maksimalne moguće količine toplote koju bi rebro, date geometrijske konfiguracije, moglo da razmjeni

$$\eta = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} = \frac{\dot{Q}}{hA_r\theta_b}. \quad 5.59$$

Maksimalni toplotni fluks bi odgovarao slučaju kada bi temperatura površine rebra bila jednaka temperaturi osnove, $T=T_b$, $\theta=\theta_b$. S obzirom da rebro predstavlja otpor pri transferu toplote usled kondukcije, mora postojati gradijent temperature duž rebra, tako da predpostavka o jednakosti temperature rebra i osnove predstavlja idealizaciju za rebro beskonačno velike provodnosti. Za rebro konstantnog poprečnog presjeka sa izolovanom čeonom površinom, koeficijent korisnog dejstva će biti

$$\eta = \frac{\lambda A_b n \theta_b \tanh(nL)}{h A_r \theta_b} \approx \frac{\tanh(nL)}{nL}. \quad 5.60$$

Očigledno je da sa povećanjem dužine rebra opada njegov stepen korisnog dejstva. Imajući to u vidu, veći broj kraćih rebara će biti efikasniji od manjeg broja veće dužine. Koeficijent korisnog dejstva će dostići maksimalnu vrijednost jednaku jedinici i minimalnu vrijednost jednaku nuli kada njegova dužina bude jednaka nuli, odnosno beskonačno velika. Podaci za η se mogu naći za razne vrste i konfiguracije rebara u odgovarajućoj literaturi.



Sl.5.8 Nizovi rebara. (a) Pravougaona rebra. (b) Rebra u obliku diska

Ukupni toplotni flux sa niza od k rebara površine A_r , sl.5.8, sa medjurebarskim prostorom A_s i odgovarajućim koeficijentom konvekcije h_s , će biti:

$$\dot{Q} = k(h_s A_s + \eta h A_r) \theta_b. \quad 5.61$$

Stepen korisnog dejstva, η_0 , niza rebara se može odrediti na analogan način kao i za pojedinačno rebro,

$$\eta_0 = \frac{\dot{Q}}{hA_t\theta_b}, \quad 5.62$$

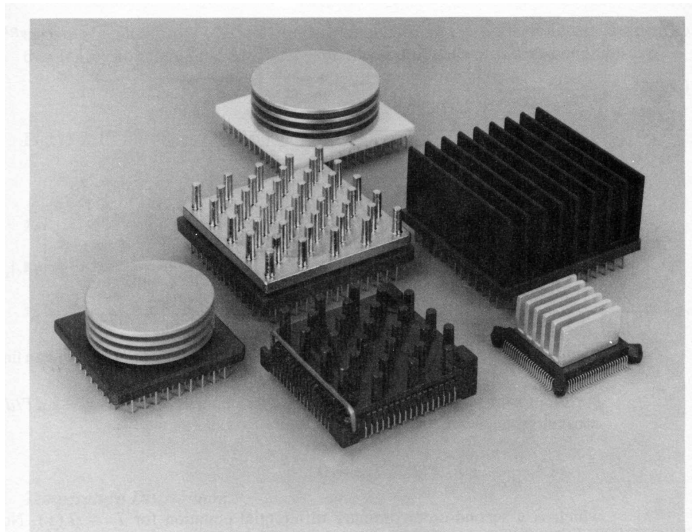
pri čemu je,

$$A_t = k(A_s + A_r), \quad 5.63$$

ukupna površina sa koje se razmjenjuje toplota. Na osnovu predhodnih izraza slijedi izraz za stepen korisnog dejstva niza rebara,

$$\eta_0 = 1 - \frac{kA_r}{A_t}(1 - \eta). \quad 5.64$$

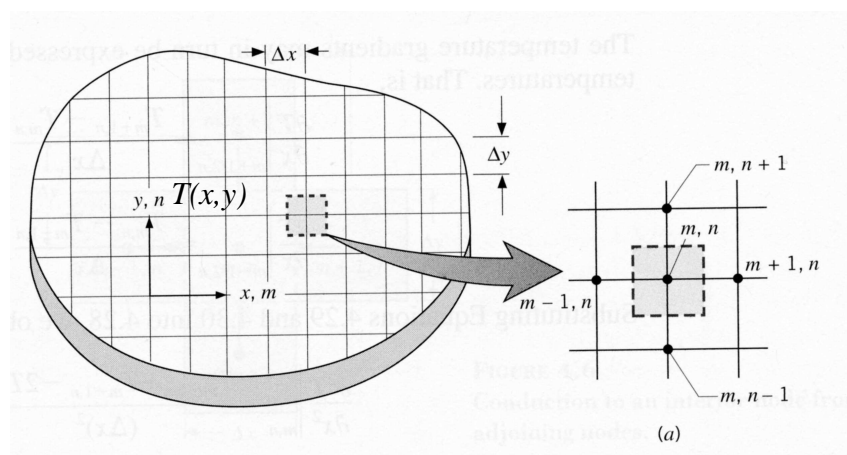
Na sl.5.9 prikazani su razni oblici rebara za hladjenje elektronskih kola.



Sl.5.9
Orebrene površine omotača elektronskih kola

GLAVA 6

VIŠEDIMENZIONALNA STACIONARNA KONDUKCIJA



Uvod

Za razliku od jednodimenzione, višedimenzionu kondukciju karakterišu gradijenti temperature u dva ili više pravaca. Temperatursko polje je definisano Poisson-ovom jednačinom (3.41);

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \pm \dot{q}_v = 0. \quad 6.1$$

Kada je $\lambda = \text{const}$ i $\dot{q}_v = 0$ (konstantan koeficijent toplotne provodljivosti bez toplotnih izvora ili ponora), ova jednačina se svodi na Laplace-ovu jednačinu (3.44), koja u Deckart-ovom koordinantnom sistemu ima oblik

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad 6.2$$

Za razliku od jednodimenzionih sistema, gdje su problemi opisani običnim diferencijalnim jednačinama, kod višedimenzionih sistema se moraju rješavati linearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda. Postoji više različitih metoda određivanja temperaturskog polja u slučaju višedimenzione kondukcije i mogu se svrstati u tri osnovne grupe; analitičke, grafičke i numeričke metode. Svaka od ovih metoda je pogodna za određenu klasu problema tako da se međusobno dopunjuju. Na osnovu poznatog temperaturskog polja može se lako odrediti toplotni fluks u bilo kom pravcu.

6.1

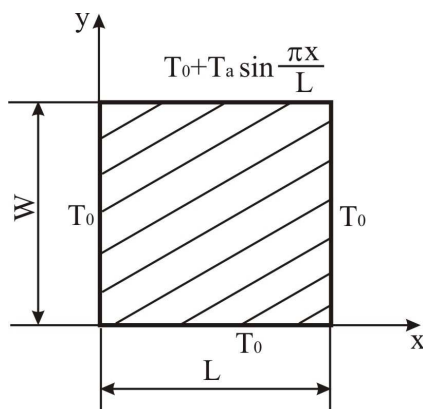
Analitička rješenja

Laplace-ova diferencijalna jednačina se u nekim slučajevima može riješiti analitički metodom razdvajanja promenljivih. S obzirom na linearni karakter ove jednačine slijedi da će linearna kombinacija više rješenja za različite granične uslove takodje biti odgovarajuće rješenje za neke zbirne granične uslove.

Ilustrativan primjer analitičkog rješenja je pravougaoni profil, sl 6.1, beskonačne dužine ($\partial/\partial z = 0$) poprečnog presjeka $L \times W$ čije su tri stranice izložene konstantnoj temperaturi T_0 , dok je raspodjela temperature na trećoj stranici sinusna funkcija,

$$T = T_0 + T_a \sin(\pi x / L). \quad 6.3$$

Iako je pojava sinusne raspodjele temperature na jednoj od stranica profila u tehničkoj praksi malo vjerovatna, izbor ovakvog graničnog uslova nije slučajan jer daje najjednostavnije rješenje Laplace-ove jednačine, na osnovu koga se mogu dobiti odgovarajuća rješenja za složene granične uslove.



Sl.6.1
Dug pravougaoni profil

S obzirom na relativno veliku dužinu profila i granične uslove konstantne u z pravcu slijedi da će i promjena temperature u tom pravcu biti jednaka nuli, $\partial T / \partial z = 0$, tako da se Laplace-ova jednačina (6.2) svodi na sledeći oblik;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad 6.4$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} T(0,y) &= T_0, \quad 0 < y < W, \\ T(L,y) &= T_0, \quad 0 < y < W, \\ T(x,0) &= T_0, \quad 0 < x < L, \\ T(x,W) &= T_0 + T_a \sin(\pi x/L), \quad 0 < x < L. \end{aligned} \quad 6.5$$

Uvodjenjem smjene $\theta = T - T_0$ slijedi

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad 6.6$$

dok će granični uslovi biti:

$$\begin{aligned} \theta(0,y) &= 0, \quad 0 < y < W, \\ \theta(L,y) &= 0, \quad 0 < y < W, \\ \theta(x,0) &= 0, \quad 0 < x < L, \\ \theta(x,W) &= \theta_m \sin(\pi x/L), \end{aligned} \quad 6.7$$

pri čemu je $\theta_m = T_a$, maksimalna temperaturska razlika na površini štapa sa sinusnom raspodelom temperature.

Predpostavljaju se parcijalna rešenja u obliku proizvoda dvije funkcije od kojih jedna zavisi od koordinate x a druga od koordinate y ;

$$\theta_n = X_n(x)Y_n(y). \quad 6.8$$

Poslije diferenciranja i smjene u Laplace-ovu jednačinu (7.6) slijedi;

$$-\frac{1}{X_n} \frac{d^2 X_n}{dx^2} = \frac{1}{Y_n} \frac{d^2 Y_n}{dy^2}. \quad 6.9$$

S obzirom da su lijeva i desna strana ove jednačine funkcije samo jedne promenljive, obje moraju biti jednake istoj konstanti. Granični uslov zadat u obliku sinusne funkcije može biti zadovoljen samo ako je ova konstanta pozitivna, npr. k_n^2 ,

$$-\frac{1}{X_n} \frac{d^2 X_n}{dx^2} = k_n^2, \quad \frac{1}{Y_n} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} = k_n^2.$$

Partikularna rešenja ovih jednačina su:

$$\begin{aligned} X_n &= C_{1n} \cos(k_n x) + C_{2n} \sin(k_n x), \\ Y_n &= C_{3n} e^{-k_n y} + C_{4n} e^{k_n y}, \end{aligned}$$

pa je, prema tome,

$$\theta_n = [C_{1n} \cos(k_n x) + C_{2n} \sin(k_n x)] [C_{3n} e^{-k_n y} + C_{4n} e^{k_n y}]. \quad 6.10$$

Na osnovu prvog od graničnih uslova (6.7) slijedi da je $C_{1n} = 0$ a na osnovu trećeg $C_{4n} = -C_{3n}$, dok drugi granični uslov daje

$$C_{2n} C_{3n} \sin(k_n L) (e^{-k_n y} - e^{k_n y}) = 0.$$

Da bi ovaj izraz bio jednak nuli mora biti $\sin(k_n L) = 0$, odnosno $k_n = n\pi / L$, pri čemu je n cio broj. Bilo koje partikularno rešenje (6.10) će, prema tome, imati oblik

$$\theta_n = C_n \sin(n\pi x / L) \sinh(n\pi y / L),$$

u kome je $C_n = -2C_2C_3$.

Opšte rješenje jednačine (6.6) je jednako zbiru svih partikularnih rješenja, odnosno

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x / L) \sinh(n\pi y / L). \quad 6.11$$

Konstante C_n se mogu odrediti na osnovu četvrtog graničnog uslova, na osnovu koga slijedi:

$$\theta_m \sin(\pi x / L) = C_1 \sin(\pi x / L) \sinh(\pi W / L) + C_2 \sin(2\pi x / L) \sinh(2\pi W / L) + C_3 \dots$$

Da bi ova jednakost bila zadovoljena mora biti

$$C_1 = \theta_m / \sinh(\pi W / L), C_2 = C_3 = \dots = 0.$$

Imajući to u vidu dobija se konačan izraz za raspodjelu temperature po poprečnom presjeku profila;

$$\theta = \theta_m \frac{\sinh(\pi y / L)}{\sinh(\pi W / L)} \sin(\pi x / L). \quad 6.12$$

Kada je četvrti od graničnih uslova (7.7) zadat u vidu proizvoljne funkcije $\theta = f(x)$, na osnovu (7.11) slijedi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(n\pi W / L) \sin(n\pi x / L). \quad 6.13$$

Upoređujući ovaj izraz sa Fourier-ovim redom za neku neparnu periodičnu funkciju $f(x)$ sa periodom $2L$ ($-L \div L$);

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x / L), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x / L) dx,$$

dobija se

$$C_n = \frac{2}{L \sinh(n\pi W / L)} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x / L) dx.$$

Smjenom u (6.11) slijedi izraz za raspodjelu temperature po poprečnom presjeku štapa, kada je temperatura duž jedne od njegovih stranica zadata u vidu proizvoljne funkcije $f(x)$;

$$\theta = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(n\pi y / L)}{\sinh(n\pi W / L)} \sin(n\pi x / L) \int_0^L f(x) \sin(n\pi x / L) dx. \quad 6.14$$

Za svaku datu raspodjelu $f(x)$ može se, u principu, odrediti integral u izrazu (6.14) pa, prema tome, i odgovarajuće temperatursko polje. Kada je temperatura i na četvrtoj stranici konstanta $\theta = \theta_c = const$, ovaj integral ce biti

$$\int_0^L \theta_c \sin(n\pi x / L) dx = -\theta_c \frac{L}{n\pi} \cos(n\pi x / L) \Big|_0^L = \theta_c \frac{L}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1],$$

dok se izraz (6.14) za temperatursko polje svodi na sledeći oblik

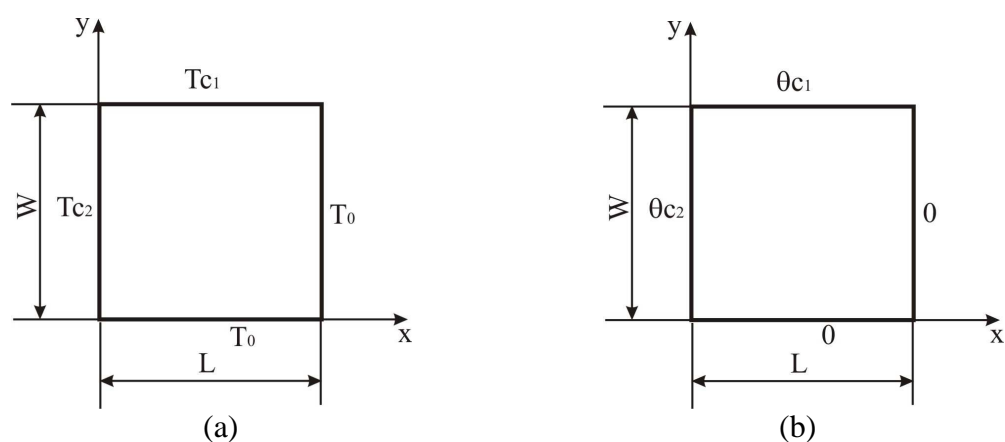
$$\theta = \theta_c \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \frac{\sinh(n\pi y / L)}{\sinh(n\pi W / L)} \sin(n\pi x / L). \quad 6.15$$

Ocigledno je da uglovi štapa predstavljaju singularne tačke kada je $T_c \neq T_0$ jer temperatura u kornerima ne može biti istovremeno i T_c i T_0 , već se naglo mijenja od T_c do T_0 .

Superpozicija rješenja

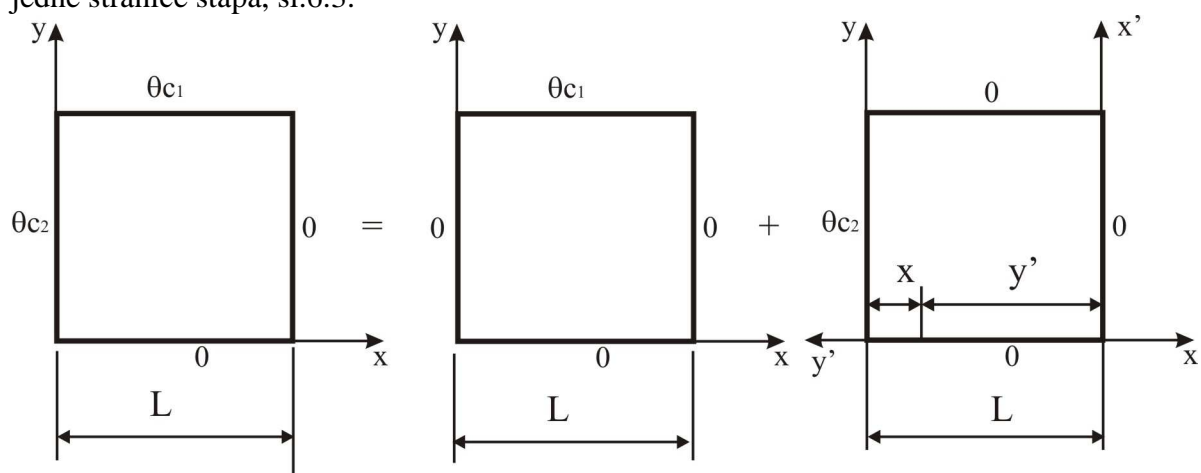
S obzirom da je Laplace-ova jednačina linearna, zbir dva ili više rješenja sa datim graničnim uslovima predstavlja takodje rješenje Laplace-ove jednačine sa zbirnim graničnim uslovima. To je poznati princip superpozicije rješenja koji se može koristiti za rješavanje problema sa složenim graničnim uslovima.

Predpostavimo da su temperature duž dvije stranice profila T_{c1} i T_{c2} konstantne irazličite od T_0 , sl.6.2(a).



Sl.6.2 Dug pravougaoni profil sa razlicitim temperaturama stranica

Uvodjenjem smjene $\theta = T - T_0$, granični uslovi će biti kao na sl.6.2(b). Problem se može predstaviti kao zbir dva partikularna problema sa temperaturama razlicitim od nule duž samo jedne stranice štapa, sl.6.3.



Sl.6.3 Superpozicija rjesenja dugog pravougaonog štapa

Rjesenje prvog problema je, s obzirom na (6.15),

$$\theta_1 = \theta_{c1} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \frac{\sinh(n\pi y / L)}{\sinh(n\pi W / L)} \sin(n\pi x / L). \quad 6.16$$

Drugo partikularno rjesenje se može naći na analogan način. Ono je takodje po svom obliku indentično predhodnom rjesenju u koordinantnom sistemu x', y' ;

$$\theta_2' = \theta_{c2} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \frac{\sinh(n\pi y' / W)}{\sinh(n\pi L / W)} \sin(n\pi x' / W). \quad 6.17$$

S obzirom da je $x' = y$ i $y' = L - x$, slijedi,

$$\theta_2 = \theta_{c2} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \frac{\sinh[n\pi(L-x) / W]}{\sinh(n\pi L / W)} \sin(n\pi y / W), \quad 6.18$$

odnosno

$$\theta = \theta_1 + \theta_2.$$

6.19

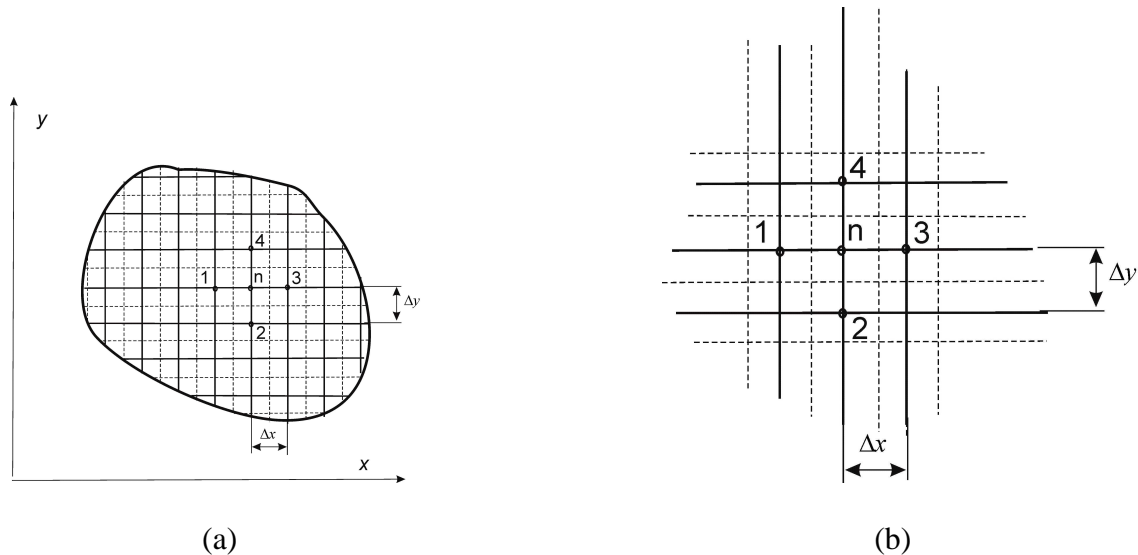
6.2

Numerička analiza - ravanski problem

Temperatursko polje u kome nema toplotnih izvora ili ponora sa konstantnim koeficijentom toplotne provodnosti je definisano Laplace-ovom jednačinom (6.2), koja se za ravanski problem ($\partial/\partial z = 0$) svodi na sledeći oblik

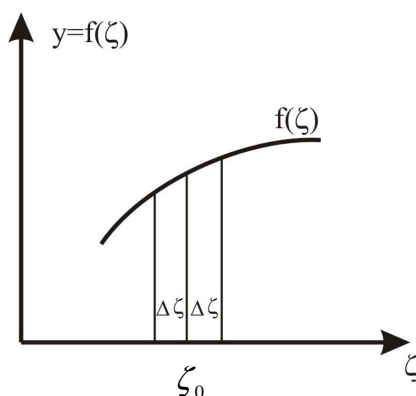
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad 6.20$$

Analizira se temperatursko polje na površini proizvoljnog oblika, sl.6.4, koja se može izdijeliti na beskonačan broj dovoljno malih pravougaonika tako da se promjena temperature duž linije koja spaja težišta dva susjedna pravougaonika može smatrati linearnom.



Sl.6.4 Dvodimenziono temperatursko polje. (a) Presjek proizvoljnog oblika. (b) n-ti čvor

Na osnovu numeričke analize (metoda konačnih razlika) može se prvi izvod neke funkcije $f(\xi)$, u tacki ξ_0 , sl.6.5, izraziti na jedan od sledeća tri načina:



Sl.6.5
Metoda konačnih razlika

$$f'(\xi_0) = \frac{f(\xi_0 + \Delta\xi) - f(\xi_0)}{\Delta\xi}, f'(\xi_0) = \frac{f(\xi_0) - f(\xi_0 - \Delta\xi)}{\Delta\xi},$$

$$f'(\xi_0) = \frac{f(\xi_0 + \Delta\xi) - f(\xi_0 - \Delta\xi)}{2\Delta\xi}, \quad 6.21$$

poznata kao diferenciranje unaprijed, diferenciranje unazad i centralno diferenciranje. Iako je centralno diferenciranje najtačnije, primjena diferenciranja unaprijed ili unazad je pogodnija u pojedinim slučajevima i pored manje tačnosti. Primjenom centralnog diferenciranja, u tacki $\xi_0 - \Delta\xi/2$ i tacki $\xi_0 + \Delta\xi/2$, dobijaju se prvi izvodi:

$$f'(\xi_0 - \Delta\xi/2) = \frac{f(\xi_0) - f(\xi_0 - \Delta\xi)}{\Delta\xi}, f'(\xi_0 + \Delta\xi/2) = \frac{f(\xi_0 + \Delta\xi) - f(\xi_0)}{\Delta\xi}. \quad 6.22$$

Analogno izrazu za dobijanje prvog izvoda centralnim diferenciranjem, drugi izvod u tacki ξ_0 se može izraziti u sledećem obliku

$$f''(\xi_0) = \frac{f'(\xi_0 + \Delta\xi/2) - f'(\xi_0 - \Delta\xi/2)}{\Delta\xi}. \quad 6.23$$

Smjenom prvih izvoda, definisanih izrazima (6.22), slijedi

$$f''(\xi_0) = \frac{f(\xi_0 + \Delta\xi) - 2f(\xi_0) + f(\xi_0 - \Delta\xi)}{\Delta\xi^2}. \quad 6.24$$

Ovi izrazi se mogu dobiti i sabiranjem ili oduzimanjem Taylor-ovih redova funkcije $f(\xi)$ u tačkama $\xi_0 + \Delta\xi$ i $\xi_0 - \Delta\xi$;

$$f(\xi_0 + \Delta\xi) = f(\xi_0) + f'(\xi_0)\Delta\xi + f''(\xi_0)\frac{\Delta\xi^2}{2!} + f'''(\xi_0)\frac{\Delta\xi^3}{3!},$$

$$f(\xi_0 - \Delta\xi) = f(\xi_0) - f'(\xi_0)\Delta\xi + f''(\xi_0)\frac{\Delta\xi^2}{2!} - f'''(\xi_0)\frac{\Delta\xi^3}{3!},$$

zanemarivanjem članova višeg reda.

Izvodi određeni navedenim izrazima su približno tačni. Tačnost je određena veličinom zanemarenih članova u navedenim redovima. Oni će biti potpuno tačni kada $\Delta\xi \rightarrow 0$ ili kada je funkcija $f(\xi)$ linearna.

Primjenom izraza (6.24) drugi izvodi u tački n , sl.6.4, će biti:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_3 - 2T_n + T_1}{\Delta x^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_4 - 2T_n + T_2}{\Delta y^2},$$

što poslije smjene u (6.20) daje

$$(T_4 - 2T_n + T_2)\Delta x^2 + (T_3 - 2T_n + T_1)\Delta y^2 = 0. \quad 6.25$$

Za $\Delta x = \Delta y$ dobija se,

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_n = 0. \quad 6.26$$

Slične relacije se mogu napisati za temperaturu težišta bilo kog elementarnog pravougaonika (kvadrata) prikazanog na sl.6.4. Na taj način se dobija sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih temperatura ako su poznate temperature na spoljnoj granici površine. Dobijeni sistem jednačina se može riješiti nekom od poznatih klasičnih metoda.

Izraz (6.26) se može dobiti i analizom toplotnog bilansa n -tog elementa. Ako npr. pretpostavimo da toplota ulazi u djelic materije u smjerovima $1-n$ i $2-n$ a izlazi u smjerovima $n-3$ i $n-4$ slijedi:

$$\Delta \dot{Q}_{1-n} + \Delta \dot{Q}_{2-n} = \Delta \dot{Q}_{n-3} + \Delta \dot{Q}_{n-4}.$$

Imajuci u vidu da je $\Delta \dot{Q}_{n-k} = -\Delta \dot{Q}_{k-n}$, toplotni bilans se može napisati u sledecem obliku

$$\dot{\Delta Q}_{1-n} + \dot{\Delta Q}_{2-n} + \dot{\Delta Q}_{3-n} + \dot{\Delta Q}_{4-n} = 0, \quad 6.27$$

koji ne zavisi od pretpostavke o pravcima dovoda ili odvoda toplote. Primjenom *Fourier*-ove jednačine (1.1) za konvektivni prenos toplote, na djelić jedinične debljine ΔL i širine Δx ili Δy , dobija se

$$-\lambda \Delta L \Delta y \frac{T_n - T_1}{\Delta x} - \lambda \Delta L \Delta x \frac{T_n - T_2}{\Delta y} - \lambda \Delta L \Delta y \frac{T_n - T_3}{\Delta x} - \lambda \Delta L \Delta x \frac{T_n - T_4}{\Delta y} = 0.$$

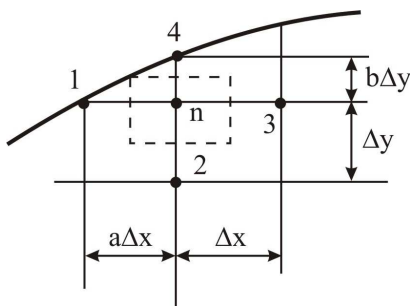
Ovaj izraz se, u slučaju kada je $\Delta x = \Delta y$, svodi na oblik

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_n = 0,$$

koji je identičan sa izrazom (6.26). Imajući to u vidu, slijedi da se sistem jednačina, koje opisuju temperaturno polje može dobiti polazeći od jednačine temperaturnog polja (6.20) ili od toplotnog bilansa svakog djelića materije.

Analiza graničnih uslova

Kada je spoljna granica određena linijom proizvoljnog oblika, sl.6.6, iz analize toplotnog bilansa djelića jedinične širine, $\Delta L = 1$, prikazanog na slici slijedi:



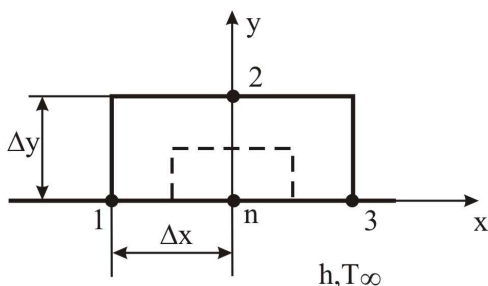
Sl.6.6
Granična linija proizvoljnog oblika

$$-\lambda \left(\frac{b\Delta y}{2} + \frac{\Delta y}{2} \right) \frac{T_n - T_1}{a\Delta x} - \lambda \left(\frac{a\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{T_n - T_2}{\Delta y} - \lambda \left(\frac{b\Delta y}{2} + \frac{\Delta y}{2} \right) \frac{T_n - T_3}{\Delta x} - \lambda \left(\frac{a\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{T_n - T_4}{b\Delta y} = 0,$$

odnosno, za $\Delta x = \Delta y$,

$$\frac{T_1}{a(a+1)} + \frac{T_2}{b+1} + \frac{T_3}{a+1} + \frac{T_4}{b(b+1)} - T_n \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0. \quad 6.28$$

Ako se na spoljnoj granici toplota predaje okolnom fluidu konvekcijom, temperatura spoljne površine najčešće nije poznata. Poznata je temperatura fluida dovoljno daleko od tijela T_∞ i koeficijent konvekcije h , sl.6.7. Analizom toplotnog bilansa za djelić jedinične širine prikazan na slici slijedi:



Sl.6.7
Ravna površina sa konvekcijom

$$-\lambda \frac{\Delta y}{2} \frac{T_n - T_1}{\Delta x} - \lambda \Delta x \frac{T_n - T_2}{\Delta y} - \lambda \frac{\Delta y}{2} \frac{T_n - T_3}{\Delta x} + h \Delta x (T_\infty - T_n) = 0.$$

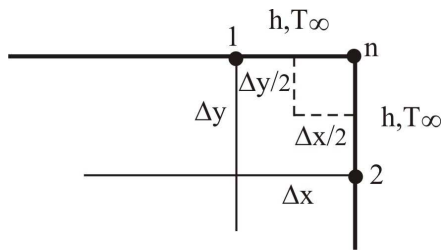
Za $\Delta x = \Delta y$ će biti

$$\frac{1}{2}(T_1 + 2T_2 + T_3) + \frac{h\Delta x}{\lambda}T_\infty - \left(\frac{h\Delta x}{\lambda} + 2\right)T_n = 0. \quad 6.29$$

Kada je spoljna površina potpuno izolovana, poslednji član u jednačini toplotnog bilansa (6.29) je jednak nuli ($h=0$), pa je u tom slučaju

$$\frac{1}{2}(T_1 + T_3) + T_2 - 2T_n = 0. \quad 6.30$$

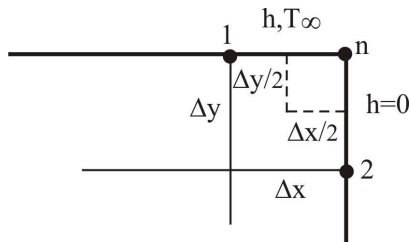
Analognim putem se mogu dobiti odgovarajući izrazi za slučajeve prikazane na sl.6.8, sl.6.9 i sl.6.10.



$$\frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{h\Delta s}{\lambda}T_\infty - \left(\frac{h\Delta s}{\lambda} + 1\right)T_n = 0, \quad 6.31$$

$(\Delta x = \Delta y = \Delta s).$

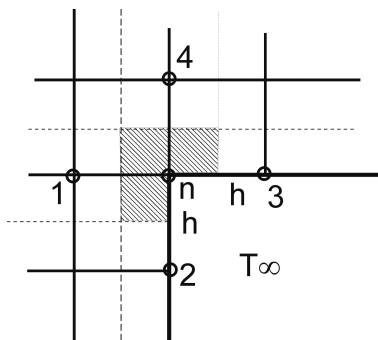
Sl.6.8 Spoljašnji ugao sa konvekcijom



$$T_1 + T_2 + \frac{h\Delta s}{\lambda}T_\infty - \left(\frac{h\Delta s}{\lambda} + 2\right)T_n = 0, \quad 6.32$$

$(\Delta x = \Delta y = \Delta s).$

Sl.6.9 Spoljašnji ugao sa konvekcijom i izolacijom



$$T_1 + T_4 + \frac{1}{2}(T_2 + T_3) + \frac{h\Delta s}{\lambda}T_\infty - \left(\frac{h\Delta s}{\lambda} + 3\right)T_n = 0. \quad 6.33$$

$(\Delta x = \Delta y = \Delta s).$

Sl.6.10 Unutrašnji ugao sa konvekcijom

GLAVA 7

NESTACIONARNA KONDUKCIJA



Jean-Baptiste Biott
1774-1862

Uvod

U nizu procesa provodjenja toplote nestacionarni granični uslovi uslovljavaju promjenu temperature ne samo po prostoru već i u vremenu. Promjena temperature može biti periodična i aperiodična. Periodične promjene se najčešće odvijaju po nekoj harmonijskoj funkciji (npr. kombinacija sinusa i kosinusa) ili po nekoj periodičnoj cikličnoj funkciji. Tipičan primjer periodične promjene temperature je zagrijavanje i hladjenje bloka motora sa unutrašnjim sagorijevanjem. Aperiodične promjene su po svom karakteru prelazne promjene, pri čemu temperatura u datoj tački tijela raste ili opada kontinualno, najčešće po nekoj nelinearnoj funkciji vremena. Može se desiti da je intezitet promjene temperature po prostoru zanemarljiv. Dato tijelo ima u tom slučaju neku srednju temperaturu koja zavisi samo od vremena, što značajno pojednostavljuje analizu problema. Nestacionarna kondukcija je karakteristična za niz procesa koji se sreću u metalnoj industriji (zagrijavanje i hladjenje metalnih ingota u cilju mehaničke i termičke obrade), keramičkoj industriji, industriji stakla i prirodi uopšte.

U cilju anlize temperaturskog polja najčešće se koristi diferencijalni oblik zakona o održanju energije za materiju u stanju mirovanja, odnosno jednačina toplotne difuzije (3.37),

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \pm \dot{e}_{g,v} = \rho \frac{\partial u}{\partial t},$$

koji se u slučaju kada je $\lambda = \text{const}$ i kada nema toplotnih izvora ili ponora ($\dot{e}_{g,v} = 0$), za čvrste materije i tečnosti ($c_p = c_v = c$), svodi na sledeći oblik (*Fourier*-ova jedn.)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 7.1$$

u kome je $a = \lambda / \rho c$, koeficijent toplotne difuzije.

Za dvodimenzione probleme će biti

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad 7.2$$

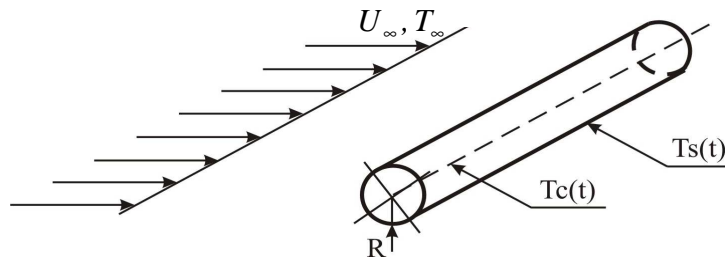
Jednačine (7.1) i (7.2) su parcijalne linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa četiri odnosno tri koordinate (x, y, z, t). U cilju odredjivanja konstanti dobijenih pri integraciji neophodno je poznavati onoliko graničnih uslova za svaku koordinatu koliki je i red diferenciranja po toj koordinati (po dva granična uslova u x -pravcu i y -pravcu i jedan granični uslov po vremenu). Uslovi duž x i y koordinate su poznati kao granični iako ne moraju biti specificirani samo za spoljne granice tijela već se mogu odnositi i na neku unutrašnju površinu. Oni se najčešće daju u vidu poznate temperature ili gradijenta temperature na graničnim površinama ili konvektivnog prelaza toplote sa tijela na okolni fluid. Granični uslovi u funkciji vremena predstavljaju poznatu temperaturu u nekom vremenskom trenutku, najčešće na početku procesa (početni uslovi).

Problemi se mogu rješavati analitički i numerički. Analitičke metode su pogodne za jednodimenzione probleme dok je mogućnost njihove primjene na višedimenzione probleme ograničena na relativno mali broj slučajeva, pri čemu je primjena dobijenih rezultata najčešće složena i nepraktična (redovi, specijalne funkcije, tabele i sl.). Više autora je detaljno obradilo analitički prilaz, npr. Arpaci [1], Myers [2].

7.1

Biott-ov broj

Na sl.7.1 je prikazan problem hladjenja cilindra početne temperature T_i , temperature spoljne površine T_s i temperature u osi cilindra T_c , u struji fluida čija je temperatura T_∞ , ($T_s > T_\infty$).



Sl.7.1
Cilindar u struji fluida

Strujanje fluida oko cilindra uslovljava konvektivni prelaz toplote sa spoljne površine cilindra na okolni fluid, čiji je intezitet definisan *Newton*-ovom jednačinom konvekcije (1.6),

$$\dot{q}_A = h(T_s - T_\infty). \quad 7.3$$

Razmijenjena količina toplote usled konvekcije mora biti jednaka toploti koja usled kondukcije prolazi kroz spoljnu površinu cilindra, koeficijenta toplotne provodnosti λ_c ,

$$h(T_s - T_\infty) = -\lambda_c \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad 7.4$$

Može se u cilju procjene reda veličine pojedinih članova uzeta da je $\partial T / \partial r \approx (T_s - T_c) / R$, na osnovu čega slijedi

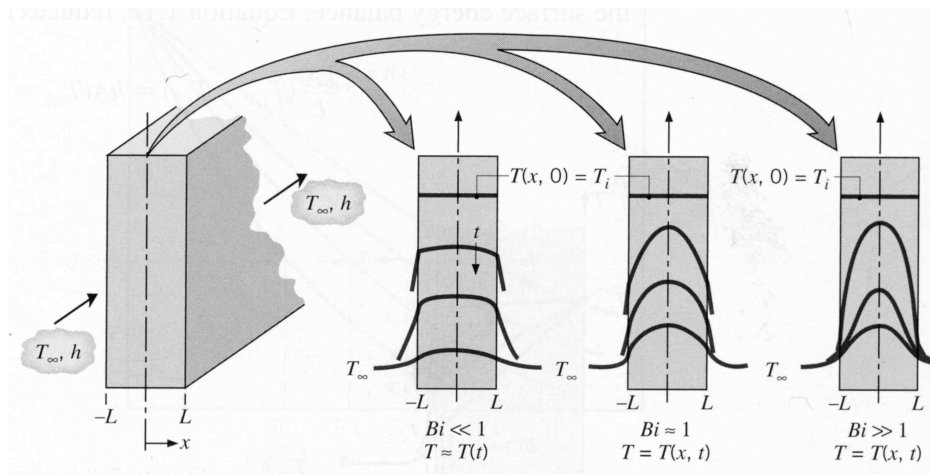
$$\frac{T_c - T_s}{T_s - T_\infty} = \frac{hR}{\lambda}. \quad 7.5$$

Količnik hR / λ je poznat kao Biott-ov broj. U opštem slučaju je

$$Bi = \frac{hL}{\lambda}, \quad \left(Bi = \frac{L/\lambda}{1/h} \right), \quad 7.6$$

pri čemu je L neka karakteristična dimenzija tijela. Ukoliko nije drugačije definisano, to može biti odnos zapremine tijela i njegove spoljne površine.

Bezdimenzioni Biott-ov broj predstavlja odnos unutrašnjih (L / λ) i spoljašnjih ($1 / h$) otpora prenosu toplote. On je indikator inteziteta promjene temperature unutar tijela ($T_c - T_s$). Ako je ovaj broj veoma mali, slijedi da je unutrašnji gradijent temperature zanemarljiv odnosno $T_c \approx T_s$. To će biti u slučaju kada su mali unutrašnji otpori provodjenju toplote, odnosno kada je λ veliko (materije visoke toplotne provodnosti, razni metali a naročito srebro, bakar i sl.) a L (R) malo (tijelo malih dimenzija) ili kada je koeficijent konvekcije takodje mali (veliki spoljašnji otpor). Može se desiti da je u tom slučaju temperatura tijela (cilindra) u svim tačkama približno ista i da je funkcija samo od vremena. U suprotnom, kada je λ malo (izolacioni materijali) a h veliko (intezivna turbulencija, kondenzacija i sl.), Biott-ov broj teži beskonačnosti. U tom slučaju će spoljašnji otpor prelazu toplote biti veoma mali $T_s \approx T_\infty$.



Sl.7.2 Temperatursko polje u ravnom zidu sa različitim Biott-ovim brojevima

Na sl.7.2 je prikazana raspodjela temperature u ravnom zidu sa različitim Biott-ovim brojevima. Prikazana su tri slučaja sa Biott-ovim brojem mnogo manjim od jedinice, jednakim jedinici i sa brojem mnogo većim od jedinice. Početna (inicijalna) temperatura T_i je ista u sva tri slučaja, konstantna po poprečnom presjeku zida.

Za male Biott-ove brojeve gradijent temperature unutar zida je zanemarljiv u svakom trenutku vremena, dok je za srednje i velike Biott-ove brojeve promjena temperature po poprečnom presjeku značajna.

7.2

Sistem sa malim unutrašnjim otporom – Fourier-ov broj

Ovaj problem se pojavljuje u praksi najčešće pri hladjenju zagrijanih metalnih predmeta poslije obrade u zagrijanom stanju. Imajući u vidu da je temperatura unutar tijela približno konstantna, za analizu problema je pogodniji integralni oblik energijske jednačine za tijelo u stanju mirovanja, koji slijedi iz jednačine toplotne difuzije (3.37),

$$\int_V \text{div}(\lambda \text{grad} T) dV \pm \int_V \dot{e}_{g,v} dV = \int_V \rho c \frac{\partial u}{\partial t} dV. \quad 7.7$$

Kada je $\lambda = \text{const}$, $\dot{e}_{g,v} = 0$ (nema energetskih izvora ili ponora) i $c_p \approx c_v = c$ (čvrste materije), transformacijom zapreminskog u površinski integral dobija se,

$$\int_A \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_A dA = \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV. \quad 7.8$$

Iz uslova jednakosti toplote koja usled kondukcije prodje kroz spoljnu površinu tijela i toplote koja usled konvekcije prelazi na okolni fluid slijedi,

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_A = h(T_s - T_\infty), \text{ odnosno } -h(T_s - T_\infty)A = \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV.$$

S obzirom da je temperatura unutar tijela približno konstantna, $T_s \approx T = T(t)$, dobija se sledeća diferencijalna jednačina

$$\frac{dT}{T - T_\infty} = -\frac{hA}{\rho c V} dt, \quad 7.9$$

čije je rješenje, za početni uslov $t = 0, T = T_i$,

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-\frac{h}{\rho c L} t}, \quad 7.10$$

u kome je karakteristična dužina $L = V / A$. Uvodjenjem bezdimenzionane vremenske konstante, poznate kao Fourier-ov broj,

$$F_o = \frac{at}{L^2}, \quad 7.11$$

dobija se konačan izraz za promjenu temperature unutar tijela u funkciji vremena, u sledećem obliku

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-B_i F_o}. \quad 7.12$$

Toplotni fluks sa tijela na okolni fluid će biti

$$\dot{q}_A = h(T_s - T_{\infty}) = h(T_i - T_{\infty}) e^{-\frac{h}{\rho c L} t},$$

a toplota razmijenjena u jedinici vremena,

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{d\tau} = \int_A \dot{q}_A dA = hA(T_i - T_{\infty}) e^{-\frac{h}{\rho c L} t}.$$

Ukupna razmijenjena količina toplote koja za vremenski interval τ predje na okolni fluid je

$$Q = \int_0^{\tau} \dot{Q} d\tau = \rho c V (T_i - T_{\infty}) \left(1 - e^{-\frac{h}{\rho c L} \tau} \right). \quad 7.13$$

Ako se iz izraza (7.10) odredi temperatura T_k , koju tijelo ima poslije vremenskog intervala τ ,

$$T_k - T_{\infty} = (T_i - T_{\infty}) e^{-\frac{h}{\rho c L} \tau},$$

onda se razmijenjena količina toplote može izraziti u obliku

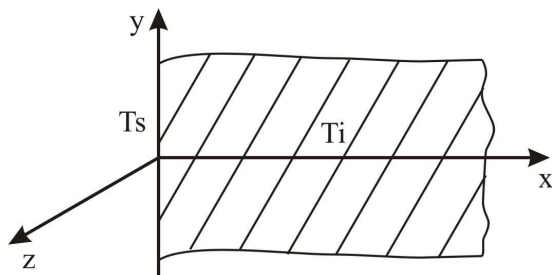
$$Q = \rho c V (T_i - T_k),$$

koji je ekvivalentan razlici unutrašnjih energija tijela u inicijalnom i trenutku τ .

7.3

Polubeskonačno tijelo

Analizira se polubeskonačno tijelo prikazano na sl.7.3, $0 < x < \infty$, čije su dimenzije u y i z pravcima beskonačno velike, tako da se promjena temperature u ovim pravcima može zanemariti.



Sl.7.3
Polubeskonačno tijelo

Tijelo je na inicijalnoj temperaturi T_i uključujući i površinu $x=0$. Temperatura na površini se naglo promijeni na T_s i drži konstantnom. Treba odrediti promjenu temperature duž tijela u toku vremena. Ovaj slučaj se pojavljuje u praksi pri relativno brzom smrzavanju zemljine

površine ili površine nekog proizvoljnog tijela relativno velikih dimenzija. Odgovara takodje i izolovanom štapu relativno velike dužine čiji je jedan krak uronjen u toplotni izvor, kao i slučaju idealnog kontakta dva tijela različitih inicijalnih temperatura i kontaktu tijela sa niskim koeficijentom kondukcije i fluida sa velikim koeficijentom konvekcije. Temperatursko polje je određeno jednačinom

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 7.14$$

koja slijedi iz energijske jednačine (7.1) za slučaj kada je $\partial T / \partial z = \partial t / \partial y = 0$, sa graničnim uslovima;

$$T(x, 0) = T_i$$

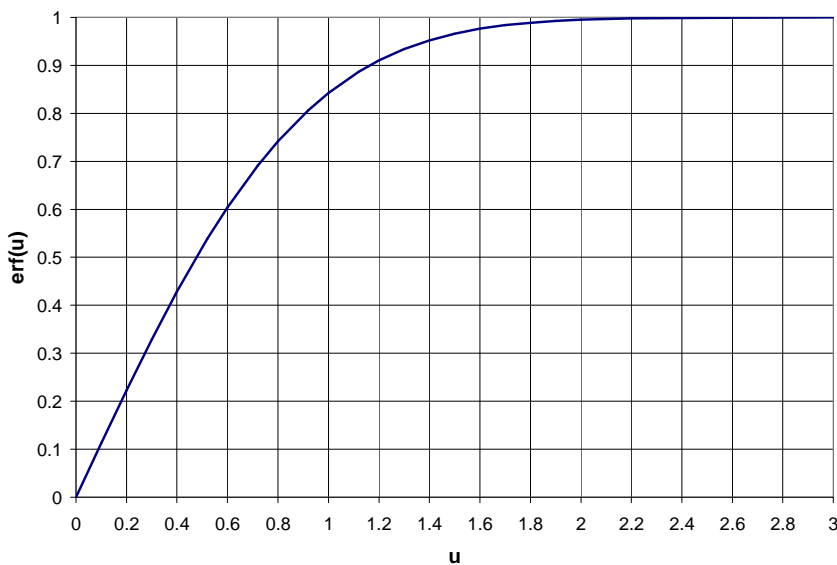
$$T(0, t) = T_s, \text{ za } t > 0,$$

$$T(\infty, t) = T_i, \text{ za } t \geq 0.$$

Rješenje ove jednačine je dato u vidu Gauss-ove funkcije greške, (dodatak A5), Schneider [3];

$$\frac{T(x, t) - T_s}{T_i - T_s} = \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right), \quad \text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\eta^2} d\eta, \quad 7.15$$

koja je prikazana na sl.7.4 i data tabelarno u dodatku A5.



Sl.7.4
Gauss-ova funkcija greške

Imajući to u vidu slijedi

$$T(x, t) = T_s + (T_i - T_s) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4at}} e^{-\eta^2} d\eta. \quad 7.16$$

Toplotni flux kroz površinu $x=0$ je

$$\dot{Q} = -\lambda A \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Primjenom Leibnitz-ovog pravila diferenciranja,

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} F(\zeta, x) d\zeta = \frac{d[b(x)]}{dx} F[b(x), x] + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} [F(\zeta, x)] - \frac{d[a(x)]}{dx} F[a(x), x], \quad 7.17$$

dobija se gradijent temperature u proizvoljnom presjeku

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_i - T_s}{\sqrt{\pi at}} e^{-x^2/4at} \quad 7.18$$

Toplotni fluks u presjeku $x=0$ će biti

$$\dot{Q} = \lambda A \frac{T_s - T_i}{\sqrt{\pi at}} \quad 7.19$$

Analitičko rješenje (7.16) se može primijeniti i na tijelo konačne dužine x_0 za neki vremenski period $t < t_0$, za koji će temperatura u presjeku $x = x_0$ biti nepromijenjena. Sa sl.7.4 se vidi da se tijelo konačne dužine L može tretirati kao tijelo beskonačne dužine ako je ispunjen uslov

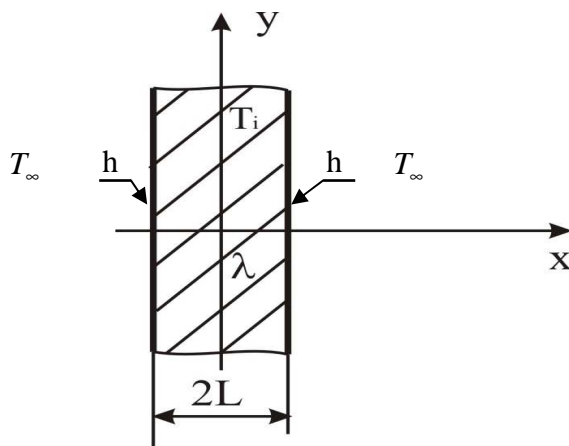
$$\frac{L}{\sqrt{4at}} \geq 1.8 \quad 7.20$$

Rješenja problema polubeskonačnog tijela sa konstantnim toplotnim fluksom na spoljnoj površini, konstantim koeficijentom konvekcije kao i slučaja idealnog kontakta dva tijela različitih inicijalnih temperatura je dato u dodatku A5.

7.4

Jednodimenzioni sistem sa konvekcijom na spoljnim površinama

Na sl.7.5 je prikazana ploča (zid) beskonačne širine i dužine, debljine $2L$, početne temperature T_i , uronjena u fluid čija je temperatura T_∞ . Koeficijent toplotne provodnosti ploče je λ a koeficijent prelaza toplote na okolni fluid h . Ukoliko se temperatura ploče mijenja u širokom opsegu, u toku datog vremenskog intervala, može se u prvoj iteraciji uzeti srednja vrijednost koeficijenta toplotne provodnosti, $\lambda_s = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, a zatim ponoviti proračun za svaki uži interval posebno.



Sl.7.5

Jednodimenzioni sistem sa uniformnom početnom temperaturom izložen konvekcij

Jednačina temperaturnog polja, kao i u predhodnom slučaju, slijedi iz energijske jednačine (7.1) za jednodimenzioni problem u obliku

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 7.21$$

sa graničnim i početnim uslovima:

$$x = \pm L, \quad \dot{q}_s = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \pm h(T_s - T_\infty); \quad t = 0, \quad T(x, 0) = T_i,$$

dok će iz uslova simetrije temperaturnog polja biti $\partial T / \partial x = 0$, za $x=0$.

Uvodjenjem smjene $\theta = T - T_\infty$, jednačina temperaturnog polja (7.21) dobija sledeći oblik,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad 7.22$$

sa odgovarajućim graničnim uslovima:

$$x = \pm L; \quad \dot{q}_s = -\lambda \partial \theta / \partial x = \pm h \theta, \quad 7.23$$

$$x = 0; \quad \partial \theta / \partial x = 0,$$

$$t = 0; \quad \theta = \theta_i.$$

Primjenjujući postupak razdvajanja promenljivih, partikularna rješenja jednačine (7.22) se mogu definisati u vidu proizvoda dvije funkcije od kojih svaka zavisi samo od jedne promenljive,

$$\theta_n = X_n(x) \mathfrak{S}_n(t), \quad 7.24$$

dok će opšte rješenje biti

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n. \quad 7.25$$

Diferenciranjem izraza (7.24) i smjenom u (7.22) slijedi,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{1}{\mathfrak{S}} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}.$$

S obzirom da lijeva strana dobijenog izraza zavisi samo od koordinate x a desna od vremena t , obje moraju biti jednake istoj konstanti, npr. $-k_n^2$. Integracijom tako dobijenih jednačina slijede funkcije $X(x)$ i $\mathfrak{S}(t)$, čiji je proizvod

$$\theta_n = e^{-k_n^2 t} [B_n \sin(k_n x) + C_n \cos(k_n x)]. \quad 7.26$$

Na osnovu dobijenog izraza je očigledno da konstanta, $-k_n^2$, mora biti negativna, jer je samo u tom slučaju moguće zadovoljiti uslov da se poslije dovoljno dugog vremena temperatura tijela izjednači sa temperaturom okolnog fluida; $t \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0$. Smjenom partikularnih rješenja (7.26) u opšte rješenje (7.25) slijedi

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n^2 t} [B_n \sin(k_n x) + C_n \cos(k_n x)]. \quad 7.27$$

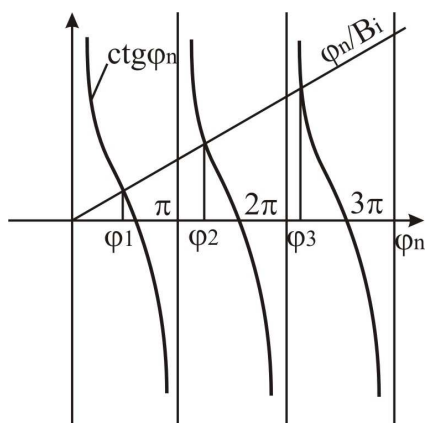
Da bi drugi granični uslov (7.23) bio ispunjen, mora biti $B_n = 0$, dok iz prvog slijedi

$$ctg(k_n L) = \frac{k_n}{h/\lambda}, \quad 7.28$$

odnosno,

$$ctg(\varphi_n) = \varphi_n / B_i, \quad \varphi_n = k_n L. \quad 7.29$$

Rješenje dobijene jednačine određuje konstante $k_n, n \in (1 \div \infty)$. Može se naći numerički ili grafički, kao što je prikazano na sl.7.6, i daje se u vidu tabela, tab.7.1.



Sl.7.6
Grafičko rješenje jednačine (7.29)

$$Bi = \frac{hL}{\lambda}$$

$Bi = \frac{hL}{\lambda}$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0	0	3.1416	6.2832	9.4248
0.001	0.0316	3.1419	6.2833	9.4249
0.002	0.0447	3.1422	6.2835	9.4250
0.004	0.0632	3.1429	6.2838	9.4252
0.006	0.0774	3.1435	6.2841	9.4254
0.008	0.0893	3.1441	6.2845	9.4256
0.01	0.0998	3.1448	6.2848	9.4258
0.02	0.1410	3.1479	6.2864	9.4269
0.04	0.1987	3.1543	6.2895	9.4290
0.06	0.2425	3.1606	6.2927	9.4311
0.08	0.2791	3.1668	6.2959	9.4333
0.1	0.3111	3.1731	6.2991	9.4354
0.2	0.4328	3.2039	6.3148	9.4459
0.3	0.5218	3.2341	6.3305	9.4565
0.4	0.5932	3.2636	6.3461	9.4670
0.5	0.6533	3.2923	6.3616	9.4775
0.6	0.7051	3.3204	6.3770	9.4879
0.7	0.7506	3.3477	6.3923	9.4983
0.8	0.7910	3.3744	6.4074	9.5087
0.9	0.8274	3.4003	6.4224	9.5190
1.0	0.8603	3.4256	6.4373	9.5293
1.5	0.9882	3.5422	6.5097	9.5801
2.0	1.0769	3.6436	6.5783	9.6296
3.0	1.1925	3.8088	6.7040	9.7240
4.0	1.2646	3.9352	6.8140	9.8119
5.0	1.3138	4.0336	6.9096	9.8928
6.0	1.3496	4.1116	6.9924	9.9667
7.0	1.3766	4.1746	7.0640	10.0339
8.0	1.3978	4.2264	7.1263	10.0949
9.0	1.4149	4.2694	7.1806	10.1502
10.0	1.4289	4.3058	7.2281	10.2003
15.0	1.4729	4.4255	7.3959	10.3898
20.0	1.4961	4.4915	7.4954	10.5117
30.0	1.5202	4.5615	7.6057	10.6543
40.0	1.5325	4.5979	7.6647	10.7334
50.0	1.5400	4.6202	7.7012	10.7832
60.0	1.5451	4.6353	7.7259	10.8172
80.0	1.5514	4.6543	7.7573	10.8606
100.0	1.5552	4.6658	7.7764	10.8871
∞	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956

Tab.7.1 Prva četiri korijena jednačine (7.28) za različite Biott-ove brojeve

Iz trećeg, početnog uslova, slijedi

$$\theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(k_n x). \quad 7.30$$

Primjenjujući metodu ortogonalnih funkcija, množenjem izraza (7.30) sa $\cos(k_m x) dx$ i integraljenjem u granicama $-L$ do L ;

$$\int_{-L}^L \theta_i \cos(k_m x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_n \int_{-L}^L \cos(k_n x) \cos(k_m x) dx,$$

s obzirom da je za $n \neq m$,

$$\int_{-L}^L \cos(k_n x) \cos(k_m x) dx = 0, \text{ slijedi}$$

$$C_n = \int_{-L}^L \theta_i \cos(k_n x) dx / \int_{-L}^L \cos^2(k_n x) dx, \text{ odnosno}$$

$$C_n = \frac{2\theta_i \sin(k_n L)}{k_n L + \sin(k_n L) \cos(k_n L)}. \quad 7.31$$

Smjenom dobijenih konstanti u opšte rješenje (7.27) dobija se raspodjela temperature

$$\frac{\theta}{\theta_i} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n^2 at} \frac{\sin(k_n L)}{k_n L + \sin(k_n L) \cos(k_n L)} \cos(k_n x). \quad 7.32$$

Imajući u vidu relacije $\varphi_n = k_n L$ i $F_o = at / L^2$, slijedi

$$\frac{\theta}{\theta_i} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varphi_n^2 F_o} \frac{\sin(\varphi_n)}{\varphi_n + \sin(\varphi_n) \cos(\varphi_n)} \cos\left(\varphi_n \frac{x}{L}\right). \quad 7.33$$

Temperatursko polje θ_m u sredini zida ($x=0$) i θ_A na spoljnoj površini ($x=L$) će biti:

$$\frac{\theta_m}{\theta_i} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varphi_n^2 F_o} \frac{\sin(\varphi_n)}{\varphi_n + \sin(\varphi_n) \cos(\varphi_n)}, \quad 7.34$$

$$\frac{\theta_A}{\theta_i} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varphi_n^2 F_o} \frac{\sin(\varphi_n) \cos(\varphi_n)}{\varphi_n + \sin(\varphi_n) \cos(\varphi_n)}. \quad 7.35$$

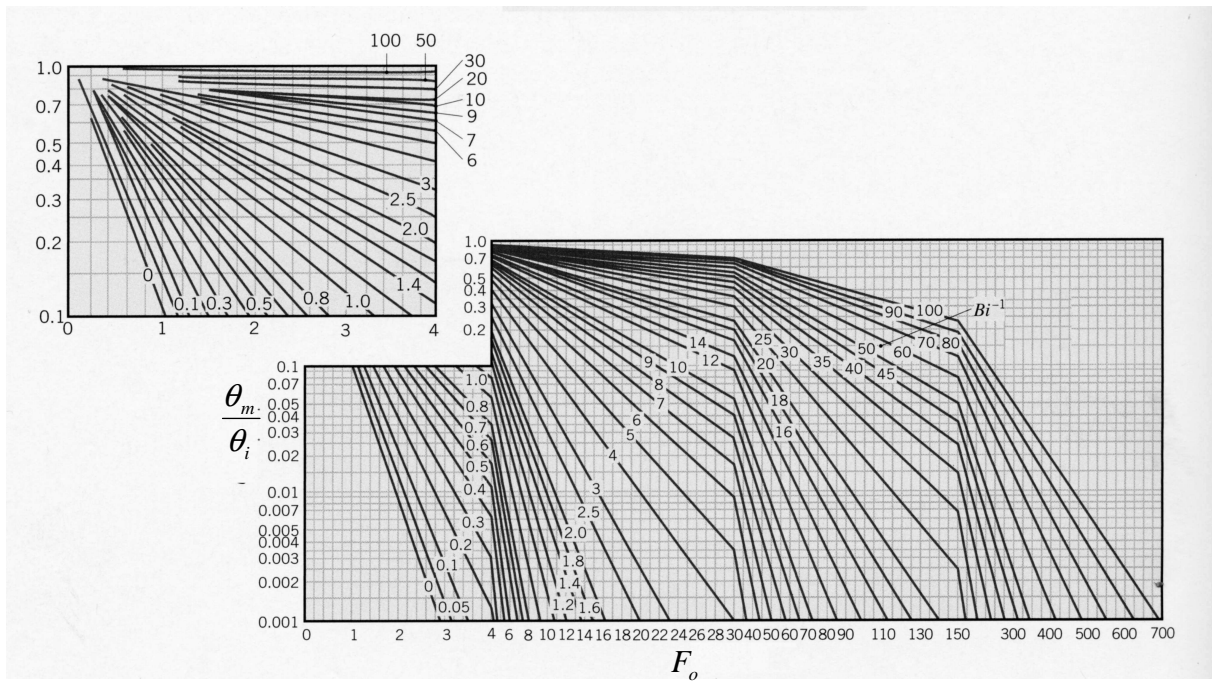
S obzirom da je $\varphi_n \geq \pi$ za $n \geq 2$, tab.7.1, može se pokazati da su članovi redova u izrazima (7.33-7.35) zanemarljivi za $n \geq 2$ i $F_o > 0.2$. Imajući to u vidu, slijede približni izrazi za raspodjelu temperature:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = 2e^{-\varphi_1^2 F_o} \frac{\sin(\varphi_1)}{\varphi_1 + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_1)} \cos\left(\varphi_1 \frac{x}{L}\right), \quad 7.36$$

$$\frac{\theta_m}{\theta_i} = 2e^{-\varphi_1^2 F_o} \frac{\sin(\varphi_1)}{\varphi_1 + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_1)}, \quad 7.37$$

$$\frac{\theta_A}{\theta_i} = 2e^{-\varphi_1^2} \frac{\sin(\varphi_1) \cos(\varphi_1)}{\varphi_1 + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_1)}. \quad 7.38$$

Dobijeni rezultati se mogu predstaviti grafičkim putem u vidu Heisler-ovih dijagrama. Na sl.7.7 je prikazan Heisler-ov dijagram za raspodjelu temperature u sredini zida.

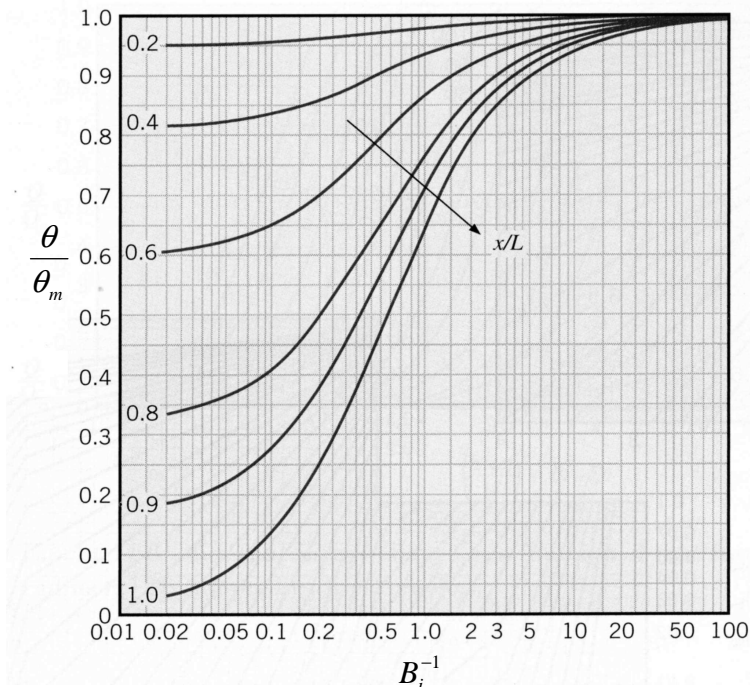


Sl.7.7 Raspodjela temperature u osi ravnog zida

Dijeljenjem izraza (7.36) sa izrazom (7.37), slijedi odnos temperature u bilo kom presjeku tijela i temperature u presjeku $x=0$,

$$\frac{\theta}{\theta_m} = \cos\left(\varphi_1 \frac{x}{L}\right), \quad 7.39$$

koji, očigledno, ne zavisi od vremena. Ovaj odnos je prikazan grafički na sl.7.8 u funkciji Biott-ovog broja (pomoćni dijagram Heisler-a).



Sl.7.8
Raspodjela temperature u ravnom zidu

Pomoću ovog dijagrama i diajgrama na sl.7.7 može se odrediti temperatura u svakoj tački ravnog zida. Iz pomoćnog Heisler-ovog dijagrama slijedi da ukoliko je $B_i < 0.1$ ($1/B_i > 10$), temperaturno polje praktično ne zavisi od koordinate x . Zid se ponaša kao sistem sa malim

unutrašnjim otporom. Temperatura u svakoj tački zida, u datom trenutku vremena je približno ista i može se odrediti iz jednačine (7.10).

Kada je koeficijent h izrazito veliki ($h \rightarrow \infty, B_i \rightarrow \infty$), temperatura zida je jednaka temperaturi okoline. Problem se svodi na slučaj kada je definisana temperatura na spoljnoj površini zida (naglo hladjenje spoljne površine zida), koji se rješava na analogan način i dobija rješenje u vidu beskonačnog reda. Može se takodje koristiti i dobijeno rješenje (7.33) za $B_i \rightarrow \infty$, za koje je $\varphi_1=1.5708, \varphi_2=4.7124, \varphi_3=7.8540, \varphi_4=10.9956$ itd.

Dobijeni rezultati se mogu koristiti i za određivanje temperaturskog polja zida koji je izolovan sa jedne strane dok se sa druge strane hladi konvektivnim putem. S obzirom da su početni i granični uslovi u presjeku $x=0$ i $x=L$ isti kao i u predhodnom slučaju, dobijaju se indentični izrazi za raspodjele temperature.

Temperatursko polje cilindra, kugle i nekih drugih tijela jednostavnijeg oblika se dobija na sličan način u vidu odgovarajućih redova i Heisler-ovih dijagrama.

Razmijenjena količina toplote sa okolnim fluidom u nekom trenutku vremena t se može odrediti na osnovu prvog principa termodinamike. Za tijelo u stanju mirovanja razlika dovedene i odvedene energije je jednaka promjeni unutrašnje energije tijela

$$E_{dov} - E_{odv} = \Delta U = \int_V \rho c (T - T_i) dV . \quad 7.40$$

Dovedena energija je u ovom slučaju jednaka nuli, dok je odvedena energija jednaka razmijenjenoj količini toplote Q , na osnovu čega slijedi

$$Q = - \int_V \rho c (T - T_i) dV . \quad 7.41$$

Maksimalna razmijenjena količina toplote će se ostvariti kada se temperatura tijela izjednači sa temperaturom okolnog fluida;

$$Q_{\max} = - \int_V \rho c (T_{\infty} - T_i) dV , \quad 7.42$$

Na osnovu izraza (7.41), (7.42) slijedi

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \int_V \left(1 - \frac{\theta}{\theta_i} \right) \frac{dV}{V} . \quad 7.43$$

Poslije uvođenja izraza (7.33) za raspodjelu temperature θ/θ_i , i odgovarajućeg integraljenja, dobija se konačan izraz za razmijenjenu količinu toplote

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varphi_n^2 F_o} \frac{\sin^2(\varphi_n)}{\varphi_n^2 + \varphi_n \sin(\varphi_n) \cos(\varphi_n)} . \quad 7.44$$

Do istog rezultata se može doći određivanjem toplotnog fluksa kroz spoljne površine zida, polazeći od sledećeg izraza

$$Q = - \int_0^{\tau_0} 2\lambda A \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} dt . \quad 7.45$$

Kada je $F_o > 0.2$ može se, na analogan način kao i u slučaju određivanja temperaturskog polja (7.36-7.38), sa dovoljnom tačnošću uzeti samo prvi član sume u izrazu (7.44).

7.5

Numerička analiza - eksplicitni i implicitni metod

Za razliku od problema prostiranja toplote koji se odvijaju u geometrijskom prostoru jednostavnog oblika, najveći broj praktičnih problema se ne može riješiti analitičkim putem

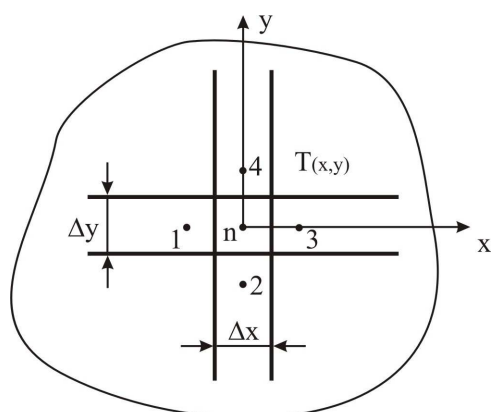
zbog složenosti geometrijskog prostora ili složenih graničnih uslova. Ovakvi problemi se rješavaju numeričkim metodama. Jedan od mogućih prilaza, baziran na metodi konačnih razlika je prikazan za dvodimenzioni problem prostiranja toplote, za koji je temperatursko polje definisano jednačinom (7.2).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad 7.2$$

Na osnovu dobijenog rezultata, analognim putem su izvedena rješenja za jednodimenzione i trodimenzione probleme.

EksPLICITNI METOD

Primjenom izraza (6.21) i (6.23) za numeričko određivanje prvog i drugog izvoda mogu se odrediti izvodi temperature u nekoj proizvoljnoj tački n dvodimenzionog temperaturskog polja prikazanog na sl.7.9. Na osnovu izraza (6.23) slijedi da će drugi izvodi temperature u tački n, po koordinatama x i y, u trenutku t biti:



Sl.7.9
Dvodimenziono temperatursko polje

$$\frac{\partial^2 T_n^t}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (T_3^t - 2T_n^t + T_1^t), \quad 7.46$$

$$\frac{\partial^2 T_n^t}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2} (T_4^t - 2T_n^t + T_2^t). \quad 7.47$$

Primjenom diferenciranja unaprijed, definisanog izrazom (7.21), dobija se prvi izvod po vremenu,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (T_n^{t+\Delta t} - T_n^t). \quad 7.48$$

Smjenom u osnovnu jednačinu (8.2) slijedi,

$$\frac{1}{\Delta x^2} (T_3^t - 2T_n^t + T_1^t) + \frac{1}{\Delta y^2} (T_4^t - 2T_n^t + T_2^t) = \frac{1}{a\Delta t} (T_n^{t+\Delta t} - T_n^t). \quad 7.49$$

Kada je $\Delta x = \Delta y = \Delta s$, uvodjenjem Fourier-ovog broja, $F_o = a\Delta t / \Delta s^2$, dobija se temperatura u tački n u trenutku $t + \Delta t$,

$$T_n^{t+\Delta t} = F_o (T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t) + (1 - 4F_o) T_n^t. \quad 7.50$$

Za jednodimenzioni problem će, očigledno, biti

$$T_n^{t+\Delta t} = F_o (T_1^t + T_2^t) + (1 - 2F_o) T_n^t, \quad 7.51$$

dok za trodimenzioni, analogno predhodnom, slijedi

$$T_n^{t+\Delta t} = F_o (T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t + T_5^t + T_6^t) + (1 - 6F_o) T_n^t. \quad 7.52$$

Primjenom dobijenih izraza može se sračunati temperatura u nekoj tački datog tijela u svakom narednom trenutku vremena $t + \Delta t$ ako je poznata u trenutku vremena t u toj i svim okolnim tačkama na rastojanju Δs . Da bi dobijeno rješenje bilo stabilno, tj. da ne bi došlo do naglih skokova i padova temperature u svakom narednom trenutku vremena Δt , mora biti koeficijent uz T_n^t veći od nule, odnosno:

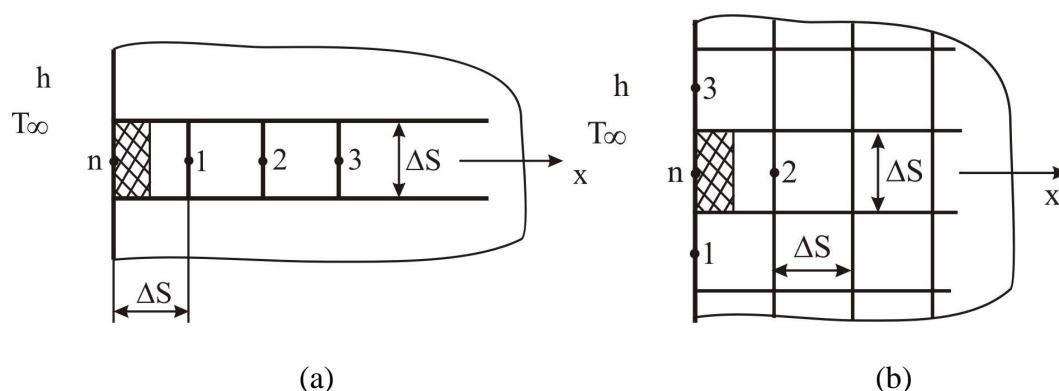
$$\begin{aligned} F_o < 1/2, & \text{ za jednodimenzioni problem,} \\ F_o < 1/4, & \text{ za dvodimenzioni problem,} \\ F_o < 1/6, & \text{ za trodimenzioni problem.} \end{aligned} \tag{7.53}$$

Negativni koeficijent uz T_n^t bi, počev od nekog trenutka t_0 , uslovio pad temperature u narednom trenutku $t_0 + \Delta t$ (najčešće bi se temperatura znatno smanjila ili postala negativna ako je F_o suviše velik). To bi imalo za posledicu skok temperature u trenutku $t_0 + 2\Delta t$, s obzirom da bi poslednji članovi u izrazima (7.50) do (7.52) imali malu negativnu vrijednost ili bili pozitivni itd. Izborom prostornog koraka Δs vodi se računa o maksimalnoj dozvoljenoj grešci pri numeričkom diferenciranju, dok je maksimalna vrijednost vremenskog koraka Δt , pored željene tačnosti, određena i uslovima (7.53).

Kada je temperatura poznata u nekom početnom vremenskom trenutku u svim tačkama unutar tijela i zadata na njegovim granicama, onda se dobijeni izrazi mogu primijeniti za bilo koju tačku unutar tijela u svakom vremenskom trenutku $t_0 + k\Delta t$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Kada se temperatura na graničnim površinama naglo promijeni sa T_i na T_s , a zatim održava konstantnom, može se uzeti da je u trenutku t_0 temperatura na površini $T_0 = (T_i + T_s)/2$.

Kada je spoljna površina tijela izložena konvekciji, sa koeficijentom konvekcije h i temperaturom spoljnog fluida T_∞ , kao u slučaju jednodimenzionog problema prikazanog na sl.7.10(a), na osnovu bilansa energije za elementarni djelić materije slijedi da je razlika dovedene i odvedene energije jednaka promjeni unutrašnje energije djelića ΔU :

$$\Delta E_{dov} - \Delta E_{odv} = \Delta(\Delta U). \tag{7.54}$$



Sl.7.10 Konvektivni granični uslovi. (a) Jednodimenzioni sistem. (b) Dvodimenzioni sistem

Energija se u vidu toplote dovodi ili odvodi usled konvekcije i kondukcije kroz površine djelića. Da li će se energija dovesti ili odvesti zavisi od razlike temperatura djelića i okoline. Ako se prepostavi da je temperatura djelića manja od temperature okoline onda će dovedena energija (toplota) usled konvekcije i kondukcije biti,

$$\Delta E_{dov} = \Delta Q_{konv} + \Delta Q_{kond} = h\Delta s\Delta L(T_\infty - T_n^t)\Delta t + \lambda\Delta s\Delta L \frac{T_i^t - T_n^t}{\Delta s}\Delta t,$$

dok je odvedena energija jednaka nuli. Promjena unutrašnje energije je

$$\Delta(\Delta U) = \rho c \Delta V \Delta T = \rho c \frac{\Delta s^2}{2} \Delta L (T_n^{t+\Delta t} - T_n^t).$$

Smjenom u bilans (7.54) slijedi

$$h\Delta s \Delta L (T_\infty - T_n^t) \Delta t + \lambda \Delta s \Delta L \frac{T_1^t - T_n^t}{\Delta s} \Delta \tau = \rho c \frac{\Delta s^2}{2} \Delta L (T_n^{t+\Delta t} - T_n^t),$$

odnosno, uvodjenjem Fourier-ovog, $F_o = a\Delta t / \Delta S^2$, i Biott-ovog, $B_i = h\Delta s / \lambda$,

$$T_n^{t+\Delta t} = 2F_o (T_1^t + B_i T_\infty) + (1 - 2F_o - 2B_i F_o) T_n^t. \quad 7.55$$

Dobijeni rezultat ne zavisi od pretpostavke da li se energija dovodi ili odvodi kroz površine djelića.

Za dvodimenzioni sistem prikazan na sl.7.10(b) će, na analogan način, biti

$$h\Delta s \Delta L (T_\infty - T_n^t) \Delta t + \lambda \frac{\Delta s}{2} \Delta L \frac{T_1^t - T_n^t}{\Delta s} \Delta t + \lambda \Delta s \Delta L \frac{T_2^t - T_n^t}{\Delta s} \Delta t + \lambda \frac{\Delta s}{2} \Delta L \frac{T_3^t - T_n^t}{\Delta s} \Delta t = \rho c \frac{\Delta s^2}{2} \Delta L (T_n^{t+\Delta t} - T_n^t),$$

odnosno

$$T_n^{t+\Delta t} = F_o (T_1^t + 2T_2^t + T_3^t + 2B_i T_\infty) + (1 - 4F_o - 2F_o B_i) T_n^t. \quad 7.56$$

Uslovi stabilnosti se svode na sledeći oblik:

$$F_o (1 + B_i) \leq 1/2, \text{ za jednodimenzioni problem,}$$

$$F_o (2 + B_i) \leq 1/2, \text{ za dvodimenzioni problem.}$$

Izloženi metod je poznat kao eksplicitni metod, jer se upotrebom dobijenih obrazaca mogu direktno sračunati temperature u svakoj tački nezavisno za svaki vremenski korak, ako je poznata početna temperatura tijela.

Implicitni metod

Ako se umjesto diferenciranja unaprijed po vremenu primijeni diferenciranje unazad, izraz (6.21), referentni trenutak vremena je $t + \Delta t$. To znači da se diferenciranje po koordinatama vrši u trenutku $t + \Delta t$, za razliku od eksplicitnog metoda u kome se diferenciranje po koordinatama izvodi u trenutku t .

Analogno izrazu (7.49) za dvodimenzioni problem slijedi

$$\frac{I}{\Delta x^2} (T_3^{t+\Delta t} - 2T_n^{t+\Delta t} + T_1^{t+\Delta t}) + \frac{I}{\Delta y^2} (T_4^{t+\Delta t} - 2T_n^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t}) = \frac{I}{a\Delta t} (T_n^{t+\Delta t} - T_n^t). \quad 7.57$$

Za $\Delta x = \Delta y = \Delta s$ će biti

$$(1 + 4F_o) T_n^{t+\Delta t} - F_o (T_1^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t} + T_4^{t+\Delta t}) = T_n^t. \quad 7.58$$

Za razliku od izraza (7.50), u kome je jedina nepoznata bila $T_n^{t+\Delta t}$, temperatura u tački n u trenutku $t + \Delta t$, u izrazu (7.58) su, pored temperature u tački n, nepoznate i temperature u okolnim tačkama u trenutku $t + \Delta t$. Imajući to u vidu, neophodno je za svaku tačku temperaturskog polja odrediti relaciju analognu izrazu (7.58) i na taj način formirati sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih temperatura u trenutku $t + \Delta t$. Ovako dobijeni sistem jednačina se može riješiti nekom od poznatih numeričkih metoda.

Za granične uslove prikazane na sl.7.10(b) – dvodimenzioni problem, na analogan način kao i u eksplicitnom metodu, slijedi

$$h\Delta s \Delta L (T_\infty - T_n^{t+\Delta t}) \Delta t + \lambda \frac{\Delta s}{2} \Delta L \frac{T_1^{t+\Delta t} - T_n^{t+\Delta t}}{\Delta s} \Delta t + \lambda \Delta s \Delta L \frac{T_2^{t+\Delta t} - T_n^{t+\Delta t}}{\Delta s} \Delta t + \lambda \frac{\Delta s}{2} \Delta L \frac{T_3^{t+\Delta t} - T_n^{t+\Delta t}}{\Delta s} \Delta t = \rho c \frac{\Delta s^2}{2} \Delta L (T_n^{t+\Delta t} - T_n^t), \quad 7.59$$

što poslije sredjivanja daje

$$(1 + 4F_o + 2F_o B_i) T_n^{t+\Delta t} - F_o (T_1^{t+\Delta t} + 2T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t}) = 2F_o B_i T_\infty + T_n^t. \quad 7.60$$

Izloženi prilaz je poznat kao implicitni jer je neophodno riješiti sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih temperatura. Prednost ovog prilaza u odnosu na eksplicitni je mogućnost uzimanja većeg vremenskog i prostornog koraka jer se problem stabilnosti ne pojavljuje, s obzirom da je koeficijent uz $T_n^{t+\Delta t}$ uvijek pozitivan. Medjutim, problem rješavanja sistema od n jednačina najčešće uslovljava upotrebu računara.

Literatura

- [1] Arpaci, V.S., Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.
- [2] Myers, E.G., Analytical Methods in Conduction Heat Transfer, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.
- [3] Schneider, P.J., Conduction Heat Transfer, Addison Wesley Reading, MA, 1955.

GLAVA 8

PRINUDNA KONVEKCIJA



Wilhelm Nusselt
1882-1957

Uvod

Kada je neko čvrsto tijelo izloženo struji fluida čija je temperatura različita od temperature tijela dolazi do razmjene energija između tijela i fluida. Ako je temperatura tijela veća od temperature okolnog fluida, zagrijani djelići fluida se odvajaju od tijela odnoseći dio toplote dok na njihovo mjesto dolaze novi hladniji djelići ili obrnuto. Ovakav vid razmjene (transporta) energije je poznat kao konvekcija. Mehanizam razmjene topline usled konvekcije je opisan u poglavlju (1.2).

8.1

Nusselt - ov broj

Osnovna jednačina za određivanje konvektivnog prelaza (transporta) toplote je Newton-ov zakon hladjenja (zagrijavanja) u obliku (1.4),

$$\dot{q}_A = h(T_A - T_\infty), \quad 8.1$$

u kome je h lokalni koeficijent konvekcije, a T_s i T_∞ temperature površine i fluida dovoljno daleko od tijela. S druge strane, razmijenjena količina toplote usled konvekcije mora biti jednaka količini toplote koja usled kondukcije prolazi kroz tanak, nepokretan, sloj fluida u pravcu normale na samoj površini zida (1.2),

$$\dot{q}_A = \dot{q}_{An} = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{n=0}, \quad 8.2$$

na osnovu čega slijedi,

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{n=0} = h(T_A - T_\infty). \quad 8.3$$

Uvodjenjem bezdimenzionih veličina $n^* = n/l$ i $T^* = T/T_0$, u kojima su l i T_0 neka karakteristična kooordinata strujnog polja i temperatura, dobija se

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right|_{n=0} = -\frac{hl}{\lambda} \frac{T_A - T_\infty}{T_0}. \quad 8.4$$

Bezdimenzioni broj hl/λ je poznat kao lokalni Nusselt-ov broj, koji predstavlja bezdimenzioni temperatrski gradijent na elementarnoj površini tijela,

$$N_u = \frac{hl}{\lambda}. \quad 8.5$$

Srednja vrijednost Nusselt-ovog broja na nekoj površini će biti

$$\bar{N}_u = \frac{\bar{h}L}{\lambda}. \quad 8.6$$

Kao što je navedeno u poglavlju (1.2), koeficijent konvektivnog prelaza toplote h nije, za razliku od koeficijenta kondukcije λ , fizička karakteristika materije, već strujnog polja. On će očigledno zavisiti od karaktera strujanja (laminarno ili turbulentno), oblika opstrujavane površine, inteziteta brzine itd. Jednačina (8.3) uglavnom služi za analitičko određivanje ovog koeficijenta odnosno Nusselt-ovog broja, na osnovu koga se može odrediti razmijenjena količina toplote usled konvekcije. Druga mogućnost je određivanje Nusselt-ovog broja metodom dimenzijske analize.

Iz jednačine (8.3) slijedi da je za analitičko određivanje koeficijenta konvekcije h potrebno poznavati temperatursko polje u neposrednoj blizini zida (gradijent temperature na zidu). Energijska jednačina graničnog sloja u diferencijalnom ili integralnom obliku služi za

određivanje temperaturnog polja. Imajući u vidu da se u ovoj jednačini pojavljuje i brzinsko polje, ona se mora rješavati simultano sa jednačinom kretanja fluida u graničnom sloju i jednačinom kontinuiteta.

8.2

Laminarno strujanje duž ravnog zida - diferencijalna analiza

Polazi se od energijske jednačine graničnog sloja u diferencijalnom obliku (4.51),

$$\rho \left(v_x \frac{\partial i}{\partial x} + v_y \frac{\partial i}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 4.51$$

koja se pri strujanju idealnog gasa ($i = c_p T$, $\lambda = \text{const}$) i tečnosti ($i \approx c_p T$, $\lambda = \text{const}$, $c_p \approx c_v$), duž ravnog zida ($\partial p / \partial x = 0$), svodi na slijedeći oblik,

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad 8.7$$

sa graničnim uslovima

$$y = 0; v_x = v_y = 0, T = T_s,$$

$$y \rightarrow \infty; v_x = U_\infty, T = T_\infty. \quad 8.8$$

U cilju određivanja temperaturnog polja iz energijske jednačine (8.7) neophodno je poznavati brzinsko polje koje je određeno jednačinama graničnog sloja (4.17-4.19). Ove jednačine se pri stacionarnom strujanju duž ravne površine, sl.8.1, svode na sledeći oblik:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

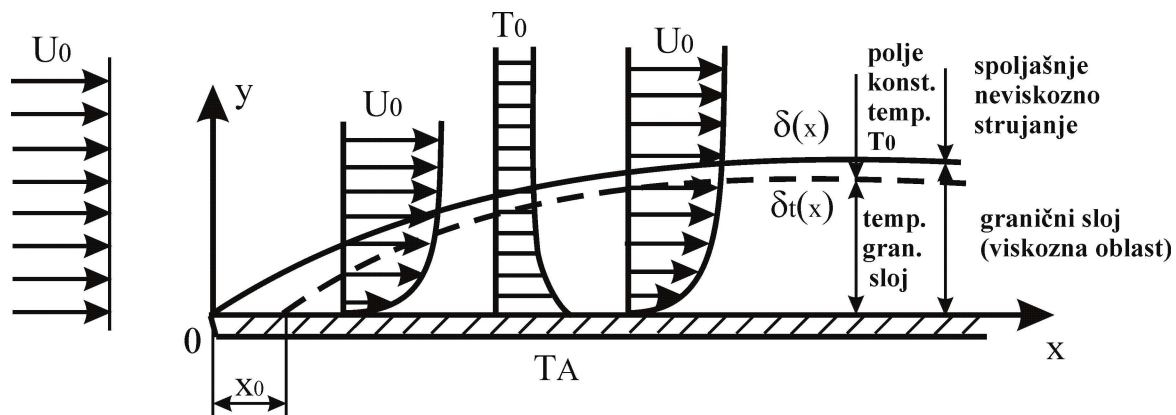
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad 8.9$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

sa graničnim uslovima

$$y = 0; v_x = v_y = 0,$$

$$y \rightarrow \infty; v_x \rightarrow U_\infty, v_y \rightarrow 0 \quad 8.10$$



Sl.8.1 Brzinski i temperaturni granični sloj na ravnom zidu.

Jednačine (8.9) sa graničnim uslovima (8.10) je, kao što je navedeno u poglavlju 4.4, riješio Blasius. On je uveo razmjeru za y- koordinatu i strujnu funkciju,;

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{vx/U_\infty}}, \quad \psi^*(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{vxU_\infty}}, \quad 8.11$$

i pretpostavio da bezdimenziona strujna funkcija ψ^* zavisi samo od koordinate η . Imajući dalje u vidu da je $v_x = \partial\psi/\partial y$ i $v_y = -\partial\psi/\partial x$, poslije smjene u jedn. (8.9) slijedi:

$$\frac{\partial^3\psi^*}{\partial\eta^3} + \frac{1}{2}\psi^* \frac{\partial^2\psi^*}{\partial\eta^2} = 0, \quad 8.12$$

$$\eta = 0, \psi^* = \partial\psi^*/\partial\eta = 0,$$

$$\eta \rightarrow \infty, \partial\psi^*/\partial\eta \rightarrow 1. \quad 8.13$$

Blasius je riješio jednačinu (8.12) sa graničnim uslovima (8.13) razvijajući funkciju ψ^* u specijalni red. Danas se rješenje ove jednačine može lako naći primjenom neke poznate numeričke metode npr. Runge- Kutta. Jednačina (8.12) je indentična sa jednačinom (4.48) koja predstavlja specijalan slučaj univerzalne jednačine graničnog sloja (4.46). Blasius-ovo rješenje je dato u tab.8.1.

$\eta = \frac{y}{\sqrt{vx/U_\infty}}$	ψ^*	$\frac{d\psi^*}{d\eta} = \frac{v_x}{U_\infty}$	$\frac{d^2\psi^*}{d\eta^2}$
0	0	0	0.332
0.4	0.027	0.133	0.331
0.8	0.106	0.265	0.327
1.2	0.238	0.394	0.317
1.6	0.420	0.517	0.297
2.0	0.650	0.630	0.267
2.4	0.922	0.729	0.228
2.8	1.231	0.812	0.184
3.2	1.569	0.876	0.139
3.6	1.930	0.923	0.098
4.0	2.306	0.956	0.064
4.4	2.692	0.976	0.039
4.8	3.085	0.988	0.022
5.2	3.482	0.994	0.011
5.6	3.880	0.997	0.005
6.0	4.280	0.999	0.002
6.4	4.679	1.000	0.001
6.8	5.079	1.000	0.000

Tab.8.1
Numeričko rješenje Blasius-ove jednačine (8.12)

Očigledno je da je drugi granični uslov ($\eta \rightarrow \infty, \partial\psi^*/\partial\eta \rightarrow 1$) ispunjen već za $\eta=5.0$ sa tačnošću od 1%, odnosno $\psi^* = 0.99$ za $\eta=5.0$. S obzirom na definiciju debljine graničnog sloja, $y = \delta$ za $v_x = 0.99U_\infty$, na osnovu (8.11) slijedi

$$5 = \frac{\delta}{\sqrt{vx/U_\infty}},$$

odnosno,

$$\frac{\delta}{x} = 5 \sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}} \quad 8.14$$

Tangentni napon na zidu i koeficijent trenja će biti

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(U_\infty \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \left. \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0}.$$

Na osnovu Blasius-ovog rješenja, drugi izvod funkcije ψ^* , za $\eta = 0$, je

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0} = \psi_{\eta\eta}^*(0) = 0.33206, \quad 8.15$$

pa je tangentni napon na zidu,

$$\tau_0 = 0.332 \mu U_\infty \sqrt{U_\infty / \nu x}, \quad 8.16$$

a koeficijent trenja

$$c_f = \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2 / 2} = \frac{0.664}{\sqrt{U_\infty x / \nu}} = \frac{0.664}{\sqrt{R_{ex}}}. \quad 8.17$$

Na osnovu (4.45) slijedi izraz za komponentu brzine v_y ,

$$v_y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \left(\eta \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} - \psi^* \right). \quad 8.18$$

Dobijeno rješenje strujnog polja preko ravne ploče je poznato kao slično rješenje, jer su profili brzine slični, mogu se izraziti kao funkcija jedne koordinate η ,

$$\frac{v_x}{U_\infty} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = f(\eta). \quad 8.19$$

Uvodjenjem bezdimenzione temperature u obliku

$$\theta = \frac{T - T_A}{T_\infty - T_a}, \quad 8.20$$

jednačina (8.7) sa graničnim uslovima (8.8) se svodi na sledeći oblik

$$v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad 8.21$$

$$y = 0, \theta = 0,$$

$$y \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 1. \quad 8.22$$

Upoređujući ovu jednačinu sa jednačinom graničnog sloja duž ravne površine (8.9), koja se s obzirom na (8.19) može napisati u obliku

$$v_x \frac{\partial f(\eta)}{\partial x} + v_y \frac{\partial f(\eta)}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial y^2}, \quad 8.23$$

sa graničnim uslovima:

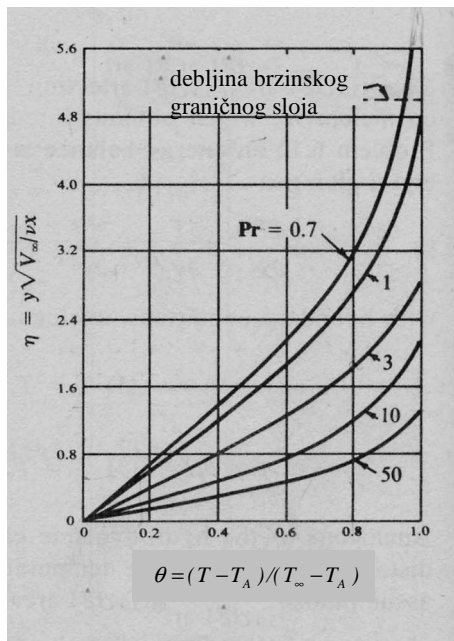
$$y = 0, f(\eta) = 0$$

$$y \rightarrow \infty, f(\eta) \rightarrow 1, \quad 8.24$$

slijedi da su ove jednačine identične, $\theta = f(\eta)$, kada je $\nu = a$. To znači da će profili bezdimenzione brzine, $f(\eta)$, i bezdimenzione temperature, $\theta(\eta)$, biti takodje identični. Odnos ν/a poznat kao Prandtl-ov broj ($P_r = \nu/a$) se kreće u granicama 0.6 - 1 za najveći broj gasova pa će i bezdimenzioni profili brzine i temperature biti slični u najvećem broju slučajeva.

Polhausen [1] je riješio jednačinu (8.21), za proizvoljnu vrijednost Prandtl-ovog broja, predpostavljajući postojanje sličnosti temperaturskih profila, $\theta = \theta(\eta)$. Usvojio je iste faktore razmjere za y koordinatu i strujnu funkciju kao i Blasius, i iskoristio Blasius-ovo rješenje

brzinskog polja $\psi^*(\eta)$ i $\partial\psi^*/\partial\eta$. Rješenje je dato u dodatku A6 i prikazano na dijagramu sl.8.2.



Sl.8.2
Temperaturski profili za različite Prandtlove brojeve

On je, takodje, dobio izraz za izvod bezdimenzione temperature na zidu u obliku,

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \frac{1}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{Pr}{2} \int_0^{\eta} \psi^* d\eta\right) d\eta} \quad 8.25$$

Koristeći Blasius-ovo rješenje za funkciju ψ^* , Tab.8.1, numeričkom integracijom broica, slijedi;

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0.332 P_r^{0.343} \quad 8.26$$

Može se, u cilju pojednostavljenja, za fluide za koje je $0.5 < P_r < 10$, uzeti da je $P_r^{0.343} = P_r^{1/3}$, odnosno,

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0.332 P_r^{1/3} \quad 8.27$$

Gradijent temperature, na osnovu (8.20), je

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} (T_{\infty} - T_A) = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} (T_{\infty} - T_A) \quad 8.28$$

Smjenom u izraz (8.3) dobija se lokalna vrijednost koeficijenta prelaza toplote na rastojanju x od koordinatnog početka;

$$h(x) = \frac{-\lambda(T_{\infty} - T_A)(\partial\theta/\partial y)_{y=0}}{T_A - T_{\infty}} = 0.332\lambda\sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} P_r^{1/3}, \quad 8.29$$

a na osnovu njega lokalni Nusselt-ov broj

$$N_{u,x} = \frac{h(x)x}{\lambda} = 0.332 P_r^{1/3} R_{e,x}^{1/2} \quad 8.30$$

Za fluide za koje je $P_r=1$ izvod bezdimenzione temperature na zidu, $(\partial\theta/\partial\eta)_{\eta=0}$, je jednak izvodu bezdimenzione brzine $(\partial^2\psi^*/\partial\eta^2)_{\eta=0}$,

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = \left.\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\eta^2}\right|_{\eta=0} = \psi_{\eta\eta}^*(0) = 0.332, \quad 8.31$$

jer su bezdimenzioni profili temperature, θ , i brzine, $\partial\psi^*/\partial\eta$, u tom slučaju indentični.

Koeficijent konvektivnog prelaza toplote se može, na osnovu (8.29), za dati fluid napisati u obliku $h(x) = Cx^{-1/2}$. Srednja vrijednost ovog koeficijenta će biti

$$h_{sr} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx = 2CL^{-1/2} = 2h_L. \quad 8.32$$

Prema tome, srednja vrijednost koeficijenta konvekcije pri strujanju duž ravnog zida je jednaka dvostrukoj lokalnoj vrijednosti ovog koeficijenta na kraju zida. Imajući to u vidu, srednja vrijednost Nusselt-ovog broja na ravnom zidu konstantne temperature je

$$N_{u,sr} = 0.664P_r^{1/3}R_{e,L}^{1/2}. \quad 8.33$$

8.3

Laminarno strujanje duž ravne površine - integralna analiza

Polazi se od integralne energijske jednačine graničnog sloja (4.78), koja se za nestišljiv fluid konstantne specifične toplote može napisati u sledećem obliku;

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x (T_\infty - T) dy = a \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad 8.34$$

i integralne jednačine kretanja (4.72) koja se, pri strujanju duž ravnog zida, $U \rightarrow U_\infty$, $dU_\infty/dx \rightarrow 0$, svodi na oblik;

$$U_\infty^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho \frac{v_x}{U_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{U_\infty} \right) dy = \tau_0. \quad 8.35$$

Ove jednačine služe za određivanje brzinskog i temperaturskog polja. Da bi se odredio gradijent temperature na zidu iz energijske jednačine (8.34), neophodno je poznavati brzinsko polje. Mnogi autori su prepostavili brzinsko polje u vidu stepenog reda, sa različitim bezdimenzionim koordinatama. Najprihvatljiviji rezultati su dobijeni koršćenjem reda trećeg stepena,

$$\frac{v_x}{U_\infty} = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3, \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}, \quad 8.36$$

Koeficijenti a_0 , a_1 , a_2 i a_3 se mogu odrediti iz graničnih uslova koje mora zadovoljiti profil brzine u graničnom sloju. Iz uslova lepljenja fluida za zid slijedi da je za $y=0$, $v_x = v_y = 0$, što, poslije smjene u prvu od diferencijalnih jednačinu graničnog sloja (8.9), takodje uslovljava da je i $\partial^2 v_x / \partial y^2 = 0$. Na gornjoj granici graničnog sloja, $y \rightarrow \delta$, $v_x \rightarrow U_\infty$. Iz uslova kontinualne promjene brzine slijedi da je i $\partial v_x / \partial y = 0$. Granični uslovi se, prema tome, mogu izraziti u sledećem obliku:

$$y=0; v_x=0, \partial^2 v_x / \partial y^2 = 0, \quad 8.37$$

$$y \rightarrow \delta, v_x \rightarrow U_\infty, \partial v_x / \partial y \rightarrow 0.$$

Primjenom navedenih graničnih uslova na red (8.36), dobijaju se četiri obične linearne jednačine iz kojih slijede koeficijenti a_0, a_1, a_2 i a_3 :

$$a_0 = 0, a_1 = 3/2, a_2 = 0, a_3 = -1/2, \quad 8.38$$

odnosno,

$$\frac{v_x}{U_\infty} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3. \quad 8.39$$

Smjenom dobijenog profila brzine u integralnu jednačinu kretanja (8.35) dobija se obična diferencijalna jednačina

$$U_\infty^2 \frac{117}{840} \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \frac{\nu U_\infty}{\delta}, \quad 8.40$$

iz koje slijedi debljinu graničnog sloja $\delta(x)$ u sledećem obliku,

$$\delta(x) = 4.64 \sqrt{\nu x / U_\infty}. \quad 8.41$$

Upoređivanjem ovog rezultata sa tačnim Blasius-ovim rješenjem (8.14) može se zaključiti da je postignuta relativno dobra tačnost (oko 5%). Tačnost se može povećati uvođenjem dodatnih članova reda (8.36) i novih graničnih uslova. Tako dobijeni rezultat ne bi bio pogodan za praktičnu primjenu.

Tangentni napon na zidu τ_0 i koeficijent trenja c_f će biti:

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.323 \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad 8.42$$

$$c_f = \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2 / 2} = \frac{0.646}{\sqrt{U_\infty x / \nu}} = 0.646 R_{e,x}^{-1/2}, \quad 8.43$$

što je za oko 5% manje u odnosu na tačna Blasius-ova rješenja (8.15) i (8.16).

U cilju određivanja temperaturnog polja, Polhausen je pretpostavio raspodjelu temperature (temperaturni profil) u vidu polinoma trećeg stepena,

$$\theta = \frac{T - T_A}{T_\infty - T_A} = b_0 + b_1 \frac{y}{\delta_t} + b_2 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^2 + b_3 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3. \quad 8.44$$

Konstante polinoma se mogu odrediti iz graničnih uslova koje mora zadovoljiti profil temperature u graničnom sloju. Ovi uslovi su analogni graničnim uslovima za profil brzine (8.37);

$$y=0; T=T_A, \partial^2 T / \partial y^2 = 0, \quad 8.45$$

$$y \rightarrow \delta_t, T \rightarrow T_\infty, \partial T / \partial y \rightarrow 0.$$

Da bi profil temperature zadovoljio navedene granične uslove, mora biti:

$$b_0 = 0, b_1 = 3/2, b_2 = 0, b_3 = -1/2, \quad 8.46$$

odnosno,

$$\theta = \frac{T - T_A}{T_\infty - T_A} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3. \quad 8.47$$

Smjenom brzinskog (8.39) i temperaturnog (8.47) profila u integralnu energijsku jednačinu (8.34) slijedi obična diferencijalna jednačina

$$\frac{d}{dx} \left\{ U_{\infty} \delta (T_{\infty} - T_A) \left(\frac{3}{20} \zeta^2 - \frac{3}{280} \zeta^4 \right) \right\} = \frac{3}{2} a \frac{T_{\infty} - T_A}{\delta_t}, \quad 8.48$$

u kojoj je $\zeta = \delta / \delta_t$. Imajući u vidu da je $\delta_t \approx \delta$, kada je $P_r \approx 1$ ili $\delta_t \ll \delta$ za $P_r \gg 1$, može se član $3\zeta^4/280$ zanemariti u odnosu na član $3\zeta^2/20$. Dalje je, s obzirom na (8.40)

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{U_{\infty}},$$

pa se jednačina (8.48) svodi na sledeći oblik

$$\frac{14}{13} \frac{\nu}{a} \left(\zeta^3 + 4x \zeta^2 \frac{d\zeta}{dx} \right) = 1,$$

odnosno,

$$\frac{4}{3} x \frac{d(\zeta^3)}{dx} + \zeta^3 = \frac{13}{14} P_r. \quad 8.49$$

Rješenjem ove jednačine za granične uslove $x = x_0$, $\delta_t = 0$, $\zeta = 0$ (temperatski granični sloj počinje u nekom proizvoljnom presjeku $x = x_0$), dobija se izraz za debljinu temperatskog graničnog sloja

$$\zeta = \frac{\delta_t}{\delta} = \frac{0.975}{P_r^{1/3}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}. \quad 8.50$$

odnosno, s obzirom na (8.41),

$$\delta_t = \frac{4.524}{P_r^{1/3}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3} \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}. \quad 8.51$$

Lokalni koeficijent prelaza toplote slijedi iz (8.3), primjenom profila za raspodjelu temperature (8.47), u obliku

$$h = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\delta_t}. \quad 8.52$$

Poslije smjene debljine temperatskog graničnog sloja (8.51) dobija se

$$h = 0.332 \frac{\lambda}{x} P_r^{1/3} R_{e,x}^{1/2} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}. \quad 8.53$$

Lokalni Nusselt-ov broj biti

$$N_u = \frac{hx}{\lambda} = 0.332 P_r^{1/3} R_{e,x}^{1/2} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}. \quad 8.54$$

Kada brzinski i temperatski granični sloj počinju na prednjoj ivici površine ($x_0 = 0$), izraz za N_u broj se svodi na oblik

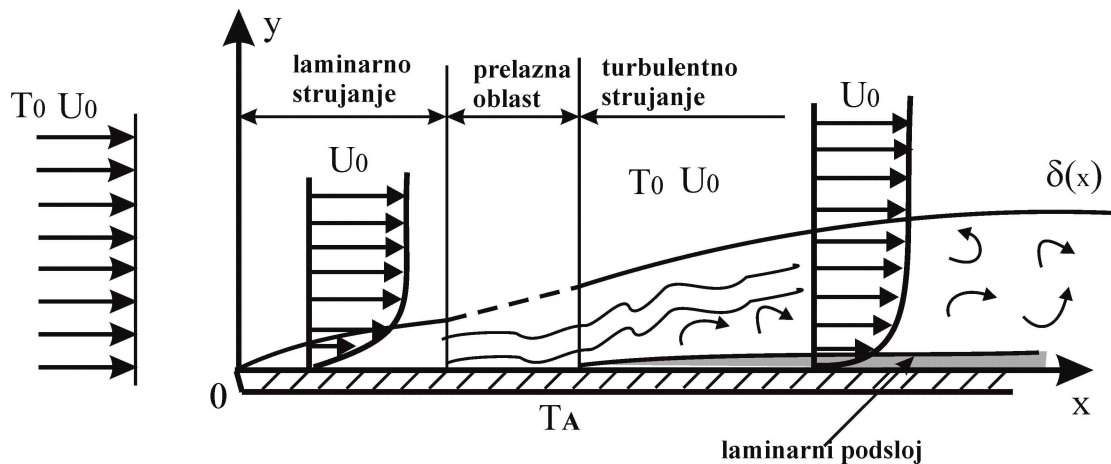
$$N_u = 0.332 P_r^{1/3} R_{e,x}^{1/2}. \quad 8.55$$

koji je indentičan N_u broju dobijenom primjenom diferencijalne anlike (8.30).

8.4

Turbulentno strujanje duž ravne površine-diferencijalna analiza

Strujna slika pri opstrujavanju ravne površine (zida, ploče) konstantne temperature T_s na koju nailazi fluid temperature T_∞ , uniformnom brzinom U_∞ , je prikazana na sl.8.3.



Sl.8.3 Turbulentni granični sloj na ravnom zidu

Fluidni djelići se usporavaju u blizini zida i zaustavljaju na samoj površini formirajući laminarni granični sloj na prednjem dijelu površine. Dalje slijedi prelazna oblast u kojoj dolazi do pojave turbulencije na pojedinim mjestima na kojima je strujanje naizmjenično laminarno i turbulentno. Broj ovih mjesta, tzv. turbulentnih mrlja, raste duž ove oblasti, tako da strujno polje, poslije određenog rastojanja, postaje turbulentno, formirajući turbulentni granični sloj. Pojava turbulencije kao i dužina laminarne i prelazne oblasti zavise prvenstveno od brzine strujanja, nivoa turbulencije u slobodnoj struji fluida i neravnina na samoj površini. Usled pulzacije brzine u y-pravcu, turbulentni granični sloj je znatno deblji od laminarnog i profil srednje brzine ima znatno manji gradijent nego pri laminarnom strujanju. Neposredno uz samu površinu se usled male brzine formira laminarni podsloj u kome je gradijent brzine veoma izražen. To uslovljava znatno veće tangentne napone na zidu u odnosu na laminarno strujanje. Ukupan otpor površine zavisi od položaja prelazne oblasti, koji je oscilatornog karaktera. Iako se prelaz odvija u oblasti određene dužine, obično se smatra da do prelaza laminarnog u turbulentno strujanje dolazi u određenom presjeku na rastojanju x_{kr} od prednje ivice površine. Za uobičajeni nivo turbulencije, \mathfrak{S} ,

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{U_\infty} \sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}, \quad 8.56$$

od 5%, prelazna oblast na ravnoj površini se nalazi u sledećim granicama,

$$3.0 \times 10^5 \leq \frac{U_\infty x_{kr}}{\nu} \leq 10^6. \quad 8.57$$

Proizvod $U_\infty x_{kr} / \nu$ je poznat kao kritični Reynolds-ov broj $R_{e,kr}$. Za inženjerske proračune se

može uzeti da je; $3 \times 10^5 \leq \frac{U_\infty x_{kr}}{\nu} \leq 5 \times 10^5$.

Postavljanjem neke prepreke na na zidu u prelaznoj oblasti, npr lepljenjem tanke žice u pravcu normalnom na pravac strujanja, može se izazvati pojava turbulencije i na taj način prelazna oblast svesti na jedan presjek čiji je položaj unaprijed definisan.

U najvećem broji praktičnih problema laminarna oblast je znatno kraća od turbulentne, tako da se može uzeti da turbulentna oblast počinje na samoj ivici površine. Polazeći od ove pretpostavke, rezultati za sve lokalne vrijednosti u turbulentnom graničnom sloju se dobro slažu sa eksperimentalnim vrijednostima za $x > x_{kr}$.

Strujno polje je definisano jednačinama turbulentnog ravanskog stacionarnog graničnog sloja (4.49),

$$\rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \overline{\sigma'_{xy}}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \tag{8.58}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0$$

Analitičko rješenje ovih jednačina još uvijek nije određeno. Pored numeričkih rješenja koja se pojavljuju u posljednje vrijeme, postoji niz poluempirijskih teorija koje su formirane u cilju rješavanja ovog problema. Jedna od najpoznatijih je Prandtl-ova teorija o putu miješanja ili Prandtl-ova analogija kojom je definisan Reynolds-ov napon $\overline{\sigma'_{xy}}$. Osnove ove teorije su date u poglavlju 4.10. Prandtl uvodi pretpostavku da je u najvećoj oblasti strujnog polja duž y-ose, osim u neposrednoj blizini zida, turbulentni napon konstantan i jednak tangentnom naponu na zidu, $\overline{\sigma'_{xy}} = \tau_0$.

Fizička suština ove pretpostavke se može uočiti analizom jednačina (8.58). Ako bi postojalo takvo strujno polje kod koga su $\bar{v}_y = 0$ i $\partial \bar{p} / \partial x = 0$, prva od jednačina (8.58) bi se svela na sledeći oblik,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \overline{\sigma'_{xy}} \right) = 0,$$

odnosno,

$$\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \overline{\sigma'_{xy}} = C. \tag{8.59}$$

Turbulentni napon na zidu je praktično jednak nuli jer je strujanje u toj oblasti usled male brzine laminarno. Ako se laminarni napon na zidu označi sa τ_0 ,

$$\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \tau_0, \tag{8.60}$$

slijedi da je $C = \tau_0$ odnosno,

$$\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \overline{\sigma'_{xy}} = \tau_0. \tag{8.61}$$

Može se očekivati da je, pri dovoljno velikim R_e brojevima, gradijent prosječne brzine $\partial \bar{v}_x / \partial y$ dovoljno daleko od zida praktični jednak nuli, pa će u toj oblasti biti

$$\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \ll \overline{\sigma'_{xy}}. \tag{8.62}$$

Imajući to u vidu, iz (8.61) slijedi da će, dovoljno daleko od zida biti

$$\overline{\sigma'_{xy}} = \tau_0 = \text{const.} \quad 8.63$$

Očigledno je da Prandtl-ova hipoteza o konstantnom turbulentnom naponu nije u potpunosti tačna ni pri strujanju duž ravne površine jer je tada $\bar{v}_y \neq 0$, ni pri strujanju kroz cijevi i kanale jer je tada $\partial\bar{p}/\partial x \neq 0$. I pored ovih nedostataka, eksperimentalnim putem je utvrđeno da pretpostavka o konstantnom turbulentnom naponu daje dobre rezultate u određenoj oblasti strujnog polja pri strujanju duž ravnog zida, kroz cijevi i kanale. Imajući to u vidu, dobijeni profil brzine baziran na ovoj pretpostavci je poznat kao univerzalni zakon raspodjele brzine ili zakon zida. Za srednje vrijednosti R_e brojeva $5 \times 10^5 < R_e < 10^7$ pretpostavka (8.62) nije tačna pa, prema tome, dobijeno rješenje ne daje dobre rezultate u toj oblasti.

U poglavlju 4.10 je, na osnovu Prandtl-ove hipoteze, izveden izraz za turbulentni tangenti napon

$$\overline{\sigma'_{xy}} = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2, \quad 8.64$$

u kome je l tzv putanja miješanja, rastojanje u y pravcu koje definiše širinu pojasa u kome usled poprečnih pulzacija dolazi do miješanja fluidnih djelića. Prandtl uvodi pretpostavku o zavisnosti $l = f(y)$, koja proizilazi iz činjenice da je u blizini zida $l = 0$ (djelići se ne miješaju u laminarnom podsloju) dok sa rastojanjem od zida intezitet turbulencije raste a samim tim i i putanja miješanja l . Najjednostavnija relacija je $l = ky$,

na osnovu koje slijedi

$$\tau_0 = \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2. \quad 8.65$$

Integracijom ovog izraza dobija se zakon raspodjele brzine u obliku

$$\bar{v}_x = \frac{v^*}{\kappa} \ln y + C, \quad 8.66$$

u kome je

$$v^* = \sqrt{\tau_0 / \rho}, \quad 8.67$$

tzv. brzina klizanja.

Iz izraza (8.66) slijedi da kad $y \rightarrow 0$, $\bar{v}_x \rightarrow -\infty$, što je fizički nemoguće. Medjutim, u ovoj oblasti izraz (8.66) ionako ne važi. Na nekom rastojanju $y = y_0$ će biti $\bar{v}_x = 0$ a počev od ovog rastojanja može se očekivati da izraz (8.66) daje logične rezultate. Rastojanje y_0 je istog reda veličine kao i laminarni podsloj. Uslov da je za $y = y_0$, $\bar{v}_x = 0$ daje

$$C = \ln y_0,$$

odnosno

$$\bar{v}_x = \frac{v^*}{\kappa} (\ln y - \ln y_0). \quad 8.68$$

Rastojanje y_0 se može odrediti metodom dimenzijske analize u obliku

$$y_0 = \beta \frac{v}{v^*}, \quad 8.69$$

polazeći od pretpostavke da je $y_0 = f(\tau_0, \rho, v)$.

Imajući to u vidu, dobija se univerzalni zakon raspodjele brzine,

$$\frac{\bar{v}_x}{v^*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{yv^*}{v} - \ln \beta \right), \quad 8.70$$

pri čemu je β neka konstanta koju treba odrediti eksperimentalnim putem

U neposrednoj blizini zida turbulentni napon je zanemarljiv pa će, na osnovu (8.61), biti

$$\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = \tau_0$$

odnosno,

$$\bar{v}_x = (v^*)^2 \frac{y}{\nu} \tag{8.71}$$

Uvodjenjem bezdimenzionih veličina $u^+ = \bar{v}_x / v^*$ i $y^+ = yv^* / \nu$, izrazi (8.70) i (8.71) dobijaju sledeći oblik:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} (\ln y^+ - \ln \beta) = A \ln y^+ + D, \tag{8.72}$$

$$u^+ = y^+. \tag{8.73}$$

Konstante κ i β , odnosno A i D su određene eksperimentalnim putem. Među prvim i najpoznatijim su rezultati Nikuradze-a [2] dobijeni za strujanje kroz prave kružne cijevi; $\kappa = 0.4$, $\beta = -2.2$, odnosno, $A = 2.5$, $D = 5.5$,

na osnovu čega slijedi,

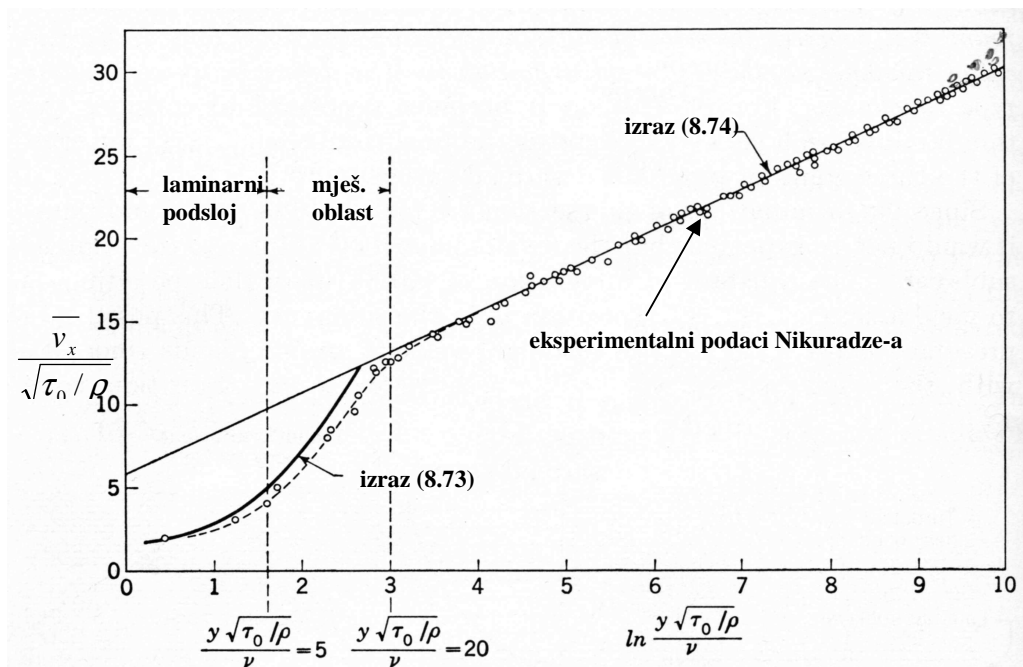
$$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5. \tag{8.74}$$

Pri strujanju duž ravnog zida, mogu se uzeti iste vrijednosti za A i D , međutim, nizom mjerenja je utvrđeno da bolje odgovaraju rezultati, $A = 2.54$, $D = 5.56$,

odnosno,

$$u^+ = 2.54 \ln y^+ + 5.56. \tag{8.75}$$

Ovaj zakon raspodjele brzine, zajedno sa eksperimentalnim rezultatima i izrazom (8.73), koji važi u neposrednoj blizini zida, je prikazan na sl.8.4.



Sl.8.4 Univerzalni profil brzine pri strujanju u cijevima, pri velikim Reynolds-ovim brojevima

Sa slike se vidi da postoji odlično slaganje sa eksperimentima za $y^+ > 70$. Može se, međutim, uzeti da izraz (8.74) važi sa dovoljnom tačnošću za $y^+ > 20$, dok izraz (8.73) daje dobre rezultate za $y^+ < 5$. U oblasti $5 < y^+ < 20$ oba izraza odstupaju od eksperimentalnih rezultata. Oni se ipak koriste i u toj oblasti i to:

$$0 < y^+ < 11.5, \quad u^+ = y^+, \quad 8.76$$

$$y^+ \geq 11.5, \quad u^+ = 2.54 \ln y^+ + 5.56. \quad 8.77$$

Osnovni nedostatak ovih jednačina je što implicitno sadrže τ_0 , kao nepoznati parametar koji treba odrediti eksperimentalnim putem. Jedna od najpoznatijih je metoda Clauser-a [3,4], kojom se tangenti napon može odrediti u datom presjeku x . Dobijeni izrazi nijesu pogodni za određivanje debljine graničnog sloja $\delta(x)$ i tangentskog napona na zidu $\tau_0(x)$ kao u slučaju diferencijalne analize pri laminarnom strujanju. Za dobijanje ovih funkcija je pogodnija integralna analiza.

Univerzalni zakon raspodjele (8.72) važi, prema uvedenim pretpostavkama, samo za velike R_e brojeve, $R_e > xxx$, i to u određenoj oblasti između zida i spoljne granice graničnog sloja, dok izraz (8.73) važi u neposrednoj blizini zida. Za srednje vrijednosti R_e brojeva, $R_{e,kr} < R_e < 10^7$, eksperimentalnim putem je utvrđena zavisnost

$$\frac{\bar{v}_x}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad 8.78$$

pri čemu je n funkcija R_e broja. Najčešće se uzima da je $n = 7 = const$. Ovaj izraz, međutim, ne daje dobre rezultate u neposrednoj blizini zida, pa se gradijent brzine na zidu dobijen iz ovog izraza znatno razlikuje od eksperimentalnih rezultata.

U poglavlju 4.10 je analizirana Reynolds-ova analogija na osnovu koje slijedi izraz (4.94) za razmijenjenu količinu toplote usled pulzacionog kretanja u y pravcu,

$$\dot{q}_{At} = -c_p \tau_t \frac{dT}{d\bar{v}_x}. \quad 8.79$$

Dokazano je da ovaj izraz važi u cjelokupnom strujnom polju kada je $P_r \approx 1$. Predpostavljajući da će, analogno ukupnom tangentskom naponu, koji se ne mijenja duž y pravca, $\overline{\sigma'_{xy}} = \tau_0 = const$, i razmijenjena količina toplote biti takodje konstantna, mogu se promenljive u izrazu (8.79) razdvojiti i formirati sledeći integral

$$\frac{\dot{q}_{At}}{\tau_0 c_p} \int_0^\infty d\bar{v}_x = - \int_{T_s}^{T_\infty} dT$$

čije je rješenje

$$\frac{\dot{q}_{At} U_\infty}{\tau_0 c_p} = T_A - T_\infty. \quad 8.80$$

S obzirom da je, prema Newton-ovom zakonu hladjenja razmijenjena količina toplote u nekom presjeku x , $\dot{q}_{At} = h(T_A - T_\infty)$, slijedi

$$\frac{h}{c_p} = \frac{\tau_0}{U_\infty}, \quad 8.81$$

odnosno

$$h = \frac{1}{2} \rho c_p U_\infty \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2 / 2} = \frac{1}{2} \rho c_p U_\infty C_f. \quad 8.82$$

Lokalna vrijednost koeficijenta konvektivnog prelaza toplote u nekom presjeku x će, prema tome, biti

$$h_x = \frac{1}{2} \rho c U_\infty C_{f,x}. \quad 8.83$$

Imajući u vidu da su karakteristični brojevi na nekom rastojanju x ; $N_{u,x} = h_x x / \lambda$, $R_{e,x} = U_\infty x / \nu$, $P_r = \nu / a$, predhodni izraz se može napisati u obliku

$$N_{u,x} = \frac{1}{2} R_{e,x} P_r C_{f,x}. \quad 8.84$$

Kombinacija $N_u / R_e P_r$ je poznata kao Stanton-ov broj S_t , pa je

$$S_{t,x} = \frac{1}{2} C_{f,x}. \quad 8.85$$

Osnovno ograničenje pri izvodjenju ove jednačine je pretpostavka da je $P_r \approx 1$. Kolbrun je modifikovao dobijeni rezultat u obliku

$$S_{t,x} P_r^{2/3} = \frac{1}{2} C_{f,x}, \quad 8.86$$

i dokaza da važi za sve P_r brojeve u granicama od 0.6 - 50.

Primjena dobijenih rezultata (8.83) za h_x , (8.84) za $N_{u,x}$ i (8.86) za $S_{t,x}$ u diferencijalnoj analizi je nepogodna jer se tangenti napon na zidu $\tau_{0,x}$ i lokalni koeficijent trenja $C_{f,x}$ moraju odrediti eksperimentalnim putem za svaki presjek x . Poseban problem predstavlja određivanje srednjih vrijednosti koeficijenta prelaza toplote i Nusselt-ovog broja. Za određivanje ovih vrijednosti je pogodnija integralna analiza.

8.5

Turbulentno strujanje duž ravne površine-integralna analiza

Integralni oblik jednačina graničnog sloja (4.72) važi i pri turbulentnom strujanju sa prosječnom brzinom \bar{v}_x . S obzirom da je duž ravne površine $\partial \bar{U}_\infty / \partial x = 0$, slijedi;

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\infty (\bar{U}_\infty - \bar{v}_x) \bar{v}_x dy = \tau_0. \quad 8.87$$

U cilju rješenja problema neophodno je, kao i kod laminarnog graničnog sloja, usvojiti neki profil brzine. Primjena izraza (8.73) i (8.75) nije pogodna jer se u tom slučaju jednačina (8.87) mora integraliti numerički. Najpogodnije je primijeniti profil brzine (8.78). Tangenti napon na zidu se ne može odrediti iz ovog izraza jer on, kao što je navedeno, ne daje dobre rezultate u blizini zida. U tu svrhu se može upotrijebiti eksperimentalni obrazac Blasius-a

$$\tau_0(x) = 0.0255 \rho U_\infty^2 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta(x)} \right)^{1/4}. \quad 8.88$$

Smjenom (8.78), za $n=7$ i (8.88), za neki proizvoljni presjek x , u integralnu jednačinu (8.87) slijedi,

$$0.0255 U_\infty^2 \left(\frac{\nu}{U_\infty^2 \delta(x)} \right)^{1/4} = \frac{d}{dx} \int_0^\delta U_\infty^2 \left[\left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{1/7} - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{2/7} \right] dy,$$

što poslije integracije daje

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{0.376}{R_{e,x}^{1/5}}. \quad 8.89$$

Zavisnost tangentskog napona na zidu od rastojanja x se može odrediti kombinujući izraze (8.88) i (8.89) u obliku

$$\tau_0(x) = 0.0288\rho U_\infty^2 \left(\frac{v}{U_\infty x} \right)^{1/5}, \quad 8.90$$

na osnovu koga slijedi koeficijent trenja

$$C_f = \frac{\tau_0(x)}{\rho U_\infty^2 / 2} = \frac{0.0576}{R_{e,x}^{1/5}}. \quad 8.91$$

Srednji koeficijent trenja duž površine jedinične širine i dužine L će biti

$$C_{f,sr} = \frac{\frac{1}{A} \int \tau_0(x) dA}{\rho U_\infty^2 / 2} = \frac{0.072}{R_{e,L}^{1/5}}. \quad 8.92$$

Primjenom univerzalnog zakona raspodjele brzine (8.73) i (8.75) dobija se složena diferencijalna jednačina koja se može integraliti samo numeričkim putem. Na osnovu dobijenih numeričkih rezultata Shlichting [5] je izveo sledeću zavisnost

$$C_{f,sr} = \frac{0.455}{(\log R_{e,L})^{2.58}}. \quad 8.93$$

Ovo je poznata Prandtl-Shlichting-ova formula koja daje dobre rezultate do $R_{e,L} = 10^9$ i dobro se slaže sa formulom (8.92) za $R_{e,L} < 10^7$.

Za tačnije proračune je neophodno izvršiti korekciju uticaja zanemarene laminarne oblasti na sledeći način

$$C_{fk,sr} = \frac{\frac{1}{A} \left(\int_0^{x_{kr}} \tau_{lam} dx + \int_{x_{kr}}^L \tau_{turb} dx \right)}{\rho U_\infty^2 / 2} \quad 8.94$$

Primjenom izraza (8.15) za laminarnu oblast i (8.90) za turbulentnu oblast, za $R_{e,kr} = 5 \times 10^5$, slijedi

$$C_{fk,sr} = \frac{0.072}{R_{e,L}^{1/5}} - \frac{1700}{R_{e,L}}. \quad 4.95$$

Smjenom lokalnog koeficijenta otpora $C_{f,x}$ (8.91) u izraz za modifikovani Stantonov broj (8.86) slijedi

$$\frac{N_{u,x}}{R_{e,x} P_r} P_r^{2/3} = \frac{0.0576}{2R_{e,x}^{1/5}},$$

odnosno,

$$N_{u,x} = \frac{h(x)x}{\lambda} = 0.0288 P_r^{1/3} R_{e,x}^{4/5}. \quad 8.96$$

Lokalni koeficijent konvekcije će, prema tome, biti

$$h(x) = \frac{\lambda}{x} 0.0288 P_r^{0.333} R_{e,x}^{0.8}. \quad 8.97$$

Srednja vrijednost ovog koeficijenta na površini dužine L slijedi iz izraza

$$h_{sr} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx,$$

u obliku

$$h_{sr} = \frac{\lambda}{L} 0.036 P_r^{0.333} R_{e,l}^{0.8}. \quad 8.98$$

Srednja vrijednost Nusselt-ovog broja na dužini L je,

$$N_{u,sr} = \frac{h_{sr} L}{\lambda} = 0.036 P_r^{0.333} R_{e,L}^{0.8}. \quad 8.99$$

Ovaj rezultat je dobijen pod pretpostavkom da turbulentni granični sloj počinje na prednjoj ivici površine. Ukoliko je laminarna sekcija relativno duga i ako se razmjena toplote odvija i na tom dijelu, onda će srednji koeficijent konvekcije biti

$$h_{k,sr} = \frac{1}{L} \left(\int_0^{x_{kr}} h_{lam}(x) dx + \int_{x_{kr}}^L h_{urb}(x) dx \right). \quad 8.100$$

Primjenom izraza (8.29) za laminarnu oblast i (8.97) za turbulentnu oblast, za $R_{e,kr} = 5 \times 10^5$, slijedi:

$$h_{k,sr} = \frac{\lambda}{L} 0.036 P_r^{0.333} (R_{e,L}^{0.8} - 23200), \quad 8.101$$

$$N_{uk,sr} = \frac{h_{k,sr} L}{\lambda} = 0.036 P_r^{0.333} (R_{e,L}^{0.8} - 23200). \quad 8.102$$

Sve karakteristike fluida koje zavise od temperature se određuju prema srednjoj temperature, poznatoj kao temperature filma T_f

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2}. \quad 8.103$$

8.6

Strujanje kroz prave kružne cijevi

Strujna slika pri strujanju fluida kroz zagrijanu cijev je prikazana na sl.8.5. Pri ulasku fluida konstantne temperature T_0 u cijev čija je temperatura zida T_A veća od temperature fluida T_0 dolazi do zagrijavanja fluida i formiranja toplotnog graničnog sloja debljine $\delta_i(x)$.

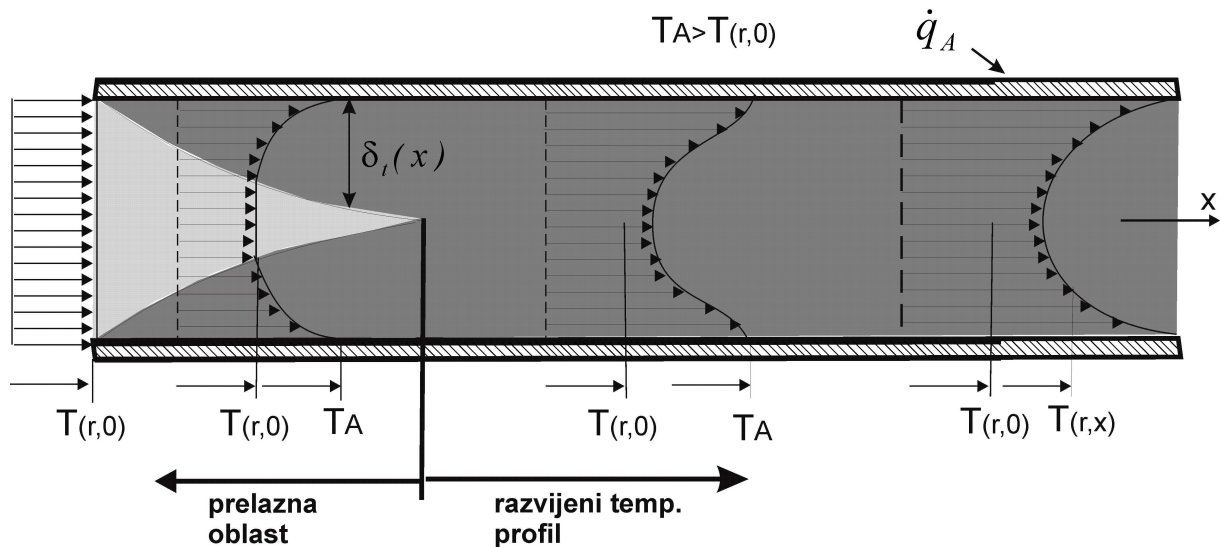
Poslije određenog rastojanja, x_{pr} , koje definiše prelaznu oblast, debljina graničnog sloja se izjednačava sa poluprečnikom cijevi i dolazi do formiranja punog temperaturskog profila. Dužina prelazne oblasti zavisi od vrste strujanja [6]. Za laminarno strujanje je definisana izrazom

$$\frac{x_{pr}}{D} = 0.05 R_{eD} P_r, \quad 8.104$$

dok se za turbulentno strujanje kreće u granicama

$$10 \leq \frac{x_{pr}}{D} \leq 60, \quad 8.105$$

zavisno od oblika ulaznog profila cijevi i Pr broja.



SI.8.5 Razvoj temperaturskog graničnog sloja i formiranje temperaturskog profila u zagrijanoj kružnoj cijevi

Zagrijavanje cijevi se izvodi na različite načine. Najčešće se koriste cijevi sa konstantnim toplotnim fluksom,

$$\dot{q}_A = \frac{d\dot{Q}_A}{D\pi dx} = const, \quad 8.106$$

ili sa konstantnom temperaturom zida cijevi $T_A = const$.

U prvom slučaju je toplota dovedena po jedinici dužine zida cijevi, konstantna duž cijevi. Ovakav način zagrijavanja se može ostvariti u cijevi sa električnim grijačem ravnomjerno raspoređenim duž cijevi, kao i u cijevi koja se ravnomjerno zagrijava putem radijacije iz nekog toplotnog izvora. U drugom slučaju cijev je smještena u isparivač ili kondenzator ili u spoljašnji fluid čiji je toplotni kapacitet, $\dot{m}c$, mnogo veći od toplotnog kapaciteta fluida koji struji u cijevi, što uslovljava konstantnu temperaturu zida cijevi. Očigledno je da se konstantan toplotni fluks i konstantna temperatura zida cijevi ne mogu ostvariti istovremeno. Ako je toplotni fluks konstantan temperatura zida cijevi mora varirati duž cijevi i obratno. Jedan od značajnih parametara za analizu problema transporta toplotne energije kroz cijevi je srednja temperatura po poprečnom presjeku cijevi. Kao što srednja brzina, v_{sr} , slijedi iz uslova jednakosti protoka (transporta mase) definisanog preko stvarne, $v = f(r)$, i srednje brzine,

$$\dot{m} = \int_A \rho v dA = \rho v_{sr} A \rightarrow v_{sr} = \frac{1}{\rho A} \int_A \rho v dA, \quad 8.107$$

tako isti i transport unutrašnje energije ili entalpije određen u funkciji stvarne ili srednje brzine i temperature mora biti indentičan.

Unutrašnja energija koju fluid transportuje pri strujanju duž cijevi, u nekom presjeku x , je određena sledećim izrazom

$$\dot{U} = \int_A \rho v c_v T dA, \quad 8.108$$

u kome je v brzina strujanja fluida koja je, u datom presjeku x , funkcija rastojanja r od ose cijevi, $v = f(r)$, dok je c_v specifična toplota fluida. U cilju pojednostavljenja proračuna

transportovane energije, uvodi se srednja temperatura T_{sr} i srednja specifična toplota $c_{v_{sr}}$, analogno srednjoj brzini strujanja v_{sr} , tako da je,

$$\dot{U} = \int_A \rho v c_v T dA = \rho v_{sr} c_{v_{sr}} T_{sr} A, \quad 8.109$$

odnosno,

$$T_{sr} = \frac{1}{\rho v_{sr} c_{v_{sr}} A} \int_A \rho v c_v T dA = \frac{1}{\dot{m} c_{v_{sr}}} \int_A \rho v c_v T dA. \quad 8.110$$

Srednja temperatura se može odrediti i na osnovu analize transporta entalpije, na osnovu čega se dobija,

$$T_{sr} = \frac{1}{\dot{m} c_{p_{sr}}} \int_A \rho v c_p T dA. \quad 8.111$$

U najvećem broju slučajeva se promjena specifične toplote po poprečnom presjeku može zanemariti ($c_{p_{sr}} = c_p$ i $c_{v_{sr}} = c_v$), dok je za tečnosti $c_p \approx c_v = c$. Imajući to u vidu, predhodni izrazi za srednju temperaturu se svode na isti oblik,

$$T_{sr} = \frac{1}{\dot{m}} \int_A \rho v T dA. \quad 8.112$$

Usled konvektivnog prelaza toplote sa zida cijevi na fluid, pri konstantnom toplotnom fluksu ili temperaturi zida cijevi, dolazi do permanentnog zagrijavanja fluida pri njegovom strujanju duž cijevi. To znači da će, za razliku od brzinskog profila koji se formira poslije određene prelazne oblasti i dalje ostaje nepromijenjen, $\partial v / \partial x = \partial v_{sr} / \partial x = 0$, temperaturski profil mijenjati svoj oblik duž cijevi, $\partial T / \partial x \neq 0$, $\partial T_{sr} / \partial x \neq 0$. Eksperimentalnim putem je, međutim, utvrđeno postojanje sličnih bezdimenzionih profila temperature, odnosno da se bezdimenzioni temperaturski profil $(T_A - T) / (T_A - T_{sr})$, praktično ne mijenja duž ose cijevi.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{T_A(x) - T(r, x)}{T_A(x) - T_{sr}(x)} \right] = 0. \quad 8.113$$

Integraljenjem izraza (8.113) slijedi,

$$\frac{T_A(x) - T(r, x)}{T_A(x) - T_{sr}(x)} = f(r). \quad 8.114$$

Izvod ove funkcije na zidu cijevi će biti,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{T_A - T}{T_A - T_{sr}} \right]_{r=R_0} = f'(r)_{r=R_0} = C, \quad 8.115$$

odnosno,

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = -(T_A - T_{sr}) C. \quad 8.116$$

Količina toplote razmijenjena usled kondukcije na zidu cijevi će biti,

$$d\dot{Q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_0} D \pi dx = \lambda (T_s - T_{sr}) C D \pi dx. \quad 8.117$$

Ova toplota je jednaka količini toplote razmijenjene usled konvekcije, koja se na osnovu Newton-ovog zakona o konvekciji (1.4), može definisati u odnosu na srednju temperaturu T_{sr} ,

$$d\dot{Q} = h D \pi (T_s - T_{sr}) dx. \quad 8.118$$

Izbor temperaturske razlike je proizvoljan. Ukoliko bi se umjesto srednje temperature odabrala temperatura fluida u osi cijevi, dobijeni rezultat bi takodje bio tačan, međutim, izraz za koeficijent konvekcije, h , bi imao drugačiji oblik. Upoređujući (8.117) i (8.118) slijedi,

$$\frac{h}{\lambda} = C \quad (h = h(x), \lambda = \lambda(x)), \quad 8.119$$

odnosno,

$$N_u = \frac{hD}{\lambda} = const. \quad 8.120$$

Nusselt-ov broj će, prema tome, imati konstantnu vrijednost duž cijevi. Ukoliko se zanemari uticaj temperature na promjenu osobina fluida ili se uzmu neke srednje vrijednosti fizičkih osobina, onda će i koeficijent konvekcije, h , biti konstantan duž cijevi. Na osnovu izraza za toplotni fluks

$$\dot{q}_A = h(T_A - T_{sr}) = const, \quad 8.121$$

slijedi da će u tom slučaju, pri konstantnom toplotnom fluksu biti,

$$\frac{\partial T_A}{\partial x} = \frac{\partial T_{sr}}{\partial x}. \quad 8.122$$

Temperaturski gradijent u nekom proizvoljnom presjeku cijevi se može, na osnovu (8.113), izraziti u sledećem obliku,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_A}{dx} - \frac{T_A - T}{T_A - T_{sr}} \frac{dT_A}{dx} + \frac{T_A - T}{T_A - T_{sr}} \frac{dT_{sr}}{dx}. \quad 8.123$$

Kombinujući izraze (8.122) i (8.123), slijedi da će, pri konstantnom toplotnom fluksu biti,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_A}{\partial x} = \frac{\partial T_{sr}}{\partial x}, \quad 8.124$$

što znači da temperaturski gradijent ne zavisi od rastojanja od ose cijevi.

U slučaju konstantne temperature zida cijevi, temperaturski gradijent će biti

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_A - T}{T_A - T_{sr}} \frac{dT_{sr}}{dx}. \quad 8.124$$

U dodatku **A7** su izvedeni izrazi za Nusselt-ov broj pri laminarnom strujanju polazeći od pretpostavke (8.113) o postojanju sličnih profila temperature:

Laminarno strujanje, konstantan toplotni fluks

$$N_u = \frac{hD}{\lambda} = 4.36, \quad \dot{q}_s = const. \quad 8.125$$

Laminarno strujanje, konstantna temperature zida cijevi

$$N_u = \frac{hD}{\lambda} = 3.66, \quad T_s = const. \quad 8.126$$

Koeficijent toplotne provodnosti, λ , treba odrediti za srednju temperature fluida, T_{sr} .

Nusselt-ov broj pri turbulentnom strujanju je određen po analogiji sa strujanjem u graničnom sloju preko ravnog zida (8.86),

$$\frac{1}{2} C_{f,x} = S_{t,x} P_r^{2/3} = \frac{N_{uD}}{R_{eD} P_r} P_r^{2/3}. \quad 8.127$$

U cilju odredjivanja Nusselt-ovog broja neophodno je poznavati koeficijent trenja fluida pri strujanju kroz prave kružne cijevi. Postoje različiti podaci i niz analitičkih izraza, zavisno od vrste cijevi i režima strujanja. Ovi podaci se mogu naći u klasičnoj literaturi koja obradjuje probleme Mehanike fluida ili problematiku strujanja kroz cijevi. Najpopularniji rezultati su prezentirani u vidu Moody-ievog dijagrama[7], koji se za hidraulički glatke cijevi može aproksimirati sledećim analitičkim izrazima,

$$f = 0.316 R_{eD}^{-1/4}, \quad R_{eD} \leq 2 \times 10^4, \quad 8.128$$

$$f = 0.184 R_{eD}^{-1/5}, \quad R_{eD} \geq 2 \times 10^4. \quad 8.129$$

Umjesto ovih izraza se može upotrijebiti i jedinstven izraz Petukhov-a [8],

$$f = (0.790 \ln R_{eD} - 1.64)^{-2}, \quad 3000 \leq R_{eD} \leq 5 \times 10^6. \quad 8.130$$

Treba imati u vidu da je koeficijent trenja f , prema Moody-ju ili Moody-jev koeficijent trenja definisan sledećim izrazom,

$$dp = f \frac{dx}{D} \frac{v_{sr}^2}{2} \quad 8.131$$

za razliku od koeficijenta trenja C_f , koji je određen izrazom

$$C_f = \frac{\tau_s}{\rho v_{sr}^2 / 2}. \quad 8.132$$

Iz uslova ravnoteže fluidne mase između dva preseka cijevi na rastojanju dx , sledi

$$C_f = \frac{f}{4}. \quad 8.133$$

Kombinujući izraze (8.133), (8.129) i (8.127), dobija se Nusselt-ov broj za turbulentno strujanje kroz prave kružne cijevi,

$$N_{uD} = 0.023 R_{eD}^{4/5} P_r^{1/3}. \quad 8.134$$

Pored ovog izraza u upotrebi je i Dittus-Boelter-ova formula,

$$N_{uD} = 0.023 R_{eD}^{4/5} P_r^n, \quad 8.135$$

u kojoj je $n = 0.4$, pri zagrijavanju fluida, $T_s > T_{sr}$, odnosno $n = 0.3$, pri hlađenju fluida, $T_s < T_{sr}$. Ova formula je potvrđena eksperimentalnim putem u sledećim granicama:

$$\begin{aligned} 0.7 \leq P_r \leq 160 \\ R_{eD} \geq 10000 \\ L/D \geq 10. \end{aligned} \quad 8.136$$

Formula može biti korišćena za male ili srednje temperaturske razlike, $T_s - T_{sr}$, koje uslovljavaju blage promjene fizičkih osobina fluida po poprečnom preseku cijevi. Pri velikim temperaturskim gradijentima je pogodnija sledeća formula Sieder-a i Tate-a [9],

$$N_{uD} = 0.027 R_{eD}^{4/5} P_r^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14}, \quad 8.137$$

u granicama,

$$\begin{aligned} 0.7 \leq P_r \leq 16700 \\ R_{eD} \geq 10000 \\ L/D \geq 10. \end{aligned} \quad 8.138$$

Sve osobine fluida osim μ_s su određene za srednju temperature fluida T_{sr} .

Upotrebom navedenih formula mogu se pojaviti relativno velike greške, čak do 20%. Tačniji rezultati sa greškama manji od 10% se mogu ostvariti upotrebom složenijih formula, kao npr. formule Pethukov-a (x),

$$N_{uD} = \frac{(f/8) R_{eD} P_r}{1.07 + 12.7 (f/8)^{1/2} (P_r^{2/3} - 1)}, \quad 8.139$$

u kojoj se koeficijent trenja može odrediti iz Moody-jevog dijagrama. Ovaj izraz važi u oblasti $0.5 < P_r < 2000$, $10^4 < R_{eD} < 5 \times 10^6$. Osobine fluida treba odrediti u odnosu na srednju temperature T_{sr} . Formula (8.139) se može koristiti za glatke ili kao prva aproksimacija za hrapave cijevi. Analiza uticaja hrapavosti na Nusselt-ov broj se može naći u Bhatt i Shah (x). Sve navedene formula se mogu koristiti sa relativno dobrom tačnošću za slučaj konstantnog toplotnog fluksa kao i za slučaj konstantne temperature zida cijevi.

Literatura

- [1] Polhausen, E., Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung, Z. Angew. math. Mech., 1, 115, 1921.
- [2] Nikuradse, J., Stromungsgesetze in rauhen Rohren, Forsch. Arb. Ingenieurw, 361, 1933.
- [3] Clauser, F.H., J. Aeronautic Sci. vol. 21, pp. 91-180, 1954.
- [4] Clauser, F.H., Adv. Appl. Mech., vol. 4, pp. 1-51, 1956.
- [5] Schlichting, H., Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [6] Kays, W.M., Crawford, M.E., Convective Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [7] Mody, L.F., Friction Factors in Pipe Flow, Trans. ASME, 66, 671, 1944.
- [8] Petukov, B.S., in T.F. Irvine and J.P. Hartnett, Eds. Advances in Heat Transfer, vol.6, Academic Press, New York, 1970.
- [9] Sieder, E.N., and Tate, G.E., Ind. Eng. Chem., 28, 1429, 1936.

GLAVA 9

SLOBODNA KONVEKCIJA



Franz Grashof
1826-1893

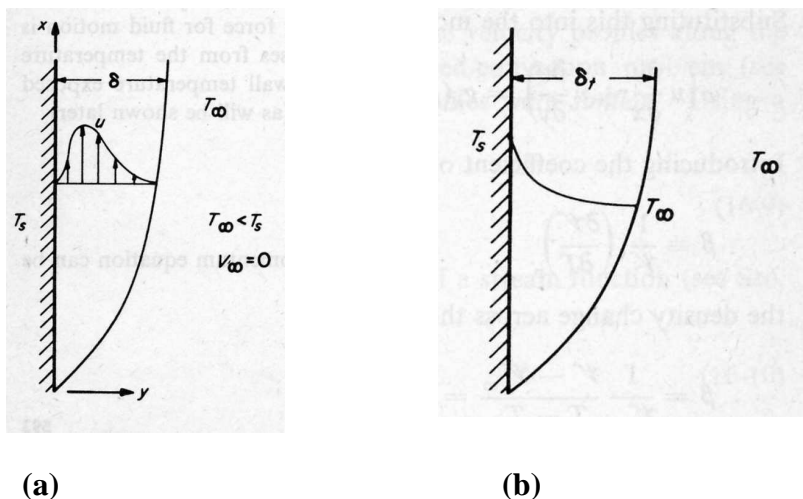
Uvod

Kada se fluid grije ili hladi u polju zemljine teže, može doći do formiranja uzgonskih sila koje mogu izazvati strujanje fluida. Proces razmjene energije sa graničnim površinama u ovim uslovima je poznat kao slobodna ili prirodna konvekcija. Ona se odvija bez prisustva pumpe ili ventilatora i nije uslovljena propulzionim efektima kretanja tijela u odnosu na fluid ili obratno. Prirodna konvekcija se pojavljuje kada zapreminske sile djeluju na fluid promenljive gustine. Najčešće je gradiejent gustine uslovljen temperaturskim gradijentom, dok su zapreminske sile uglavnom sile zemljine teže. Pored sila zemljine teže, zapreminske sile mogu biti centrifugalne u rotacionim mašinama ili koriolisove u atmosferskim strujanjima. Brzine strujanja pri prirodnoj konvekciji su mnogo manje od brzina pri prinudnoj konvekciji, pa je i razmijenjena količina toplote znatno manja negu pri prinudnoj konvekciji. I pored toga, prirodna konvekcija igra značajnu ulogu pri zagrijavanju prostorija i hladjenju različitih uređaja, npr. elektronskih elemenata, imajući u vidu da su sistemi sa prirodnom konvekcijom znatno jeftiniji i pouzdaniji od sistema sa prinudnom konvekcijom. Pored toga, prirodna konvekcija u mnogim složenim sistemima uslovljava process razmjene energije usled prinudne konvekcije. Prirodna konvekcija može biti spoljašnja kada okolni fluid razmjenjuje energiju sa zidom različite temperature ili unutrašnja kada fluid struji unutar prolaza različitog poprečnog presjeka. U ovom poglavlju će biti pročavana slobodna konvekcija izazvana zagrijavanjem ili hladjenjem fluida u kontaktu sa okolnim površinama.

9.1

Jednačine graničnog sloja pri slobodnoj konvekciji

Jednačine graničnog sloja su slične jednačinama pri prinudnoj konvekciji. Suštinska razlika je u tome što se pri prirodnoj konvekciji zapreminske sile u odnosu na sile pritiska ne mogu zanemariti, što je najčešće bio slučaj kod prinudne konvekcije. Klasičan primjer formiranja graničnog sloja na vertikalnom zidu je prikazan na sl.9.1.



Sl.9.1 Razvoj graničnog sloja na vertikalnoj zagrijanoj ploči. (a) Brzinski granični sloj. (b) Temperaturski granični sloj

Fluid, čija je temperature manja od temperature zida, se u blizini zida zagrijava usled čega dolazi do smanjenja njegove gustine, što uslovljava kretanje fluida u vertikalnom pravcu. S

obzirom da je brzina na zidu jednaka nuli (usled ljepljenja), a dovoljno daleko od zida takodje jednaka nuli usled nepromijenjene gustine, strujna slika ima oblik prikazan nasl.9.1(a). U slučaju kada je temperatura fluida veća od temperature zida doći će do strujanja fluida u suprotnom smjeru.

Može se uočiti da će u strujnom polju u neposrednoj blizini zida, kao i u graničnom sloju biti:

$$v_y \ll v_x; \quad \frac{\partial v_{x,y}}{\partial x} \ll \frac{\partial v_{x,y}}{\partial y}, \quad 9.1$$

Imajući to u vidu, polazeći od Navier-Stokes-ovih jednačina (2.39) slijede jednačine, indentične jednačinama graničnog sloja (4.17-4.19), koje se u slučaju stacionarnog strujanja svode na sledeći oblik:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad 9.2$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad 9.3$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad 9.4$$

sa graničnim uslovima,

$$y = 0, v_x = v_y = 0, \quad 9.5$$

$$y \rightarrow \infty, v_x = v_y = 0, \partial p / \partial x = \rho_\infty g_x = -\rho_\infty g. \quad 9.6$$

Analizom reda veličine pojedinih članova u jednačini (3.50), dobija se odgovarajući diferencijalni oblik energijske jednačine graničnog sloja pri slobodnoj konvekciji,

$$\rho \left(v_x \frac{\partial i}{\partial x} + v_y \frac{\partial i}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 9.7$$

sa sledećim graničnim uslovima,

$$y = 0, v_x = v_y = 0, T = T_s \quad 9.8$$

$$y \rightarrow \infty, v_x \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, \partial v_x / \partial y = 0, \partial T / \partial y = 0 \quad 9.9$$

Ova jednačina je indentična energijskoj jednačini laminarnog graničnog sloja (4.51), sa različitim graničnim uslovima.

Pri strujanja idealnog gasa ($i=c_p T$, $\lambda=\text{const}$), i tečnosti ($c_p \approx c_v$), imajući u vidu da se uticaj sila pritiska na zagrijavanje fluida u ovom slučaju može zanemariti, energijska jednačina se svodi na sledeći oblik, sa odgovarajućim graničnim uslovima,

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad 9.10$$

$$y = 0, v_x = v_y = 0, T = T_s,$$

$$y \rightarrow \infty, v_x \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, \partial v_x / \partial y = 0, \partial T / \partial y = 0.$$

S obzirom na granični uslov (9.6) za pritisak na spoljnoj granici graničnog sloja, jednačina graničnog sloja (9.2) se može napisati u obliku,

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = g \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad 9.11$$

u kome je $\Delta \rho = \rho_\infty - \rho$.

Prvi član na desnoj strani ove jednačine predstavlja uzgonsku silu. Kada je promjena gustine uslovljena promjenom temperature, promjena gustine se može izraziti u funkciji koeficijenta zapreminskog širenja fluida β ,

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_p = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p. \quad 9.12$$

Pri relativno malim promjenama gustine može se aproksimirati sledećim izrazom,

$$\beta \approx - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta T} \Big|_p \approx - \frac{1}{\rho} \frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T}. \quad 9.13$$

Imajući u vidu da je promjena pritiska u pravcu y-ose jednaka nuli, slijedi da je

$$\Delta \rho = \rho_\infty - \rho = \rho \beta (T - T_\infty), \quad 9.14$$

što poslije smjene u jednačinu (9.11) daje,

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad 9.15$$

dok jednačina kontinuiteta i energijska jednačina, sa odgovarajućim graničnim uslovima, ostaju nepromijenjene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad 9.16$$

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad 9.17$$

$$y = 0, \quad v_x = v_y = 0, \quad T = T_s, \quad 9.18$$

$$y \rightarrow \infty, \quad v_x \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad \partial v_x / \partial y = 0, \quad \partial T / \partial y = 0. \quad 9.19$$

Na prvi pogled izgleda neprihvatljivo da se uzima u obzir promjena gustine u graničnom sloju a polazi od jednačina laminarnog strujanja nestišljivog fluida. Medjutim, može se pokazati da je zanemareni član $\partial(\text{div} \vec{v}) / \partial x$, u Navier-Stokes-ovoj jednačini (2.39) manjeg reda veličine usled malih promjena duž x-ose. Ovakav prilaz je poznat kao Boussinesq-ova aproksimacija. Jednačina graničnog sloja (9.15) i energijska jednačina (9.17) se mogu napisati u bezdimenzionom obliku uvodeći sledeće promenljive:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad v_x^* = \frac{v_x}{v_0}, \quad v_y^* = \frac{v_y}{v_0}, \quad T^* = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}, \quad 9.20$$

u kojima su L i v_0 , neka karakteristična dužina i brzina,

$$v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = \frac{g_x \beta (T_s - T_\infty) L}{v_0^2} T^* + \frac{1}{R_{eL}} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}}, \quad 9.21$$

$$v_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{R_{eL} P_r} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}. \quad 9.22$$

Prvi član na desnoj strani jednačine (9.21) je bezdimenzioni broj koji predstavlja uticaj uzgonskih sila. Ovaj član je, medjutim, nepogodan za praktičnu primjenu zato što sadrži nepoznatu karakterističnu brzinu v_0 . Za razliku od graničnog sloja pri prinudnoj konvekciji, nema pogodne referentne brzine pri strujanju usled prirodne konvekcije. Imajući to u vidu, umjesto ovog broja koristi se njegov proizvod sa kvadratom Reynolds-ovog broja, poznat kao Grashof-broj,

$$G_{rL} = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) L}{v_0^2} \left(\frac{v_0 L}{\nu} \right)^2 = \frac{g (T_s - T_\infty) L^3}{\nu^2}. \quad 9.23$$

Grashof broj igra istu ulogu pri prirodnoj konvekciji kao i Reynolds-ov broj pri prinudnoj konvekciji. Ovaj broj predstavlja mjeru odnosa uzgonskih i viskoznih sila.

9.2

Slobodna konvekcija pri laminarnom strujanju na vertikalnoj ploči konstantne temperature

Najjednostavniji slučaj slobodne konvekcije se odvija u blizini vertikalnog zida konstantne temperature u čijoj se okolini nalazi hladniji ili zagrijaniji fluid, sl.9.1. Fluid u blizini zida se zagrijava ili hladi usled čega dolazi do promjene njegove gustine što izaziva vertikalno kretanje, čiji će smjer zavisiti od odnosa temperature zida i fluida dovoljno daleko od zida. U blizini zida će se formirati brzinski i temperaturski granični slojevi prikazani na sl.9.1. Dok se brzina mijenja od nule na zidu, do neke maksimalne vrijednosti u graničnom sloju i ponovo do nule daleko od zida, temperature se mijenja od temperature zida, T_s , do temperature fluida dovoljno daleko od zida, T_∞ . Debljina brzinskog graničnog sloja ne mora biti jednaka debljini temperaturskog graničnog sloja. Ukoliko je ploča dovoljno duga, strujanje može postati turbulentno. Eksperimentalnim putem je dokazano da će strujanje postati turbulentno ako je ispunjen uslov

$$G_{rL} P_r > 10^9. \quad 9.24$$

da bi uopšte došlo do formiranja graničnog sloja, mora biti $G_{rL} P_r > 10^4$.

Nadjena su mnoga, manje ili više pogodna, rješenja jednačina brzinskog i temperaturskog graničnog sloja pri strujanju uz vertikalni zid. Jedno od najpoznatijih rješenja su dobili Polhausen [1] i Ostrach [1]. Na osnovu do tada poznatih eksperimentalnih rezultata, Polhausen je pretpostavio postojanje sličnih rješenja, kao i u slučaju prinudne konvekcije i uveo sledeću bezdimenzionu koordinatu,

$$\eta = \frac{y}{x} \left(\frac{G_{rx}}{4} \right)^{1/4}, \quad 9.25$$

i strujnu funkciju

$$\psi(x, y) = f(\eta) \left[4\nu \left(\frac{G_{rx}}{4} \right)^{1/4} \right]. \quad 9.26$$

Uvodjenjem bezdimenzione temperature

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}, \quad 9.27$$

polazne jednačine (9.15) i (9.17) se svode na sledeći oblik,

$$f''' + 3ff'' - 2f'^2 + \theta = 0, \quad 9.28$$

$$\theta'' + 3P_r f \theta' = 0, \quad 9.29$$

sa graničnim uslovima,

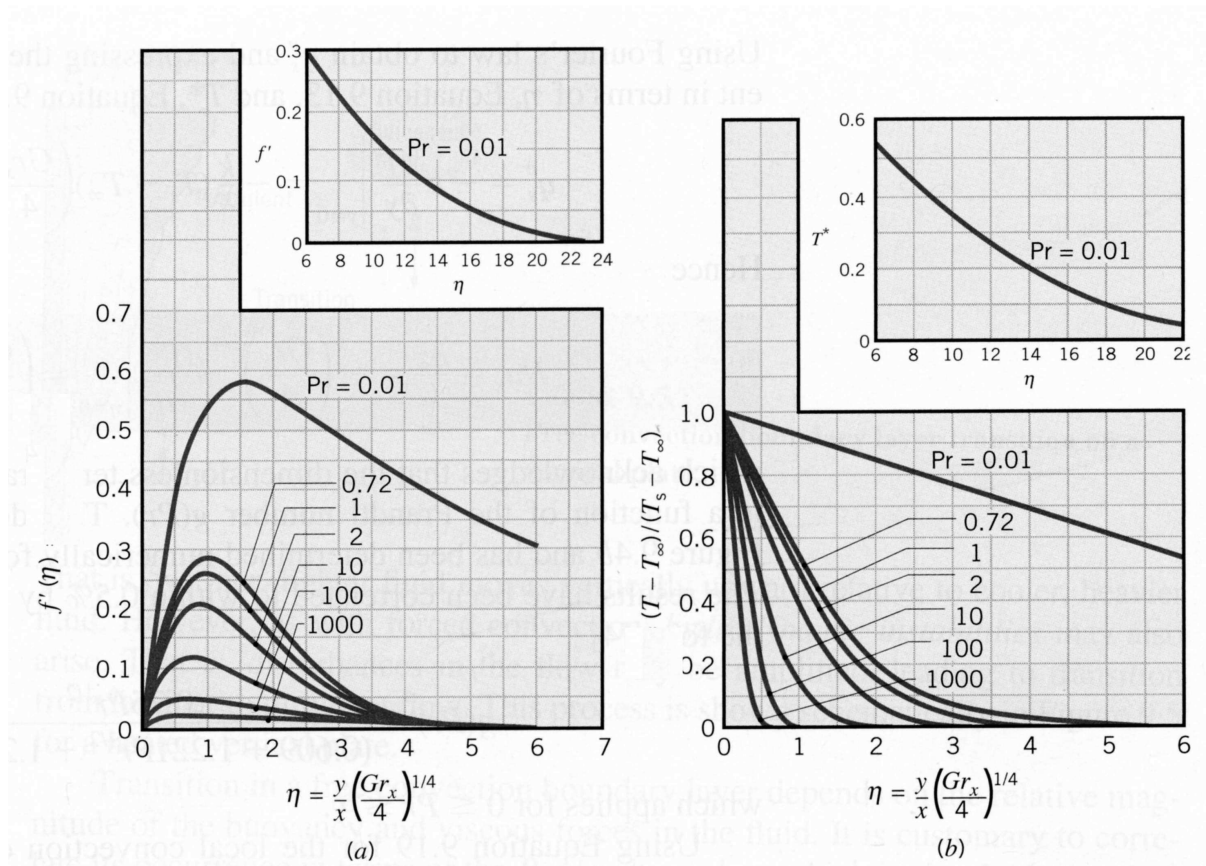
$$\eta = 0, f = f' = 0, \theta = 1, \quad 9.30$$

$$\eta \rightarrow \infty, f' \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0.$$

Polhausen je našao numeričko rješenje ovih jednačina za $P_r=0.733$, dok je Ostrach dao numeričko rješenje za $0.01 < P_r < 1000$. Dobijeni rezultati su prikazani na sl.9.2

Na osnovu prikazanih rezultata se može odrediti brzina strujanja u svakoj tački graničnog sloja, imajući u vidu da je,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{2\nu}{x} G_{rx}^{1/2} f'(\eta) \text{ i } \theta = T^* = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}. \quad 9.31$$



SI.9.2 Slobodna laminarna konvekcija na zidu konstantne temperature. (a) Brzinski profil. (b) Temperaturski profil

Može se uočiti da je za $P_r > 1$, temperaturski granični sloj tanji od brzinskog, a naročito za veće Prandtl-ove brojeve.

Dobijeni rezultati se takodje mogu koristiti za određivanje Nusselt-ovog broja, odnosno razmijenjene količine toplote. Imajući u vidu da toplota razmijenjena usled kondukcije na samom zidu,

$$\dot{q} = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{\lambda}{x} (T_s - T_\infty) \left(\frac{Gr_{rx}}{4} \right)^{1/4} \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0}, \quad 9.32$$

mora biti jednaka toploti razmijenjenoj usled konvekcije,

$$\dot{q} = h(T_s - T_\infty), \quad 9.33$$

dobija se sledeći izraz za Nusselt-ov broj,

$$N_{ux} = \frac{hx}{\lambda} = - \left(\frac{Gr_{rx}}{4} \right)^{1/4} \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0}. \quad 9.34$$

S obzirom da je $\theta = \theta(\eta, P_r)$, predhodni izraz se može napisati u obliku,

$$N_{ux} = \frac{hx}{\lambda} = \left(\frac{Gr_{rx}}{4} \right)^{1/4} g(P_r). \quad 9.35$$

Funkcija $g(P_r)$ se može odrediti na osnovu dobijenih numeričkih rezultata, na osnovu kojih je izvedena korelaciona formula,

$$g(P_r) = \frac{0.75P_r^{1/2}}{(0.609 + 1.221P_r^{1/2} + 1.238P_r)^{1/4}}. \quad 9.36$$

Srednja vrijednost koeficijenta prelaza toplote na rastojanju dužine L se može odrediti iz sledećeg izraza

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx = \frac{\lambda}{L} g(P_r) \left[\frac{g_x \beta (T_s - T_\infty)}{4\nu^2} \right]^{1/4} \int_0^L \frac{dx}{x^{1/4}},$$

što poslje integracije daje

$$\bar{h}_L = \frac{4}{3} \frac{\lambda}{L^{1/4}} g(P_r) \left[\frac{g_x \beta (T_s - T_\infty)}{4\nu^2} \right]^{1/4}, \quad 9.37$$

odnosno,

$$\bar{N}_{uL} = \frac{\bar{h}_L L}{\lambda} = \frac{4}{3} \left(\frac{G_{rL}}{4} \right)^{1/4} g(P_r). \quad 9.38$$

Na osnovu izraza (9.35) slijedi da je,

$$\bar{N}_{uL} = \frac{4}{3} N_{uL}. \quad 9.39$$

Dobijeni rezultati važe za oba slučaja; $T_s < T_\infty$ i $T_s > T_\infty$.

Sve osobine fluida osim gustine se smatraju konstantnim i određuju za referentnu temperaturu

$$T_R = \frac{T_s + T_\infty}{2}, \quad 9.40$$

dok je koeficijent zapreminskog širenja za idealne gasove

$$\beta = \frac{1}{T_R}. \quad 9.50$$

Prema Sparrow i Greg [3], referentnu temperature treba odrediti na osnovu izaza

$$T_R = T_s + 0.333(T_\infty - T_s), \quad 9.51$$

a koeficijent zapreminskog širenja iz formule,

$$\beta = \frac{1}{T_\infty}. \quad 9.52$$

Imajući u vidu da se osobine fluida smatraju konstantnim, dobijeni rezultati neće važiti u slučaju znatnih temperaturskih promjena. Kada je u pitanju vazduh, mogu se tolerisati temperaturske promjene do 100 °C.

Na dovoljno dugoj ploči može doći do pojave turbulencije. Kao što je već navedeno, do pojave turbulencije dolazi ako je Rayleigh-ijev (Ra) broj, koji je jednak proizvodu Grashof-ovog i Prandtl-ovog broja, veći od 10^9 . Da bi se formirao granični sloj mora Rayleigh-ijev broj biti veći od 10^4 . Prema tome, dobijeni rezultati važe u oblasti $10^4 < Ra < 10^9$.

Problem razmjene toplote pri slobodnoj konvekciji se može riješiti polazeći od osnovnih jednačina u integralnom obliku, na sličan način kao i u slučaju prinudne konvekcije. Primjenom integralne analize, dodatak **A8**, dobijeni su sledeći izrazi za Nusseltov broj, brzinsko i temperatursko polje:

$$N_{ux} = 0.508 P_r^{1/2} (0.952 + P_r)^{-1/4} G_{rx}^{1/4}, \quad 9.53$$

$$\bar{N}_u = \frac{4}{3} N_{uL}, \quad 9.54$$

$$\frac{\delta}{x} = 3.93 P_r^{-1/2} (0.952 + P_r)^{1/4} G_{rx}^{-1/4}, \quad 9.55$$

$$\frac{v_x}{V(x)} = \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2, \quad V(x) = 5.17 \frac{V}{x} \left(\frac{G_{rx}}{0.952 + P_r}\right)^{1/2}. \quad 9.56$$

9.3 Empirijske korelacije

Pored analitičkih postoji niz empirijskih korelacija izvedenih za različite geometrijske uslove. Ove korelacije, koje su pogodne za inženjerske proračune, imaju sledeći opšti oblik,

$$\bar{N}_{uL} = \frac{\bar{h}L}{\lambda} = CR_{al}^n, \quad 9.57$$

u kome je Rayleigh-ev broj,

$$R_{al} = G_{rL} P_r = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu\alpha}. \quad 9.58$$

Za laminarno strujanje je $n=1/4$, a za turbulentno strujanje je $n=1/3$. Sve osobine fluida se određuju za srednju temperaturu $T_f = (T_s + T_\infty)/2$.

- *Vertikalni zid*

$$10^4 < R_{al} < 10^9, \quad C=0.59, \quad n=1/4$$

$$10^9 < R_{al} < 10^{13}, \quad C=0.10, \quad n=1/3$$

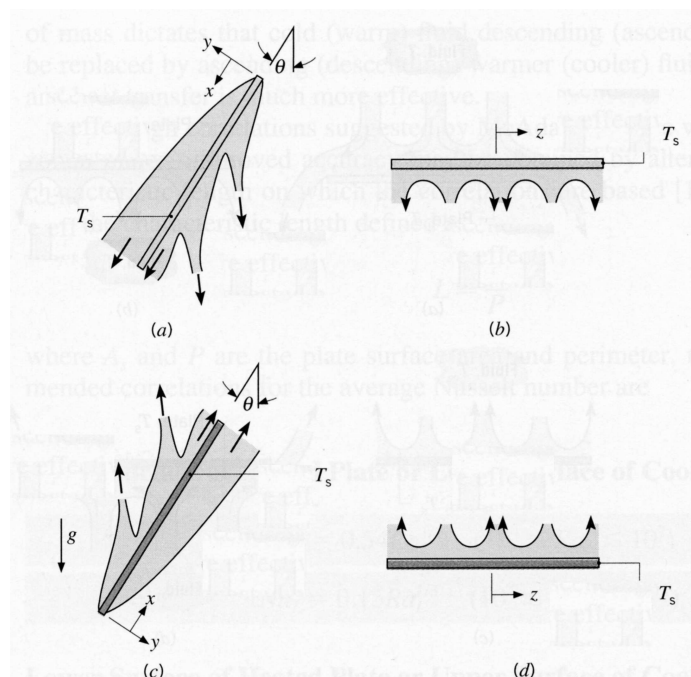
Za cjelokupnu oblast Rayleigh-ijev brojeva, čak i za brojeve manje od 10^4 , može se koristiti sledeća relacija

$$\bar{N}_{uL} = \left[0.825 + \frac{0.387 R_{al}^{1/6}}{\left[1 + (0.429/P_r)^{9/16}\right]^{8/27}} \right]^2, \quad 9.59$$

dok za oblast $10^4 \leq R_{al} \leq 10^9$, tačnije rezultate daje sledeća formula,

$$N_{uL} = 0.68 + \frac{0.670 R_{al}^{1/4}}{\left[1 + (0.492/P_r)^{9/16}\right]^{4/9}}. \quad 9.60$$

- *Nagnuti zid*



Sl.9.3

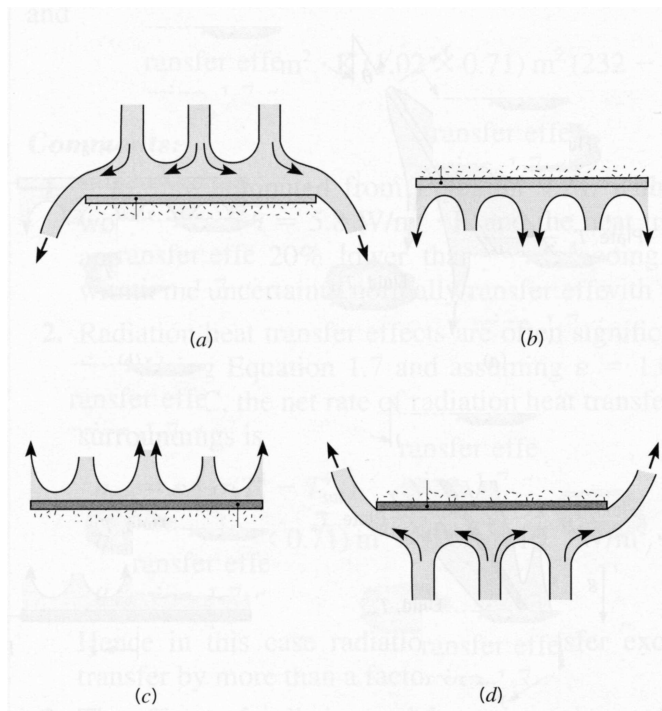
Slobodna konvekcija na nagnutoj ploči: (a) Bočni presjek strujne slike na hladnoj ploči, (b) Uzdužni presjek strujne slike na hladnoj ploči, (c) Bočni presjek strujne slike na vrućoj ploči, (d) Uzdužni presjek strujne slike na vrućoj ploči

Izrazi (9.59) i (9.60) se mogu koristiti i za nagnute zidove ako je ugao nagiba zida u granicama $0 \leq \theta \leq 60^\circ$. Treba imati u vidu da je u tom slučaju $g_x = g \cos \theta$.

Strujna slika na nagnutoj ploči je prikazana na sl.9.3 Ovi izrazi se mogu koristiti samo za gornju površinu hladne i donju površinu vruće ploče. Na suprotnim površinama strujanje je nestabilno i trodimenzionalno, tako da se moraju koristiti specijalni postupci za određivanje koeficijenta konvekcije.

- **Horizontalna ploča**

Na sl.9.4 je prikazana strujna slika na horizontalnoj ploči.



Sl.9.4

Slobodna konvekcija na horizontalnoj ploči: (a) Gornja površina hladne ploče, (b) Donja površina hladne ploče, (c) Gornja površina vruće ploče, (d) donja površina vruće ploče

$$(a), (d) \quad \bar{N}_{ul} = 0.27R_{al}^{1/4}, \quad 10^5 \leq R_{al} \leq 10^{10}, \quad 9.61$$

$$(b), (c) \quad \bar{N}_{ul} = 0.54R_{al}^{1/4}, \quad 10^4 \leq R_{al} \leq 10^7; \quad \bar{N}_{ul} = 0.15R_{al}^{1/3}, \quad 10^7 \leq R_{al} \leq 10^{11}. \quad 9.62$$

U svim ovim izrazima karakteristična dužina je jednaka odnosu površine, A_s , i obima ploče, O ,

$$L = A_s / O. \quad 9.63$$

- **Dug horizontalan cilindar**

Ovaj problem je detaljno proučavan i pregled dobijenih rezultata je dao Morgan [4] On je predložio izraz (9.57),

$$\bar{N}_{ud} = \frac{\bar{h}D}{\lambda} = CR_{ad}^n, \quad 9.64$$

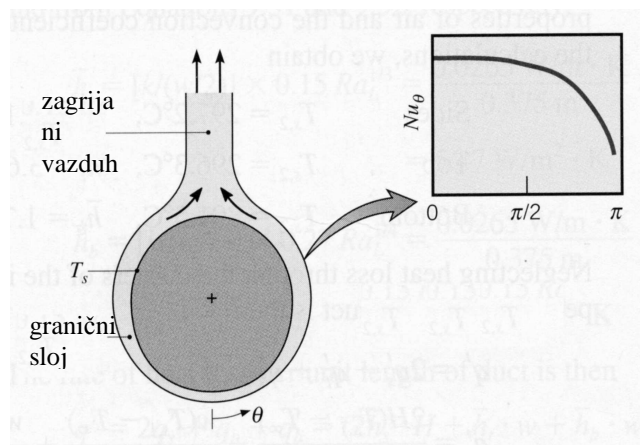
sa sledećim vrijednostima za C i n:

R_{aD}	C	n
10^{-10} - 10^{-2}	0.675	0.058
10^{-2} - 10^2	1.2	0.148
10^2 - 10^4	0.850	0.188
10^4 - 10^7	0.480	0.250
10^7 - 10^{12}	0.125	0.333

Churchill i Chu [5] su predložili jedinstvenu korelaciju za širok opseg R_a brojeva,

$$\bar{N}_{uD} = \left\{ 0.60 + \frac{0.387R_{aD}^{1/6}}{\left[1 + (0.559/P_r)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2, \quad R_{aD} \leq 10^{12}. \quad 9.65$$

Lokalna vrijednost Nusselt-ovog broja se mijenja duž cilindra opadajući počev od tačke $\theta = 0$, do tačke $\theta = \pi$, sl.9.5.



Sl.9.5
Strujna slika i Nusselt-ov broj oko horizontalnog cilindra.

- **Lopta**

Churchill (x), je predložio Sledeću korelaciju,

$$\bar{N}_{uD} = 2 + \frac{0.589R_{aD}^{1/4}}{\left[1 + (0.469/P_r)^{9/16}\right]^{4/9}}, \quad P_r \geq 0.7, \quad R_{aD} \leq 10^{11}. \quad 9.59$$

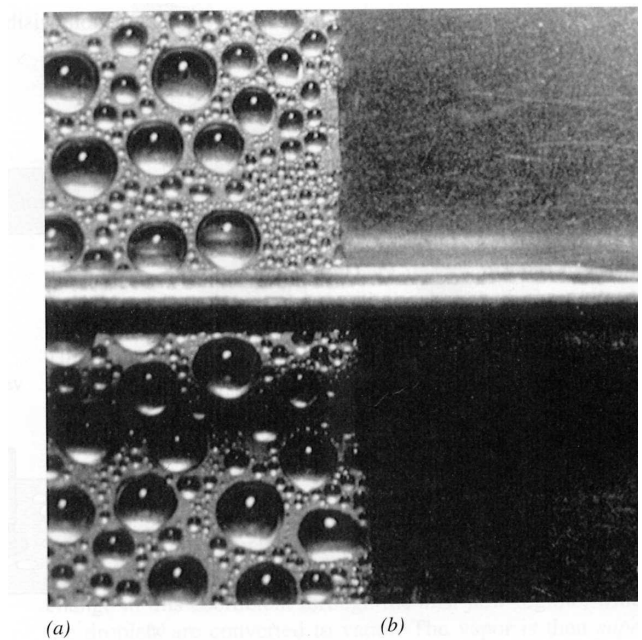
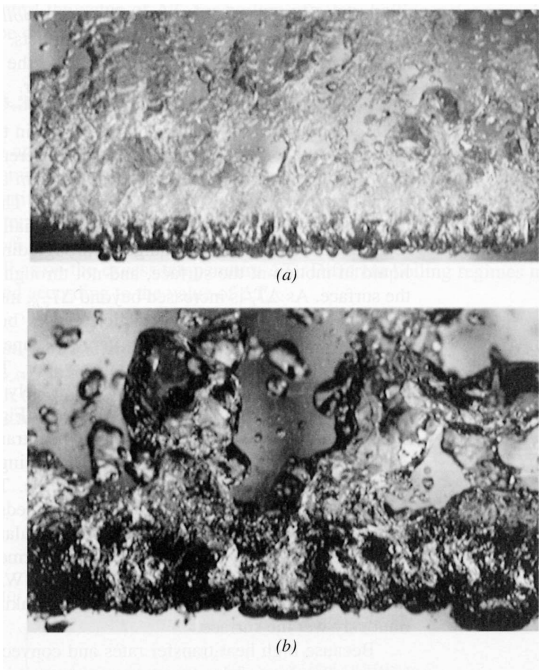
Literatura

- [1] Leighton, E.S., and Donald, R.P., Elements of Transport Phenomena, Chapter 16, McGraw-Hill, 1972.
- [2] Ostrach, S., An Analysis of Laminar Free Convection Flow and Heat Transfer About a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force, National Advisory Committee for Aeronautics, Report 1111, 1953.
- [3] Sparow, E.M., and Gregg, J.L., The Variable Fluid Property Problem in Free Convection, Trans. ASME, 80, 879, 1958.

- [4] Morgan, V.T., The Overall Convective Heat Transfer from Smooth Circular Cylinders, *Advances in Heat Transfer*, Vol. 11, Academic Press, New York, 1975, 199-264.
- [5] Churchill, S.W., and Chu, H.H.S., Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Horizontal Cylinder, *Int. J. Heat and Mass transfer*, 18, 1049, 1975.

GLAVA 10

KLJUČANJE I KONDEZACIJA



Uvod

Dva karakteristična procesa u kojim se razmjena toplote odvija uz istovremenu promjenu faze su ključanje i kondenzacija. Proces se odvija na kontaktu fluida sa graničnim površinama. Promjena faze i latentna toplota igraju značajnu ulogu u mehanizmu razmjene energije. U procesu ključanja toplota prelazi sa granične površine na fluid i obratno u procesu kondenzacije. Iako je usled kretanja fluida proces razmjene toplote u principu konvektivan, usled promjene faze može doći do razmjene toplote i uz minimalne temperaturske razlike. Pored promjene faze, znatan uticaj na proces razmjene toplote imaju i površinski napon, σ , kao i razlika gustina dvije faze. Razlike gustina tečnosti, ρ_t , i pare, ρ_p , uslovljava pojavu uzgonske sile, $g(\rho_t - \rho_p)$. Koeficijent konvekcije je u opštem slučaju usled promjene faze i pojave utgonskih efekata, znatno veći nego u slučaju prinudne konvekcije bez promjene faze. Proces ključanja nastaje kada temperatura površine, T_A , postane veća od temperature zasićenja, T_z , na odgovarajućem pritisku. Ključanje se može odvijati u različitim uslovima. Fluid može ključati u posudi kojoj kao cjelina miruje, dok se kretanje ostvaruje usled slobodne konvekcije i pojave mjehurova pare, ili u nekoj cijevi u kojoj se kreće pod uticajem neke spoljašnje sile, npr. pumpe. Kada je temperatura tečnosti u posudi manja od temperature zasićenja može doći do ponovne kondenzacije mjehurova pare formiranih na kontaktnoj površini.

Do kondenzacije dolazi kada se para fluida nadje u kontaktu sa površinom čija je temperatura manja od temperature zasićenja. Latentna toplota pare se oslobadja i prenosi na kontaktnu površinu usled čega dolazi do kondenzacije fluida. Ovakav vid kondenzacije je poznat kao površinska kondenzacija. Do kondenzacije može doći i kada se para fluida nadje u kontaktu sa fluidom (gasom ili tečnošću) čija je temperatura niža od temperature zasićenja. Površinska kondenzacija se može odvijati na dva karakteristična načina zavisno od uslova na kontaktnoj površini. Najčešći slučaj je kada tanki film kondenzata prekrije čitavu površinu i poznat je kao filmska kondenzacija. Može se ostvariti na čistim površinama bez čestica prljavštine. Drugi vid je tzv. kapljična kondenzacija koja se odvija na kontanimiranim površinama.

Kao i kod prinudne i slobodne konvekcije razmijenjena količina toplote se definiše Newtonovim zakonom (1.4), na osnovu koga slijedi,

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = h(T_A - T_z) = h\Delta T \quad 10.1$$

odnosno,

$$\dot{Q} = hA(T_A - T_z), \quad 10.2$$

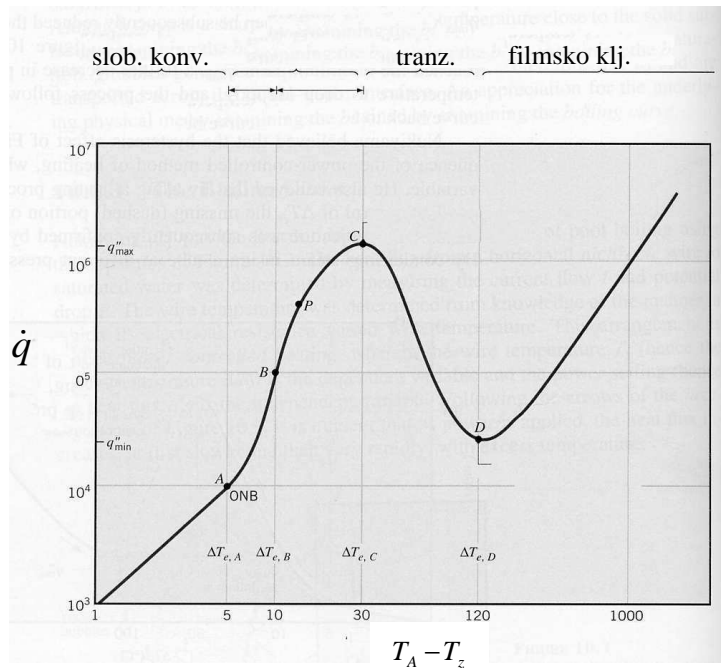
S obzirom da proces promjene faze karakterišu promjena gustine, specifične toplote, viskoznosti, koeficijenta kondukcije i drugih fizičkih karakteristika, koeficijent konvekcije pri ključanju ili kondenzaciji je mnogo složenija funkcija nego u slučaju klasične konvekcije. Imajući to u vidu, najveći broj problema razmjene toplote pri ključanju i kondenzaciji se rješava na osnovu empirijskih formula dobijenih eksperimentalnim putem i metodom dimenzione analize.

10.1

Ključanje u posudi

Fluid koji se nalazi na temperaturi zasićenja u nekoj posudi zagrijava se potopljenim grijanjem ili se toplota dovodi kroz kontaktnu površinu iz nekog spoljnog izvora. Zavisnost

razmijenjene količine toplote od temperaturske razlike grijača, T_A , i tečnosti na temperaturi zasićenja, T_z , je prikazana na sl.10.1, koja se odnosi na vodu na pritisku od jedne atmosfere. Slične krive se mogu dobiti i za ostale tečnosti.



Sl.10.1
Različiti režimi ključanja u posudi

Zavisno od temperaturske razlike grijača i tečnosti, mogu se uočiti sledeći režimi ključanja: ključanje pri prirodnoj konvekciji, mješurasto ključanje, prelazna oblast i filmsko ključanje.

Prirodna konvekcija. Prirodna konvekcija se pojavljuje pri razlici temperatura grijača i temperature zasićenja manje od 5°C . Kretanje fluida je uslovljeno efektima prirodne konvekcije bez pojave mješurova pare. Koeficijent konvekcije se može odrediti na osnovu izraza datih u poglavlju o prirodnoj konvekciji.

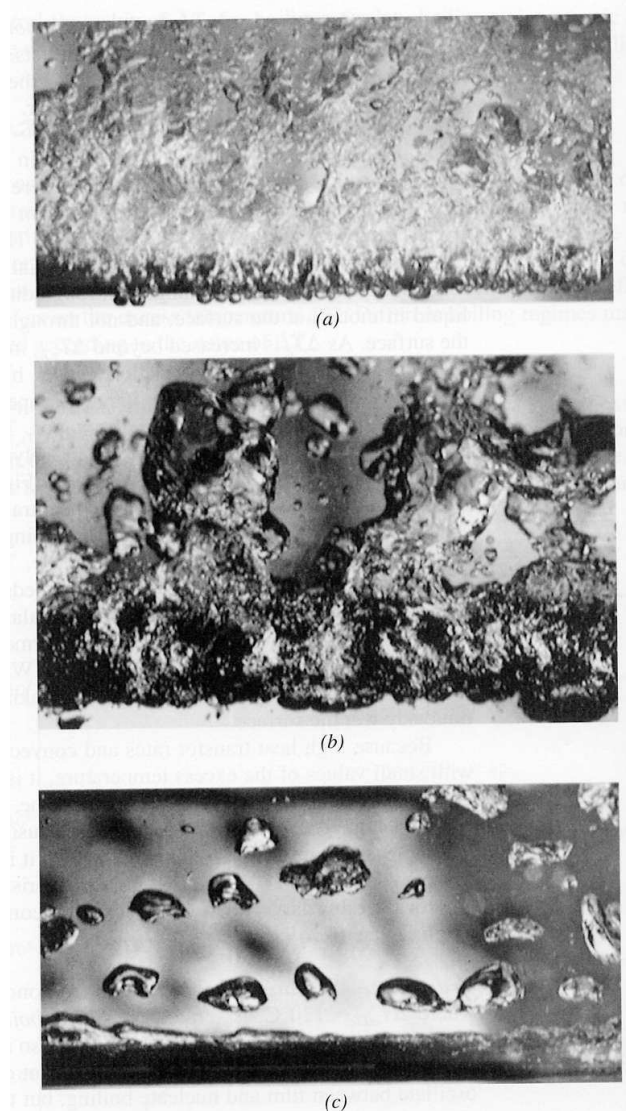
Mješurasto ključanje. Mješurasto ključanje se pojavljuje u oblasti temperaturskih raslika $5^{\circ} \leq \Delta T \leq 30^{\circ}\text{C}$. U ovoj blasti se razlikuju dva podrežima.

Oblast AB karakterišu izolovani mješuri koji se pojavljuju na grijaču, odvajaju od njega i kreću ka slobodnoj površini. Sa povećanjem temperature broj mješura raste usled čega dolazi do njihove interakcije. U oblasti BC dolazi do formiranja kolona mješura, zatim njihovog spajanja i formiranja parnih čepova i konačno parnih mlazeva. Tačka P odgovara maksimalnoj vrijednosti koeficijenta konvekcije h . Počev od ove tačke, koeficijent konvekcije opada usled formiranja parnog sloja oko grijača koji ima visok toplotni otpor. Iako ovaj koeficijent opada sa daljim porastom temperaturske razlike, razmijenjena količina toplote i dalje raste usled porasta temperaturske razlike sve do tačke C, u kojoj dostiže maksimalnu vrijednost. Tačka C je poznata još i kao kritična tačka, ili tačka regrijavanja, jer u ovoj tački može doći do pregorijevanja grijača ukoliko ne postoji mogućnost kontrole njegove snage. Razmjenu toplote u inženjerskoj praksi treba ostavariivati u oblasti mješurastog ključanja. Primjenom izraza (10.2) može se vidjeti da je koeficijent konvekcije u ovoj oblasti veći od 10^4 (W/m^2), što je znatno iznad vrijednosti koje odgovaraju procesima bez promjene faze.

Prelazna oblast. U ovoj oblasti je izdvajanje mješura toliko intezivno da dolazi do formiranja parnog omotača oko grijača koji djeluje kao izolator između grijača i tečnosti usled čega dolazi do smanjenja koeficijenta konvekcije. Ovaj omotač je nestabilan, tako da može doći do njegovog kidanja i uspostavljanja kontakta tečnosti i grijača. Režim ključanja je izrazito

nestabilan, međutim kontakt pare i grijača je dominantan u odnosu na kontakt tečnosti i grijača i raste sa porastom temperature.

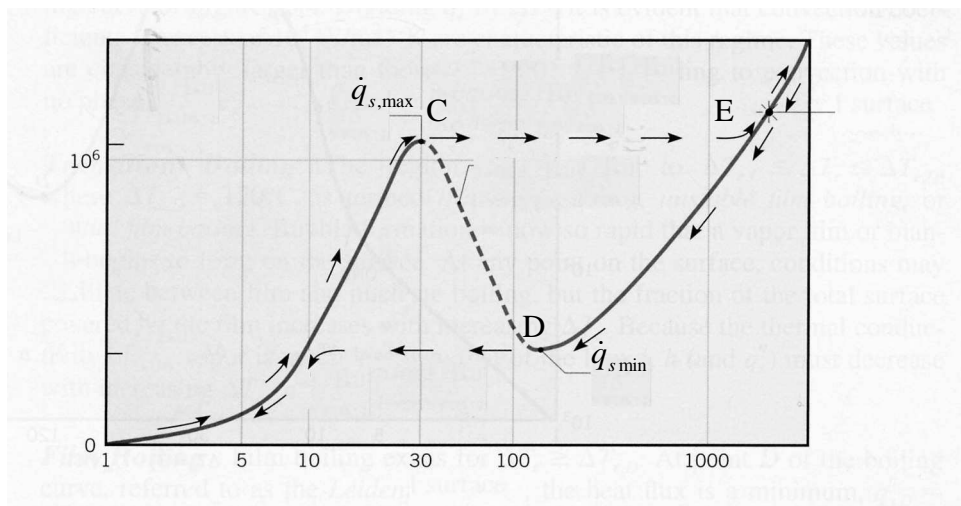
Filmsko ključanje. Ovaj proces se odvija počev od tačke D u kojoj toplotni fluks ima minimalnu vrijednost. Ova tačka je poznata kao Leidenfrost-ova tačka. Omatoč pare pokriva grijač u vidu filma. Razmjena toplote sa grijačem se odvija putem kondukcije i radijacije. Na sl.10.2 su prikazani različiti režimi ključanja u horizontalnoj cijevi.



Sl.10.2

Ključanje metanola u horizontalnoj cijevi. (a) Mjehurasto ključanje, (b) Prelazni režim, (c) Filmsko ključanje.

Da bi se ostvario režim CD neophodno je smanjiti snagu grijača, da bi se smanjio toplotni fluks sa grijača na okolni fluid. Ukoliko se snaga grijača ne smanji, proces ključanja se odvija duž linije CE, sl.10.3. Prelaz sa tačke C na tačku E je praktično trenutno i ukoliko grijač ne može izdržati temperaturu koja odgovara tački E, dolazi do njegovog topljenja odnosno pregorijevanja. Ovo je najčešća pojava u praksi. Ukoliko grijač ne pregori, postepenim smanjenjem snage grijača režim ključanja se odvija kao što je prikazano na sl.10.3. Poslije dostizanja minimalne vrijednosti, proces ključanja prelazi u oblast izolovanih mjehurova, bez dostizanja maksimalne vrijednosti. Proces ključanja pri zagrijavanj i hlađenju fluida se ne odvijaju po istoj krivoj ključanja.



Sl.10.3
 Kriva ključanja pri zagrijavanju i hladjenju zasićene vode na atmosf. pritisku

Najčešće korišćen izraz za razmijenjenu količinu toplote u oblasti mjehurastog ključanja je predložio Rohsenow [1],

$$\dot{q} = \mu_t r \left[\frac{g(\rho_t - \rho_p)}{\sigma} \right]^{1/2} \left(\frac{c_t \Delta T}{C_A r P_{rt}^n} \right)^3, \quad 10.3$$

u kome su:

μ_t - koeficijent dinamičke viskoznosti tečnosti

r - toplota isparavanja odnosno kondenzacije

ρ_t - gustina tečnosti

ρ_p - gustina pare

σ - koeficijent površinskog napona

c_t - specifična toplota tečnosti

P_{rt} - Prandtl-ov broj za tečnost

C_A, n - koeficijenti, dati u tab.10.1, koji zavise od vrste tečnosti i stanja kontaktne površine.

Tab.10.1

Fluid-površina	C_A	n
Voda-bakar:		
- neobradjen	0.0068	1.0
- poliran	0.0130	1.0
Voda-nerdjajući čelik:		
-hemijski očišćen	0.0130	1.0
- poliran	0.0130	1.0
- brušen i poliran	0.0060	1.0
Voda-mesing	0.0060	1.0
Voda-nikl	0.0060	1.0
Voda-platina	0.0130	1.0

Kuteladze [2] i Zuber [3] su odredili izraz za maksimalni toplotni fluks koji odgovara kritičnoj tački,

$$\dot{q}_{max} = \frac{\pi}{24} r \rho_p \left[\frac{\sigma g (\rho_t - \rho_p)}{\rho_p^2} \right]^{1/4} \left(\frac{\rho_t + \rho_p}{\rho_t} \right)^{1/2}. \quad 10.4$$

Zamjenom konstante $\pi/24$, sa eksperimentalnom vrijednošću, 0.149, i uzimajući da je odnos zbira gustina pare i tečnosti i gustine tečnosti praktično jednak jedinici, slijedi,

$$\dot{q}_{max} = 0.149 r \rho_p \left[\frac{g(\rho_t - \rho_p)}{\rho_p^2} \right]^{1/4} \quad 10.5$$

Maksimalni toplotni fluks ne zavisi od vrste materijala grijača dok je veoma malo zavisian od njegove geometrije. Izrazi su izvedeni za horizontalni grijač relativno velike površine ali važe i za ostale geometrije grijača ukoliko su njihove dimenzije dovoljno velike u odnosu na dimenzije mjehurova koji se formiraju na njima.

Zuber [3] je izveo sledeći izraz za minimalni toplotni fluks,

$$\dot{q}_{min} = 0.09 \rho_p r \left[\frac{g \sigma (\rho_t - \rho_p)}{(\rho_t + \rho_p)^2} \right]^{1/4} \quad 10.6$$

U oblasti filmskog ključanja, kada su temperature grijača manje od 300°C, može se koristiti sledeći izraz,

$$\bar{N}_{uD} = \frac{\bar{h}_{conv} D}{\lambda_p} = C \left[\frac{g(\rho_t - \rho_p) r' D^3}{\nu_p \lambda_p (T_s - T_y)} \right]^{1/4} \quad 10.7$$

u kome je $C=0.62$ za horizontalni cilindar a 0.67 za loptu. Korigovana toplota isparavanja r' , se određuje iz izraza $r' = r + 0.8c(T_s - T_z)$. Osobine pare se određuju na temperaturi filma, $T_f = (T_A + T_z)/2$, a osobine tečnosti na temperaturi zasićanja.

Ukoliko je temperatura grijača veća od 300°C, mora se uzeti u obzir i uticaj radijacije. Bromley [4] je predložio sledeći obrazac,

$$\bar{h}^{4/3} = \bar{h}_{conv}^{4/3} + \bar{h}_{rad} \bar{h}^{1/3} \quad 10.8$$

Ako je $\bar{h}_{rad} < \bar{h}_{conv}$, može se koristiti aproksimativni izraz,

$$\bar{h} = \bar{h}_{conv} + \frac{3}{4} \bar{h}_{rad} \quad 10.9$$

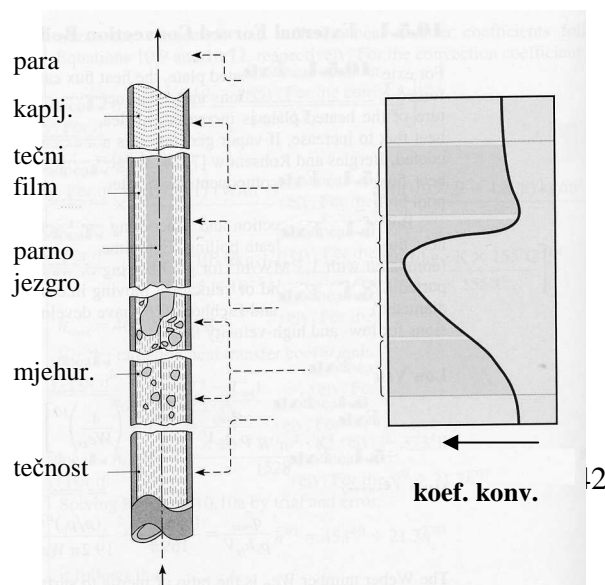
Uticaj radijacije se može odrediti iz sledećeg izraza,

$$\bar{h}_{rad} = \frac{\epsilon \sigma (T_A^4 - T_z^4)}{T_A - T_z} \quad 10.10$$

u kome je ϵ , koeficijent emisije čvrste površine a σ Stefan-Boltzmann-ova konstanta.

10.2

Ključanje u struji fluida



Ukoliko se ključanje odvija u struji fluida u nekoj cijevi dolazi do nagle promjene faze tako da je ova vrsta ključanja poznata kao dvofazno ključanje. Na sl.10.4 je prikazan vertikalni cijevni isparivač.

Sl.10.4

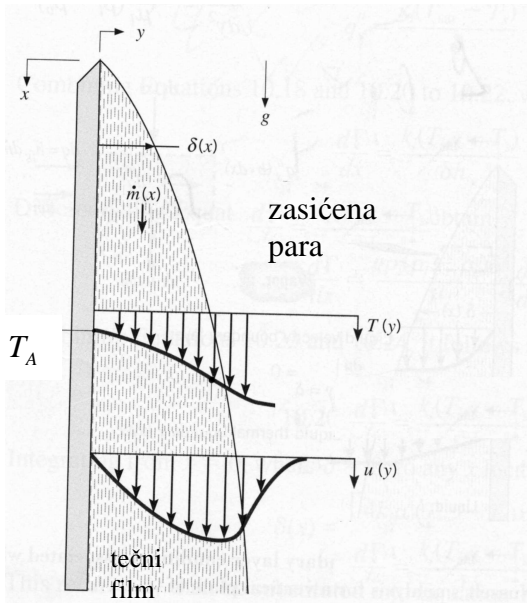
Ključanje u vertikalnom cijevnom isparivaču

Hladna tečnost ulazi u isparivač struajući duž zagrijane površine, usled čega dolazi do pojave prvih mjehura. Strujanje je mjehurasto ako ima manje od 10% pare. Sa pojačanjem inteziteta formiranja mjehura povećava se i intezitet razmjene toplote. Mjehuri dalje formiraju parne čepove koji prelaze u parno jezgro sa filmom tečnosti na zidu grijača. Brzina kretanja pare je veća od brzine kretanja tečnosti. Toplota se u ovoj zoni provodi kroz film kondukcijom. Najveći dio pare se formira na kontaktnoj površini para-tečnost, dok se jedan dio mjehura formira na zidu. U sledećoj oblasti dolazi do nestanka filma i naglog smanjenaj koeficijenta prelaza toplote. Ova oblast je poznata kao prelazna i karakteriše je povremeni nesatnak filma i formiranje kaplica tečnosti u struji pare. Do pregorejvanja grijača najčešće dolazi u ovoj oblasti. Dalje slijedi oblast čiste pare. U ovoj oblasti, kao i u oblasti prije pojave mjehura, koeficijent konvekcije se može odrediti na osnovu analize date u poglavlju o prinudnoj konvekciji, dok je za ostale oblasti neophodna posebna analiza.

10.3

Filmska kondenzacija na vertikalnom zidu

Filmska kondenzacija na vertikalnom zidu je prikazana na sl.10.5. Strujanje u filmu tečnosti može biti laminarno ili turbulentno. Pri laminarnom strujanju, što je najčešći slučaj, toplota se prenosi kondukcijom i intezitet prenosa toplote zavisi od debljine formiranog filma.



Sl.10.5

Formiranje graničnog sloja pri filmskoj kondenzaciji na vertikalnom zidu

Debljina filma je uslovljena intezitetom kondenzacije i odvodjenja kondenzata. Za nagnuti zid, u poredjenju sa vertikalnim, intezitet odvodjenja kondenzata je manji usled čega se njegova debljina povećava što uslovljava smanjenje koeficijenta prelaza toplote. U nekim slučajevima okolna para može biti pregrijana ili u smjesi sa nekim drugim fluidom.

Uprkos složenosti, problem se može riješiti analitički ako se uvedu određene pretpostavke koje je predložio Nusselt [5]:

- strujanje u filmu je laminarno a osobine fluida konstantne
- razmjena toplote na liniji film-para se odvija samo usled kondenzacije (temperatura pare constantna)
- temperatura površine zida je konstantna
- promjena temperature po presjeku filma je linearna
- zanemarljiv tangenti napon na kontaktnoj površini para-tečnost (para miruje)

Polazići od Navier-Stokes-ovih jednačina (2.42) za dvodimenziono stacionarno strujanje nestišljivog fluida, dobija se sledeća jednačina strujanja u filmu,

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = g_x - \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_t \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right). \quad 10.11$$

Imajući u vidu da brzina strujanja u filmu veoma mala, mogu se članovi koji sadrže komponente brzine strujanja zanemariti. Za vertikalnu ploču je $g_x = g$, dok će promjena pritiska u pari koja miruje biti

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_p g. \quad 10.12$$

Iz druge Navier-Stokes-ove jednačine slijedi da je promjena pritiska duž y -ose jednaka nuli. Imajući u vidu navedene pretpostavke, izraz (10.11) se svodi na sledeći oblik,

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{g}{\mu_t} (\rho_t - \rho_p), \quad 10.13$$

sa graničnim uslovima,

$$\begin{aligned} y = 0, v_x &= 0, \\ y = \delta, \partial v_x / \partial y &= 0. \end{aligned} \quad 10.14$$

Rješenje ove jednačine je,

$$v_x = \frac{g(\rho_t - \rho_p)\delta^2}{\mu_t} \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]. \quad 10.15$$

Koristeći ovaj rezultat može se odrediti protok kondenzata po jedinici širine zida, W ,

$$\dot{m}(x) = \int_0^{\delta(x)} \rho_t v_x W dy, \quad 10.16$$

što poslije smjene izraza za brzinu v_x daje,

$$\frac{\dot{m}(x)}{W} = \frac{\rho_t g (\rho_t - \rho_p) \delta^3}{3\mu_t}. \quad 10.17$$

Količina toplote koju para mase $d\dot{m}$ oslobodi usled kondenzacije je

$$d\dot{Q} = r d\dot{m}, \quad 10.18$$

odnosno

$$\frac{d\dot{Q}}{dx} = r \frac{d\dot{m}}{dx}. \quad 10.19$$

Količnik $d\dot{m}/dx$, predstavlja priraštaj kondenzata na rastojanju dx , odnosno količinu kondenzovane pare na tom rastojanju. Ova količina se može odrediti iz izraza (10.17) na osnovu koga slijedi,

$$\frac{d\dot{m}}{dx} = W \frac{g\rho_t(\rho_t - \rho_p)}{\mu_t} \delta^2 \frac{d\delta}{dx}, \quad 10.20$$

što poslije smjene u predhodni izraz daje,

$$\frac{d\dot{Q}}{dx} = rW \frac{g\rho_t(\rho_t - \rho_p)}{\mu_t} \delta^2 \frac{d\delta}{dx}. \quad 10.21$$

Ova toplota je jednaka količini toplote koja se usled kondukcije predaje sa kondenzata na zid,

$$\frac{d\dot{Q}}{dx} = \lambda_t \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} W. \quad 10.22$$

Predpostavljajući linearnu raspodjelu temperature u filmu kondenzata, može se odrediti gradijent temperature u obliku,

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_z - T_A}{\delta}. \quad 10.23$$

Izjednačavanjem izraza (10.21) i (10.22) i uzimajući u obzir linearnu raspodjelu temperature, dobija se sledeća diferencijalna jednačina,

$$\delta^3 \frac{d\delta}{dx} = \frac{\lambda \mu_t (T_A - T_z)}{g \rho_t (\rho_t - \rho_p) r}, \quad 10.24$$

čije je rješenje,

$$\delta(x) = \left[\frac{4 \lambda_t \mu_t (T_z - T_A) x}{g \rho_t (\rho_t - \rho_p) r} \right]^{1/4}. \quad 10.25$$

Izjednačavanjem količine toplote koja se usled kondukcije preda na samom zidu sa toplotom koja se usled konvekcije razmijeni sa okolnom parom, slijedi izraz,

$$d\dot{Q} = \lambda_t \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} W dx = h(x) w dx (T_z - T_A), \quad 10.26$$

čijim rješenjem se dobija koeficijent konvekcije,

$$h(x) = \frac{\lambda_t}{\delta(x)}, \quad 10.27$$

odnosno,

$$h(x) = \frac{\lambda_t}{x} \left[\frac{\rho_t g (\rho_t - \rho_p) r x^3}{4 \mu_t \lambda_t (T_z - T_A)} \right]^{1/4}. \quad 10.28$$

Srednja vrijednost koeficijenta konvekcije će biti,

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx = \frac{4}{3} h_L,$$

ili,

$$\bar{h} = 0.943 \left[\frac{g \rho_t (\rho_t - \rho_p) \lambda_t^3 r}{\mu_t L (T_z - T_A)} \right]^{1/4}. \quad 10.29$$

Na osnovu dobijenog rezultata se može odrediti srednja vrijednost Nusselt-ovog broja,

$$\bar{N}_u = \frac{\bar{h} L}{\lambda_t} = 0.943 \left[\frac{g \rho_t (\rho_t - \rho_p) L^3 r}{\mu_t \lambda_t (T_z - T_A)} \right]^{1/4}. \quad 10.30$$

Nusselt [5] je pokazao da se uzimanjem korigovane toplote kondenzacije u obliku

$$r' = r + 0.68 c_t (T_z - T_A), \quad 10.31$$

dobijaju tačniji rezultati. Ova korekcija uzima u obzir toplotu koju je kondenzat predao zidu usled hladjenja kondenzata do temperature manje od temperature zasićenja.

Izraz (10.30) se može koristiti i za nagnutu površinu ako se umjesto g stavi $g \cos \vartheta$, pri čemu je ϑ ugao između zida i vertikalne ravni. Sa porastom ugla ϑ raste i greška pri određivanju Nusselt-ovog broja, tako da izraz ne važi za uglove bliske $\pi/2$.

Ukupna razmijenjena količina toplote se može odrediti koristeći izraz (10.29),

$$\dot{Q} = \bar{h} A (T_z - T_A), \quad 10.32$$

a na osnovu nje slijedi i ukupna količina kondenzata,

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}}{r} = \frac{\bar{h}A(T_z - T_A)}{r}. \quad 10.33$$

Kao što je navedeno na početku izlaganja strujanje u filmu kondenzata može postati turbulentno. Kao i u slučaju strujanja kroz cijevi i preko ravne horizontalne površine, proces tranzicije laminarnog u turbulentno strujanje je definisan preko neke kritične vrijednosti Reynolds-ovog broja određenog sledećim izrazom,

$$R_e = \frac{v_{sr} D_h}{\nu_t}, \quad 10.34$$

u kome je srednja brzina definisana preko protoka kondenzata,

$$\dot{m} = \rho_t v_{sr} \delta W, \quad 10.35$$

a hidraulični prečnik, na osnovu klasične formule,

$$D_h = \frac{4A}{O} = \frac{4W\delta}{W} = 4\delta. \quad 10.36$$

Poslije smjene (10.36) i (10.35) u (10.34), sledi,

$$R_e = \frac{4\dot{m}}{\mu_t W}, \quad 10.37$$

odnosno, korišćenjem izraza (10.17) za \dot{m} pri laminarnom strujanju,

$$R_e = \frac{4g\rho_t [\rho_t - \rho_p] \delta^3}{3\mu_t^2}. \quad 10.38$$

Eksperimentalnim putem je utvrđeno da do prelaza iz laminarnog u turbulentno strujanje, za vertikalni ravan zid, dolazi pri $R_e \approx 1800$. Postoji niz različitih izraza za koeficijent konvekcije i Nusselt-ov broj pri turbulentnom strujanju. Može se, pored ostalih, koristiti formula

$$\bar{h} = 0.0076 R_e^{0.4} \left[\frac{\rho_t g (\rho_t - \rho_p) \lambda_t^3}{\mu_t^2} \right]^{1/3}. \quad 10.39$$

Nezgodna strana ove formule je u tome što se Reynolds-ov broj pri turbulentnom strujanju ne može odrediti iz izraza (10.38). Mora se koristiti izraz (10.37), koji poslije smjene (10.33) za \dot{m} , dobija sledeći oblik,

$$R_e = \frac{4\bar{h}A(T_z - T_A)}{\mu_t W}. \quad 10.40$$

Kombinujući predhodna dva izraza, dobija se relacija pomoću koje se može odrediti Reynolds-ov broj pri turbulentnom strujanju,

$$R_e = 0.00296 \left[\frac{\rho_t g (\rho_t - \rho_p) \lambda_t^3 (T_z - T_A)^3 L^3}{\mu_t^5 r^3} \right]^{5/9}, \quad 10.41$$

na osnovu koga, iz (10.39), sledi koeficijent konvekcije pri turbulentnoj filmskoj kondenzaciji.

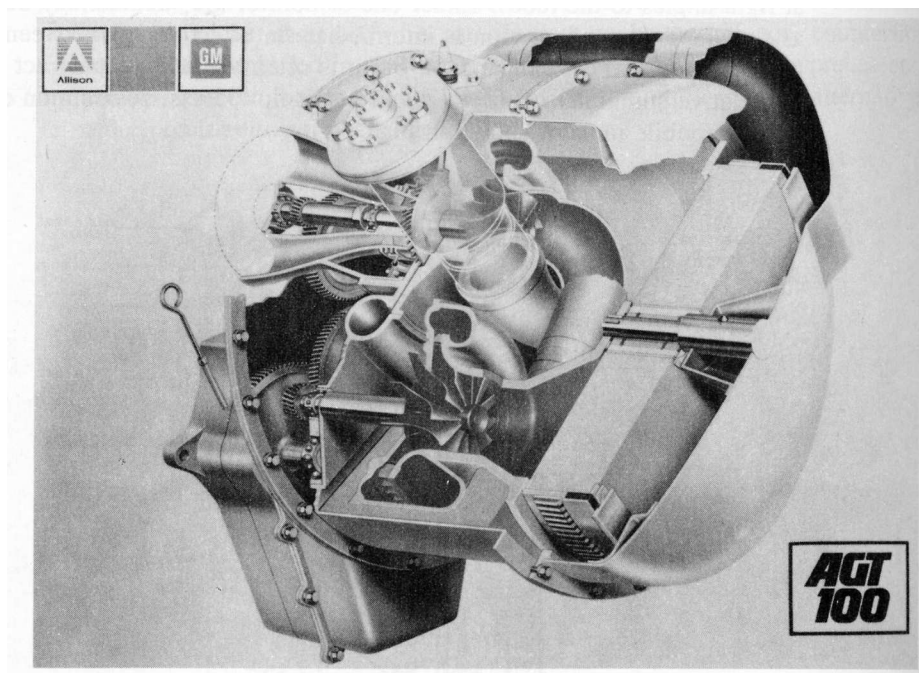
Literatura

- [1] Rohsenow, W.M., A Method of Correlating Heat transfer Data for Surface Boiling Liquids, Trans. ASME, 74, 969, 1952.
- [2] Kuteladze, S.S., On the Transition to Film Boiling Under Natural Convection, Kotloturbostroenie, 3, 10, 1948.

- [3] Zuber, N., On the Stability of Boiling Heat transfer, ASME, 80, 711, 1958.
- [4] Bromley, L.A., heat Transfer in Stable Film Boiling, Chem. Eng. Prog., 46, 221, 1950.
- [5] Nusselt, W., Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes, Z. Ver. Deut. Ing., 60, 541, 1916.

GLAVA 11

RAZMJENJIVAČI TOPLOTE



Uvod

Razmjenjivači toplote su uređaji u kojim dva fluida različite temperature razmjenjuju toplotu. Najčešće su u upotrebi razmjenjivači u kojima su topli i hladni fluid razdvojeni odgovarajućom pregradom tako da dolazi samo do razmjene toplote bez razmjene materije. Ovakvi razmjenjivači su poznati kao rekupeartivni razmjenjivači ili rekuperatori. Pored ovih razmjenjivača u upotrebi su i takva ješenja u kojima kroz određeni prostor prvo struji jedan fluid, mijenjajući njegovu temperature a zatim drugi, topliji ili hladniji fluid. Ovakvi razmjenjivači su poznati kao regenerativni. Postoje i rješenja u kojima se topli i hladni fluid miješaju, praveći smješnu odgovarajuće temperature. Najčešće je u pitanju ista vrsta fluida sa različitim temeperaturama, kao npr. kod tuš baterije.

Analiza razmjenjivača toplote podrazumijeva:

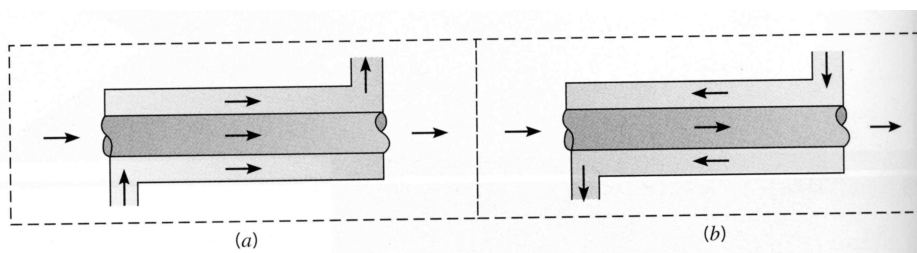
- tolotnu analizu,
- strukturalnu analizu
- ekenomsku analizu
- analizu dimenzija i efikasnosti
- analizu mogućnosti proizvodnje

Toplotna analiza obuhvata proračun temperatura fluida i razmijenjene količine toplote za dati razmjenjivač. Strukturalna analiza predstavlja izbor vrste i tipa razmjenjivača i pratećih komponenti u skladu sa odgovarajućim standardima. Ekonomsku analizu i analizu dimenzija i efikasnosti razmjenjivača je praktično nemoguće razdvojiti. Za istu količinu razmijenjene toplote u razmjenjivaču manjih dimenzija se moraju ostvariti veće brzine strujanja što uslovljava veću operativnu cijenu i skuplju pumpu ili ventilator. Kod razmjenjivača na pokretnim uređajima, npr. avionu od primarnog značaja su dimenzije i težina razmjenjivača. Kod nepokretnih sistema dienzije i težina nijesu od primarnog značaja. Ekonomskom analizom treba obuhvatiti inicijalnu i operativnu cijenu, vrijeme eksploatacije i troškove održavanja. Treba, takodje, imati u vidu i mogućnost proizvodnje određenog razmjenjivača u datim uslovima. U ovom poglavlju će biti data samo toplotna analiza rekuperativnih razmjenjivača.

11.1

Rekuperativni razmjenjivači

Najjednostavniji tip rekuperativnih razmjenjivača je u obliku koncentričnih cijevi u kojima topli i haldni fluidi struje u istom ili suprotnom smjeru, sl.11.1



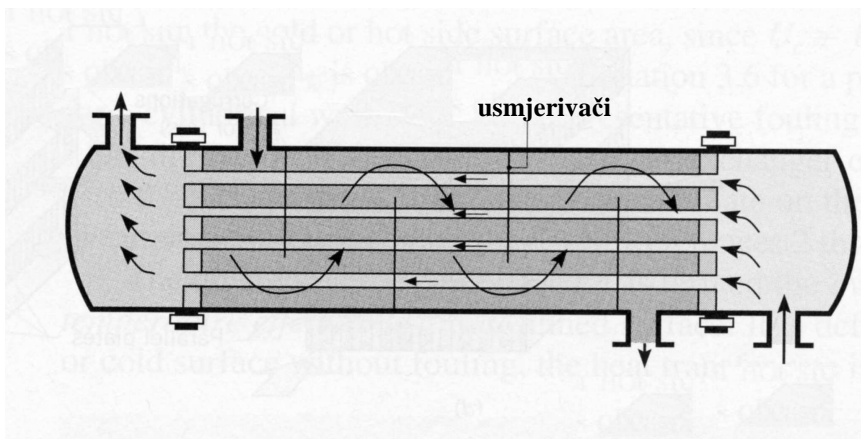
Sl.11.1

Razmjenjivač sa koncentričnim cijevima.

(a) Istosmjerni.

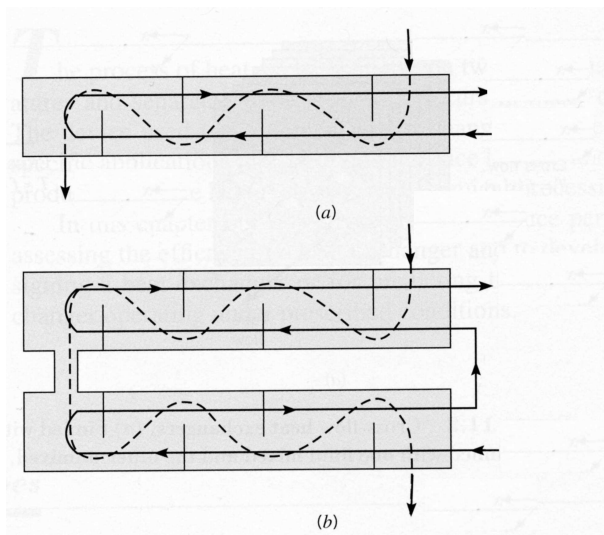
(b) Suprotnosmjerni

Pored ovog rješenja, u cilju povećanja površine na kojoj se razmjenjuje toplota, jedan fluid se može usmjeriti kroz više cijevi unutar jednog omotača (školjke), kao što je prikazano na sl.11.2.



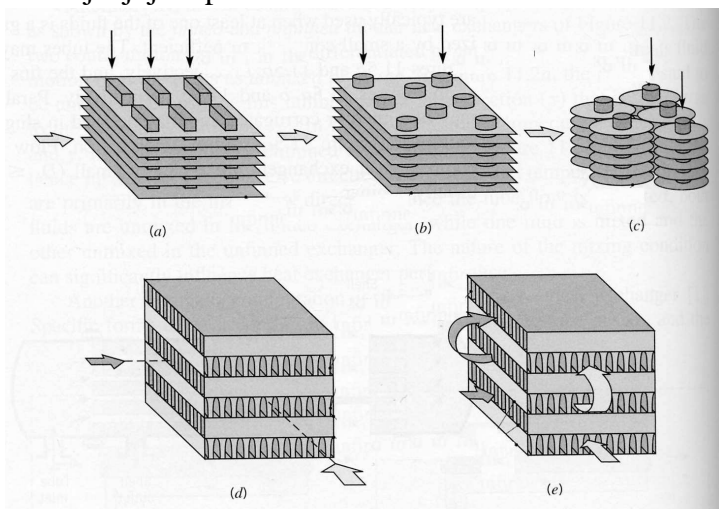
Sl.11.2
Razmjenjivač sa omotačem (školjkom) i cijevima

U cilju povećanja turbulencije, a samim tim i efikasnosti razmjenjivača, postavljaju se usmjerivači u prostoru cijevnog omotača. Na sl.11.3 su prikazane različite kombinacije cijevi i omotača



Sl.11.3
Različite kombinacije cijevi i omotača. (a) Jedan omotač i dvije cijevi. (b) Dva omotača i dvaputa po dvije cijevi.

Posebnu grupu razmjenjivača čine kompaktni razmjenjivači, sl.11.4. Oni su tako konstruisani da se unutar određene zapremine razmjenjivača ostvari velika površina na kojoj se razmjenjuje toplota.



Sl.11.4
Razni tipovi kompaktnih razmjenjivača.
(a) Kanali i pločasta rebra.
(b) cijevi i pločasta rebra.
(c) cijevi i rebra u obliku diska.
(d) Ploče i rebra sa jednim prolazom.
(e) Ploče i rebra sa više prolaza

Ovi razmjenjivači imaju guste snopove cijevi ili kanala i ploča (rebara) i najčešće se koriste kada je jedan od fluida gas sa manjim koeficijentom konvekcije od drugog fluida koji je najčešće tečnost. Prave se kao kombinacija cijevi ili kanala i rebara ili ploča i rebara. Strujanje u ovim razmjenjivačima može biti unakrsno i paralelno. Najčešće se koristi pri niskim pritiscima fluida.

11.2

Toplotna analiza rekuperativnih razmjenjivača

Jedan od ključnih parametara neophodnih za toplotnu analizu razmjenjivača je koeficijent prolaza toplote. Ovaj koeficijent je analiziran u glavi 5, u kojoj su dobijeni sledeći izrazi za dva fluida različitih temperatura razdvojenih ravnom ili cilindričnom površinom:

$$U = \frac{1}{A \sum R_i} = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{h_2}}, \quad \dot{Q} = UA\Delta T \quad 5.32$$

$$U = \frac{1}{A_s \sum R_i} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1 h_u} + \frac{R_2}{\lambda} \ln(R_2 / R_1) + \frac{1}{h_s}}, \quad \dot{Q} = UA_s \Delta T. \quad 5.34$$

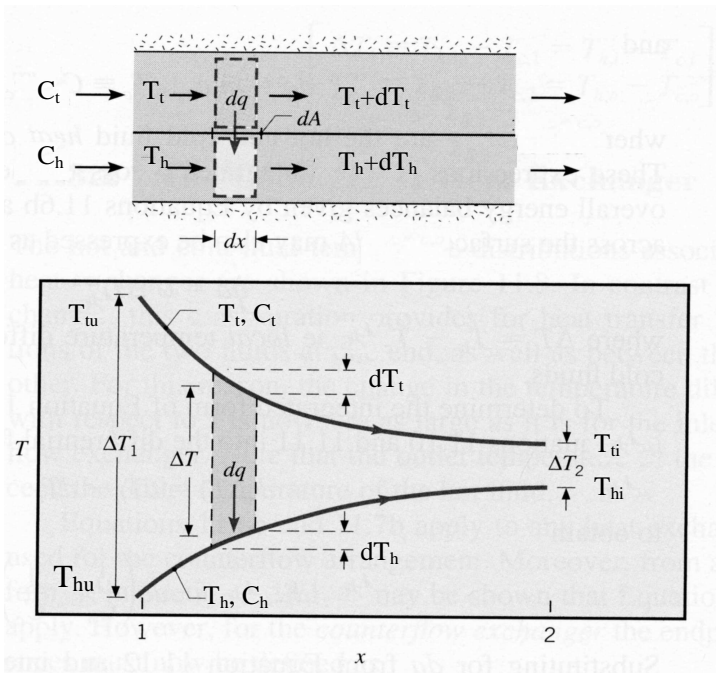
Koeficijenti konvekcije h_1 , h_2 , h_u i h_s odgovaraju hladnom ili toplom fluidu zavisno od prostora u kome struje ovi fluidi. Pri strujanju kroz cijevi, koeficijent prolaza se može odrediti u odnosu na spoljašnju ili unutrašnju površinu cijevi. Da bi se odredili koeficijenti prolaza toplote neophodno je poznavati koeficijente konvekcije koji su složene funkcija strujnih parametara i geometrijske konfiguracije. Ovi koeficijenti su analizirani u Glavi 8 za jednostavne geometrijske oblike. Dati su izrazi za srednje vrijednosti ovih koeficijenata, koje se uglavnom koriste za proračun razmjenjivača. U toku upotrebe razmjenjivača dolazi do taloženja prljavštine i stvaranja rdje na kontaktnim površinama, što uslovljava promjenu koeficijenata konvekcije. Analiza ove problematike se može naći u različitoj literaturi, kao npr. u [1], [2] i [3]. Poseban problem pri određivanju koeficijenta konvekcije predstavljaju orebrene površine, čija je osnovna analiza data u Glavi 5. Detaljniju analizu ovog problema su, pored ostalih, uradili Kays i London [4].

Realativno jednostavna toplotna analiza razmjenjivača se može izvesti pod sledećim pretpostavkama:

- razmjenjivač toplote je izolovan u odnosu na okolinu tako da se razmjena toplote odvija samo izmedju toplog i hladnog fluida,
- koeficijent prolaza toplote je konstantan,
- specifične toplote fluida su konstantne,
- promjena potencijalne i kinetičke energije je zanemarljiva.

Promjena specifičnih toplota je uslovljena promjenom temperature fluida duž strujnog toka u razmjenjivaču, dok je promjena koeficijenta konvekcije posledica promjene temperature fluida i strujnih parametara. Praktično iskustvo je pokazalo da se u najvećem broju slučajeva ove promjene mogu zanemariti i koristiti srednje vrijednosti za specifične toplote i koeficijenta prolaza.

Na sl.11.5 je šematski prikazan istosmjerni razmjenjivač. Ideksi koji označavaju topli i hladni fluid su "t" i "h", dok indeksi "u" i "i" označavaju ulazni i izlazni presjek strujnog toka.



Sl.11.5
Temperaturski profili istosmjernog razmjenjivača

Na osnovu energijske jednačine (3.14), slijedi da će količina toplote razmijenjena iznadju dva presjeka duž strujnog toka, zanemarujući promjenu kinetičke i potencijalne energije, biti definisana sldećim izrazom,

$$\frac{p_1}{\rho_1} + u_1 + q = \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + u_2 \quad 11.1$$

odnosno,

$$i_1 + q = i_2 + q \quad 11.2$$

Ako se u skladu sa usvojenom koncepcijom pri izvodjenju jednačine (3.14) dovedena količina toplote uzme sa pozitivnim a odvedena sa negativnim znakom i ima u vidu da je $\dot{Q} = \dot{m}q$, slijedi da će za topli i hladni fluid biti,

$$\dot{m}_t i_{tu} - \dot{Q}_t = \dot{m}_t i_{ti} \rightarrow \dot{Q}_t = \dot{m}_t (i_{tu} - i_{ti}) = \dot{m}_t c_{pt} (T_{tu} - T_{ti}) = C_t (T_{tu} - T_{ti}), \quad 11.3$$

$$\dot{m}_h i_{hu} + \dot{Q}_h = \dot{m}_h i_{hi} \rightarrow \dot{Q}_h = \dot{m}_h (i_{hi} - i_{hu}) = \dot{m}_h c_{ph} (T_{hi} - T_{hu}) = C_h (T_{hi} - T_{hu}). \quad 11.4$$

U ovim izrazima su $C_t = \dot{m}_t c_{pt}$ i $C_h = \dot{m}_h c_{ph}$ toplotni kapaciteti toplog i hladnog fluida.

Prema uvedenoj pretpostavci da se razmjena toplote odvija samo izmedju toplog i hladnog fluida, dobija se da je,

$$\dot{Q}_t = \dot{Q}_h = \dot{Q}. \quad 11.5$$

Na osnovu izloženog slijedi da će za dva presjeka na elementarnom rastojanju dx , sl.11.5, toplota koju odaje topli odnosno prima hladni fluid biti odredjena izrazima:

$$d\dot{Q} = -\dot{m}_t c_{pt} dT_t = -C_t dT_t, \quad 11.6$$

$$d\dot{Q} = \dot{m}_h c_{ph} dT_h = C_h dT_h, \quad 11.7$$

Količina toplote koju topli fluid preda hladnom fluide jednaka je toploti koja prodje kroz pregradu koja ih razdvaja. Ova toplota se može odrediti na osnovu izraza (5.31), koji definiše prolaz toplote kroz neku pregradu sa konvekcijom na graničnim površinama,

$$d\dot{Q} = U dA \Delta T. \quad 11.8$$

Temperaturska razlika ΔT je jednaka razlici srednjih temperatura toplog i hladnog fluida,
 $\Delta T = T_t - T_h$. 11.9

Diferenciranjem izraza (11.9) slijedi,
 $d(\Delta T) = dT_t - dT_h$. 11.10

Smjenom dT_t i dT_h iz (11.6) i (11.7) kao i $d\dot{Q}$ iz (11.8) dobija se sledeća diferencijalna jednačina za temperatursku razliku,

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -U \left(\frac{1}{C_t} + \frac{1}{C_h} \right) dA. \quad 11.11$$

Rješenje ove jednačine je,

$$\ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right) = -UA \left(\frac{1}{C_t} + \frac{1}{C_h} \right). \quad 11.12$$

Ako se toplotni kapaciteti izraze u funkciji razmijenjene količine toplote, koristeći izraze (11.3-11.5) slijedi,

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -UA \frac{(T_{tu} - T_{tu}) - (T_{ti} - T_{hi})}{\dot{Q}}. \quad 11.13$$

Sa sl.11.5 se vidi da je:

$$\Delta T_1 = T_{tu} - T_{tu}, \quad \Delta T_2 = T_{ti} - T_{hi}, \quad 11.14$$

na osnovu čega se dobija,

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -UA \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\dot{Q}}. \quad 11.15$$

Ratmijenjena količina toplote se može dobiti iz ovog izraza u obliku,

$$\dot{Q} = UA \Delta T_{sr} \quad 11.16$$

u kome je,

$$\Delta T_{sr} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}, \quad 11.17$$

srednja logaritamska temperatura.

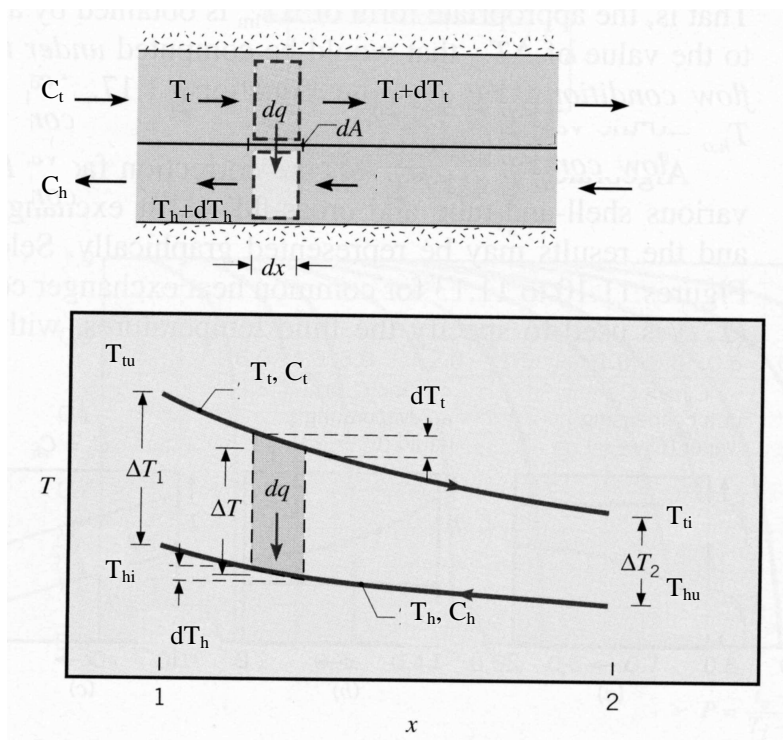
Slična analiza se može izvesti i za suprotnosmjerni razmjenjivač, čiji je temperaturski profil prikazan na sl.11.6.

Izrazi (11.3-11.6) će biti indentični kao i kod istosmjernog razmjenjivača, samo će se u izrazu (11.7) pojaviti negativan znak zbog suprotnog smjera hladnog fluida. Izrazi za razmijenjenu količinu toplote i srednju logaritamsku temperaturu će biti indentični izrazima (11.16) i (11.17), samo što će u ovom slučaju, prema sl.11.6, razlike temperatura biti:

$$\Delta T_1 = T_{tu} - T_{hi}, \quad \Delta T_2 = T_{ti} - T_{tu}. \quad 11.18$$

Razlika će se pojaviti i u izrazu (11.12) koji za suprotnosmjerni razmjenjivač ima oblik,

$$\ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right) = -UA \left(\frac{1}{C_t} - \frac{1}{C_h} \right). \quad 11.19$$

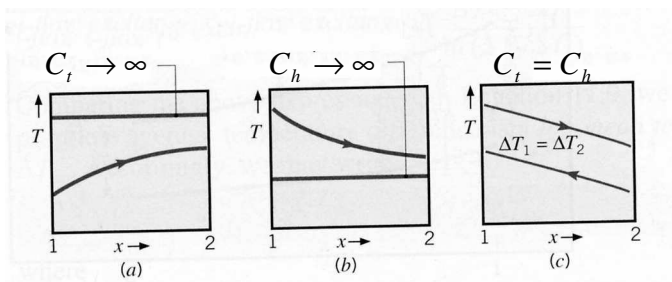


Sl.11.6.

Temperatuski profil suprotnosmjernog razmjenjivača

Može se pokazati da je za iste ulazne i izlazne temperature srednja logaritamska temperatura razmjenjivača sa suprotnim tokom veća od srednje logaritamske temperature razmjenjivača sa istosmjernim tokom. To znači da će za isti koeficijent prolaza toplote i iste ulazne i izlazne temperature površina razmjenjivača sa suprotnim tokom biti manja. Pored toga, izlazna temperatura hladnog fluida ne može biti veća od izlazne temperature toplog fluida kod razmjenjivača sa istim smjerom strujanja. Kod suprotnosmjernog razmjenjivača izlazna temperatura hladnog fluida može biti veća od izlazne temperature toplog fluida.

Postoji nekoliko specijalnih slučajeva koji zaslužuju posebnu pažnju. Ako je toplotni kapacitet toplog fluida mnogo veći od toplotnog kapaciteta hladnog fluida, temperatura toplog fluida se neće mijenjati. To će biti slučaj kada je topli fluid para koja se kondenzuje, tako da izlaz toplog fluida predstavlja kondenzat vodene pare. S obzirom da se proces kondenzacije odvija pri $T = \text{const}$, toplotni kapacitet toplog fluida teži ka beskonačnosti. Temperaturski profil ovakvog razmjenjivača je prikazan na sl.11.7(a). Slična situacija je i u isparivaču ili bojleru u kome hladni fluid mijenja fazu i održava konstantnu temperaturu. Ulaz hladnog fluida je tečnost na temperaturi zasićenja a izlaz para. Temperaturski profil je prikazan na sl.11.7(b). Ako su oba fluida istog toplotnog kapaciteta u suprotnosmjernom razmjenjivaču, onda će očigledno biti $\Delta T_2 = \Delta T_1 = \Delta T_{sr}$, što slijedi na osnovu izraza (11.19) i (11.17). Kod istosmjernog razmjenjivača je uvijek $\Delta T_2 < \Delta T_1$, na osnovu čega slijedi da je i $\Delta T_{sr} < \Delta T_1$.



Sl.11.7

Specifični razmjenjivači toplote.

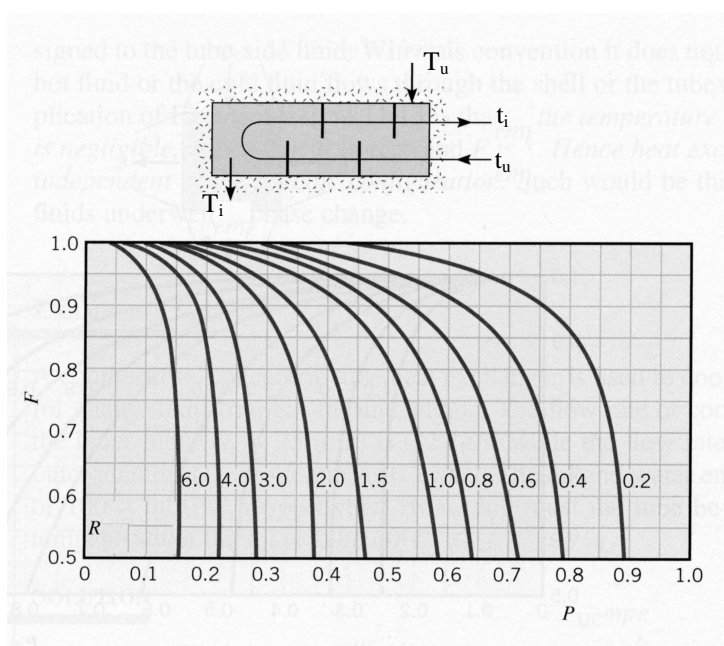
(a) $C_t \rightarrow \infty$. (b) $C_h \rightarrow \infty$.

(c) $C_t = C_h, \Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_{sr}$

Iako su strujni uslovi mnogo komplikovaniji u razmjenjivačima sa viže prolaza, izrazi (11.3), (11.4) i (11.16) se mogu koristiti i u ovom slučaju, pod islovom da se u izrazu (11.17) izvrši korekcija, tako de se srednja logaritamska temperatura odredi iz sledećeg izraza,

$$\Delta T_{sr} = F \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = F \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}. \quad 11.20$$

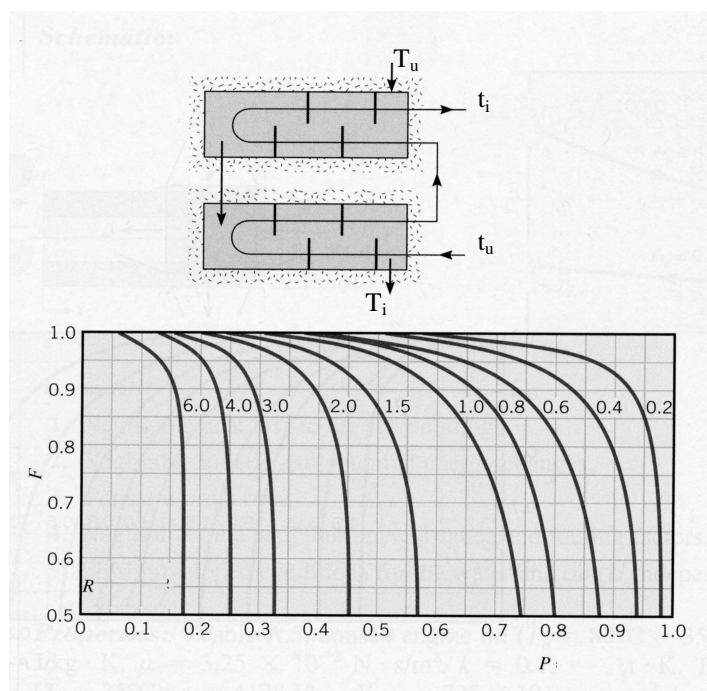
Analitički izrazi za korekcionni faktor F su razvijeni za razne vrste razmjenjivača [5]. Rezultati se mogu predstaviti i grafičkim putem. Na sl. 11.8 i sl.11.9 su prikazani neki karakteristični primjeri.



Sl.11.8

Korekcionni faktor za složenu konfiguraciju razmjenjivača sa jednim omotačem i dvije cijevi.

$$R = \frac{T_u - T_i}{t_i - t_u}, \quad P = \frac{t_i - t_u}{T_u - t_u}$$



Sl.11.9

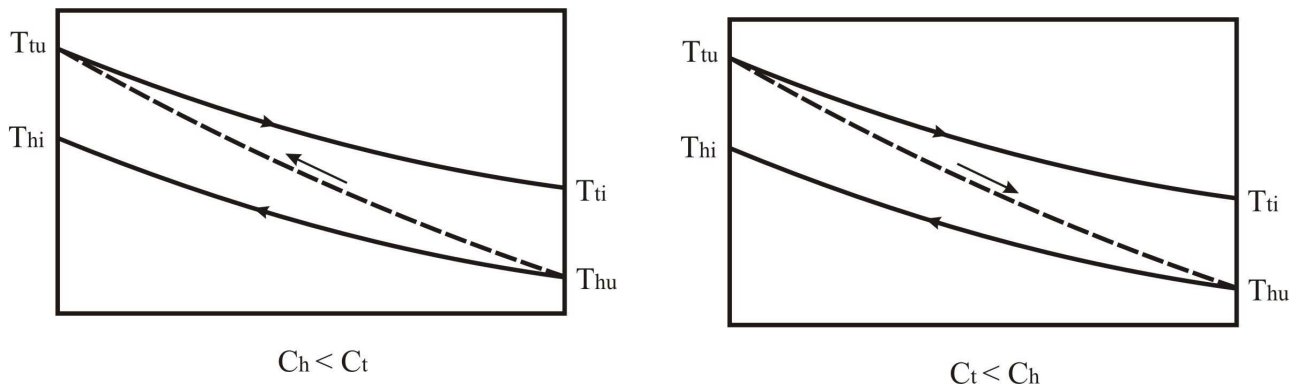
Korekcionni faktor za složenu konfiguraciju razmjenjivača sa dva omotača i četiri cijevi.

$$R = \frac{T_u - T_i}{t_i - t_u}, \quad P = \frac{t_i - t_u}{T_u - t_u}$$

11.3

Koeficijent efektivnosti razmjenjivača – NTU metod

Pri toplotnoj analizi razmjenjivača mogu se pojaviti različiti parametri kao nepoznate veličine koje treba naći ili optimizirati. Kada su napr. poznate ulazne i jedna izlazna temperatura onda se iz toplotnog bilansa može odrediti druga izlazna temperatura a zatim srednja logaritamska temperatura i razmijenjena količina toplote. Problem je međutim mnogo složeniji kada su nepoznate obje izlazne temperature. Može se rješavati iterativnim putem ili primjenom koeficijenta efektivnosti razmjenjivača. Koeficijent efektivnosti, ϵ , se definiše kao odnos stvarno razmijenjene količine toplote i teorijski maksimalne moguće toplote koju dati razmjenjivač može razmijeniti. Maksimalna razmjena toplote u suprotnosmjernom razmjenjivaču bi se ostvarila ako be se hladni fluid zagrijao do ulazne temperature toplog fluida ili topli fluid ohladio do ulazne temperature hladnog fluida, kao što je prikazano na sl.11.10.



Sl.11.10 Maksimalne temperaturske razlike u suprotnosmjernom razmjenjivaču. (a) $C_h < C_t$.
(b) $C_t < C_h$

Predpostavimo da je toplotni kapacitet hladnog fluida manji od toplotnog kapaciteta toplog fluida, $C_h < C_t$. Iz izraza (11.6) i (11.7) slijedi da je $|dT_h| > |dT_t|$. Prema tome, slučaj zagrijavanja hladnog fluida do ulazne temperature toplog fluida je moguć kada je $C_h < C_t$. Maksimalna razmijenjena količina toplote u tom slučaju će biti;

$$C_h < C_t, \quad \dot{Q}_{max} = C_h(T_{tu} - T_{hu}). \quad 11.21$$

U suprotnom slučaju, kada je toplotni kapacitet toplog fluida manji od toplotnog kapaciteta hladnog fluida, $C_t < C_h$, temperaturska razlika toplog fluida će biti veća od temperaturske razlike hladnog fluida, $|dT_t| > |dT_h|$, i može doći do hladjenja toplog fluida do ulazne temperature hladnog fluida. Razmijenjena količina toplote u tom slučaju će biti;

$$C_t < C_h, \quad \dot{Q}_{max} = C_t(T_{tu} - T_{hu}). \quad 11.22$$

Na osnovu dobijenih rezultata se može napisati opšti izraz,

$$\dot{Q}_{max} = C_{min}(T_{tu} - T_{hu}). \quad 11.23$$

Na osnovu definicije koeficijenta efektivnosti, kao odnosa stvarne i maksimalne razmijenjene količine toplote, slijedi,

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}}. \quad 11.24$$

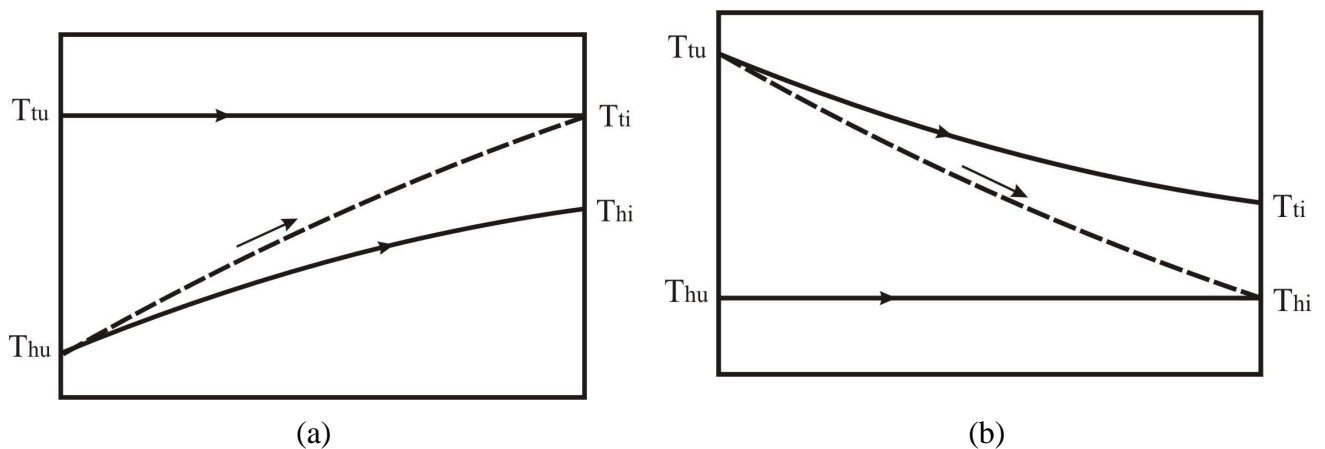
Kada je $C_h < C_t$, efektivnost se definiše u odnosu na hladni fluid i obratno, kada je $C_t < C_h$, u odnosu na topli fluid:

$$C_h < C_t, \quad \varepsilon = \frac{C_h(T_{hi} - T_{hu})}{C_h(T_{tu} - T_{hu})} = \frac{T_{hi} - T_{hu}}{T_{tu} - T_{hu}}, \quad 11.25$$

$$C_t < C_h \quad \varepsilon = \frac{C_t(T_{tu} - T_{tu})}{C_t(T_{tu} - T_{hu})} = \frac{T_{tu} - T_{ti}}{T_{tu} - T_{hu}}. \quad 11.26$$

U suprotnosmjernom razmjenjivača tipa cijev u cijev dovoljne dužine, izlazna temperatura hladnog fluida će biti približno jednaka ulaznoj temperaturi toplog fluida kada je $C_h < C_t$, odnosno izlazna temperatura toplog fluida približno jednaka ulaznoj temperaturi hladnog fluida kada je $C_t < C_h$. Stepen efektivnosti suprotnosmjernog razmjenjivača će, u ovim slučajevima, biti približno jednak jedinici.

Kada su u pitanju istosmjerni razmjenjivači zagrijavanje hladnog fluida do ulazne temperature toplog fluida je moguće samo u kondenzatoru a hladjenje toplog fluida do ulazne temperature hladnog fluida u isparivaču, sl.11.11, u kojima će stepen efektivnosti biti približno jednak jedinici ako je razmjenjivač dovoljne dužine. U opštem slučaju, stepen efektivnosti kod ovih razmjenjivača je znatno manji od jedinice, što je očigledno sa sl.11.5.



Sl.11.11 Maksimalne temperaturske razlike u istosmjernom razmjenjivaču. (a) Kondenzator. (b) Isparivač.

Izraz za koeficijent efektivnosti, ε , se može odrediti analitičkim putem. Predpostavimo strujanje u istosmjernom razmjenjivaču u kome je toplotni kapacitet toplog fluida manji od kapaciteta hladnog fluida, $C_t < C_h$, odnosno $C_t = C_{min}$ i $C_h = C_{max}$. Koeficijent efektivnosti je u tom slučaju određen izrazom (11.26),

$$\varepsilon = \frac{T_{tu} - T_{ti}}{T_{tu} - T_{hu}}. \quad 11.27$$

Iz toplotnog bilansas (11.13) i (11.14) slijedi,

$$C_{max}(T_{hi} - T_{hu}) = C_{min}(T_{tu} - T_{ti}), \quad 11.28$$

a na osnovu jednačine (11.12)

$$\ln \frac{T_{ti} - T_{hi}}{T_{tu} - T_{hu}} = -UA \left(\frac{1}{C_{min}} - \frac{1}{C_{max}} \right), \quad 11.29$$

odnosno,

$$\frac{T_{ti} - T_{hi}}{T_{tu} - T_{hu}} = e^{-UA \left(\frac{1}{C_{min}} - \frac{1}{C_{max}} \right)}. \quad 11.30$$

Koeficijent efektivnosti, ε , se može naći kombinujući jednačine (11.27), (11.28) i 11.30). Desna strana izraza (11.30) se može napisati u obliku,

$$\frac{T_{ti} - T_{hi}}{T_{tu} - T_{hu}} = \frac{T_{ti} - T_{tu} + T_{tu} - T_{hi}}{T_{tu} - T_{hu}}, \quad 11.31$$

što poslije smjene T_{hi} , iz (11.28), daje,

$$\frac{T_{ti} - T_{hi}}{T_{tu} - T_{hu}} = \frac{(T_{ti} - T_{tu}) + (T_{tu} - T_{hu}) - (C_{min} / C_{max})(T_{tu} - T_{ti})}{T_{tu} - T_{hu}}. \quad 11.32$$

Iz (11.32) i (11.27) slijedi,

$$\frac{T_{ti} - T_{hi}}{T_{tu} - T_{hu}} = 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{C_{min}}{C_{max}} \right). \quad 11.33$$

Iz jednakosti izraza (11.33) i (11.30) dobija se relacija za koeficijent efektivnosti u obliku,

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp\left\{- (UA / C_{min}) \left[1 + (C_{min} / C_{max}) \right]\right\}}{1 + (C_{min} / C_{max})}. \quad 11.34$$

Količnik UA / C_{min} je poznat kao broj toplotnih jedinica (number of transfer units) ili faktor razmjene toplote. Označava se sa NTU,

$$NTU = \frac{UA}{C_{min}}. \quad 11.35$$

Sa porastom faktora razmjene toplote, NTU, raste i razmijenjena toplote u razmjenjivaču. To se može postići sa porastom koeficijenta prolaza ili površine razmjenjivača. Koeficijent prolaza se može povećati sa povećanjem brzine strujanja fluida u razmjenjivaču. Smjenom faktora razmjene toplote, NTU, u izraz za ε i uvodeći oznaku $C_r = C_{min} / C_{max}$ slijedi,

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp\left\{- NTU [1 + C_r]\right\}}{1 + C_r}. \quad 11.36$$

Dobijeni izraz važi pod istim pretpostavkama pod kojima je izvedena toplotna naliza; konstantne fizičke osobine fluida, konstantan koeficijent prolaza toplote, razmjena toplote se odvija samo između toplog i hladnog fluida.

Na sličan način se može izvesti i odgovarajući izraz za suprotnosmjerno strujanje,

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[- NTU (1 - C_r)]}{1 - C_r \exp[- NTU (1 - C_r)]}. \quad 11.37$$

Kad $C_r \rightarrow 1$, dobija se,

$$C_r \rightarrow 1, \quad \varepsilon \rightarrow \frac{NTU}{1 - NTU}. \quad 11.38$$

U slučaju bojlera ili kondenzatora $C_{max} \rightarrow \infty$, odnosno,

$$C_{max} \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 1 - \exp(- NTU). \quad 11.39$$

Koeficijent efektivnosti za kombinaciju od n omotača i $2n$ cijevi je dat sledećim izrazom,

$$\varepsilon = \left[\left(\frac{1 - \varepsilon_1 C_r}{1 - \varepsilon_1} \right)^n - 1 \right] \left[\left[\frac{1 - \varepsilon_1 C_r}{1 - \varepsilon_1} \right]^n - C_r \right]^{-1}, \quad 11.40$$

u kome je,

$$\varepsilon_1 = 2 \left\{ 1 + C_r + (1 + C_r^2)^{1/2} \frac{1 + \exp \left[-NTU (1 + C_r^2)^{1/2} \right]}{1 - \exp \left[-NTU (1 + C_r^2)^{1/2} \right]} \right\}^{-1}, \quad 11.41$$

koeficijent efektivnosti razmjenjivača sa jednim omotačem i 2, 4 ili više cijevi, sl.11.3

Na osnovu izvedenih izraza se mogu dobiti i relacije za faktor razmjene toplote, NTU,

- istosmjerno strujanje

$$NTU = - \frac{\ln[1 - \varepsilon(1 + C_r)]}{1 + C_r}. \quad 11.42$$

- suprotnosmjerno strujanje

$$NTU = \frac{1}{C_r - 1} \ln \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon C_r - 1} \right), \quad 11.43$$

$$C_r \rightarrow 1, NTU \rightarrow \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \quad 11.44$$

- jedan omotač sa proizvoljnim, parnim brojem cijevi

$$NTU = -(1 + C_r^2)^{-1/2} \ln \left(\frac{E - 1}{E + 1} \right), \quad E = \frac{2 / \varepsilon_1 - (1 + C_r)}{(1 + C_r^2)^{1/2}}. \quad 11.45$$

- n omotača i 2n cijevi

Koriste se izrazi (11.45) u kojima je,

$$\varepsilon_1 = \frac{F - 1}{F - C_r}, \quad F = \left[\frac{\varepsilon C_r - 1}{\varepsilon - 1} \right]^{1/n}. \quad 11.46$$

Izvedeni analitički izrazi, se mogu predstaviti i u vidu grafikona, za različite vrste razmjenjivača.

11.4

Metodologija proračuna

Najčešće se pojavljuju sledeće varijente:

1. Poznate ulazne i izlazne temperature, koeficijent prolaza toplote U i neki od sledećih parametara: \dot{Q} , A, \dot{m}_t ili \dot{m}_h . Nepoznati su neki od sledećih parametara: \dot{Q} , A, \dot{m}_t ili \dot{m}_h .

Fizičke karakteristike fluida se određuju na osnovu poznatih temperatura a nepoznati parametri iz izraza: (11.3), (11.4), 11.16) i (11.17).

2. Poznate su tri temperature, koeficijent prolaza U i neki od parametara: \dot{Q} , A, \dot{m}_t ili \dot{m}_h . Nepoznata jedna temperatura i neki od parametara: \dot{Q} , A, \dot{m}_t ili \dot{m}_h .

Predpostavi se izlazna temperatura i na osnovu te pretpostavke odrede fizičke osobine fluida. Nepoznata temperatura se sračuna is (11.3) ili (11.4). Izvrši korekcija fizičkih osobina ako je to neophodno, a zatim nadju ostale nepoznate iz izraza (11.16) i (11.17).

3. Nepoznate obje izlazne temperature i razmijenjena količina toplote. Poznate ulazne temperature, koeficijent prolaza toplote U , A , \dot{m}_t i \dot{m}_h .
Predpostavke se izlazne temperature u cilju određivanja fizičkih karakteristika fluida. Koristi se metoda efektivnosti. Druga mogućnost je analitički prilaz u kome se jednačine (11.3) i (11.4) koriste zajedno sa jednačinama (11.12) ili (11.19).
4. Nepoznata jedna temperatura, protok istog fluida i razmijenjena količina toplote. Poznate ostale temperature, protok drugog fluida, koeficijent prolaza i površina razmjenjivača.
Odredi se razmijenjena količina toplote iz (11.3) ili (11.4), zatim srednja temperatura iz (11.16) i konačno nepoznata temperatura iz (11.17). Protok se dobija iz (11.3) ili (11.4).

Literatura

- [1] Chenoweth, J.M., and M. Impagliazzo, Fouling in Heat Exchange equipment, ASME Symposium Volume HTD-17, New York, 1981.
- [2] Kakac, S., A.E. Bergles, and F. Mayinger. Heat Exchangers, Hemisphere Publishing, New York, 1981.
- [3] Kakac, S., R.K. Shah, and A.E. Bergles, Low Reynolds Number Flow Heat Exchangers, Hemisphere Publishing, New York, 1983.
- [4] Kays, W.M., and A.L. London, Compact Heat Exchangers, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1984.
- [5] Standards of the Tubular Exchange Manufacturers Association, 6th ed., Exchanger Manufacturers Association, New York, 1978.

PITANJA IZ PREDMETA PRENOS TOPLOTE I MASE

1. Fizički Mehanizam prenosa toplote putem kondukcije, Fourier-ova jednačina
2. konvekcije, Newtonova jednačina
3. zračenja, Stefan-Boltzman-ov zakon
4. Koeficijenti emisije i apsorpcije su jednaki potpuno ili približno, za sve ili neki specijalan slučaj zračenja?
5. Izraz, $\dot{q}_A = \epsilon\sigma T_A^4 - \alpha G = \sigma(\epsilon T_A^4 - \alpha T_o^4)$, za energiju razmijenjenu zračenjem važi za bilo koji međusobni položaj tijela ili za neki specijalni slučaj (koji?).
6. Koeficijent toplotne provodnosti
7. Koeficijent toplotne difuzije
8. Po čemu se razlikuju zakoni o odrežanju mehaničke, ukupne i toplotne energije?
9. Kakva je veza između jednačina toplotne energije i toplotne difuzije?

10. Data je jednačina toplotne difuzije, $div(\lambda gradT) + \dot{e}_{g,v} = \rho \frac{\partial u}{\partial t}$.

Objasniti fizičku suštinu svakog člana i analizirati posebne oblike ove jednačine.

11. Granični i početni uslovi jednačine toplotne difuzije.

12. Definisati granični sloj
13. Skicirati raspored brzina u graničnom sloju (viskozni i savršeni fluid) na ravnom i zakrivljenom zidu
14. Skicirati raspored brzine i temperature u brzinskom i temperaturnom graničnom sloju. Od čega zavisi odnos debljina ovih graničnih slojeva.
15. Izvesti Prandtlove jednačine graničnog sloja*
16. Napisati Prandtl-ove jednačine graničnog sloja i definisati granične uslove
17. Izvesti približni izraz za debljinu graničnog sloja
18. Objasniti fenomen odvajanja graničnog sloja

19. Polazeći od energijske jednačine, $\rho \frac{Di}{Dt} = div(\lambda gradT) + \dot{e}_{g,v} + \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi^*$,

izvesti energijsku jednačinu graničnog sloja fluida koji struji preko zagrijane površine.

20. Izvesti izraze za debljinu istiskivanja i debljinu gubitka impulsa*
21. Prikazati grafički debljinu istiskivanja
22. Objasniti fizičku suštinu debljine istiskivanja i debljine gubitka impulsa.
23. Integralna jednačina kretanja*
24. Grafički prikazati temperaturni i brzinski granični sloj. Skicirati raspodjelu brzine i temperature u graničnom sloju.
25. Integralna energijska jednačina*
26. Koje veličine povezuju Prandtlova i Reynoldsova analogija.
27. Pod kojim uslovima važi isti izraz za prenos toplote u laminarnom podsloju i turbulentnom jezgri?

28. Temperaturno polje ravnog i cilindričnog zida
29. sa promenljivim koeficijentom toplotne provodnosti
30. sa generacijom toplote*
31. Ravan i cilindričan zid sa konvektivnim graničnim uslovima (razmj. kol toplote?)
32. Dat je izraz za rezultujuću toplotni otpor, $\sum R_i = \frac{1}{2\pi R_1 L h_u} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi \lambda_c L} + \frac{\ln(R_3/R_2)}{2\pi \lambda_i L} + \frac{1}{2\pi R_3 L h_s}$,

Definisati kritičnu debljinu izolacije

33. Rebra beskonačne dužine*

34. Efikasnost rebara; keficijenti efektivnosti i korisnog dejstva. Diskutovati izraz $\varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda p}{hA}}$
35. Numerička analiza problema dvodimenzione stacionarne kondukcije*
36. Granični uslovi pri dvodimenzionoj stacionarnoj kondukciji - ravan zid sa konvekcijom
37. Granični uslovi pri dvodimenzionoj stacionarnoj kondukciji - pravougaoni korner
38. Izvesti izraz za Biottov broj
39. Karakteristika sistema sa malim unutrašnjim otporom
40. Karakteristika sistema sa velikim unutrašnjim otporom
41. Skicirati temperatursko polje u tijelu proizvoljnog oblika sa različitim Biottov-m brojevima
42. Sistem sa malim unutrašnjim otporom*
43. Eksplicitni metod
44. Eksplicitni metod, granični uslovi, jednodim. problem
45. Eksplicitni metod, granični uslovi, dvodim. problem
46. Implicitni metod
47. Implicitni metod, granični uslovi, jednodim. problem
- *****
48. Izvesti izraz za Nusselt-ov broj
49. Sličnost i razlika Biott-ovog i Nusselt-ovog broja?
50. Skicirati brzinski i temperaturski granični sloj na ravnoj ploči pri lam. strujanju
51.pri turbulentnon strujanju
52. Izvesti izraz za debljinu brzinskog gran. sloja metodom integr. analize*
53.temperaturskog gran. sloja.....*
54. Definisati kritičan Reynolds-ov broj
55. Izvesti izraz za Stanton-ov broj ako je $\dot{q}_{st} = -c_p \tau_w \frac{dT}{dx}$
56. Strujanje u cijevima – profil temperature
57. Srednja temperatura pri strujanju kroz cijevi i izraz za Njutnov zakon hladjenja
58. Dokazati da je Nusselt-ov broj pri strujanju kroz cijev konstantan
- *****
59. Prirodna konvekcija: definicija, osnovne karakteristike
60. Diferencijalne jednačine graničnog sloja pri prirodnoj konvekciji
61. Grashov-ov broj: definicija, fizička suština.
62. Definisati vezu $\rho = \rho(t)$, pri slobodnoj konvekciji na vertikalnom zidu
63. Boussinesq-ova aproksimacija.
64. Maksimalna razmijenjena količina toplote pri ključanji zavisi od: vrste fluida, vrste materijala grijača, geometrije grijača, stanja površine grijača (podvući tačan odgovor)
65. Nacrtati i objasniti krivu ključanja u posudi
66. Nacrtati i objasniti proces ključanja u cijevi
67. Vrste kondenzacije, skicirati polje brzine i temperature.
68. Osnovne pretpostavke pri izvodjenju koeficijenta konvekcije pri kondenzaciji
69. Koeficijent konvekcije pri laminarnoj filmskoj kondenzaciji*
70. Koje veličine u izrazu za masu kndenzata $\dot{m} = \rho_f v_{sr} \delta W$ zavise od koordinate x duž vertikalnog zida
71. Za koju vrstu strujanja pri filmskoj kondenzaciji je tačan izraz $R_e = \frac{4\dot{m}}{\mu_t W}$:lam., turb., nije tačan (podvući tačan odgovor)
- *****

72. Srednja logaritamska temperatura*
73. Koeficijent efektivnosti razmjenjivača*
74. Vrste razmjenjivača, nabrojati i objasniti
75. Metodologija proračuna razmjenjivača
76. Skicirati raspodjelu temperature kada je toplotni kapacitet jednog fluida beskonačan i kada su toplotni kapaciteti indentični
77. Nacrtati temperaturske profile istosmjernog i suprotnosmjernog razmjenjivača
78. Osnovne razlike istosmjernog i suprotnosmjernog razmjenjivača
79. Koeficijent efektivnosti – definicija
80. Pod kojim uslovima se može postići koeficijent efektivnosti jednak jedinici kod istosmjernog odnosno kod suprotnosmjernog razmjenjivača?

Pitanja sa zvjezdicom samo za stari program