

ZADACI IZ ALGEBARSKE TOPOLOGIJE -I DIO

- (1) Neka je $A_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$, $A_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$, $A_3 = \{(0, \cos t, 2 + \sin t)\}, 0 \leq t \leq \pi\}$ i $A_4 = \{(0, 1 + \cos t, 1 + \sin t), -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$. Dokazati da potprostori $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ i $Y = A_1 \cup A_2 \cup A_4$ nijesu homeomorfni ali da imaju isti homotopski tip.
- (2) Neka je $a_n = (\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}$ i neka se $X \subset \mathbb{R}^2$ sastoji od svih duži koje spajaju tačke a_n sa tačkom $(0, 1)$ i svih duži koje spajaju tačke $-a_n$ sa tačkom $(0, -1)$. Dokazati da X nije kontraktibilan.
- (3) Za linearno povezani prostor X kažemo da je 1-jednostavan ako su za svaka dva puta h i h' u X takva da je $h(0) = h'(0), h(1) = h'(1)$ prirodni izomorfizmi $\varphi_h, \varphi_{h'} : \pi(X, h(1)) \rightarrow \pi(X, h(0))$ jednaki. Dokazati da je X 1-jednostavan ako i samo ako je grupa $\pi_1(X)$ Abelova.
- (4) • Neka je $S^1 \subset \mathbb{C}$ jedinična kružnica, a $f : S^1 \rightarrow S^1$ preslikavanje koje nije homotopno identičkom preslikavanju. Dokaži da postoji $a \in S^1$ tako da je $f(a) = -a$.
• Neka je $g : S^1 \rightarrow S^1$ antipodalno preslikavanje tj. $g(z) = -z$. Dokazati da je g homotopno identičkom preslikavanju.
- (5) Opisati homomorfizam $f_* : \pi(S^1) \rightarrow \pi(S^1)$ koji indukuje preslikavanje $f : S^1 \rightarrow S^1$ ako je
- $f(e^{i\varphi}) = e^{i(\pi+\varphi)}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
 - $f(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi, n \in \mathbb{Z}$,
 - $f(e^{i\varphi}) = \begin{cases} e^{i\varphi}, & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ e^{i(2\pi-\varphi)}, & \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$
- (6) Neka je $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Dokazati da postoji $z \in S^1$ tako da je $f(-z) = f(z)$.
- (7) Neka je $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f(-x) = -f(x)$ za sve $x \in S^2$. Dokazati da postoji tačka $x \in S^2$ takva da je $f(x) = 0$.