

GRAĐEVINSKI FAKULTET U SARAJEVU

H. Hrelja

D. Isailović

1048²

HIDROLOGIJA
ZBIRKA RJEŠENIH ZADATAKA

SARAJEVO 1984.

Pored zadataka, na kraju zbirke su priložene statističke tabele koje se najčešće upotrebljavaju u praksi i koje su ujedno korištene pri izradi zadataka. Nadalje, dat je i popis osnovne literature koja može biti od koristi ne samo za rješavanje postavljenih problema, nego i za savladavanje hidrologije u cjelini.

Obzirom na nedostatak udžbeničke literature za predmet Hidrologija na Gradjevinskom fakultetu u Sarajevu, ova Zbirka predstavlja prvi korak u nastojanju da se ova materija učini dostupnom studentima. Svi nedostaci vezani za obim i način prezentacije kao i greške idu na teret autora. Primjedbe i sugestije od strane korisnika biće sa zahvalnošću prihvaćene i ukomponovane u naredno izdanje Zbirke.

Sarajevo, 1984. god.

Autori

S A D R Ž A J

ZADATAK:	Str.
1. Obrada hidrometrijskog mjerenja proticaja metodom površina-brzina	1
2. Odredjivanje proticaja metodom obilježivača ...	8
3. Konstrukcija linije proticaja i utvrđivanje njenog analitičkog oblika	13
4. Ekstrapolacija linije proticaja metodom \sqrt{V}/h	21
5. Ekstrapolacija linije proticaja metodom $F\sqrt{h_{sr}}$	26
6. Ekstrapolacija linije proticaja metodom $\gamma^* B h_{sr}^{3/2}$	29
7. Linija učestalosti i linija trajanja vodostaja i proticaja	34
8. Računanje statističkih parametara i odredjivanje vjerovatnoća pojave za zadati uzorak proticaja	48
9. Prilagodjavanje funkcije normalne raspodjele osmotrenom uzorku proticaja	53
10. Prilagodjavanje Log-normalne (Galtonove) funkcije raspodjele osmotrenom uzorku proticaja ...	60
11. Prilagodjavanje Pearson-III funkcije raspodjele osmotrenom uzorku proticaja	65
12. Linearna regresija između bruto padavina i neto padavina (oticanja)	69
13. Odredjivanje prosječnih padavina na slivnoj površini	75
14. Statistička analiza kiša kratkog trajanja	82
15. Analiza hidrograma oticanja i odredjivanje jediničnog hidrograma od proste kiše	88

	Str.
16. Odredjivanje jediničnog hidrograma od složene kiše i proračun transformacije hidrograma oticanja kroz akumulaciju (metoda Kočerina) ...	102
17. Transformacija hidrograma oticanja kroz akumulaciju (kvazistacionarna metoda)	115
18. Transformacija hidrograma oticanja kroz rječno korito (metoda Muskingam)	125
LITERATURA	133
PRILOG:	
1. Ordinate $f(z)$ standardne normalne funkcije raspodjele	135
2. Površina ispod standardne normalne funkcije raspodjele	136
3. Površina ispod Gumbel-ove funkcije raspodjele	137
4. Vrijednosti promjenljive, z , (Pearson III raspodjela po Foster-Ribkin-u) za zadatu vjerovatnoću, $\Phi(z)$ i koeficijent asimetrije C_s .	
a) Pozitivan koeficijent asimetrije, C_s	138
b) Negativan koeficijent asimetrije, C_s	139
5. Vrijednosti promjenljive, χ^2 , za zadatu vjerovatnoću $F(\chi^2)$, i broj stepeni slobode, ν	140
6. Kolmogorov-Simirnov test saglasnosti	141
7. Vrijednosti promjenljive, t , (po Studentu) za zadatu vjerovatnoću, $F(t)$, i broj stepeni slobode, ν	142

ZADATAK BROJ 1

Na osnovu datih podataka o izvršenom mjerenju brzine toka vode Bijele rijeke na vodomjernoj stanici Presjenica, hidrometrijskim krilom, odrediti proticaj vode grafoanalitičkom metodom.

Mjerenje je izvršeno 14.10.1977. godine, u periodu od 9⁰⁰-9⁴⁰ časova. U toku mjerenja vodostaj se nije mjenjao i iznosio je $h = 87$ cm.

Jednačina hidrometrijskog krila:

$$v = 0,3023 n + 0,008 \quad [\text{m/s}]$$

Elementi poprečnog profila:

Tabela 1.1.

Redni broj	Stacionaža - odstojanje od lijeve obale [m]	Dubina vode [m]
1.	0,0	0,00
2.	0,5*	0,50
3.	1,5*	0,80
4.	2,5	0,82
5.	3,5*	0,92
6.	4,5	0,98
7.	5,5*	0,94
8.	6,5	0,98
9.	7,5*	0,60
10.	8,5	0,45
11.	9,5*	0,40
12.	10,5	0,00

* Vertikale u kojima su vršena mjerenja brzine.

Podaci o mjerenju brzine

Tabela 1.2.

Redni broj, stacionaža, i dubina vode u vertikali	Red.br. tačke u vertikali*	Odstojanje od dna h [cm]	Br.obrtaja hydr.krila N [obrtaja]	Vrijeme obrtanja hydr.krila t [s]	Jedinič. broj obrtaja $n = \frac{N}{t}$ [o/s]	Brzina u tački v [m/s]
1	2	3	4	5	6	7
I 0,50 m; 0,50 m	3	20	140	71	1,972	0,604
	5	40	160	75	2,133	0,652
II 1,50 m; 0,80 m	2	16	200	61	3,278	0,999
	3	32	220	57	3,859	1,174
	5	64	220	56	3,928	1,195
III 3,50 m; 0,92 m	2	18	300	65	4,615	1,403
	3	36	320	65	4,923	1,496
	4	56	400	73	5,479	1,664
	5	74	440	79	5,569	1,691
IV 5,50 m; 0,94 m	6	87	400	81	4,938	1,500
	2	18	400	84	4,762	1,447
	3	36	440	81	5,432	1,650
	4	56	500	87	5,747	1,745
V 7,50 m; 0,60 m	5	74	500	84	5,952	1,807
	6	89	400	78	5,128	1,558
	2	12	200	55	3,636	1,107
VI 9,50 m; 0,40 m	3	24	260	58	4,482	1,362
	4	48	300	61	4,918	1,494
	3	16	120	70	1,714	0,526
	5	32	140	71	1,972	0,604

*U našoj hidrometrijskoj praksi ukoliko dubina u vertikali dozvoljava, uobičajeno je da se mjerenje brzina u principu vrši na sljedećim mjernim tačkama u vertikali:

1. Mjerna tačka neposredno iznad dna (oko 5-10 cm od dna)
2. " " na 0,2 h od dna
3. " " na 0,4 h od dna
4. " " na 0,6 h od dna
5. " " na 0,8 h od dna
6. " " neposredno ispod površine (oko 5-10 cm ispod površine)

RJEŠENJE:

Postupak određivanja proticaja po ovoj metodi sastoji se iz sljedećih koraka:

1. Nacrtati poprečni profil vodotoka u pogodnoj razmjeri koja u principu nije ista za dužine i visine (vidi sliku 1.2). Poprečni profil je opisan sa prve dvije vrste (odstojanje od lijeve obale i dubina u vertikali) za koje su podaci preuzeti iz tabele 1.1.

2. Izračunati brzine u svim mjernim tačkama na osnovu zadate jednačine hidrometrijskog krila kojim je izvršeno mjerenje

$$v = 0,3023 n + 0,008 \quad [\text{m/s}]$$

gdje je $n = \frac{N}{t}$ [o/s].

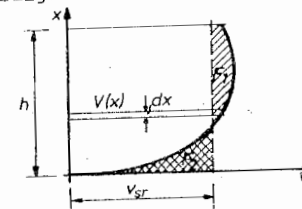
Postupak je proveden u kolonama 6 i 7 tabele 1.2.

3. Nacrtati dijagrame brzina u mjerenim vertikalama i odrediti prosječnu brzinu u svakoj vertikali (slika 1.1). Srednja brzina je definirana sljedećim izrazom:

$$V_{sr} h = \int_0^h V(x) dx,$$

odakle slijedi da je

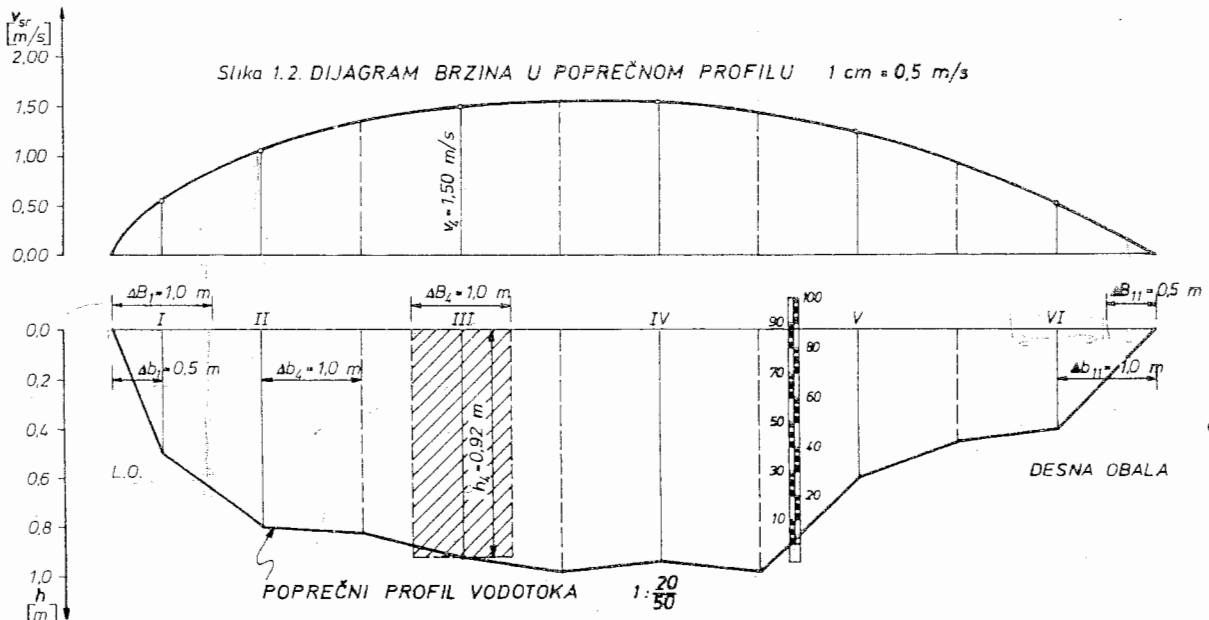
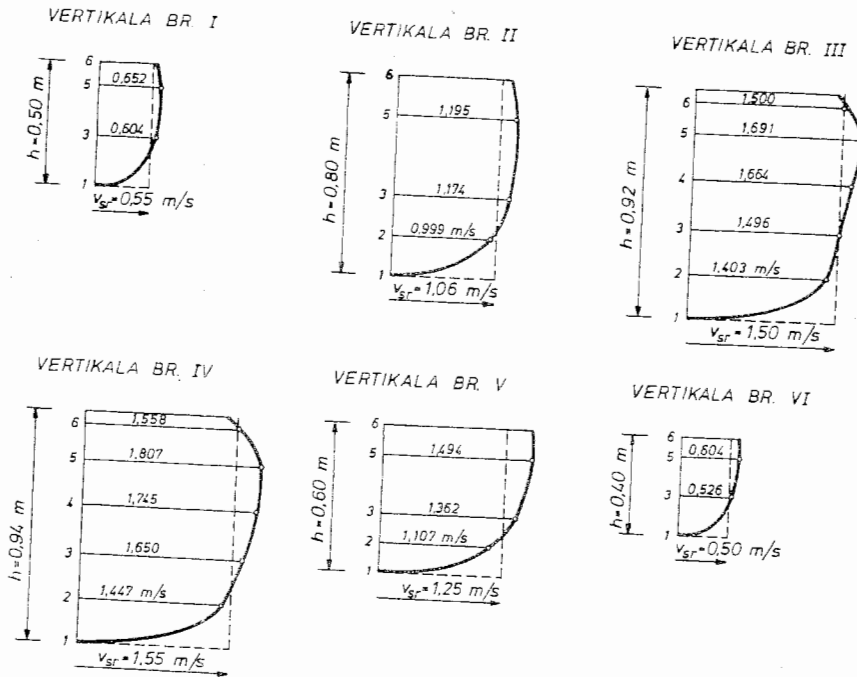
$$V_{sr} = \frac{\int_0^h V(x) dx}{h}$$



Za praktične potrebe V_{sr} se približno procjeni tako da se povuče vertikalna linija koja daje $F_1 \approx F_2$.

4. Nacrtati dijagram brzina u poprečnom profilu na osnovu prosječnih brzina u vertikalama iz tačke 3., i unijeti vrijednosti brzine u 3 vrste ispod poprečnog profila. Za one vertikale u kojima nije vršeno mjerenje brzine, njena vrijednost se očitava sa konstruisanog dijagrama (sl.1.2).

Slika 1.1. ODREĐIVANJE SREDNJE BRZINE NA VERTIKALAMA



ODSTOJANJE OD LIJEVE OBALE [m]	0.00	0.50	1.50	2.50	3.50	4.50	5.50	6.50	7.50	8.50	9.50	10.50
DUBINA U VERTIKALI [m]	0.00	0.50	0.80	0.82	0.92	0.98	0.94	0.98	0.60	0.45	0.40	0.00
SREDNJA BRZINA [m/s]	0.00	0.55	1.06	1.35	1.50	1.55	1.55	1.45	1.25	0.92	0.50	0.00
ELEMENTARNI PROTICAJ q [$m^3/s/m$]	0.000	0.275	0.868	1.107	1.380	1.519	1.457	1.421	0.750	0.414	0.200	0.000

$q_1 = 9.372$ m³/s/m

5. Određivanje protoka vrši se na nekoliko načina čiji izbor zavisi od lokalnih uslova (širina profila, raspored dubina po profilu, raspored brzina po profilu i sl.).

$$5.1. Q = \Delta B \sum_{i=1}^m q_i = \Delta B \sum_{i=1}^m h_i v_i =$$

$$= 1,0(0,50 \times 0,55 + 0,80 \times 1,06 + \dots + \\ + 0,40 \times 0,50) = 1,0(0,275 + 0,848 + \dots + 0,200) = \\ = 1,0 \times 9,372 = 9,372 \text{ m}^3/\text{s}$$

gdje je m broj vertikalna u kojima su izmjerene dubine $h_i > 0$ (u ovom primjeru m = 10).

Ovaj način proračuna izvodi se na crtežu kako je pokazano na slici 1.2.

Treba uočiti da gornja metoda podrazumjeva:

a) $\Delta B_1 = \Delta B_2 = \dots = \Delta B_{10} = \Delta B = \text{const.}$, te da se zbog toga u nekim slučajevima (kao u ovom primjeru) zanemaruje dio protoka uz obale. U ovom primjeru zanemaren je protok koji se odvija kroz lamelu širine 0,5 m uz desnu obalu.

b) Da se dubina i brzina za svaku lamelu uzima kao konstantna vrijednost izmjerena (a za brzine izmjerena odnosno očitana sa dijagrama) na sredini razmatrane lamele. Na ovaj način čine se greške čija veličina zavisi od promjenljivosti poprečnog profila i dijagrama brzina u njemu.

$$5.2. Q = \sum_{i=1}^{m+1} \Delta b_i q_i = \sum_{i=1}^{m+1} \Delta b_i \left(\frac{v_{i-1} + v_i}{2} \right) \left(\frac{h_{i-1} + h_i}{2} \right) = \\ = 0,5 \left(\frac{0,0+0,5}{2} \right) \cdot \left(\frac{0,0+0,55}{2} \right) + 1 \cdot \left(\frac{0,50+0,80}{2} \right) \cdot \left(\frac{0,55+1,06}{2} \right) + \\ + \dots + 1,0 \left(\frac{0,40+0,00}{2} \right) \cdot \left(\frac{0,50+0,00}{2} \right) = \\ = 0,034 + 0,523 + \dots + 0,302 + 0,050 = 9,139 \text{ m}^3/\text{s}$$

U ovom primjeru $\Delta b_1 = 0,5 \text{ m}$, a $\Delta b_2 = \Delta b_3 = \dots = \Delta b_{11} = 1,0 \text{ m}$.

Treba uočiti da se ovim postupkom prave aproksimacije koje se sastoje u sljedećem:

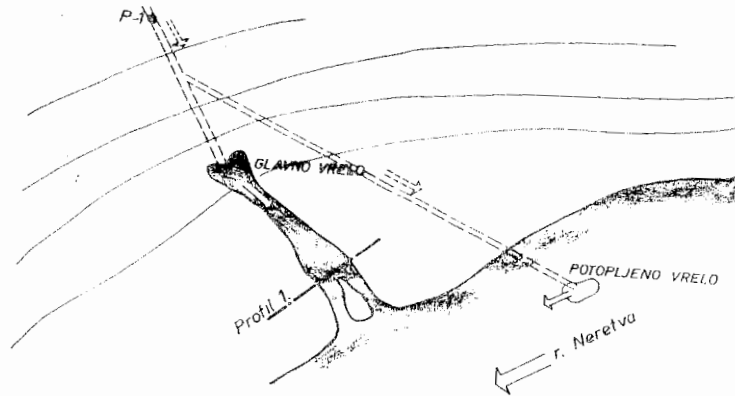
- a) Podrazumjeva se da je promjena brzina između vertikalna linearna
- b) Podrazumjeva se da je težište dijela razmatranog dijagrama brzine i lamele proticajnog presjeka u sredini razmatrane lamele (na $\Delta b_i/2$) što u suštini nije tačno.

Upoređujući načine proračuna objašnjenje pod 5.1. i 5.2. može se konstatovati da način pod 5.2. daje nešto bolje rezultate, posebno kad su značajnije izražene promjene dubina i brzina u poprečnom profilu.

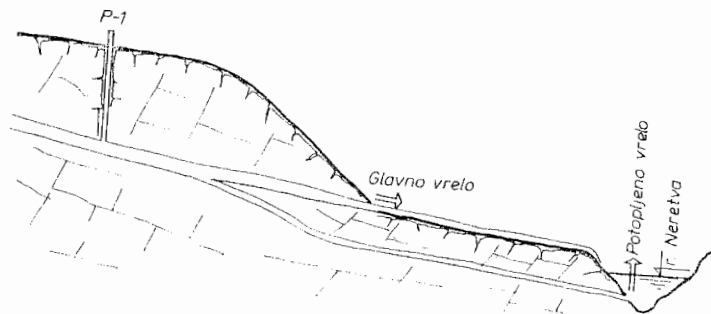
ZADATAK BROJ 2

Izvorište Studenac nalazi se na desnoj obali rijeke Neretve i sačinjavaju ga dva značajnija vrela: Glavno vrelo i Potopljeno vrelo. Pored ovih, postoji i nekoliko manjih vrela koja su po svojoj veličini beznačajna.

Skica 2.1.



Skica 2.2.



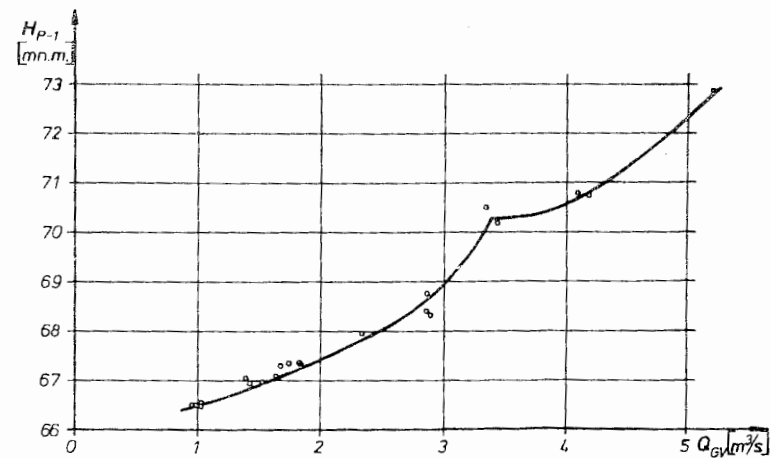
Prikazane skice treba shvatiti kao najjednostavniju mogućnost podzemne veze piježometarske bušotine i vrela

Proticaji glavnog vrela mogu se odrediti u otvorenom toku (na profilu 1) uobičajenim metodama terenske hidrometrije za otvorene tokove.

Ubacivanjem boje (obliježivača) u piježometre i bunare u zaledju izvorišta je pokazano da vrela imaju kontakt sa podzemnom karstnom akumulacijom čije se stanje može pratiti preko nivoa vode na piježometru P1.

Otvoreni tok glavnog vrela, zbog vršnog rada uzvodnih hidroelektrana na rijeci Neretvi učestano dolazi pod uspor, zbog čega je teško i nesvrishodno definisati odnos proticaja i vodostaja u ovom dijelu toka. Međutim, sam izlaz iz podzemlja, odnosno početak površinskog toka ne dolazi pod uspor radi čega je moguće proticaje staviti u vezu sa nivoom vode u bušotini P1. Na bazi većeg broja hidrometrijskih mjerenja uspostavljena je empirijska veza proticaja na profilu 1 (Glavno vrelo) i vodostaja na piježometru P1 kao što je pokazano na skici 2.3.

Skica 2.3.



Treba uočiti da prikazana linija proticaja održava režim tečenja pod pritiskom (isticanje iz podzemlja) pa zbog toga ima drugačiji oblik od linija proticaja za otvorene tokove gdje je proticaj

vezan za vodostaj u samom toku. Također se pretpostavlja da se tečenje odvija u hidrauličkim uslovima prikazanim na skici 2.2. Međutim, na bazi lomā linije proticaja (kota ~ 70,3 m n.m. i $Q = 3,4 \text{ m}^3/\text{s}$) može se zaključiti da dolazi do aktiviranja i novih podzemnih kanala čiji protok je obuhvaćen u profilu 1.

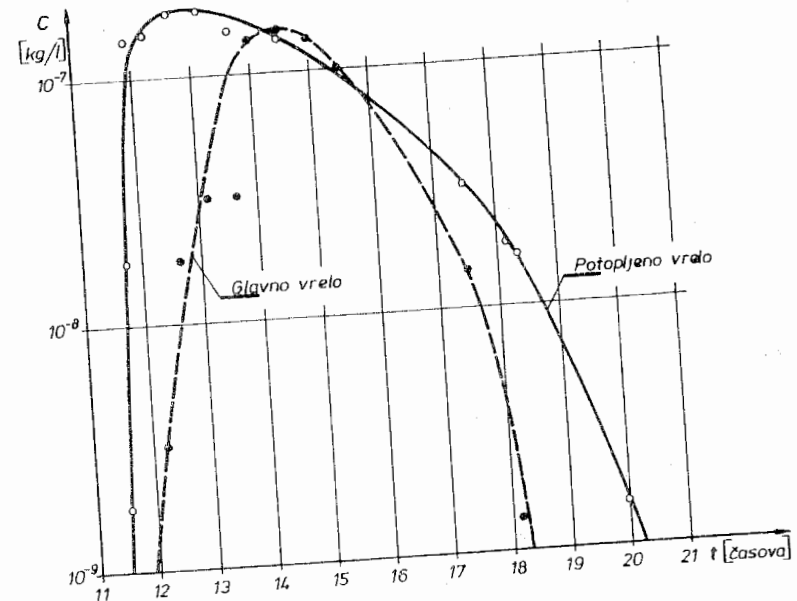
U piježometar P-1 ubačeno je trenutno 2 kg obilježivača (natrijum-fluoresceina) u momentu kada je vodostaj na piježometru P-1 bio 66,54 m n.m.

Na vrelima su uzimani uzorci vode i utvrđene koncentracije obilježivača kao u tabeli 2.1.

Na bazi prezentiranih podataka odrediti približnu veličinu isticanja kroz potopljeno vrelo, imajući u vidu da je nivo podzemne vode registrovan na P-1, bio konstantan kroz čitavo vrijeme vršenja mjerenja.

Tabela 2.1.

Vrijeme uzimanja uzorka [sati]	Koncentracija obilježivača [kg/l]	
	Potopljeno vrelo c_i	Glavno vrelo c_i
11 ⁰⁰	0	0
11 ²⁰	0	0
11 ³⁰	$2,5 \cdot 10^{-9}$	0
11 ⁴⁵	$2,5 \cdot 10^{-8}$	0
11 ⁵⁵	$1,43 \cdot 10^{-7}$	0
12 ¹⁵	$1,67 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-9}$
12 ⁴⁰	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$
13 ¹⁰	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-8}$
13 ⁴⁰	$1,67 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-8}$
14 ⁰⁰	$1,43 \cdot 10^{-7}$	$1,25 \cdot 10^{-7}$
14 ³⁰	$1,25 \cdot 10^{-7}$	$1,67 \cdot 10^{-7}$
15 ⁰⁰	$1,25 \cdot 10^{-7}$	$1,25 \cdot 10^{-7}$
15 ³⁰	10^{-7}	10^{-7}
17 ³⁰	$5 \cdot 10^{-8}$	$1,43 \cdot 10^{-8}$
18 ¹⁰	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$1,25 \cdot 10^{-9}$
18 ²⁰	$2 \cdot 10^{-8}$	0
20 ⁰⁰	$1,67 \cdot 10^{-9}$	0
20 ²⁰	0	0



RJEŠENJE:

Određivanje količine vode u toku metodom obilježivača bazira se na činjenici da je masa upuštenog obilježivača u bušotinu jednaka masi obilježivača koji istekne na obadva vrela (potopljenom i nepotopljenom), tj.

$$G_0 = G_1 + G_2 \quad \text{gdje je}$$

$G_0 = 2 \text{ kg}$ masa obilježivača ubačena u bušotinu, tj. podzemni tok
 G_1 - masa obilježivača registrovana na nepotopljenom dijelu vrela (glavno vrelo)
 G_2 - masa obilježivača registrovana na potopljenom dijelu vrela
 Eventualni zaostaci obilježivača u podzemlju i piježometarskoj bušotini su zanemareni.

Iz gornje jednačine slijedi da je masa obilježivača na potopljenom dijelu vreła:

$$G_2 = G_0 - G_1$$

Iz poznatih koncentracija obilježivača (tabela 2.1. i skica 2.4.) na nepotopljenom dijelu vreła (Glavno vrelo) i protoka određenoj sa linije proticaja za $H = 66,54$ m n.m. (što je potvrđeno i direktnim mjerenjem na profilu 1) koji je bio konstantan u toku uzimanja uzoraka obilježivača ($Q_1 = 1000$ l/s) odredi se masa isteklog obilježivača:

$$G_1 = \sum Q_1 \cdot C_1 \cdot \Delta t = Q_1 \cdot \sum C_1 \cdot \Delta t = 1,23 \text{ kg}$$

Iz poznatih koncentracija obilježivača na potopljenom dijelu vreła (tabela 2.1. i skica 2.4) odredi se:

$$\sum C_1 \cdot \Delta t = 0,00242 \text{ kgs/l}$$

Pošto je masa obilježivača na Potopljenom vrelu

$$G_2 = G_0 - G_1 = Q_2 \cdot \sum C_1 \cdot \Delta t = 2 - 1,23 = 0,77 \text{ kg}$$

Slijedi da je proticaj potopljenog dijela vreła:

$$Q_2 = \frac{G_2}{\sum C_1 \cdot \Delta t} = \frac{0,77}{0,00242} = 318 \text{ l/s}$$

Napomena: Vrijednosti $\sum C_1 \cdot \Delta t$ i $\sum C_2 \cdot \Delta t$ određene su na slijedeći način:

- 1) Na bazi laboratorijski utvrđenih koncentracija u uzorcima koji su uzimani u različitim vremenskim intervalima nacrtani su dijagrami koncentracije obilježivača u vremenu za oba razmatrana vreła;
- 2) Sa dijagrama su očitane ordinate na istim vremenskim razmacima, koje su sumrane i pomnožene sa $\Delta t = \text{const.}$ (skica 2.4).

ZADATAK BROJ 3

Na osnovu izvršenih mjerenja proticaja rijeke Janje na vodomjernoj stanici Priboj, datih u tabeli 3.1. potrebno je:

1. Odrediti analitički oblik krive proticaja koristeći slijedeće matematske modele

a. $Y = ax^2 + bx + c$, ako je $X \hat{=} h$, $Y \hat{=} Q$ i

b. $Y = a(X - x_0)^b$, ako je $x_0 = 10$ cm, a $Y \hat{=} Q$ i $X \hat{=} h$

Fizičko značenje veličine $x_0 = h_0$, je vodostaj pri kojem nema tečenja, tj. $Q = 0$.

2. Izvršiti ocjenu saglasnosti izmjerenih i računskih vrijednosti proticaja.

Tabela 3.1.

Datum mjerenja	Vodostaj h [cm]	Proticaj Q [m ³ /s]
14.8.1971.	18	0,020
28.6.1972.	20	0,080
8.9.1972.	38	0,620
9.9.1972.	45	1,430
16.9.1972.	54	1,860
8.10.1972.	67	4,230
17.4.1973.	55	2,080
22.1.1974.	62	3,260
23.1.1974.	56	2,410
19.4.1974.	75	6,500
20.4.1974.	61	3,060
18.5.1974.	70	5,000
11.6.1974.	76	6,430
18.6.1974.	143	31,500
20.6.1974.	118	19,900

RJEŠENJE:

1.a. Ocjena parametara a , b i c za ovaj model vrši se iz uslova da se minimizira suma kvadrata odstupanja izmjerenih proticaja u odnosu na sračunatu krivu proticaja, tj.

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 = S \quad (1)$$

gdje je y_i izmjerena vrijednost a \hat{y}_i vrijednost sračunata po modelu, dakle $\hat{y}_i = ax_i^2 + bx_i + c$, dok je $e_i^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2$

U ovoj vrsti zadataka poznate su vrijednosti x_i i y_i , iz kojih treba odrediti nepoznate parametre modela a , b i c uz uslov da suma kvadrata $S = \sum_{i=1}^n e_i^2$ bude minimizirana. Zadatak se rješava

tako da se parcijalni izvodi S po nepoznatim parametrima izjednače sa nulom, dakle:

$$\frac{\partial S}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0 \quad (2.a.)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n x_i [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0 \quad (2.b.)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n x_i^2 [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0 \quad (2.c.)$$

Uz odgovarajuće sredjivanje jednačina, gornji sistem se svodi na slijedeće:

$$cn + bp_1 + ap_2 = q_1 \quad (3.a.)$$

$$cp_1 + bp_2 + ap_3 = q_2 \quad (3.b.)$$

$$cp_2 + bp_3 + ap_4 = q_3 \quad (3.c.)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum x_i \\ p_2 &= \sum x_i^2 \\ p_3 &= \sum x_i^3 \\ p_4 &= \sum x_i^4 \end{aligned} \quad \begin{aligned} q_1 &= \sum y_i \\ q_2 &= \sum x_i y_i \\ q_3 &= \sum x_i^2 y_i \end{aligned}$$

n - broj mjerenja

Iz gornjeg sistema jednačina dobija se vrijednost parametra c :

$$c = \frac{\begin{vmatrix} q_1 & p_1 & p_2 \\ q_2 & p_2 & p_3 \\ q_3 & p_3 & p_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix}} = \frac{q_1 p_2 p_4 + p_1 p_3 q_3 + p_2 q_2 p_3 - q_3 p_2^2 - q_1 p_3^2 - q_2 p_1 p_4}{np_2 p_4 + 2p_1 p_2 p_3 - p_2^3 - np_3^2 - p_1^2 p_4} \quad (4)$$

Vrijednosti nepoznatih parametara a i b se najjednostavnije odredjuju rješavanjem sistema od dvije jednačine.

Vrijednosti suma p_1 - p_4 i q_1 - q_3 su proračunate u tabeli 3.2.

Tabela 3.2.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	18	0,020	324	5832	104976	0,360	6,48
2	20	0,080	400	8000	160000	1,600	32,00
3	38	0,620	1444	54872	2085140	23,560	895,28
4	45	1,430	2025	91125	4100620	64,350	2895,75
5	54	1,860	2916	157464	8503060	100,440	5423,76
6	67	4,230	4489	300763	20151100	283,410	18988,47
7	55	2,080	3025	166375	9150620	114,400	6292,00
8	62	3,260	3844	238328	14776300	202,120	12531,44
9	56	2,410	3136	175616	9834490	134,960	7557,76
10	75	6,500	5625	421875	31640600	487,500	36562,50
11	61	3,060	3721	226981	13845800	186,660	11386,26
12	70	5,000	4900	343000	24010000	350,000	24500,00
13	76	6,430	5776	438976	33362200	488,680	37139,68
14	143	31,500	20449	2924210	418160000	4504,500	644143,50
15	118	19,900	13924	1643080	193870000	2348,200	277087,60
Σ	958	88,3 ^p	75998	7196446	783764390	9290,74	1085442,48
	p_1	q_1	p_2	p_3	p_4	q_2	q_3

Kada se vrijednosti p_j ($j = 1, 2, 3, 4$) i q_k ($k = 1, 2, 3$) iz tabele
3.2. unesu u jednačinu (4) dobije se:

$$c = 1,05434577$$

Vrijednosti preostalih nepoznatih parametara a i b se određuju rješavanjem sistema od dvije proizvoljno odabrane jednačine:

$$cn + bp_1 + ap_2 = q_1$$

$$cp_1 + bp_2 + ap_3 = q_2$$

Ako se unesu odgovarajuće vrijednosti za p_j , q_k i c dobija se:

$$a = 0,00216192$$

$$b = -0,09575877$$

Analitički oblik krive proticaja određene primjenom modela $y = ax^2 + bx + c$ glasi:

$$\hat{Q} = 0,00216192 h^2 - 0,09575877 h + 1,05434577$$

U gornjoj jednačini h se uvrštava u cm da se dobije Q u m^3/s .
Ukoliko se ne raspolaže sa odgovarajućom računarskom tehnikom, pri određivanju parametara a , b i c može se h uvrštavati u metrima, tako da ovi parametri budu veći brojevi (pogodniji za računanje).

1.b. Logaritamskom transformacijom jednačine

$$Y = a(X-x_0)^b \quad (5)$$

dobija se oblik

$$\log Y = \log a + b \log (X-x_0) \quad (6)$$

Jednačina (6) u pojednostavljenoj formi ima oblik

$$z = \alpha + \beta t \quad (7)$$

Jednačina (7) predstavlja klasičnu linearnu zavisnost izmedju zavisne promjenljive z i nezavisne promjenljive t . Parametri modela (7) α i β određuju se po principima objašnjenim za model iz tačke 1.a. odakle se dobije

$$\beta = \frac{C}{S_t} \frac{z_i t_i}{S_t} \quad (8)$$

$$\alpha = \bar{z} - \beta \bar{t} \quad (9)$$

Zamjenom vrijednosti $z_i = \log y_i$ i $t_i = \log (x_i - x_0)$ dobije se

$$b = \frac{\frac{1}{n} \sum [\log (x_i - x_0) \log y_i] - \frac{1}{n} \sum \log (x_i - x_0) \frac{1}{n} \sum \log y_i}{\frac{1}{n} \sum [\log (x_i - x_0)]^2 - \left[\frac{1}{n} \sum \log (x_i - x_0) \right]^2}$$

$$\alpha = \left[\frac{1}{n} \sum \log y_i - b \cdot \frac{1}{n} \sum \log (x_i - x_0) \right]$$

$$a = 10^\alpha$$

Neophodan proračun proveden je u tabeli 2.3.

Tabela 2.3.

i	x_i	y_i	$\log(x_i - x_0)$	$[\log(x_i - x_0)]^2$	$\log y_i$	$\log(x_i - x_0) \log y_i$
1	18	0,020	0,903090	0,815572	-1,698970	-1,534323
2	20	0,080	1,000000	1,000000	-1,09691	-1,096910
3	38	0,620	1,447158	2,0942663	-0,20760	-0,30043
4	45	1,430	1,544068	2,384146	0,15533	0,23984
5	54	1,860	1,6434527	2,7009368	0,26951	0,44292
6	67	4,230	1,7558745	3,0830953	0,62634	1,0997744
7	55	2,080	1,6532125	2,7331116	0,31806	0,52582
8	62	3,260	1,7160033	2,9446673	0,5132176	0,8806831
9	56	2,410	1,6627578	2,7647635	0,38201	0,63519
10	75	6,500	1,8129134	3,286655	0,81291	1,4737354
11	61	3,060	1,7075702	2,9115796	0,48572	0,829401
12	70	5,000	1,7781512	3,1618217	0,69897	1,2428743
13	76	6,430	1,8195439	3,31074	0,80821	1,4705736
14	143	31,500	2,1238516	4,5107456	1,4983106	3,1821894
15	118	19,900	2,0334238	4,1348124	1,2988531	2,6411188
Σ			24,60107	41,841131	4,863978	11,732496

Kada se odgovarajuće vrijednosti suma iz tabele 2.3. unesu u izraze za određivanje parametara a i b dobije se:

$$b = 2,514182; \alpha = -3,799173 \quad a = 10^\alpha; \quad a = 1,5879 \cdot 10^{-4}$$

Konačno analitički oblik krive proticaja primjenom modela $y = a(x-x_0)^b$ glasi:

$$\hat{Q} = 1,5879 \cdot 10^{-4} (h-10)^2,514182$$

U gornjoj jednačini h se uvrštava u cm da se dobije Q u m³/s.

Na slici 3.1 skupa sa izmjerenim veličinama prikazane su linije proticaja dobivene preko 2 razmatrana modela.

2. Za uporedbu saglasnosti mjerenih i računskih vrijednosti, kod primjene matematskih modela za krivu proticaja postoji više načina. Jedan od najčešće korištenih je izračunavanje sume kvadrata razlike mjerenih i računskih vrijednosti $(Q-\hat{Q})$. U tabeli 3.4. se daju rezultati ovog proračuna za naprijed primjenjene modele.

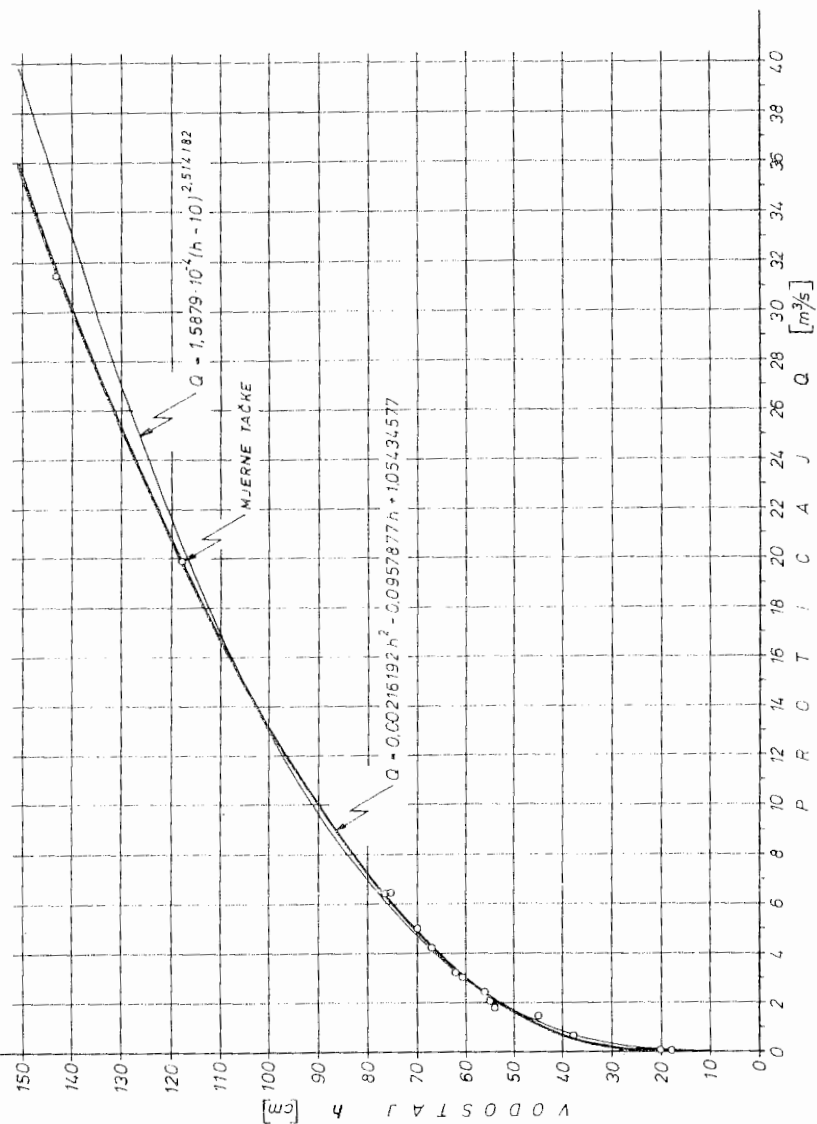
Tabela 3.4.

h	Q	M o d e l			
		$\hat{Q} = ah^2 + bh + c$		$\hat{Q} = a(h-h_0)^b$	
[cm]	[m ³ /s]	\hat{Q} [m ³ /s]	$(Q-\hat{Q})^2$	\hat{Q} [m ³ /s]	$(Q-\hat{Q})^2$
18	0,020	0,031	0,0001	0,030	0,0001
20	0,080	0,004*	0,0058	0,052	0,0008
38	0,620	0,537	0,0068	0,691	0,0050
45	1,430	1,123	0,0942	1,210	0,0483
54	1,860	2,188	0,1073	2,152	0,0850
67	4,230	4,343	0,0129	4,125	0,0110
55	2,080	2,327	0,0612	2,277	0,0387
62	3,260	3,428	0,0281	3,275	0,0002
56	2,410	2,472	0,0038	2,406	0,0000
75	6,500	6,033	0,2179	5,739	0,5794
61	3,060	3,258	0,0390	3,119	0,0034
70	5,000	4,945	0,0031	4,693	0,0944
76	6,430	6,264	0,0276	5,963	0,2177
143	31,500	31,570	0,0049	34,720	10,3669
118	19,900	19,857	0,0018	20,569	0,4483
Σ			0,6145		11,8994

*Treba uočiti da se sa povećanjem vodostaja (pri niskom h) može smanjiti proticaj, što proizilazi iz oblika unaprijed zadatog modela (kvadratna parabola). U praksi ovu fizičku nelogičnost treba korigovati.

Iz analize provedene u tabeli 3.4. proizilazi da se model $\hat{Q} = ah^2 + bh + c$ bolje prilagodjava mjerenim vrijednostima nego model $\hat{Q} = a(h-h_0)^b$.

Slika 3.1. LINIJA PROTICAJA RIJEKE JANJE NA VODOMJERNOJ STANICI PRIBOJ



ZADATAK BROJ 4

Za vodomjernu stanicu Han Skela na rijeci Vrbas dati su elementi poprečnog profila

Tabela 4.1

Vodostaj h [cm]	Površina poprečnog profila F [m ²]	Srednja dubina h _{sr} [m]
-150	4,0	0,4
-100	9,0	0,8
-50	15,5	1,18
0	22,0	1,55
50	29,5	1,85
100	38,0	2,10
150	48,0	2,40

Vodostaj h [cm]	Površina poprečnog profila F [m ²]	Srednja dubina h _{sr} [m]
200	58,0	2,75
250	68,5	3,10
300	80,0	3,35
350	92,0	3,70
400	104,0	4,20
450	116,5	4,70
500	128,5	5,20

i izvršena mjerenja proticaja

Tabela 4.2

Datum mjerenja	Vodostaj h [cm]	Proticaj Q [m ³ /s]	Pad vodnog ogledala J	Koeficijent hrapavosti po Maningu n
29.08.1952.	11	6,8	0,00037	0,092
09.05.1953.	100	40,1	0,00106	0,051
21.05.1983.	85	31,2	0,00098	0,056
17.09.1953.	30	11,6	0,00047	0,074
07.07.1955.	64	22,1	0,00087	0,065
30.10.1955.	112	46,9	0,00108	0,050
13.09.1957.	25	10,3	0,00062	0,087
09.05.1959.	51	18,3	0,00076	0,066
04.12.1959.	119	51,8	0,00117	0,046
08.12.1959.	104	42,3	0,00107	0,050
09.12.1959.	160	87,4	0,00127	0,038
08.04.1960.	320	250,0	0,00150	0,030
04.06.1962.	230	172,0	0,00140	0,032
26.07.1962.	280	212,0	0,00156	0,036
02.10.1962.	188	104,0	0,00129	0,032

Izvršiti ekstrapolaciju linije proticaja do vodostaja $h = 500$ cm, koristeći metod ekstrapolacije zavisnosti $J = f(h)$ i $n = f(h)$.

RJEŠENJE:

1. Geometrijske karakteristike poprečnog profila.

Na osnovu podataka iz tabele 4.1. nacrtane su zavisnosti $h = f(F)$ i $h = f(h_{sr})$ - slika 4.1.

2. Postupak ekstrapolacije

a) Konstruišu se zavisnosti $J = f(h)$ i $n = f(h)$ za raspoloživi niz mjerenih podataka - slika 4.2. (pune linije).

b) Kako J i n u domenu visokih vodostaja (iznad vrijednosti $h = 350$ cm), ostaju približno konstantni, to se uočene zavisnosti $J = f(h)$ i $n = f(h)$ za više vodostaje, produže (ekstrapoliraju) do traženog maksimalnog vodostaja $h = 500$ cm, tako da teže odredjenim konstantnim vrijednostima - slika 4.2 (crtkane linije).

c) Traženi proticaji za vodostaje iznad $h = 350$ cm dobiju se korištenjem jednačine za ustaljeno i ravnomjerno tečenje:

$$Q = c \cdot F \sqrt{RJ_E} \quad \text{gdje je} \quad (1)$$

c - Šezijev koeficijent trenja

F - površina proticajnog profila

R - hidraulički radijus proticajnog profila

J_E - pad linije energije

Ako se Šezijev koeficijent c uzme po Maningu $c = \frac{1}{n} R^{1/6}$, R zamjeni sa h_{sr} (srednja dubina vode u proticajnom profilu, što zadovoljava pri uslovu $h_{sr}/B \leq 0,1$), te obzirom na karakter tečenja u otvorenim tokovima aproksimativno uzme da je pad linije energije približno jednak padu vodnog ogledala, tj. $J_E \approx J$,

Gornja jednačina (1) može se napisati u obliku:

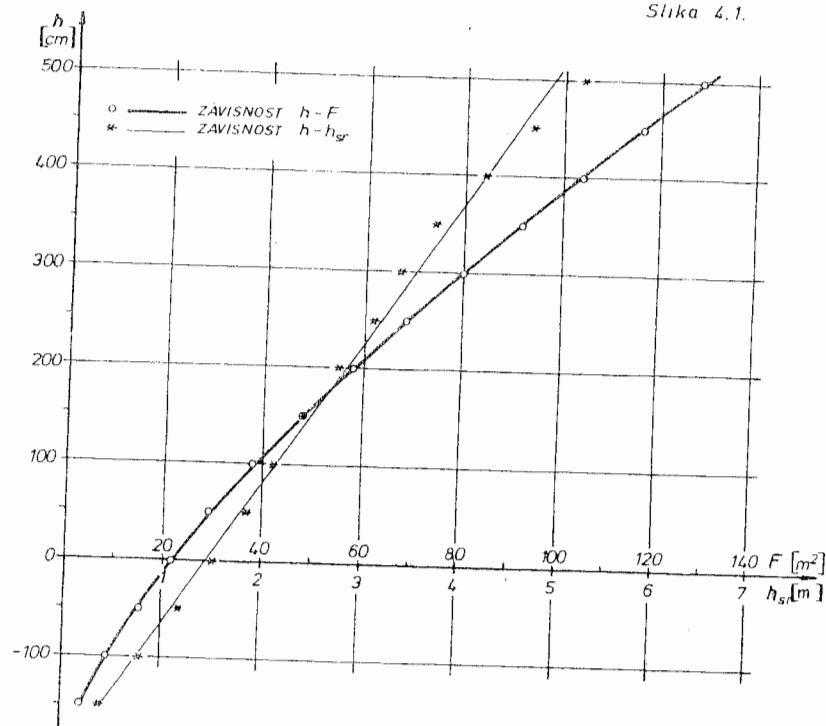
$$Q = \frac{1}{n} F h_{sr}^{2/3} J^{1/2} \quad (2)$$

Proticaj za neki od vodostaja iznad maksimalno pojavljenog $h = 320$ cm, na primjer $h = 450$ cm, dobije se na slijedeći način:

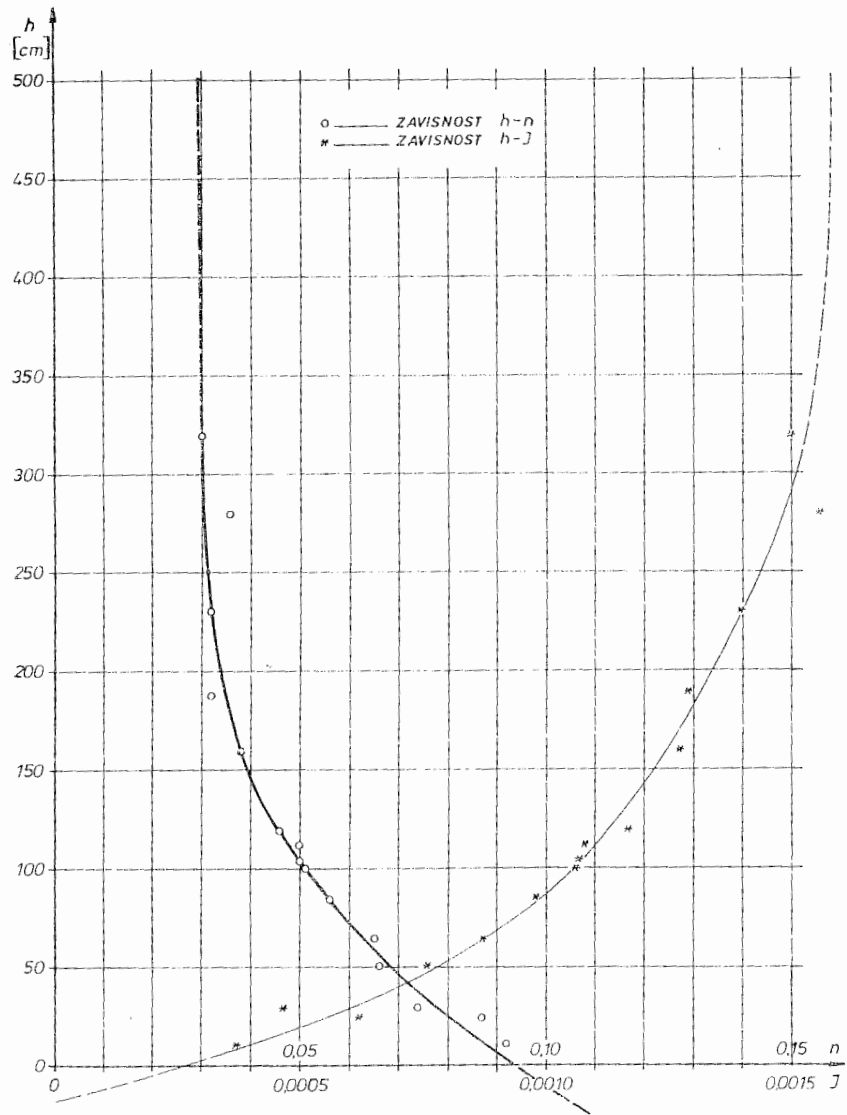
- za $h = 450$ cm iz zavisnosti $h_{sr} = f(h)$ i $F = f(h)$ očita se vrijednost $h_{sr} = 4,55$ m i $F = 116$ m².
- za $h = 450$ cm iz zavisnosti $J = f(h)$ i $n = f(h)$ očita se vrijednost $n = 0,0295$ i $J = 0,00158$.
- Ako se ove očitane vrijednosti uvrste u jednačinu (2) dobije se proticaj $Q = 428$ m³/s.
- Dobijena vrijednost proticaja nanese se na liniju proticaja slika 4.3., gdje je prethodno konstruisana linija proticaja za raspoloživi niz podataka Q i h .

Za bilo koji drugi vodostaj postupak odredjivanja proticaja je potpuno isti.

Slika 4.1.

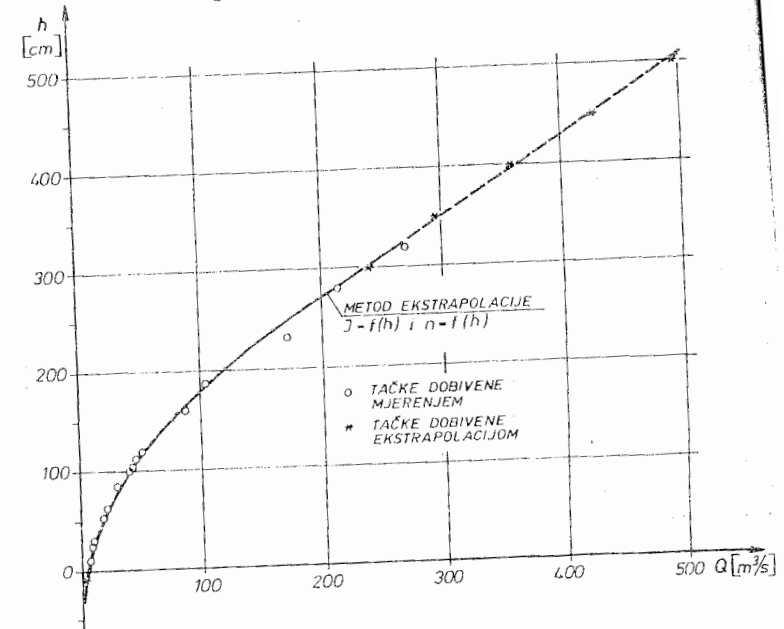


Slika 4.2.



Slika 4.3.

Slika 4.3. KRIVA PROTICAJA RIJEKE VRBAS U PROFILU HAN-SKELA



ZADATAK BROJ 5

Za vodomjernu stanicu Han Skela na rijeci Vrbas izvršena su mjerenja proticaja (Tabela 5.1.) i elementi poprečnog profila (Tabela 5.2., kolone 1, 2 i 3).

Tabela 5.1.

Vodostaj h [cm]	Proticaj Q [m ³ /s]
11	6,8
30	11,6
64	22,1
85	31,2
100	40,1
112	46,9
160	87,4
188	104,0
230	172,0
280	212,0
320	250,0
110	47,8
126	62,4
75	31,5
145	76,0
385	350,0

Tabela 5.2.

Vodostaj h [cm]	Prosječna dubina h_{sr} [m]	Površina popr. presj. F [m ²]	$F \sqrt{h_{sr}}$ [m ^{5/2}]
11	1,50	23,5	28,8
30	1,70	26,0	33,9
64	1,90	32,0	44,1
85	2,05	35,0	50,1
100	2,15	38,0	54,4
112	2,25	40,0	60,0
160	2,55	50,0	79,8
188	2,70	57,0	93,7
230	3,10	64,0	112,7
280	3,40	75,0	138,3
320	3,70	85,0	163,5
110	2,25	40,0	60,0
126	2,36	43,0	66,0
75	2,00	33,0	46,7
145	2,50	46,0	72,7
385	4,10	100,0	202,0
400	4,20	104,0	213,0
450	4,55	116,0	247,0
500	4,90	128,0	283,0

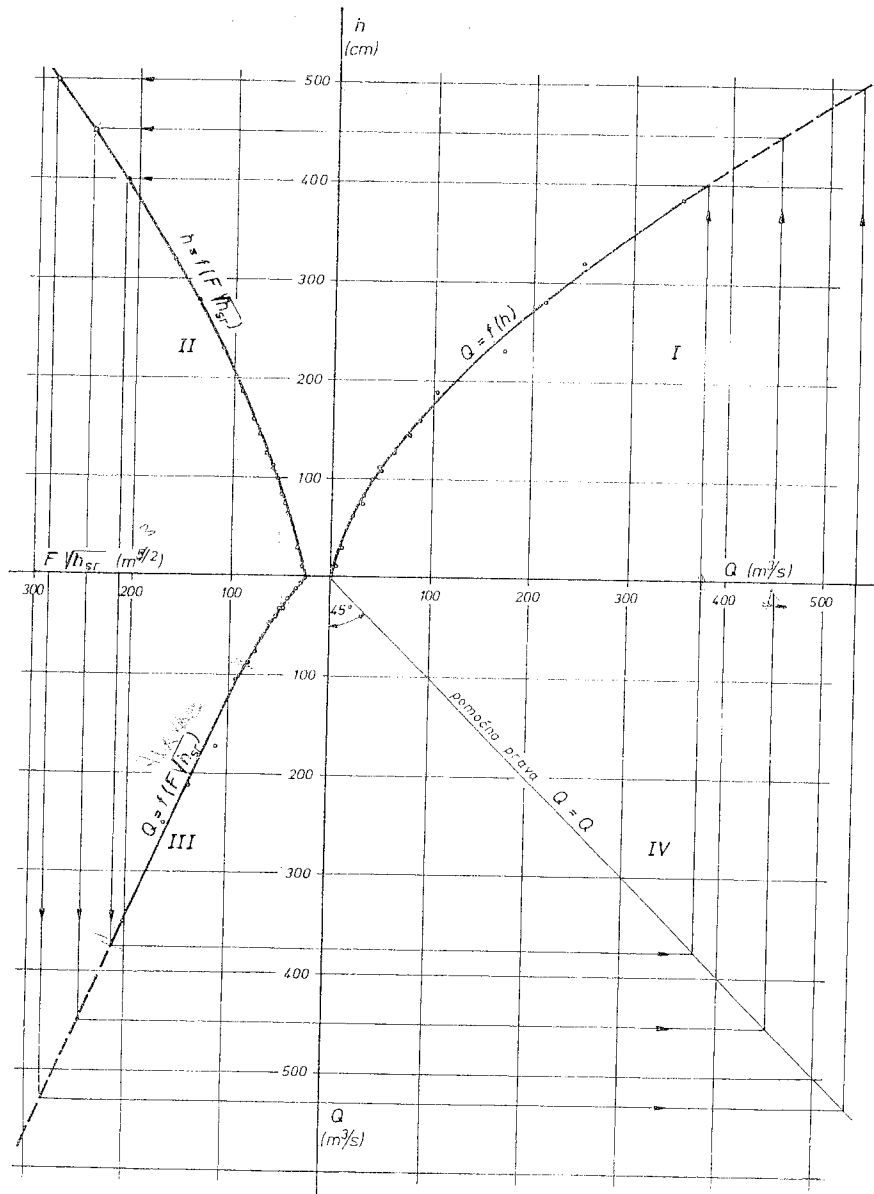
Izvršiti ekstrapolaciju linije proticaja do vodostaja $H = 500$ cm, po metodi Stivena $Q = f(F \sqrt{h_{sr}})$.

RJEŠENJE:

Procedura ekstrapolacije vidljiva je iz slike 5.1., a sastoji se iz slijedećih koraka:

- U kvadrantu I konstruiše se linija proticaja $Q = Q(h)$ za raspoloživi niz podataka h i Q .
 - U tabeli 5.2. kolona 4, sračunaju se vrijednosti parametra $F \cdot \sqrt{h_{sr}}$.
 - U kvadrantu II konstruiše se zavisnost $F \sqrt{h_{sr}} = f(h)$ za vodostaje do $h = 500$ cm (na osnovu poznatih elemenata poprečnog profila parametar $F \sqrt{h_{sr}}$ može se sračunati za bilo koji vodostaj).
 - U kvadrantu III konstruiše se zavisnost $F \sqrt{h_{sr}} = f(Q)$ za raspoloživi niz podataka h i Q . U ovom primjeru zavisnost $F \sqrt{h_{sr}} = f(Q)$ je pravac za proticaje iznad približno $Q = 125$ m³/s. Ova linearna zavisnost se produži (ekstrapolira) do traženog maksimalnog vodostaja $h = 500$ cm, odnosno parametra $F \cdot \sqrt{h_{sr}} = 285$.
 - U kvadrantu IV povučen je pomoćni pravac $Q = Q$.
 - Proticaj za neki od vodostaja iznad maksimalno pojavljenog $h = 385$ cm, na primjer $h = 450$ cm, dobije se na slijedeći način:
 - za $h = 450$ cm iz zavisnosti $F \sqrt{h_{sr}} = f(h)$ očitava se vrijednost $F \sqrt{h_{sr}} = 247$
 - za $F \sqrt{h_{sr}} = 247$, iz zavisnosti $F \sqrt{h_{sr}} = f(Q)$ očitava se vrijednost $Q = 450$ m³/s
 - vrijednost $Q = 450$ m³/s se pomoću odnosa $Q = Q$ iz kvadranta IV prenese u kvadrant I.
- Za bilo koji drugi vodostaj postupak određivanja proticaja je potpuno isti.

Slika 5.1. EKSTRAPOLACIJA LINIJE PROTICAJA RIJEKE VRBAS
NA VS HAN-SKELA PO METODI STIVENSA



ZADATAK BROJ 6

Za vodomjernu stanicu Merdani na rijeci Lašvi dati su elementi poprečnog profila

Tabela 6.1.

Odstojanje od stalne tačke na lijevoj obali [m]	Kota dna [m n.m.]	Odstojanje od stalne tačke na lijevoj obali [m]	Kota dna [m n.m.]
0	355,5	20	351,2
2	353,5	22	351,4
4	353,2	24	351,2
6	352,9	26	351,1
8	352,5	28	351,3
10	352,1	30	351,8
12	351,8	32	352,7
14	351,5	34	353,5
16	351,4	36	354,7
18	351,4	38	355,5

Kota nule vodomjerne letve 351,74 m n.m.

Na vodomjernoj stanici su izvršena mjerenja proticaja

F/R Tabela .2.

h [cm]	Q [m³/s]	B [m]	F [m²]	d _{sr} [m]	$\beta^* B d_{sr}^{3/2}$
50	5,5	21,5	16,5	0,70	14,10
300	225	35,2	91,8	2,55	151,93
110	29	26,0	31,5	1,12	33,43
220	118	32,8	64,9	1,95	95,56
80	14	23,6	24,0	0,90	22,46
280	200	34,6	84,5	2,40	136,36
170	75	31,5	48,0	1,57	66,92
320	265	35,9	99,0	2,67	166,02

1. Pokazati proceduru proračuna geometrijskih karakteristika poprečnog profila i parametra $\beta_* B d_{sr}^{3/2}$ za vodostaj $h = 376$ cm.
2. Odrediti proticaj za vodostaje $h = 350$ i $h = 376$ cm. Zadatak riješiti ekstrapolujući liniju proticaja po metodi Velikanova.

RJEŠENJE

1. Geometrijske karakteristike poprečnog profila

- a) Na osnovu podataka iz tabele 6.1. nacrtan je poprečni profil - slika 6.1.
- b) Za vodostaj $h = 376$ cm određene su slijedeće vrijednosti:
 - Kota nivoa vode $H = "0" + h = 351,74 + 3,76 = 355,50$ m n.m.
 - Iz poprečnog profila (slika 6.1.) za vodostaj $h = 376$ cm širina vodnog lica

$$B = 38 \text{ m}$$

- Iz poprečnog profila za $h = 376$ cm i proizvoljno odabranog ΔB - (tabela 6.1.), određena je površina poprečnog profila kao suma elementarnih površina trapeznog oblika

$$F = \sum_{i=1}^{N=19} \frac{d_{i-1} + d_i}{2} \Delta B = \left(\frac{0,0+2,0}{2} + \frac{2,0+2,3}{2} + \frac{2,3+2,6}{2} + \dots + \frac{2,0+0,8}{2} + \frac{0,8+0}{2} \right) \Delta B = 119,6 \text{ m}^2$$

- Prosječna dubina

$$d_{sr} = \frac{F}{B} = \frac{119,6}{38} = 3,15 \text{ m}$$

- Vrijednost parametra β_* se odredi na slijedeći način

$$\beta_* = \frac{1}{B d_{sr}^{3/2}} \sum_{i=1}^{N=19} \frac{d_{i-1}^{3/2} + d_i^{3/2}}{2} \cdot \Delta B = \frac{2}{38 \cdot 3,15^{3/2}} \left(\frac{0^{3/2} + 2^{3/2}}{2} + \frac{2^{3/2} + 2,3^{3/2}}{2} + \dots + \frac{2,0^{3/2} + 0,8^{3/2}}{2} + \frac{0,8^{3/2} + 0^{3/2}}{2} \right)$$

$$= 1,04.$$

- Parametar $\beta_* B d_{sr}^{3/2} = 1,04 \cdot 38 \cdot 3,15^{3/2} = 239,1$

Procedura određivanja parametra $\beta_* B d_{sr}^{3/2}$ za vodostaj $h = 350$ cm i bilo koji drugi je potpuno ista.

2. Postupak ekstrapolacije - vidi sliku 6.2.

- a) U kvadrantu I konstruiše se linija proticaja $Q = Q(h)$ za raspoloživi niz podataka h i Q .
- b) U kvadrantu II konstruiše se odnos $\beta_* B d_{sr}^{3/2} = f(h)$ za vodostaje do $h = 376$ cm.
- c) U kvadrantu III konstruiše se odnos $\beta_* B d_{sr}^{3/2} = f(Q)$ za raspoloživi niz podataka h i Q . U ovom primjeru odnos $f(Q)$ je pravac za proticaje iznad približno $Q = 100 \text{ m}^3/\text{s}$. Ova linearna zavisnost se produži (ekstrapolira) do traženog maksimalno pojavljenog vodostaja $h = 376$ cm, odnosno $\beta_* B d_{sr}^{3/2} = 239,1$.
- d) U kvadrantu IV povučen je pomoćni pravac $Q = Q$.
- e) Traženi proticaj za maksimalno pojavljeni vodostaj $h = 376$ cm dobije se na slijedeći način:

- za $h = 376$ cm iz zavisnosti $f(h)$ očitava se vrijednost $\beta_* B d_{sr}^{3/2} = 239$

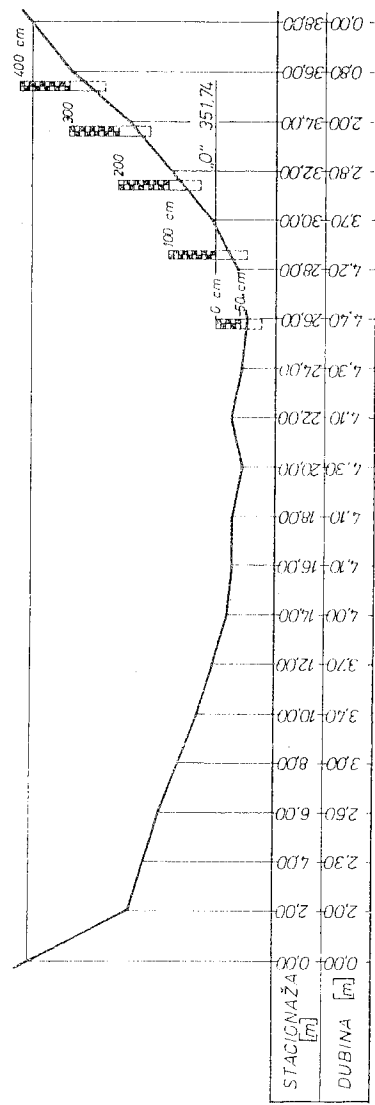
- za $\beta_* B d_{sr}^{3/2} = 239$, iz zavisnosti $f(Q)$ očitava se vrijednost $Q = 355 \text{ m}^3/\text{s}$

- vrijednost $Q = 355 \text{ m}^3/\text{s}$ se pomoću odnosa $Q = Q$ iz kvadranta IV prenese u kvadrant I

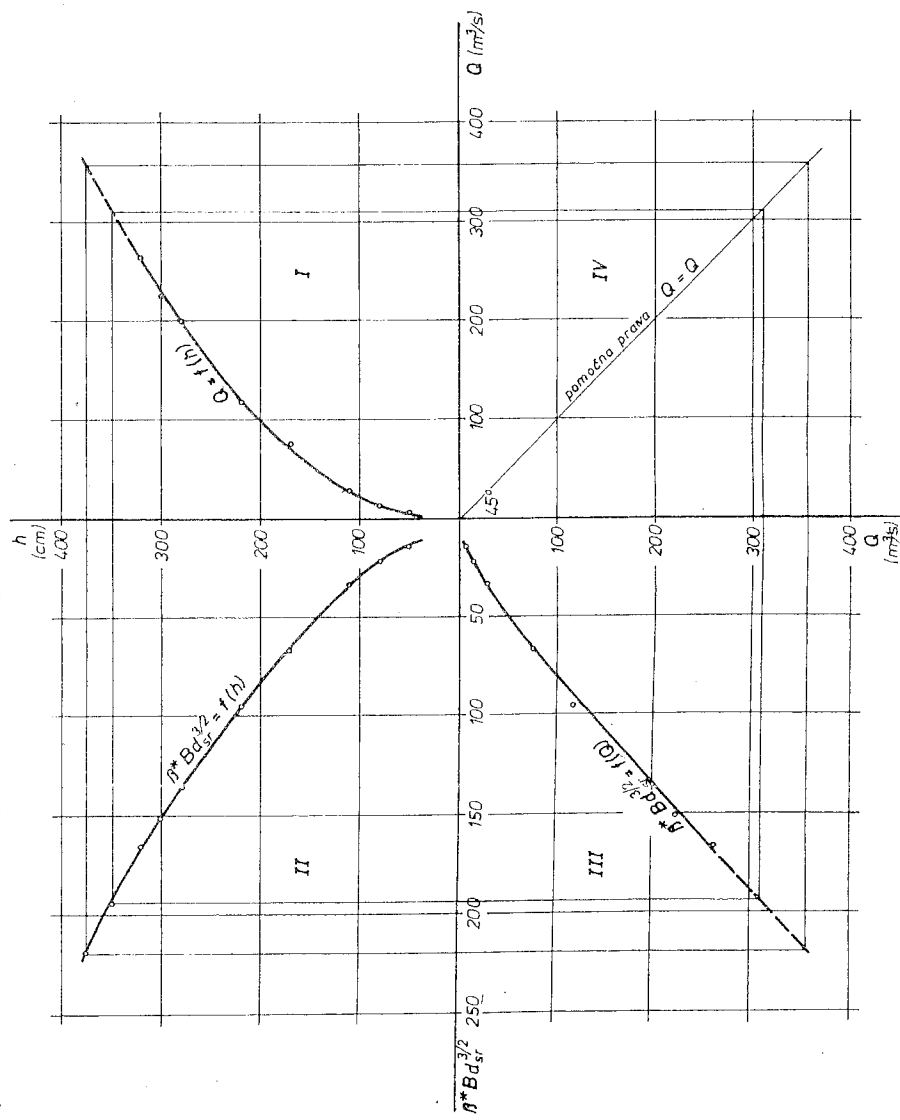
Grafička procedura određivanja protoka vidi se iz slike 6.2.

Za vodostaj $h = 350$ cm i bilo koji drugi, postupak proračuna je potpuno isti.

Slika 6.1. ELEMENTI POPREČNOG PROFILA VS MERDANI NA R. LAŠVI



Slika 6.2. EKSTRAPOLACIJA LINIJE PROTICAJA RIJEKE LAŠVE NA VS MERDANI PO METODI VELIKANOVA



ZADATAK BROJ 7

Za rijeku Neretvu na vodomjernoj stanici Žitomislići dat je tabelarni pregled dnevnih vodostaja za 1947. godinu i odgovarajuća kriva proticaja. Na osnovu zadatih podataka u tabeli 7.1. potrebno je:

1. Nacrtati nivogram. ✓
2. Sračunati prosječne mjesečne i prosječnu godišnju vrijednost vodostaja te odrediti minimalne i maksimalne vrijednosti za svaki mjesec i za čitavu godinu. ✓
3. Nacrtati liniju trajanja i učestalosti vodostaja. ✓
4. Na osnovu konstruisane linije trajanja i učestalosti, grafoanalitički odrediti približnu vrijednost prosječnog godišnjeg vodostaja, te mod i medijanu.
5. Na osnovu dobijene linije trajanja vodostaja i zadane linije proticaja grafoanalitički odrediti liniju trajanja proticaja.
6. Na osnovu konstruisane linije trajanja proticaja iz tačke 5 grafoanalitički odrediti približnu vrijednost prosječnog proticaja i medijane.
7. Na bazi datih vrijednosti dnevnih vodostaja u tabeli 7.1. i linije proticaja na slici 7.1. odrediti dnevne vrijednosti proticaja i nacrtati hidrogram.
8. Koristeći dnevne vrijednosti proticaja provesti proceduru zadanu u tački 2, 3 i 4.

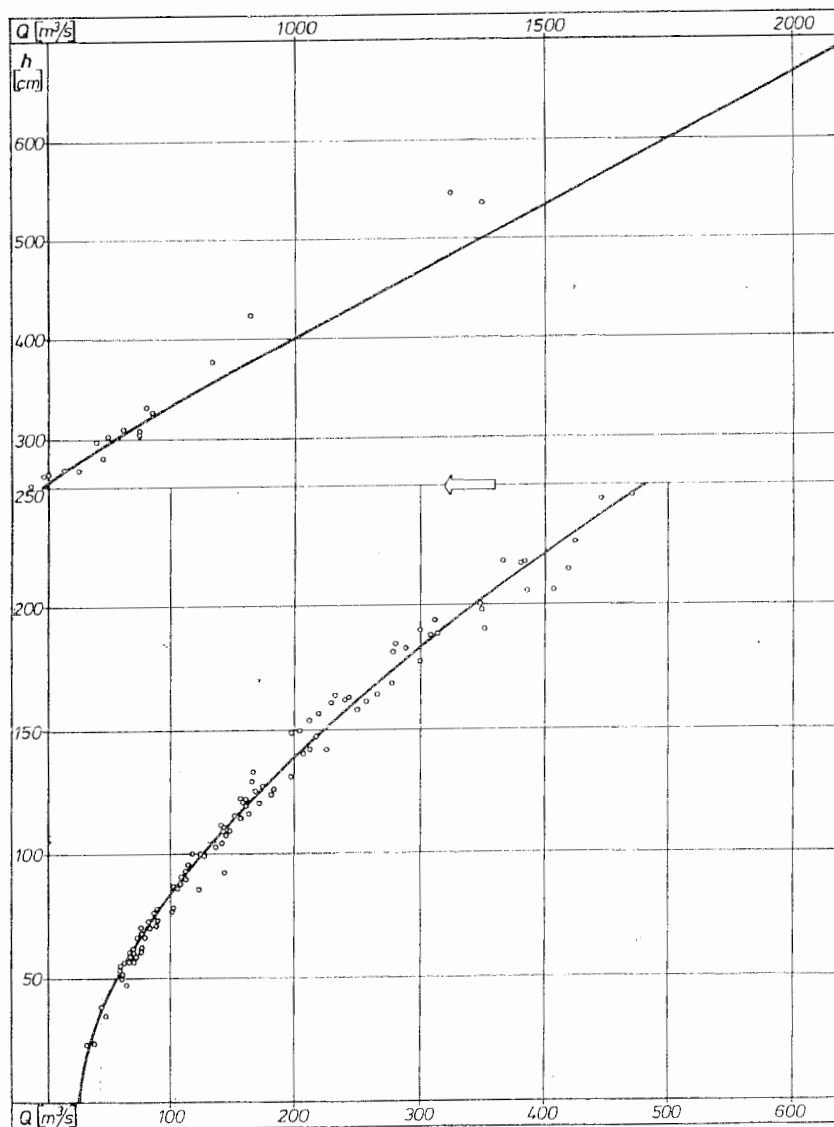
DNEVNE VRIJEDNOSTI VODOSTAJA

Tabela 7.1.

ZAVOD ZA HIDROTEHNIKU - SARAJEVO
GODINA POČETKA RADA 1909

STANICA BN12
VODOSTAJI-GODINA OBRADJE 1947

DAN	VODOTOK NERETVA P.S. 4180 km ²					LIMNIGRAF BR. 360 - ŽITOMISLIĆI KOTA ,0, TOCKE 16.25						
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	106	102	302	200	146	82	68	34	30	20	90	310
2	102	100	322	204	142	78	66	32	28	20	140	380
3	98	100	290	216	140	74	64	32	30	18	116	422
4	96	94	258	222	136	72	62	32	44	18	96	386
5	94	360	236	218	134	70	60	32	40	18	76	360
6	92	300	224	234	136	70	58	30	36	18	70	330
7	88	260	246	224	130	68	58	30	34	18	64	316
8	86	220	326	216	126	68	56	30	32	18	58	272
9	86	252	326	200	124	68	54	30	30	18	54	240
10	84	380	346	200	120	66	52	30	28	16	50	212
11	82	364	300	186	116	64	50	30	26	16	50	198
12	82	420	274	176	112	64	50	38	26	16	48	186
13	80	310	252	170	108	62	48	34	26	16	46	176
14	80	286	230	160	108	62	48	32	26	16	46	164
15	138	264	220	152	106	70	46	30	24	16	44	158
16	118	236	222	150	106	74	46	30	24	16	44	150
17	110	214	210	148	118	68	44	28	24	16	42	146
18	104	200	200	160	132	66	44	28	24	16	100	140
19	100	210	192	158	120	64	42	28	24	16	82	136
20	96	362	194	166	124	62	42	26	22	14	74	132
21	92	300	254	168	110	62	40	26	22	14	64	128
22	88	260	238	162	100	60	40	26	22	14	52	124
23	86	288	220	162	100	60	40	40	22	14	56	120
24	84	340	216	160	98	124	40	28	22	14	54	116
25	80	352	226	158	100	100	38	30	22	14	52	112
26	80	332	224	156	96	86	38	44	22	20	50	108
27	162	320	220	152	94	78	36	50	20	114	50	132
28	160	286	224	152	92	70	36	40	20	98	48	144
29	136		210	150	90	66	36	36	20	76	96	146
30	120		198	150	86	66	36	34	20	70	274	132
31	108		200		84		34	32		64		194
DAN	25.	4.	19.	17.	31.	22.	31.	21.	27.	20.	17.	26.
NV	80	94	192	148	84	60	34	26	20	14	42	108
SV	100	268	245	177	114	71	47	32	26	27	72	204
VV	162	420	346	234	146	124	68	50	44	114	274	478
DAN	27.	12.	10.	6.	1.	24.	1.	27.	4.	27.	30.	3.
	NV	DATUM		SNV	SV	SVV	VV	DATUM				
1947	14	20.10.		75	115	216	420	12.02.				
NNV	14	20.10.1947					VVV	600	18.11.1934			

Slika 7.1.
LINIJA PROTICAJA
(važi za period 1. 1.1926. - 31.12.1977. godine)

RJEŠENJE:

1. Vrijednosti iz tabele 7.1. nanese su kao ordinate na slici 7.2. gdje je na apscisi predstavljeno vrijeme pojave vodostaja (1 dan = 0,5 mm). Spajanjem ovih vrijednosti formira se nivogram.

2.a) Prosječni mjesečni vodostaj za mjesec $j = 1, 2, \dots, 12$, sračunat je po obrascu

$$\bar{h}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} h_{i,j} \quad (1)$$

gdje je $h_{i,j}$ vodostaj i -tog dana za mjesec j ($i = 1, 2, \dots, n_j$), a n_j je broj dana u posmatranom mjesecu j .

b) Prosječna godišnja vrijednost, \bar{h} , može se sračunati na dva načina:

$$\bar{h} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n_j} \sum_{j=1}^{12} \sum_{i=1}^{n_j} h_{ij} \quad (2)$$

$$\bar{h} = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} \bar{h}_j \quad (3)$$

Proračun po obrascu (3) podrazumjeva da svi mjeseci imaju isti broj dana (premda to nije tačno). Međutim, za praktične potrebe ovako sračunata srednja vrijednost je dovoljno tačna.

Prosječna godišnja vrijednost vodostaja (ili proticaja) može se također odrediti i na bazi učestalosti (tačka 3 i 8, odnosno tabela 7.2. i 7.4.) na slijedeći način:

$$\bar{h} = \frac{\sum_{l=1}^N f_l h_l}{\sum_{l=1}^N f_l} = \frac{2 \cdot 412,5 + 3 \cdot 387,5 + \dots + 42 \cdot 12,5}{2 + 3 + \dots + 42} = \frac{41437,5}{365} = 114 \text{ cm}$$

$$\bar{Q} = \frac{\sum_{l=1}^N f_l Q_l}{\sum_{l=1}^N f_l} = \frac{2 \cdot 1075 + 0 \cdot 1025 + \dots + 95 \cdot 25}{2 + 0 + \dots + 25} = \frac{69975}{365} = 192 \text{ m}^3/\text{s}$$

gdje su h_l i Q_l srednje vrijednosti klase l .

c) Minimalna, odnosno maksimalna mjesečna vrijednost vodostaja $\min h_j$ odnosno $\max h_j$ predstavljena je najmanjom odnosno najvećom veličinom $h_{i,j}$ u razmatranom mjesecu j

$$\min h_j = \min_{i=1, \dots, n_j} (h_{i,j}) \quad (4)$$

$$\max h_j = \max_{i=1, \dots, n_j} (h_{i,j}) \quad (5)$$

d) Minimalna i maksimalna godišnja vrijednost se dobiju na sličan način, tj.

$$\min h = \min_{j=1, \dots, 12} (\min h_j) \quad (6)$$

$$\max h = \max_{j=1, \dots, 12} (\max h_j) \quad (7)$$

3. - Linija učestalosti predstavlja broj pojava (na pr. vodostaja ili proticaja) u određenom klasnom intervalu.

- Linija trajanja (na pr. vodostaja ili proticaja) predstavlja broj pojava (trajanje) razmatrane veličine i svih veličina većih od nje. Iz ovoga proizilazi da je trajanje sumarna vrijednost učestalosti iznad razmatrane veličine.

Postupak za određivanje linije učestalosti i trajanja sastoji se u slijedećem:

- Odredi se interval varijacije: $I_v = \max h - \min h$ koji se podijeli na određeni broj klasa. U rješavanju praktičnih problema broj klasa rijetko je veći od 30, a obično je svaka klasa iste širine. U razmatranoj godini $I_v = 420 - 14 = 406$ cm. Za praktične potrebe uzeta je gornja granica najviše klase 425 cm a donja granica najniže klase 0 cm. Ovaj interval podijeljen je na $N = 17$ klasa od po 25 cm.

- Za svaki mjesec određen je broj dana $f_{l,j}$ čiji vodostaji pripadaju određenoj klasi, i unesen na odgovarajuće mjesto u tabeli ($l = 1, 2, \dots, N$, a $j = 1, 2, \dots, 12$). U cilju kontrole rada mora biti zadovoljen slijedeći uslov

$$\sum_{l=1}^N f_{l,j} = n_j \quad (8)$$

- Učestalost određene klase za čitavu godinu f_l ($l = 1, \dots, N$) dobije se na slijedeći način:

$$f_l = \sum_{j=1}^{12} f_{l,j} \quad (9)$$

- Trajnost određene pojave i svih pojava većih od nje, T_l dobije se na slijedeći način:

$$T_l = \sum_{k=1}^l f_k \quad (10)$$

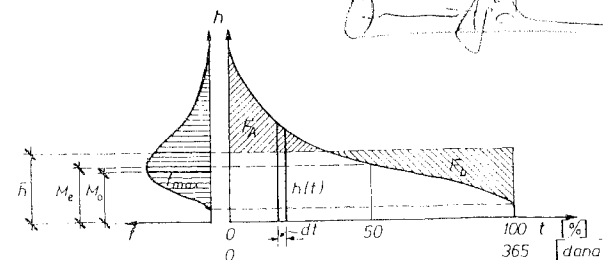
Vrijednosti T_l (zadnja kolona u tabeli 7.2) predstavljaju trajanje pojava većih od donje granice klase l .

Vrijednosti f i T su grafički prikazane na slici 7.2. Pri tome vrijednosti f se nanose kao konstantne vrijednosti po čitavoj širini klase, a vrijednosti T se nanose na donjoj granici posmatrane klase. Treba uočiti da je trajanje određenog vodostaja jednako zbiru trajanja te pojave u toku čitave godine (na pr. trajanje vodostaja 175 cm i većih iznosi $T_{175} = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 = 67 + 14 + 1 = 82$).

4. - Približna prosječna godišnja vrijednost vodostaja, \bar{h} , kako je ilustrirano u donjoj skici, dobije se iz uslova:

$$\int_0^{365} h(t) dt = \bar{h} \cdot 365 \quad (11)$$

Ovaj postupak se u praksi provodi tako da se izjednače površine F_A i F_B . U ovom primjeru $\bar{h} \approx 114$ cm.

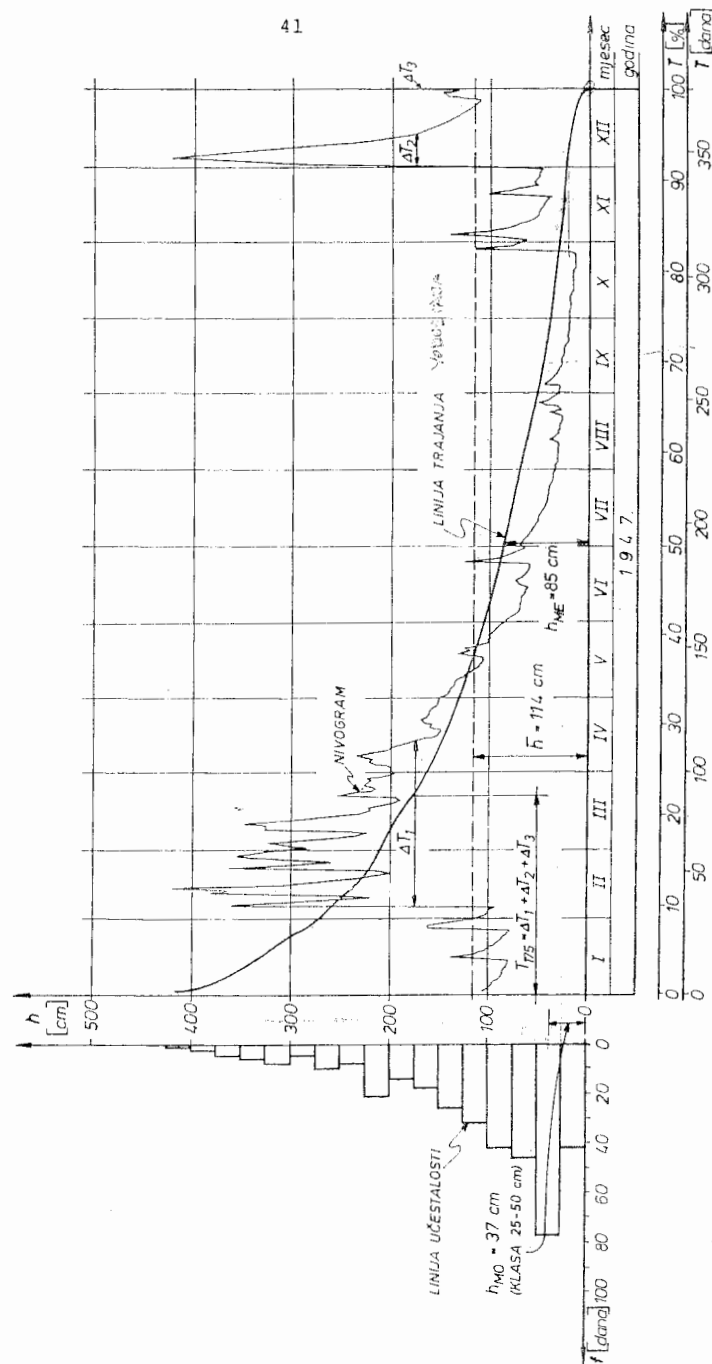


BROJ POJAVLJENIH VODOSTAJA PO KLASAMA I MJESECIMA

Tabela 7.2.

l	Vodostaj od-do [cm]	Učestalost pojave po mjesecima $f_{l,j}$ [dana]												Ukupna učest: f_l [dana]	Traja- nje T_l [dana]		
		Mjesec j															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
1	401-425		1											1	2	2	
2	376-400		1												2	3	5
3	351-375		4												1	5	10
4	326-350		2	3											1	6	16
5	301-325		4	2											2	8	24
6	276-300		3	2											-	5	29
7	251-275		4	4										1	1	10	39
8	226-250		1	5	1										1	8	47
9	201-225		4	10	6										1	21	68
10	175-200		-	5	5										4	14	82
11	151-175	2	-		14										2	18	100
12	126-150	2	-		4	9								1	10	26	126
13	101-125	8	3			12	2					1	1	5	32	158	
14	76-100	19	1			10	4					2	6		42	200	
15	51-75	-	-				24	10				2	10		46	246	
16	26-50	-	-					21	31	14			11		77	323	
17	0-25	-	-							16	26				42	365	
Σ		31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31		365		

Slika 7.2. NIVOGRAM, LINIJA TRAJANJA I UČESTALOSTI VODOSTAJA RIJEKE NERETVE NA VS ŽITOMISLIĆI ZA 1947. GODINU



- 4 - Mod, M_o , predstavlja onu vrijednost vodostaja (sredine klase) za koju je učestalost, f_l , maksimalna, i u razmatranom primjeru $M_o \cong 37$ cm.
- 5 - Medijana, M_e , je ona vrijednost vodostaja za koju je trajanje, T , jednako 50% (što znači da je 50% vodostaja većih a 50% manjih od vrijednosti M_e). U razmatranom primjeru je $M_e = 85$ cm.

5. Procedura grafičkog konstruisanja linije trajanja proticaja iz poznate linije trajanja vodostaja i linije proticaja prikazana je na slici 7.3. U tu svrhu nacrtana je, pored ordinate za h i osa za vrijednosti Q , kao i pomoćna osa sa vrijednostima Q uz apscisu t .

Postupak određivanja tačaka za konstrukciju linije trajanja proticaja sastoji se u slijedećem:

- za odabrani vodostaj ($h = 150$ cm) sa linije proticaja odredi se veličina proticaja ($Q \cong 225$ m³/s), a sa linije trajanja vodostaja trajanje ovih veličina ($T = 100$ dana $\cong 27\%$). Šestarom se dobivena vrijednost proticaja sa pomoćne ose (apscisa) zarotira na ordinatu Q . Povlačenjem horizontale sa vrijednošću $Q = 225$ m³/s do vrijednosti trajanja vodostaja $h = 150$ cm (vertikala kroz $T = 100$ dana) dobije se tačka na liniji trajanja proticaja ($Q = 225$ m³/s; $T = 100$ dana).

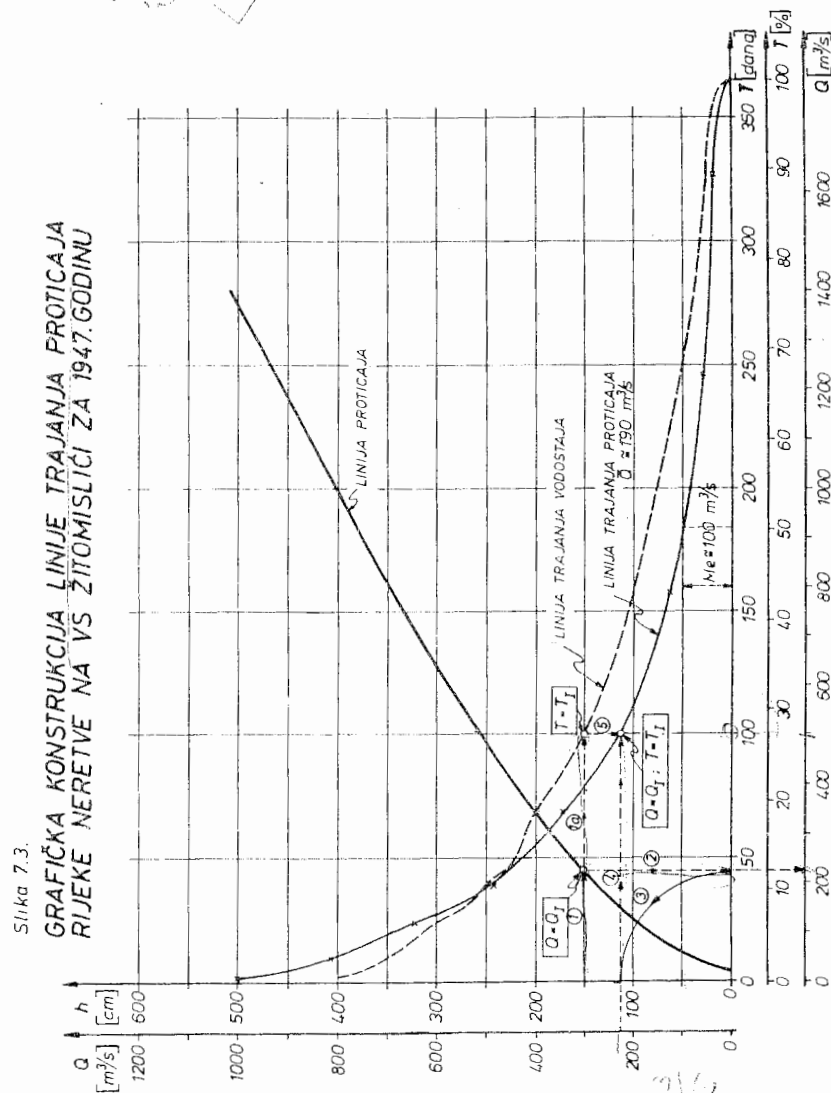
Naprijed opisana procedura se ponovi za određeni broj tačaka koje, međusobno spojene, predstavljaju liniju trajanja proticaja.

6. Ponavljajući proceduru opisanu u tački 4, uz zamjenu veličine h veličinom Q dobije se

$$\bar{Q} \cong 190 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$M_e \cong 100 \text{ m}^3/\text{s}$$

7. Na osnovu dnevnih vrijednosti vodostaja iz tabele 7.1. i linije proticaja (slika 7.1) određene su dnevne vrijednosti proticaja koje su prikazane u tabeli 7.3. Ove vrijednosti nanosene su kao ordinate na slici 7.4., gdje je na abscisi predstavljeno vrijeme pojave proticaja (1 dan $\cong 0,5$ mm). Spajanjem ovih vrijednosti dobijen je hidrogram.



8. - Ponavljajući proceduru iz tačke 2, uz upotrebu tabele 7.3. dobiju se tražene vrijednosti proticaja, koje se mogu vidjeti u tabeli 7.3.

- Na bazi podataka iz tabele 7.3., prateći proceduru opisanu u tački 3 (uz zamjenu veličina h veličinama Q) definisane su i nacrtane linija učestalosti i linija trajanja proticaja koje su date na sl. 7.4.

Treba uočiti da je broj klasa proticaja za ovaj primjer iz praktičnih razloga (zaokruživanje veličine klase na $50 \text{ m}^3/\text{s}$) usvojen $N = 22$.

- Karakteristične približne vrijednosti proticaja (\bar{Q} , M_o , M_e) određene su prema proceduri iz tačke 4 i nanosene na slici 7.4. Ove vrijednosti iznose

$$\bar{Q} \approx 192 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$M_o = 25 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$M_e = 110 \text{ m}^3/\text{s}$$

DNEVNE VRIJEDNOSTI PROTICAJA

Tabela 7.3.

ZAVOD ZA HIDROTEHNIKU - SARAJEVO
GODINA POČETKA RADA 1909STANICA BN12
PROTOKE - GODINA OBRADJE 1947

DAN	VODOTOK NERETVA P.S. 4180 km ²											LIMNIGRAF BR. 360 - ŽITOMISLIĆI KOTA 0, TOCKE 16.25		
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII		
1	138	131	647	344	216	100	80.8	43.2	40.0	32.0	112	673		
2	131	128	714	355	207	94.3	78.1	41.6	38.4	32.0	203	928		
3	125	128	606	386	203	88.9	75.4	41.6	40.0	31.3	156	1080		
4	122	119	506	403	195	86.2	72.7	41.6	52.4	31.3	122	950		
5	119	852	443	392	191	83.5	70.0	41.6	48.0	31.3	91.6	852		
6	116	640	408	437	195	83.5	67.8	40.0	44.8	31.3	83.5	743		
7	109	512	471	408	183	80.8	67.8	40.0	43.2	31.3	75.4	694		
8	106	397	729	386	175	80.8	65.6	40.0	41.6	31.3	67.8	548		
9	106	489	729	344	171	80.8	63.4	40.0	40.0	31.3	63.4	454		
10	103	928	802	344	163	78.1	61.2	40.0	38.4	30.6	59.0	376		
11	100	867	640	308	156	75.4	59.0	40.0	36.8	30.6	59.0	339		
12	100	1070	554	284	149	75.4	59.0	46.4	36.8	30.6	56.8	308		
13	97.0	673	489	270	142	72.7	56.8	43.2	36.8	30.6	54.6	284		
14	97.0	592	425	247	142	72.7	56.8	41.6	36.8	30.6	54.6	256		
15	199	524	397	229	138	83.5	54.6	40.0	35.2	30.6	52.4	243		
16	159	443	403	225	138	88.9	54.6	40.0	35.2	30.6	52.4	225		
17	145	381	370	221	159	80.8	52.4	38.4	35.2	30.6	50.2	216		
18	135	344	344	247	187	78.1	52.4	38.4	35.2	30.6	128	203		
19	128	370	324	243	163	75.4	50.2	38.4	35.2	30.6	100	195		
20	122	860	329	261	171	72.7	50.2	36.8	33.6	29.9	88.9	187		
21	116	640	495	265	145	72.7	48.0	36.8	33.6	29.9	75.4	179		
22	109	512	448	252	128	70.0	48.0	36.8	33.6	29.9	61.2	171		
23	106	599	397	252	128	70.0	48.0	36.8	33.6	29.9	65.6	163		
24	103	780	386	247	125	171	48.0	38.4	33.6	29.9	63.4	156		
25	97.0	823	414	243	128	128	46.4	40.0	33.6	29.9	61.2	149		
26	97.0	751	408	238	122	106	46.4	52.4	33.6	32.0	59.0	142		
27	252	707	397	229	119	94.3	44.8	59.0	32.0	152	59.0	187		
28	247	592	408	229	116	83.5	44.8	48.0	32.0	125	56.8	212		
29	195		370	225	112	78.1	44.8	44.8	32.0	91.6	122	216		
30	163		339	225	106	78.1	44.8	43.2	32.0	83.5	554	187		
31	142		344		103		43.2	41.6		75.4		329		
DAN	25.	4.	19.	17.	31.	22.	31.	21.	27.	20.	17.	26.		
NO	97.0	119	324	221	103	70.0	43.2	36.8	32.0	29.9	50.2	142		
S0	132	567	475	291	154	86.2	56.6	42.0	37.1	42.9	96.9	389		
VO	252	1070	802	437	216	171	80.8	59.0	52.4	152	554	1295		
DAN	27.	12.	10.	6.	1.	24.	1.	27.	4.	27.	30.	3.		
		NO	DATUM		SNO	S0	SVO		VO	DATUM				
1947		29.9	20.10.		106	197	472		1070	12.02.				
SREDNJE DEKADNE PROTOKE														
1	118	432	605	380	190	85.7	70.3	41.0	42.7	31.4	103	751		
2	128	664	427	253	155	77.6	54.6	40.3	35.7	30.5	69.7	246		
3	148	676	401	241	121	95.2	46.1	44.5	33.0	64.5	118	190		

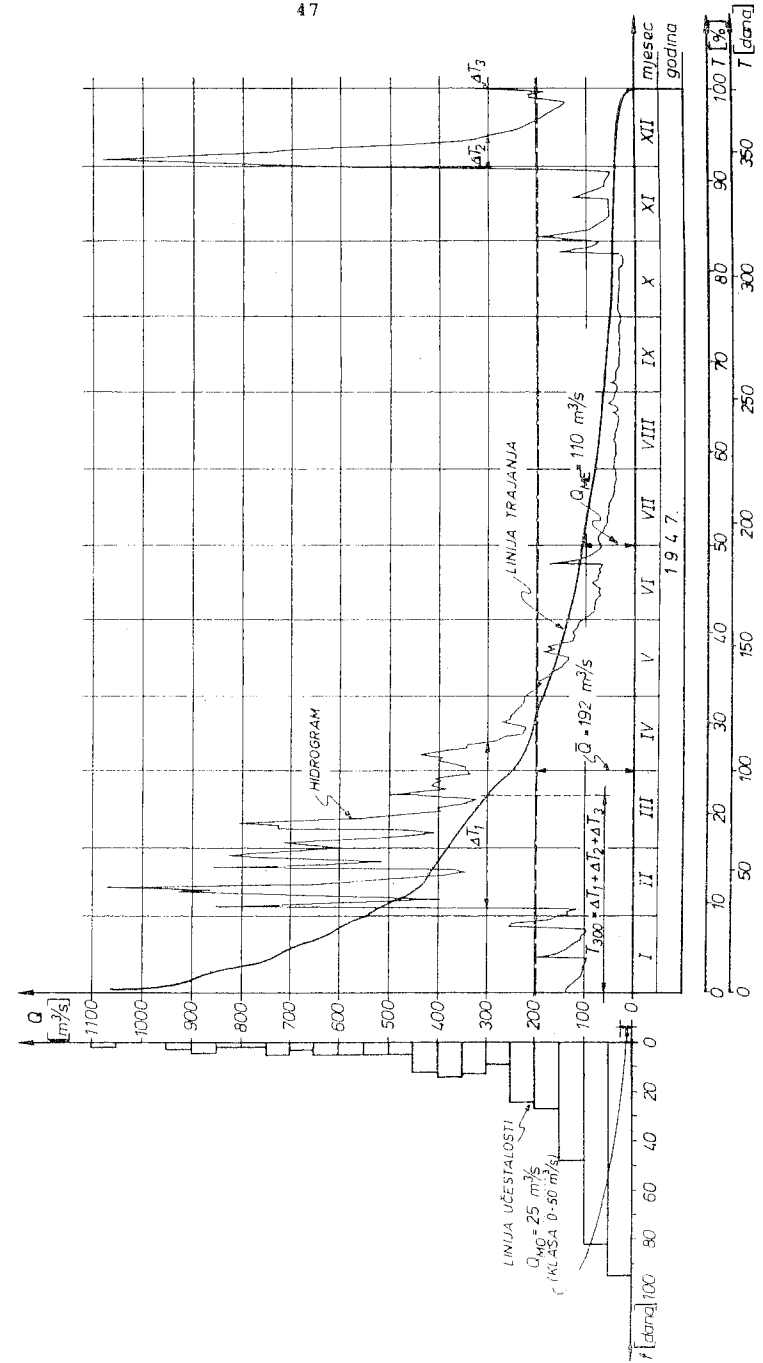
$$V = .620074+10$$

BROJ POJAVLJENIH PROTICAJA PO KLASAMA I MJESECIMA

Tabela 7.4.

L	Proticaj [m ³ /s] od-do	Učestalost pojave po mjesecima [dana]												Ukupna učest. f _L [dana]	Traja- nje T _L [dana]	
		Mjesec j														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
1	1051-1100		1											1	2	2
2	1001-1050														0	2
3	951-1000														0	2
4	901-950		1												3	5
5	851-900		3											1	4	9
6	801-850		1	1											2	11
7	751-800		2												2	13
8	701-750		1	3											5	18
9	651-700		1											1	5	18
10	601-650		2	3										2	3	21
11	551-600		3	1											5	26
12	501-550		3	1									1		5	31
13	451-500		1	3										1	5	36
14	401-450		1	8	3										12	53
15	351-400		3	6	4										14	67
16	301-350		1	5	4										3	80
17	251-300	1			6										2	89
18	201-250	1			13	3									6	113
19	151-200	4			12	1							1	1	8	140
20	101-150	19	4		16	2							1	4	2	188
21	51-100	6			27	20	2	1					3	23		270
22	0-50					11	29	29	30	31	30	31			95	365
		31	28	31	30	31	31	31	30	31	30	31				

Slika 7.4.
LINIJA TRAJANJA I UČESTALOSTI PROTICAJA
RIJEKE NERETVE NA VS ŽITOMISLIĆI ZA 1947. GODINU



ZADATAK BROJ 8

Prosječni godišnji proticaj r.Vrbas na profilu VS Banja Luka za niz od 30 godina dati su u donjoj tabeli.

Tabela 8.1.

Godina	Q [m ³ /s]	Godina	Q [m ³ /s]
1945.	88	1960.	108
1946.	82	1961.	82
1947.	87	1962.	101
1948.	119	1963.	93
1949.	91	1964.	115
1950.	82	1965.	112
1951.	100	1966.	85
1952.	100	1967.	95
1953.	91	1968.	99
1954.	87	1969.	111
1955.	127	1970.	129
1956.	105	1971.	86
1957.	84	1972.	96
1958.	93	1973.	84
1959.	114	1974.	118

Potrebno je:

1. Sračunati osnovne statističke parametre uzorka.
2. Uz pretpostavku da slučajno promjenljiva Q podliježe normalnoj funkciji raspodjele:
 - a) odrediti vjerovatnoću $P[70 \leq Q \leq 130] = ?$
 - b) sračunati q_3 tako da je $P[Q \leq q_3] = 0,1$
 - c) sračunati vjerovatnoću $P[Q > 150] = ?$
 - d) odrediti proticaj povratnog perioda $T = 50$ godina.
3. Uz pretpostavku da slučajno promjenljiva Q podliježe Gumbelovoj funkciji raspodjele, odrediti vrijednosti zahtjevane pod 2.

RJEŠENJE:

1. Osnovni statistički parametri uzorka za negrupisane podatke računaju se po slijedećim obrascima:

$$\bar{Q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i^2 - \bar{Q}^2}$$

$$C_v = \frac{S}{\bar{Q}}$$

Koristeći se zadatim uzorkom (Tabela br. 8.1) za dužinu niza $N = 30$ dobiju se slijedeće sume

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 2964$$

$$\sum_{i=1}^N Q_i^2 = 298520$$

Vrijednosti statističkih parametara su:

$$\bar{Q} = \frac{2964}{30} = 98,8$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{30}(298520) - 98,8^2} = 13,76$$

$$C_v = \frac{13,76}{98,8} = 0,14$$

2. Normalna (Gausova) funkcija raspodjele vjerovatnoće data je izrazom

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

gdje se μ i σ zamjenjuju odgovarajućim procjenama iz uzorka \bar{Q} i S . Za standardiziranu promjenljivu

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$F(z) = P[Z \leq z] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$a) P[70 \leq Q \leq 130] = ?$$

$$P[Q \geq 70] = 1 - P[Q \leq 70] = 1 - F(q_1) = \Phi(q_1)$$

$$q_1 = 70 \quad z_1 = \frac{q_1 - \bar{Q}}{S} = \frac{70 - 98,8}{13,76} = -2,09$$

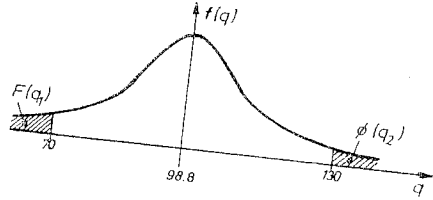
za $z_1 = -2,09$ iz tabele prilog br. 2

$$F(q_1) = 0,0184 \Rightarrow \Phi(q_1) = 0,9816$$

$$P[Q \leq 130] = F(q_2)$$

$$q_2 = 130 \quad z_2 = \frac{q_2 - \bar{Q}}{S} = \frac{130 - 98,8}{13,76} = 2,27$$

$$F(q_2) = 0,9883 \quad \Phi(q_2) = 0,0117$$



Iz crteža proizilazi

$$P[70 \leq Q \leq 130] = 1 - F(q_1) - \Phi(q_2) = 0,9699$$

Na drugi način

$$P[70 \leq Q \leq 130] = F(q_2) - F(q_1) = 0,9883 - 0,0184 = 0,9699$$

b) $P[Q \leq q_3] = 0,1$

za $P[Q \leq q_3] = 0,1$ iz tabele prilog br. 2

$$z = -1,28$$

odakle slijedi

$$q_3 = \bar{Q} + zS = 98,8 - 1,28 \cdot 13,76 = 81,2 \text{ m}^3/\text{s}$$

c) $P[Q \geq 150] = ?$

$$P[Q \geq 150] = 1 - P[Q \leq 150] = 1 - F(q_4) = \Phi(q_4)$$

$$q_4 = 150 \text{ m}^3/\text{s} \quad z_4 = \frac{q_4 - \bar{Q}}{S} = \frac{150 - 98,8}{13,76} = 3,7209$$

$$F(q_4) = 0,9999 \Rightarrow \Phi(q_4) = 0,0001$$

d) Povratni period je dat izrazom

$$T = \frac{1}{\Phi(x)} = \frac{1}{P[X \geq x]} = \frac{1}{1 - F(x)}$$

Za $T = 50$ god. slijedi

$$\Phi(q_5) = \frac{1}{T} = \frac{1}{50} = 0,02$$

Za $\Phi(q_5) = 0,02$, $F(q_5) = 0,98 \Rightarrow$ Iz tabele prilog br. 2 $z = 2,06$

$$q_5 = \bar{Q} + zS = 98,8 + 2,06 \cdot 13,76 = 127,1 \text{ m}^3/\text{s}$$

3. Gumbelova funkcija raspodjele vjerovatnoće data je izrazom:

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x e^{-\left[\frac{t-\theta}{\alpha}\right]} - e^{-\left[\frac{t-\theta}{\alpha}\right]} dt; \quad \theta = \mu - 0,577\alpha$$

gdje se μ i $\alpha = \pi/\sqrt{6}$ zamjenjuju odgovarajućim procjenama iz uzorka \bar{Q} i S , a $\gamma = 0,577$ predstavlja Euler-ovu konstantu.

Za standardizovanu promjenljivu

$$z = \frac{1}{0,78\alpha} (X - \mu + 0,577 \cdot 0,78\alpha)$$

$$F(z) = P[Z \leq z] = \int_{-\infty}^z e^{-t} e^{-t} dt = e^{-e^{-z}}$$

a) $P[70 \leq Q \leq 130] = ?$

$$P[Q \geq 70] = 1 - P[Q \leq 70] = 1 - F(q_1) = \Phi(q_1)$$

$$q_1 = 70 \quad z_1 = \frac{1}{0,78 \cdot S} (q_1 - \bar{Q} + 0,45 S) = \frac{1}{0,78 \cdot 13,76} (70 - 98,8 + 0,45 \cdot 13,76) = -2,10$$

$$\text{Za } z_1 = -2,10 \Rightarrow F(z) = e^{-e^{-z}} = 0,00028$$

$$F(q_1) = 0,00028 \Rightarrow \Phi(q_1) = 0,99972$$

$$P[Q \leq 130] = F(q_2)$$

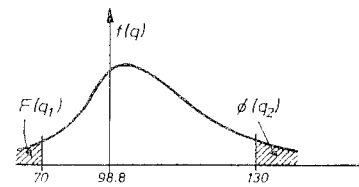
$$q_2 = 130 \quad z_2 = \frac{1}{0,78 \cdot S} (q_2 - \bar{Q} + 0,45 S) = \frac{1}{0,78 \cdot 13,76} \cdot (130 - 98,8 + 0,45 \cdot 13,76) = 3,48$$

Za $z_2 = 3,48$ iz tabele prilog br. 3.

$$F(q_2) = 0,9699 \Rightarrow \Phi(q_2) = 0,0301$$

Iz crteža proizilazi

$$P[70 \leq Q \leq 130] = 1 - F(q_1) - \Phi(q_2) = 1 - 0,00028 - 0,0301 = 0,9696$$



$$b) P[Q \leq q_3] = 0,1$$

za $P[Q \leq q_3] = 0,1$ iz tabele prilog br.3

$$z = -0,845$$

odakle slijedi

$$q_3 = 0,78 \cdot z \cdot S + \bar{Q} - 0,45 \cdot S = -9,07 + 98,8 - 6,19 = 83,54 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$c) P[Q \geq 150] = ?$$

$$P[Q \geq 150] = 1 - P[Q \leq 150] = 1 - F(q_4) = \Phi(q_4)$$

$$q_4 = 150 \text{ m}^3/\text{s}; \quad z_4 = \frac{1}{0,78 \cdot S} (q_4 - \bar{Q} + 0,45 S) =$$

$$= \frac{1}{0,78 \cdot 13,76} (150 - 98,8 + 0,45 \cdot 13,76) =$$

$$= 5,34$$

Za $z_4 = 5,34$ iz tabele prilog br.3

$$F(q_4) = 0,9953 \Rightarrow \Phi(q_4) = 0,0047$$

d) Povratni period je dat izrazom

$$T = \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{P[X \geq x]} = \frac{1}{1 - F(x)}$$

Za $T = 50$ god. slijedi

$$\Phi(q_5) = \frac{1}{T} = \frac{1}{50} = 0,02$$

Za $\Phi(q_5) = 0,02$ tj. $F(q_5) = 0,98$ iz tabele prilog br.3 slijedi:

$$z = 3,89$$

odakle slijedi

$$q_5 = 0,78 \cdot z \cdot S + \bar{Q} - 0,45 \cdot S = 41,75 + 98,8 - 6,19 = 134,36 \text{ m}^3/\text{s}$$

ZADATAK BROJ 9

Za srednje godišnje proticaje rijeke Miljacke na vodomjernoj stanici Sarajevo, za period od 1947-1976 godine, date u donjoj tabeli, potrebno je:

1. Sračunati osnovne statističke parametre uzorka,
2. Odrediti empirijsku funkciju distribucije proticaja,
3. Empirijsku funkciju prilagoditi teorijskoj normalnoj (Gausovoj) distribuciji vjerovatnoće,
4. Izvršiti testiranje prilagodjavanja teorijske distribucije vjerovatnoće empirijskoj funkciji, za stepen obezbjedjenja 95% koristeći pri tom χ^2 -test,

Godina	Q [m ³ /s]	Godina	Q [m ³ /s]	Godina	Q [m ³ /s]
1947.	3,59	1957.	4,92	1967.	5,70
1948.	4,78	1958.	5,71	1968.	6,96
1949.	4,75	1959.	7,48	1969.	6,96
1950.	3,98	1960.	4,48	1970.	7,90
1951.	4,42	1961.	3,97	1971.	4,90
1952.	6,17	1962.	6,26	1972.	3,64
1953.	3,99	1963.	5,81	1973.	3,42
1954.	5,36	1964.	6,45	1974.	4,95
1955.	8,68	1965.	6,68	1975.	4,09
1956.	5,79	1966.	6,44	1976.	5,24

RJEŠENJE:

1. Osnovni statistički parametri uzorka računaju se prema obrascima za negrupisane podatke:

$$\text{- Srednja vrijednost} \quad \bar{Q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i$$

$$\text{- Standardna devijacija} \quad S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i^2 - \bar{Q}^2}$$

$$\text{- Koeficijent varijacije} \quad C_v = \frac{S}{\bar{Q}}$$

- Koeficijent asimetrije $C_s = \frac{M_3}{S^3}$

Koristeći se uzorkom zadatih srednjih godišnjih proticaja (Tabela broj 9.1.) za dužinu niza $N = 30$ dobiju se slijedeće sume

$$\sum_{i=1}^{30} Q_i = 163,47 ; \quad \sum_{i=1}^{30} Q_i^2 = 943,86 ; \quad \sum_{i=1}^{30} Q_i^3 = 5755,66$$

Vrijednosti potrebnih statističkih momenata u odnosu na ishodište su:

$$m_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{30} Q_i = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} 163,47 = 5,45$$

$$m_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{30} Q_i^2 = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} 943,86 = 31,46$$

$$m_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{30} Q_i^3 = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} 5755,66 = 191,85$$

Vrijednosti potrebnih centralnih momenata su:

$$M_2 = m_2 - m_1^2 = 31,46 - 5,45^2 = 1,76$$

$$M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = 191,85 - 3 \cdot 5,45 \cdot 31,46 + 2 \cdot 5,45^3 = 1,27$$

Vrijednosti statističkih parametara:

$$\bar{Q} = m_1 = 5,45$$

$$S = \sqrt{M_2} = 1,32$$

$$C_v = \frac{S}{\bar{Q}} = \frac{1,32}{5,45} = 0,242$$

$$C_s = \frac{M_3}{S^3} = \frac{1,27}{1,32^3} = 0,552$$

Tabela 9.1.

Red. br.	Proticaji po rastućim vrijednost. Q_i [m ³ /s]	Q_i^2	Q_i^3	Empirijska vjerovatnoća P_e $\left[\frac{Q \leq q}{\%} \right]$
1	2	3	4	5
1.	3,42	11,69	40,00	2,30
2.	3,59	12,89	46,27	5,59
3.	3,64	13,25	48,23	8,88
4.	3,97	15,76	62,57	12,17
5.	3,98	15,84	63,04	15,46
6.	3,99	15,92	63,52	18,75
7.	4,09	16,73	68,42	22,03
8.	4,42	19,53	86,35	25,33
9.	4,48	20,07	89,91	28,62
10.	4,75	22,56	107,17	31,90
11.	4,78	22,85	109,21	35,19
12.	4,90	24,01	117,65	38,48
13.	4,92	24,20	119,09	41,77
14.	4,95	24,50	121,28	45,06
15.	5,24	27,46	143,88	48,35
16.	5,36	28,73	153,99	51,64
17.	5,70	32,49	185,19	54,93
18.	5,71	32,60	186,17	58,22
19.	5,79	33,52	194,10	61,51
20.	5,81	33,75	196,12	64,80
21.	6,17	38,06	234,88	68,09
22.	6,26	39,18	245,31	71,38
23.	6,44	41,47	267,08	74,67
24.	6,45	41,60	268,33	77,96
25.	6,68	44,62	298,08	81,25
26.	6,96	48,44	337,15	84,54
27.	6,96	48,44	337,15	87,82
28.	7,48	55,95	418,51	91,12
29.	7,90	62,41	493,04	94,41
30.	8,68	75,34	653,97	97,69
$\sum_{i=1}^{30}$	163,47	943,86	5755,66	

2. Vrijednosti empirijske funkcije distribucije sračunate su u tabeli 9.1. (kolona 5) prema obrascu Aleksejeva

$$P_e [Q \leq q] = \frac{m-0,3}{N+0,4} \cdot 100 [\%] = F_e(q)$$

gdje je:

m - redni broj posmatranog proticaja q

N - ukupan broj proticaja u uzorku

Vrijednosti $F_e(q)$ su prikazane grafički na slici 9.1. u formi tačaka.

3. Normalna Gausova funkcija raspodjele vjerovatnoće definirana je izrazom

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2} dt$$

ili ako se za proračun koristi standardna normalna raspodjela.

$$P[Z \leq z] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = F(z), \text{ gdje je:}$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

gdje su μ i σ procjenjeni iz uzorka sa \bar{Q} i S .

Za normalnu raspodjelu poznato je da je za $F(z_1) = 0,1587$ $z_1 = -1$, odnosno $F(z_2) = 0,50$ $z_2 = 0$ i za $F(z_3) = 0,8413$ $z_3 = 1$.

Tabela 9.2.

$P[Q \leq q]$ [%]	$z = \frac{Q - \bar{Q}}{S}$	$Q = zS + \bar{Q}$
15,9	-1	4,13
50,0	0	5,45
84,1	1	6,77

4. U cilju provjere kvaliteta prilagodjavanja teorijske funkcije raspodjele empirijskoj funkciji pomoću χ^2 -testa, formirano je 6 klasnih intervala proticaja.

1. $Q < 4 \text{ m}^3/\text{s}$
2. Q od 4 do $5 \text{ m}^3/\text{s}$
3. Q od 5 do $6 \text{ m}^3/\text{s}$
4. Q od 6 do $7 \text{ m}^3/\text{s}$
5. Q od 7 do $8 \text{ m}^3/\text{s}$
6. $Q > 8 \text{ m}^3/\text{s}$

Proračuni vezani za testiranje provedeni su u tabeli 9.3.

Tabela 9.3.

0	z	$P_t [0 \leq q]$	$P_t [q < 0 < q_2]$	$f_t \cdot P_t N$	f_e	$\frac{(f_t - f_e)^2}{f_t}$	Q od-do	i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	-1,09	0,138	0,138	4,14	6	0,835	< 4	1
5	-0,34	0,367	0,229	6,87	8	0,185	4-5	2
6	0,42	0,663	0,296	8,88	6	0,934	5-6	3
7	1,17	0,878	0,215	6,45	7	0,046	6-7	4
8	1,93	0,973	0,095	2,85	2	0,253	7-8	5
			0,027	0,81	1	0,044	> 8	6
		Σ	1,000	30	30	2,297		

Za broj stepeni slobode χ^2 raspodjele

$$\nu = K - p - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$$

gdje su:

$K = 6$ - broj klasnih intervala

$p = 2$ - broj parametara koji definišu funkciju raspodjele slučajne promjenljive Q

i obezbjedjenje 95% iz tabele (prilog broj 5)

dobije se $\chi_{0,95}^2 = 7,81$

$$\text{Pošto je } \chi^2 = \Sigma \frac{(f_t - f_e)^2}{f_t} = 2,297 < \chi_{0,95}^2 = 7,81$$

Prilagodjavanje normalne funkcije raspodjele uzorku datih srednjih godišnjih proticaja može se smatrati zadovoljavajućim.

Napomena

Vrijednosti iz kolone 4 tabela 9.3. računaju se prema datom obrascu za $i = 2, \dots, 5$.

Za $i = 1$ ova vrijednost se odredi iz obrasca

$$P_t [Q \leq q_1]$$

Za $i = 6$ iz obrasca $P_t [Q \leq q_6]$

ZADATAK BROJ 10

Za srednje godišnje proticaje rijeke Miljacke na vodomjernoj stanici Sarajevo, za period od 1947-1976. godine, date u zadatku broj 9 potrebno je:

1. Empirijsku funkciju distribucije proticaja (određjenu u zadatku broj 9) prilagoditi Galtonovoj distribuciji vjerovatnoće.
2. Izvršiti testiranje prilagodjavanja teorijske distribucije vjerovatnoće empirijskoj funkciji za stepen obezbjedjenja 95% koristeći pri tom χ^2 -test.

RJEŠENJE:

1. Osnovni statistički parametri uzorka za negrupisane podatke (uz zamjenu $y = \log x$) računaju se po slijedećim obrascima:

$$\text{- srednja vrijednost } \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$$

$$\text{- standardna devijacija } S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i^2 - \bar{Y}^2}$$

$$\text{- koeficijent varijacije } C_v = \frac{S}{\bar{Y}}$$

Koristeći se zadatim uzorkom (Tabela br.10.2.) za dužinu niza $N = 30$ dobiju se slijedeće sume

$$\sum_{i=1}^N Y_i = 21,70423$$

$$\sum_{i=1}^N Y_i^2 = 16,03734$$

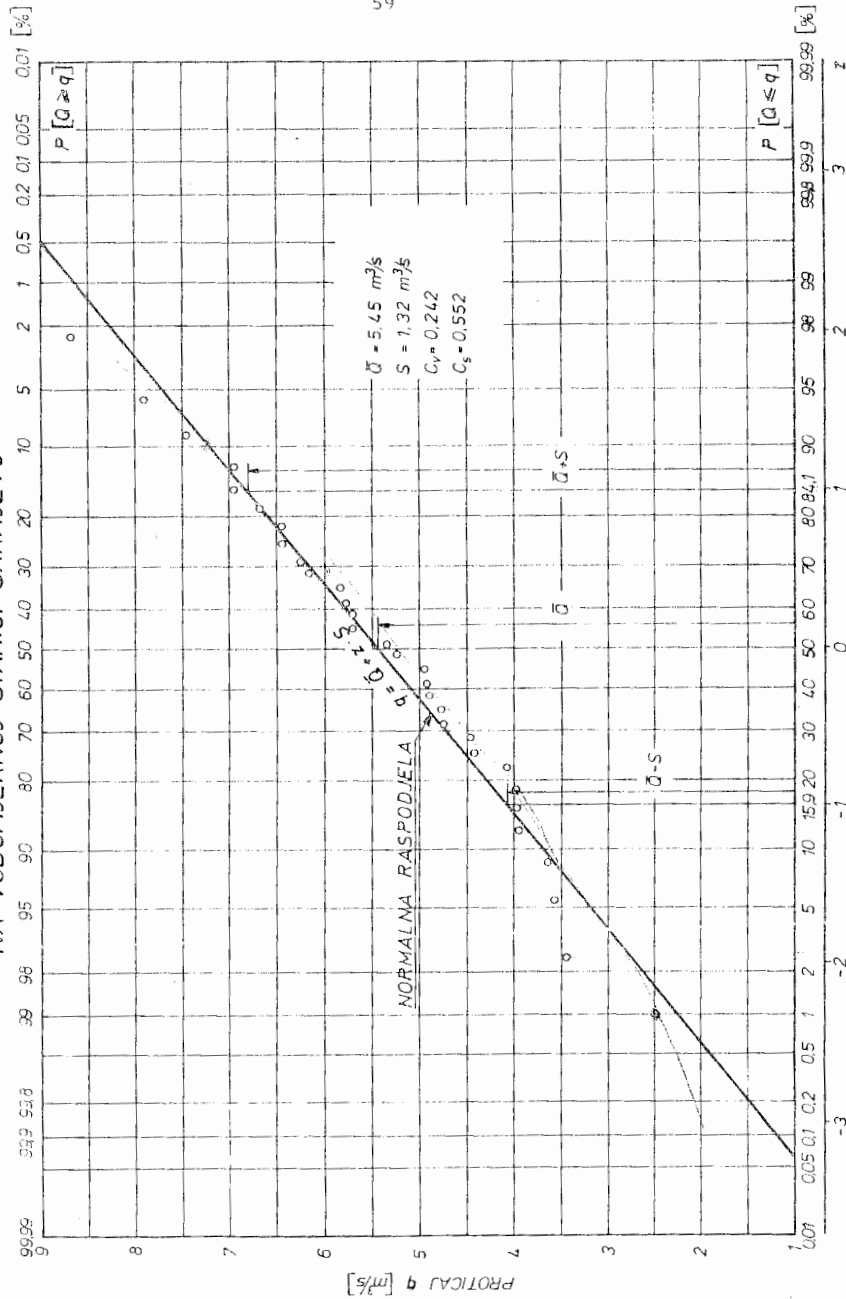
Vrijednosti statističkih parametara su:

$$\bar{Y} = \frac{21,70423}{30} = 0,72347$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{30}(16,03734) - 0,72347^2} = 0,10568$$

$$C_v = \frac{0,10568}{0,72347} = 0,14607$$

Slika 9.1. RASPODJELA SREDNJIH GODIŠNJIH PROTICAJA RIJEKE MILJACKE NA VODOMJERNOJ STANICI SARAJEVO



2. Logaritamsko-normalna (Galtonova) funkcija raspodjele vjerovatnoće definisana je izrazom:

$$F(y) = P[Y \leq y] = \int_0^y \frac{1}{G_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-u_y)^2}{2G_y^2}} dt,$$

gdje je: $y = \ln x$ (ili $y = \log x$)

Za prilagodjavanje empirijske distribucije Galtonovoj raspodjeli, koristi se standardna normalna raspodjela $N(0,1)$ pri čemu je standardizovana promjenljiva:

$$z = \frac{y - u_y}{G_y}$$

gdje su u_y i G_y procjenjeni iz uzorka sa $\log Q$ i $S_{\log Q}$ (\bar{y} i S_y).

Za normalnu raspodjelu poznato je da je za $F(z_1) = 0,1587$
 $z_1 = -1$, odnosno $F(z_2) = 0,50$ $z_2 = 0$ i za $F(z_3) = 0,8413$
 $z_3 = 1$.

Tabela 10.1.

$P [Y \leq y]$ [%]	$z = \frac{y - \bar{y}}{S}$	$y = z \cdot S + \bar{y}$	$Q = 10^y$
15,9	-1	0,61779	4,15
50,0	0	0,72347	5,29
84,1	1	0,82915	6,75

3. Vrijednosti empirijske funkcije distribucije preuzete su iz zadatka broj 9 pošto se radi o istom uzorku takodje poredanom po rastućim vrijednostima proticaja.

4. U cilju provjere kvaliteta prilagodjavanja teorijske funkcije raspodjele empirijskoj funkciji pomoću χ^2 -testa formirano je 9 klasnih intervala promjenljive y .

- 1. $y < 0,55$
- 2. y od $0,55$ do $0,60$
- 3. y od $0,60$ do $0,65$
- 4. y od $0,65$ do $0,70$
- 5. y od $0,70$ do $0,75$
- 6. y od $0,75$ do $0,80$
- 7. y od $0,80$ do $0,85$
- 8. y od $0,85$ do $0,90$
- 9. $y > 0,90$

Proračuni vezani za testiranje provedeni su u tabeli 10.2.

Tabela 10.2.

Redni broj	Proticaji po rastućim vrijednostima Q_i [m ³ /s]	$\log Q_i = y$	$(\log Q_i)^2 = y^2$
1	2	3	4
1.	3,42	0,53402	0,28517
2.	3,59	0,55509	0,30812
3.	3,64	0,56110	0,31483
4.	3,97	0,59879	0,35854
5.	3,98	0,59988	0,35985
6.	3,99	0,60097	0,36116
7.	4,09	0,61172	0,37420
8.	4,42	0,64542	0,41656
9.	4,48	0,65127	0,42415
10.	4,75	0,67669	0,45790
11.	4,78	0,67942	0,46161
12.	4,90	0,69019	0,47636
13.	4,92	0,69196	0,47880
14.	4,95	0,69460	0,48246
15.	5,24	0,71933	0,51743
16.	5,36	0,72916	0,53167
17.	5,70	0,75587	0,57133
18.	5,71	0,75663	0,57248
19.	5,79	0,76267	0,58166
20.	5,81	0,76417	0,58395
21.	6,17	0,79028	0,62454
22.	6,26	0,79657	0,63452
23.	6,44	0,80888	0,65428
24.	6,45	0,80955	0,65537
25.	6,68	0,82477	0,68024
26.	6,96	0,84260	0,70997
27.	6,96	0,84260	0,70987
28.	7,48	0,87390	0,76370
29.	7,90	0,89762	0,80572
30.	8,68	0,93851	0,88080
$\sum_{i=1}^{30}$	163,47	21,70423	16,03734

Tabela 10.3.

y	z	$P_t [Y \leq y_i]$	$P_t [y_{i-1} < Y < y_i]$	$f_t = P_t \cdot N$	f_e	$\frac{(f_t - f_e)^2}{f_t}$	y · od-do	i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,55	-1,64	0,05	0,05	1,5	1	0,167	< 0,55	1
0,60	-1,17	0,12	0,07	2,1	4	1,719	0,55-0,60	2
0,65	-0,69	0,24	0,12	3,6	3	0,100	0,60-0,65	3
0,70	-0,22	0,41	0,17	5,1	6	0,159	0,65-0,70	4
0,75	0,25	0,60	0,19	5,7	2	2,401	0,70-0,75	5
0,80	0,72	0,775	0,175	5,25	6	0,107	0,70-0,80	6
0,85	1,20	0,885	0,110	3,3	5	0,875	0,80-0,85	7
0,90	1,67	0,953	0,068	2,04	2	0,000	0,85-0,90	8
			0,047	1,41	1	0,119	> 0,90	9
		Σ	1,000	30	30	5,647		

Za broj stepeni slobode χ^2 raspodjele

$$\nu = k - p - 1 = 9 - 2 - 1 = 6$$

gdje je:

$k = 9$ - broj klasnih intervala

$p = 2$ - broj parametara koji definišu funkciju raspodjele slučajne promjenljive y

i obezbjedjenje 95% iz tabele (prilog br. 5) dobije se

$$\chi_{0,95}^2 = 12,60$$

$$\text{Pošto je } \chi^2 = \sum \frac{(f_t - f_e)^2}{f_t} = 5,647 < \chi_{0,95}^2 = 12,60$$

Prilagodjavanje Galtonove funkcije raspodjele uzorku datih srednjih godišnjih proticaja može se smatrati zadovoljavajućim.

Napomena

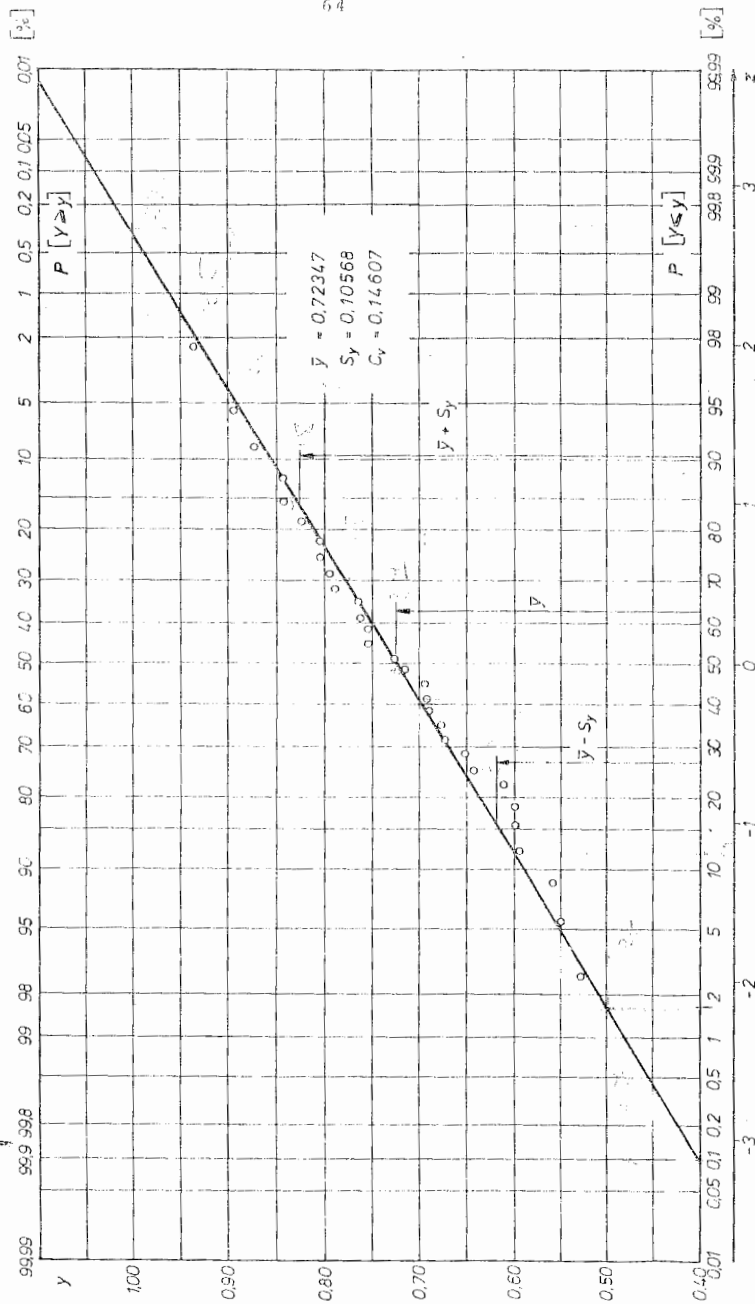
Vrijednosti iz kolone 4 tabele 10.3. računaju se prema datom obrascu za $i = 2, \dots, 8$

Za $i=1$ ova vrijednost se odredi iz obrasca

$$P_t [Y \leq y_1]$$

Za $i=9$ iz obrasca $P_t [Y > y_9]$

Slika 10.1. GALTONOVA RASPODJELA SREDNJIH GODIŠNJIH PROTICAJA RIJEKE MILJACKE NA VODOMJERNOJ STANICI SARAJEVO



ZADATAK BROJ 11

Za srednje godišnje proticaje rijeke Miljacke na vodomjernoj stanici Sarajevo, za period od 1947-1976. godine, date u zadatku broj 9 potrebno je:

1. Empirijsku funkciju distribucije proticaja (određenu u zadatku broj 9) prilagoditi Pearson-III distribuciji vjerovatnoće.
2. Izvršiti testiranje prilagođavanja teorijske distribucije vjerovatnoće empirijskoj funkciji za stepen obezbjedjenja 95% koristeći pri tom test Kolmogorova.

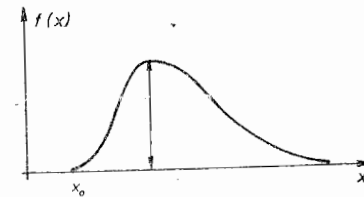
RJEŠENJE:

1. Pearson-III funkcija raspodjele vjerovatnoće definisana je izrazom

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{x_0}^x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} (t-x_0)^{\alpha-1} e^{-(t-x_0)/\beta} dt$$

Ako u gornju jednačinu uvedemo promjenljivu $z = x - x_0$ dobija se

$$P[Z \leq z] = \int_{z_0}^z \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt,$$



Za praktičan proračun, vrijednosti $\Phi(x) = 1 - F(x)$ date su u tzv. Foster-Ribkinovim tablicama.

U tablicama su u stvari date vrijednosti promjenljive $z = \frac{x/\mu - 1}{c_v} = \frac{x - \mu}{\sigma}$ u funkciji koeficijenta asimetrije c_s i vjerovatnoće $\Phi(x) = 1 - F(x)$, gdje su μ i σ procjenjeni iz uzorka sa \bar{Q} i S .

Koristeći se Foster-Ribkinovim tablicama datim u prilogu br.4-a i 4-b odrediti će se proticaji odredjenih unaprijed odabranih vjerovatnoća pojave, u broju, dovoljnomo za konstrukciju teorijske distribucije vjerovatnoće prikazane grafički na slici broj 11.1.

$F(q) = P[Q \leq q]$ [%]	$c_s = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 - Q_1}$	$z = \frac{Q - \bar{Q}}{S}$	$Q = z \cdot S + \bar{Q}$ [m ³ /s]
99,9	0,552	3,89	10,58
99		2,72	9,04
90		1,32	7,19
50		-0,09	5,33
30		-0,58	4,68
5		-1,47	3,51
1		-1,92	2,91

2. Proračun vezan za provjeru kvaliteta prilagodjavanja teorijske funkcije raspodjele empirijskoj funkciji pomoću testa Kolmogorova proveden je u tabeli broj 11.1.

Vrijednosti empirijske funkcije distribucije preuzete su iz zadatka broj 9

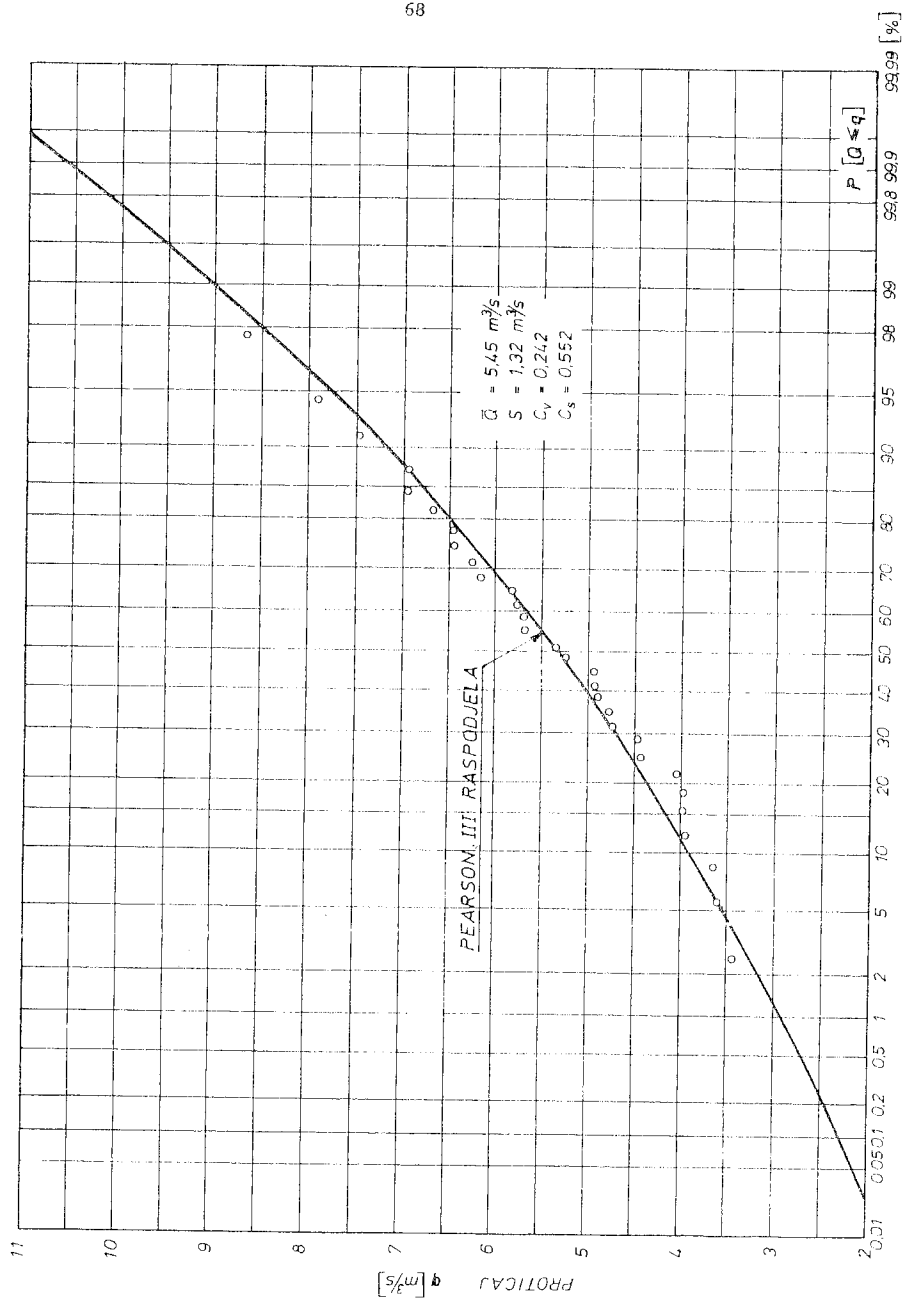
Za uzorak od $N = 30$ proticaja i obezbjedjenje 95% (koeficijent rizika 5%) iz tabele prilog br. 6 dobije se vrijednost $D_0 = 0,25$.

Pošto je $D_N = \max |P_e - P_t| = 0,085 < D_0 = 0,25$, prilagodjavanje Pearson-III funkcije raspodjele uzorku datih srednjih godišnjih proticaja može se smatrati zadovoljavajućim.

Tabela 11.1.

Red. br.	Proticaji Q [m ³ /s]	Empirijska vjerovatn. $P_e[0 \leq q]$ [%]	$Z = \frac{Q - \bar{Q}}{S}$	$P_t[0 \leq q]$ [%]	$ P_e - P_t $ [%]
1.	3,42	2,30	-1,53	4	1,70
2.	3,59	5,59	-1,41	5,5	0,09
3.	3,64	8,88	-1,37	6,5	2,38
4.	3,97	12,17	-1,12	11	1,17
5.	3,98	15,46	-1,11	11	4,46
6.	3,99	18,75	-1,10	11,5	7,25
7.	4,09	22,03	-1,03	13,5	8,53
8.	4,42	25,33	-0,78	22	3,33
9.	4,48	28,62	-0,73	23	5,62
10.	4,75	31,90	-0,53	31	0,90
11.	4,78	35,19	-0,51	32	3,19
12.	4,90	38,48	-0,42	36	2,48
13.	4,92	41,77	-0,40	36,5	5,27
14.	4,95	45,06	-0,38	37	8,06
15.	5,24	48,35	-0,16	46	2,35
16.	5,36	51,64	-0,07	50	1,64
17.	5,70	54,93	0,19	60	5,07
18.	5,71	58,22	0,19	60,5	2,28
19.	5,79	61,52	0,25	62	0,48
20.	5,81	64,80	0,27	63	1,80
21.	6,17	68,09	0,54	72	3,91
22.	6,26	71,38	0,61	74	2,62
23.	6,44	74,67	0,75	79	4,33
24.	6,45	77,96	0,76	79	1,04
25.	6,68	81,25	0,93	83	1,75
26.	6,96	84,54	1,14	87,5	2,96
27.	6,96	87,82	1,14	87,5	0,32
28.	7,48	91,12	1,54	93	1,88
29.	7,90	94,41	1,85	96	1,59
30.	8,68	97,69	2,44	98,6	0,91

Slika 11.1. RASPODJELA SREDNJIH GODIŠNJIH PROTICAJA RIJEKE MILJACKE NA VODOMJERNOJ STANICI SARAJEVO



ZADATAK BR. 12

Na teritoriji BiH, na osnovu provedenih hidroloških obrada višegodišnjih nizova utvrđeni su prosječni godišnji proticaji, Q_{sr} , na 30 vodomjernih stanica. Takođe, za svaku od ovih stanica utvrđene su prosječne godišnje bruto padavine, P_{sr} , u slivu koga kontrolišće stanica. Naprijed navedeni podaci, kao i površina sliva dati su u tabeli 12.1 - kolone 4, 5 i 7.

Potrebno je:

1. Odrediti prosječne koeficijente oticanja,
2. Ustanoviti odnos između prosječnog oticanja (neto padavina) i ukupnih padavina, P_{br} .

RJEŠENJE:

1. Prosječni koeficijent oticanja, γ , (kolona 8) definisan je izrazom

$$\gamma = \frac{W_n}{W_{br}} = \frac{FP_n}{FP_{br}} = \frac{P_n}{P_{br}} \quad (1)$$

U gornjem izrazu, neto padavine, P_n (kolona 6), su određene kao

$$P_n = \frac{Q_{sr} \cdot t}{F} = \frac{Q_{sr} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}{F} \cdot 10^{-3} \text{ [mm]} \quad (2)$$

gdje je Q_{sr} dato u $[\text{m}^3/\text{s}]$ a F u $[\text{km}^2]$.

2. U cilju sticanja uvida u oblik zavisnosti $P_n - P_{br}$, preporučljivo je da se u koordinatnom sistemu nanese razmatrane vrijednosti. Na slici 12.1. nanese su tačke sa koordinatama P_{br} (nezavisna promjenljiva X - apscisa) i P_n (zavisna promjenljiva Y - ordinata), odakle se vidi da je traženi odnos linearan. Ovaj odnos se može predstaviti jednačinom

$$Y_i = aX_i + b. \quad i = 1, 2, \dots, n = 30 \quad (3)$$

Koristeći se raspoloživim podacima može se napisati sistem jednačina:

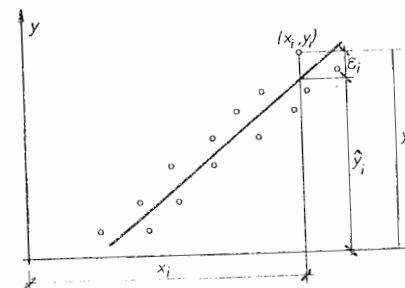
TABELA 12.1

Red. br.	Vodotok	Profil	F _{sliva} [km ²]	Q _{sr} [m ³ /s]	P _{neto} [mm]	P _{bruto} [mm]	Koef. oticanja η
1	2	3	4	5	6	7	8
1.	Drina	Zvornik	17730	383	681	1240	0.55
2.	"	B. Bašta	15190	357	740	1290	0.57
3.	"	Višegrad	13610	339	785	1350	0.58
4.	"	Foča	4290	190	1397	1890	0.74
5.	"	Bastasi	3310	159	1512	1980	0.76
6.	Bosna	Doboj	9620	152	498	1040	0.48
7.	"	Usora	7600	127	527	1070	0.49
8.	"	Zenica	4150	71	539	1125	0.48
9.	"	Reljevo	1120	26	731	1250	0.58
10.	Ukrina	Derventa	1380	15	344	900	0.38
11.	Vrbas	D.Selo	5090	112	693	1240	0.56
12.	"	B.Luka	4220	95	710	1260	0.56
13.	"	Kozluk	2630	56	672	1220	0.55
14.	"	H.Skela	1350	23	542	1120	0.48
15.	Una	B.Dubica	9230	216	739	1250	0.59
16.	"	B.Kostajnica	8880	231	820	1275	0.64
17.	"	E.Novi	8190	213	820	1285	0.64
18.	"	Bihać	3160	95	950	1460	0.65
19.	"	M.Brod	1410	48	1068	1550	0.69
20.	Lim	Prijeopolje	3030	80	832	1380	0.60
21.	Prača	Mesići	580	8	435	975	0.45
22.	Spreča	S.Rijeka	1960	24	386	920	0.42
23.	Krivaja	Zavidovići	1390	18	408	950	0.43
24.	Pliva	Volari	1150	35	960	1350	0.71
25.	Sana	Ključ	1130	36	993	1400	0.71
26.	Trebišnjica	A.Most	1580	94	1865	2390	0.78
27.	"	Grančarevo	1370	81	1870	2380	0.79
28.	Neretva	Jablanica	2930	115	1241	1800	0.69
29.	"	Konjic	1310	54	1286	1860	0.69
30.	"	Ulog	250	10	1261	1870	0.67

Vrijednosti iz kolona 4, 5 i 7 preuzete su iz knjige "Problemi velikih voda" od D.Srebrenovića.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= ax_1 + b + \varepsilon_1 = \hat{y}_1 + \varepsilon_1 \\
 y_2 &= ax_2 + b + \varepsilon_2 = \hat{y}_2 + \varepsilon_2 \\
 &\vdots \\
 y_i &= ax_i + b + \varepsilon_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i \\
 &\vdots \\
 y_n &= ax_n + b + \varepsilon_n = \hat{y}_n + \varepsilon_n
 \end{aligned} \quad (4)$$

U jednačinama 1-30, vrijednosti x_i i y_i predstavljaju osmotrene (sračunate veličine), $\hat{y}_i = ax_i + b$ je vrijednost zavisne promjenjive procjenjena na osnovu poznate veličine nezavisne slučajno promjenjive x_i za predpostavljeni odnos, dok je $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ = greška modela u odnosu na osmotrenu vrijednost (vidi donju skicu).



U prednjem sistemu jednačina poznate su vrijednosti x_i i y_i za $i = 1, 2, \dots, 30$, dok su nepoznati parametri modela a i b . Uobičajeno je da se vrijednosti nepoznatih parametara odrede uz uslov da je suma kvadrata greške $\sum_{i=1}^{30} \varepsilon_i^2$ minimalna, tj.

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = E = \min \quad (5)$$

Vrijednost $\sum \varepsilon_i^2$, biće minimalna ako su parcijalni izvodi po nepoznatima a i b jednaki nuli, tj.

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i x_i - ax_i^2 - bx_i) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \quad (7)$$

Iz jednačine (7) slijedi:

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (8)$$

gdje su $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ i $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Kombiniranjem jednačina (6) i (8) dobije se

$$a = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{C_{xy}}{S_x^2} = \frac{C_{xy}}{S_x S_y} \cdot \frac{S_y}{S_x} = r_{xy} \cdot \frac{S_y}{S_x} \quad (9)$$

gdje su C_{xy} prvi mješoviti centralni momenat (kovarijansa), S_x i S_y standardna devijacija promjenljivih X i Y, a r_{xy} koeficijent korelacije između razmatranih promjenljivih X i Y.

Veličina $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ i njena apsolutna vrijednost $|r_{xy}|$ indicira čvrstinu veze X i Y (što je $|r_{xy}|$ bliže jedinici veza između X i Y je čvršća, a što je bliža nuli veza je slabija).

Iz datih podataka (tabela 12.1) sračunate su odgovarajuće sume:

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 42\,070 \\ \sum x_i^2 &= 63\,582\,200 \\ \sum y_i &= 26\,305 \\ \sum y_i^2 &= 27\,861\,713 \\ \sum x_i y_i &= 41\,543\,550 \end{aligned}$$

Na bazi ovih veličina sračunate su slijedeće vrijednosti:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{30} \cdot 42070 = 1402 \text{ mm} \\ S_x &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1}{30} \cdot 63582200 - 1402^2} = 391 \text{ mm} \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{30} \cdot 26305 = 877 \text{ mm} \\ S_y &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{1}{30} \cdot 27861713 - 877^2} = 400 \\ C_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = \frac{1}{30} \cdot 41543550 - 1402 \cdot 877 = 155\,172 \\ r_{xy} &= \frac{C_{xy}}{S_x S_y} = \frac{155172}{391 \cdot 400} = 0.993 \end{aligned}$$

$$a = \frac{C_{xy}}{S_x^2} = \frac{155172}{391^2} = 1.015$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 877 - 1.015 \times 1402 = -547$$

Tražena zavisnost data je slijedećom jednačinom

$$y = 1.015 x - 547 \quad (10)$$

odnosno

$$P_n = 1.015 P_{br} - 547 \quad (11)$$

gdje se vrijednosti P_n i P_{br} uvrštavaju u mm. Ova zavisnost je predstavljena na slici 12.1.

Na bazi naprijed provedenih proračuna mogu se izvući slijedeći orijentacioni zaključci:

- Ako je oticanje $P_n = 0$, proizilazi da je $P_{br} = 547/1.015 = 538$. Ovo ukazuje da se sa stanovišta ukupnog oticanja, na razmatranim slivovima u prosjeku gubi oko 538 mm padavina;

- Ako se jednačina (11) podijeli sa \bar{P}_{br} dobije se

$$\bar{\eta} = 1.015 - \frac{547}{1402} = 0.625$$

što je približno jednako rezultatu koji se dobije iz kolone 8 - tabela 12.1, odakle se dobije $\bar{\eta} = 0.60$;

- Ako sa teritorije SR BiH u prosjeku otiče 60% od ukupno palih voda, tj.

$$P_n = 0.60 \times 1400 = 840 \text{ mm}$$

tada prosječna godišnja zapremina oticanja iznosi

$$W_n = A \cdot P_n = 51130 \cdot 10^6 \cdot 0.84 = 42.95 \cdot 10^9 \text{ m}^3$$

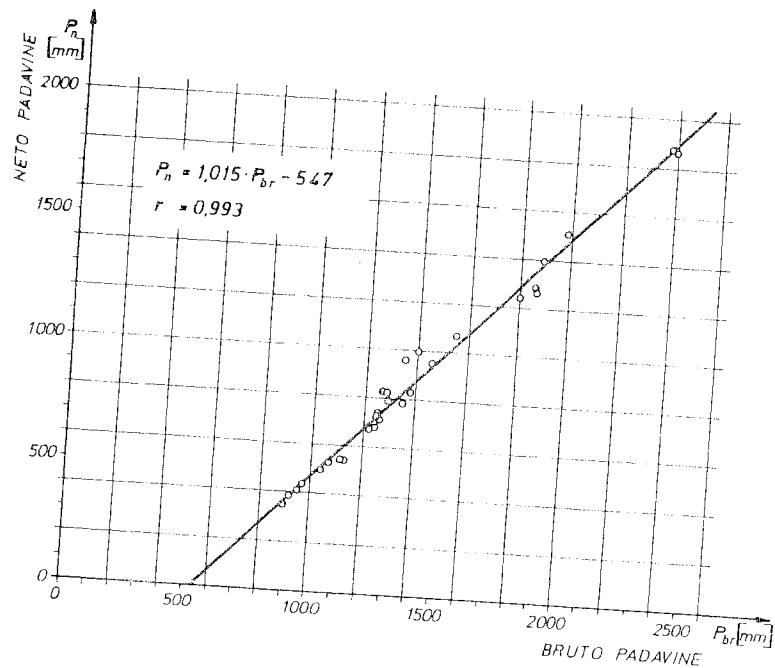
Prosječno sekundno oticanje iznosi

$$\bar{Q} = \frac{42.95 \cdot 10^9}{31.5 \cdot 10^6} = 1363 \text{ m}^3/\text{s}$$

odnosno specifično oticanje je

$$\bar{q} = \frac{\bar{Q}}{A} = 27 \text{ l/s/km}^2.$$

Gdje $A = 51130 \text{ km}^2$ predstavlja površinu teritorije SR BiH.



ZADATAK BROJ 13

Za godišnje sume padavina na kišomjernim stanicama u slivu rijeke Vrbas do vodomjerne stanice Han Skela za period od 1956. do 1970. godine date u tabeli 13.1. odrediti prosječne padavine na slivu:

1. Po metodi aritmetičkih sredina
2. Po metodi Thiessenovih poligona
3. Po metodi izohijeta

RJEŠENJE

1. Prosječne padavine po ovom metodu određuju se po slijedećem obrascu

$$p_{sr}^{sl} = \frac{\sum_{i=1}^N p_{sr}^i}{N} \quad \text{gdje je}$$

p_{sr}^i - prosječna godišnja suma padavina na posmatranoj stanici (zbir padavina za period od 1956-1970 podjeljen sa brojem godina) - na osnovu podataka iz tabele 13.1.

N - ukupan broj kišomjernih stanica

KIŠOMJERNA STANICA	JAJCE	ŠIPOVO	SARIČIĆ	D. VAKUF	KOMAR	BUGOJNO	KALIN	KUPRES	G. VUKOVSKA	G. VAKUF	PROZOR	FOJNICA
PROSJEČNE GODIŠNJE PADAVINE P_{sr}^i [mm]	957	973	1095	929	1055	828	948	1310	1198	1060	1040	1288

$$p_{sr}^{sl} = \frac{\sum_{i=1}^{12} p_{sr}^i}{12} = \frac{12681}{12} \approx 1057 \text{ mm}$$

2. Prvi korak kod ovog metoda je određivanje Thiessenovih poligona, čime se svakoj kišomjernoj stanici određuje pripadna slivna površina (Thiessenov poligon).

Procedura konstrukcije poligona vidljiva je sa Slike 13.1. a osnova za konstrukciju su simetrale duži koje spajaju susjedne kišomjerne stanice.

Prosječne padavine određuju se po obrascu:

$$P_{sr}^{sl} = \frac{\sum_{i=1}^N p_{sr}^i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^N f_i} = \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{F_{sl}} \cdot p_{sr}^i, \text{ gdje je,}$$

p_{sr}^i - prosječna godišnja suma padavina na posmatranoj kišomjernoj stanici (zbir padavina za period od 1956-1970 podjeljen sa brojem godina), na osnovu podataka iz tabele 13.1.

N - ukupan broj kišomjernih stanica.

f_i - površina pripadajućeg Thiessenovog poligona.

f_i/F_{sl} - težina pojedine površine koja pripada kišomjernoj stanici u odnosu na ukupnu površinu.

$F_{sl} = 1357 \text{ km}^2$ ukupna površina sliva.

Detaljan proračun prosječnih padavina po ovoj metodi proveden je u tabeli 13.2., a pripadajuće površine sliva i ukupna površina sliva određene su planimetrisanjem. Prosječna visina padavina na sliv određena po ovoj metodi iznosi $P_{sr} = 1018 \text{ mm}$

3. Kod ovoga metoda prvo je potrebno konstruisati izohijete (linije koje povezuju sva mjesta istih visina padavina). Prilikom konstrukcije izohijeta ušlo se sa pretpostavkom da je promjena visine padavina između dvije stanice linearna, što je poslužilo za iznalaženje tačaka sa određenom - unaprijed usvojenom visinom padavina. Način konstrukcije izohijeta vidljiv je na slici 13.2.

Određivanje prosječnih padavina za sliv vrši se na osnovu karte izohijeta (Slika 13.2), a po obrascu:

$$P_{sr}^{sl} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i p_{sr}^i}{\sum f_i} = \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{F_{sl}} \cdot p_{sr}^i, \text{ gdje je}$$

f_i - pripadajuća elementarna površina sliva između pojedinih izohijeta,

P_{sr}^i - srednja visina padavina koja odgovara toj elementarnoj površini

$F_{sl} = 1357 \text{ km}^2$ ukupna površina sliva

Elementarne površine i ukupna površina sliva određene su planimetrisanjem.

Detaljan proračun prosječnih padavina po ovoj metodi proveden je u tabeli 13.3., a prosječna vrijednost padavina iznosi $P_{sr} = 1039 \text{ mm}$.

Tabela 13.1.

Red. br.	Kišomjerna stanica	Godišnja s u m a p a d a v i n a												P sr		
		1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967		1968	1969
1.	Fojnica	766	1000	1100	1320	1100	950	1200	1120	1668	1242	1080	1350	1877	2445	1288
2.	Prozor	910	947	1020	1246	1092	800	963	1057	1252	967	1120	1068	1218	1153	1040
3.	Gornji Vakuf	1001	1130	676	1108	990	767	1007	1012	1412	1024	1186	1060	1261	1358	1060
4.	G. Vukovsko	1090	1100	1007	1800	1190	934	1098	1125	1305	1042	1214	1211	1397	1397	1198
5.	Kalin	782	833	712	1002	925	803	900	756	1057	950	1115	930	1267	1185	948
6.	Bugojno	656	799	642	947	849	650	958	783	982	747	835	800	991	960	828
7.	Kupres	1274	1050	1214	2091	1400	1011	1173	1246	1203	1061	1265	1336	1534	1465	1310
8.	Komar	870	849	817	1055	986	956	813	746	1107	1023	1376	1126	1466	1350	1055
9.	Donji Vakuf	663	862	800	1014	890	700	813	946	1097	988	902	966	910	1178	929
10.	Sarići	914	857	725	1211	1098	967	1007	1085	1240	1132	1222	1194	1420	1160	1095
11.	Šipovo	898	800	583	1150	980	790	860	920	1170	930	1000	1025	1390	1090	973
12.	Jajce	919	766	716	1032	922	782	870	984	1179	941	1050	1026	1100	1154	957
Σ																1018,39

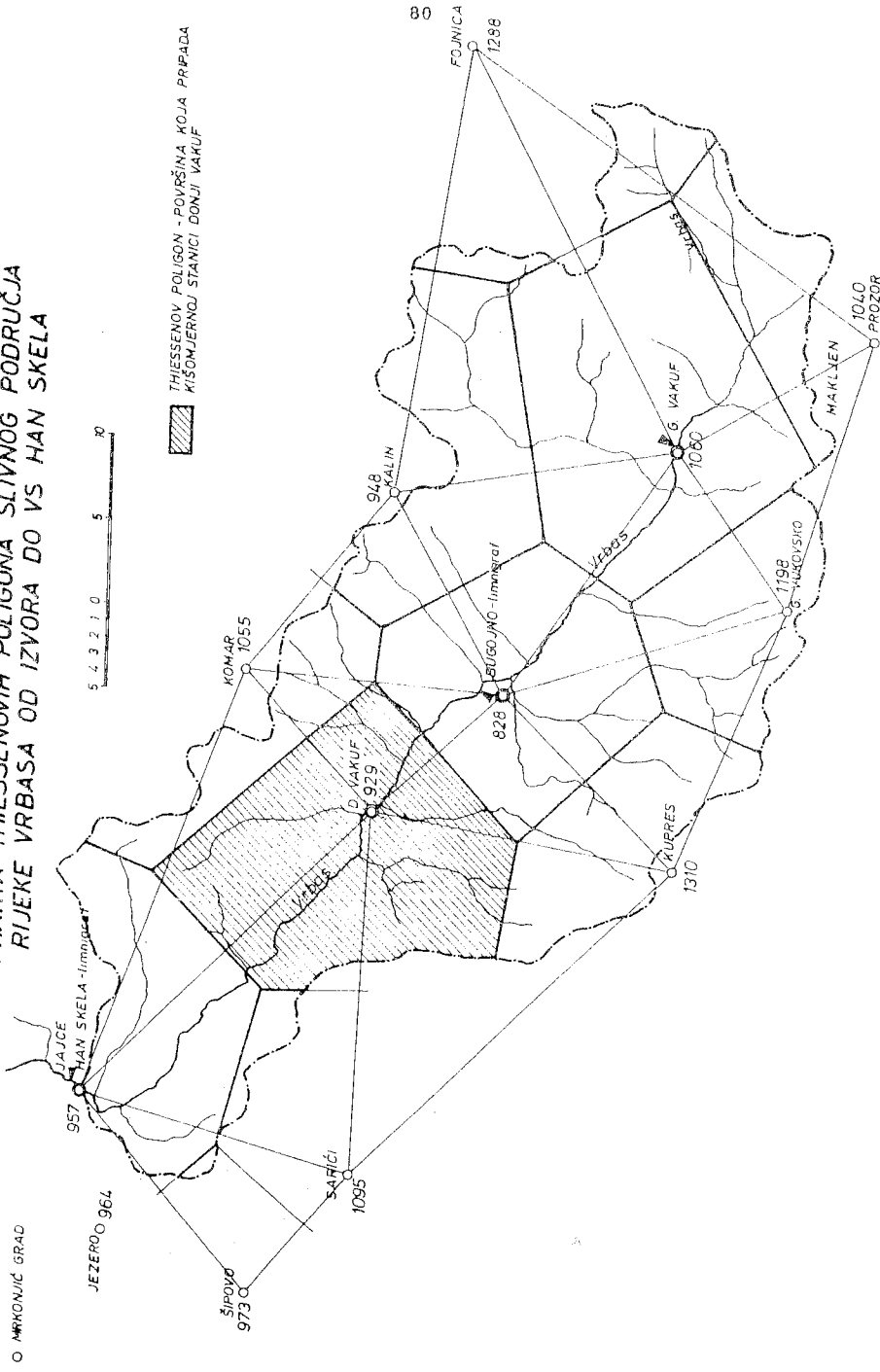
Tabela 13.2.

Kišomjerna stanica	Površina pripadajućeg poligona F_i [km ²]	Srednja visina padavina na K.S. p_{sr}^i [mm]	$\frac{f_i}{F_{sl}}$	$p_{sr}^i \cdot \frac{f_i}{F_{sl}}$ [mm]
Jajce	142	957	0,10464	100,14
Šipovo	2	973	0,00147	1,43
Sarići	14	1095	0,01031	11,29
D. Vakuf	228	929	0,16801	156,08
Komar	69	1055	0,05084	53,63
Bugojno	181	828	0,13338	110,43
Kalin	147	948	0,10832	102,68
Kupres	101	1310	0,07442	97,49
G. Vukovsko	107	1198	0,07885	94,46
G. Vakuf	263	1060	0,19380	205,43
Prozor	68	1040	0,05011	52,11
Fojnica	35	1288	0,02579	33,22
Σ				1018,39

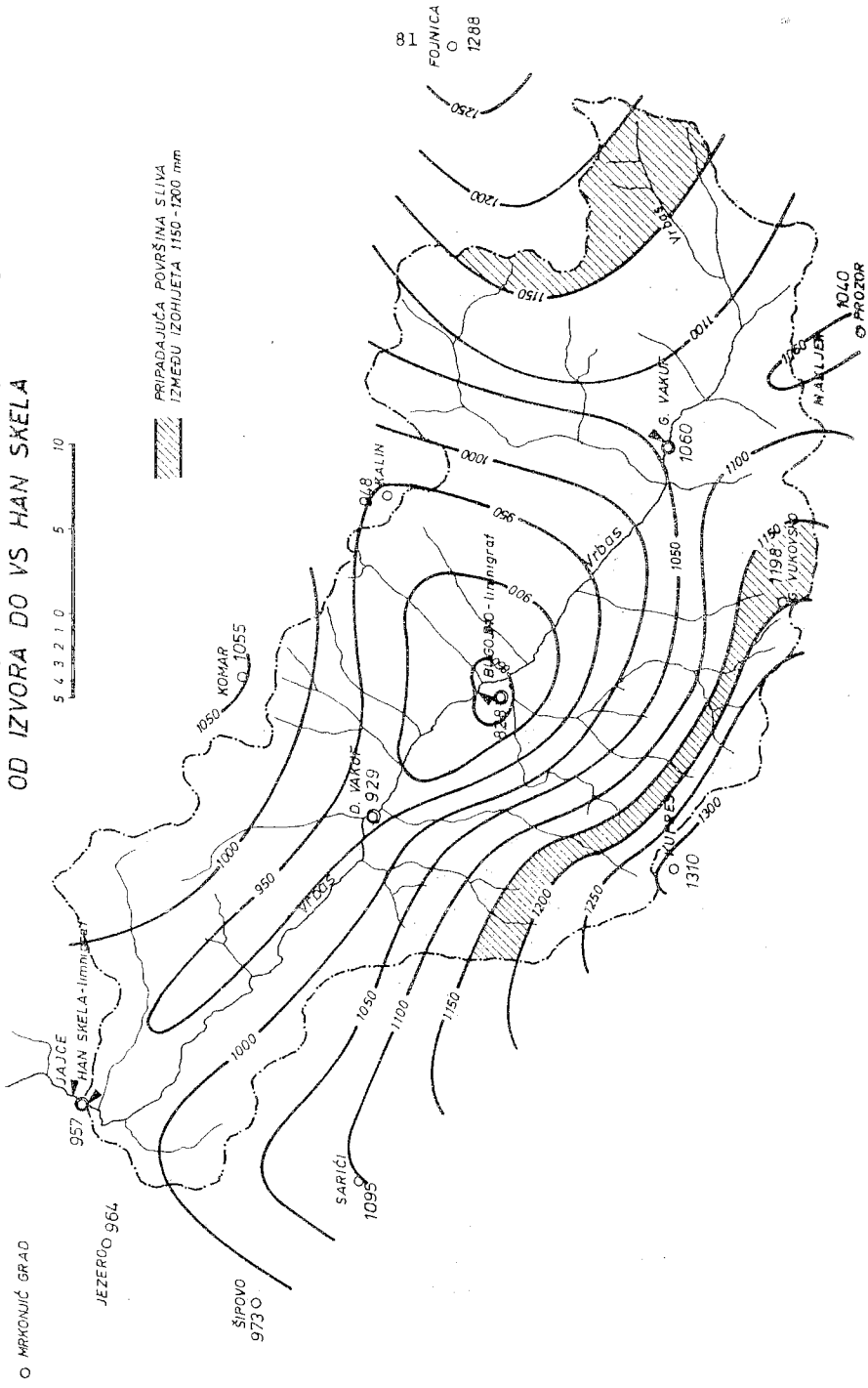
Tabela 13.3.

Srednja visina padavina između dvije izohijete p_{sr}^i [mm]	Pripadajuća površina sliva f_i [km ²]	$\frac{f_i}{F_{sl}}$	$p_{sr}^i \cdot \frac{f_i}{F_{sl}}$ [mm]
828	7	0,00515	4,26
875	79	0,05821	50,93
925	168	0,12380	114,51
975	261	0,19233	187,52
1025	255	0,18791	192,60
1040	3	0,00221	2,29
1075	191	0,14075	151,30
1125	202	0,14885	167,45
1175	122	0,08990	105,63
1225	43	0,03168	38,80
1275	26	0,01916	24,42
Σ			1039,71

Slika 13.1. KARTA THIESENOVIH POLIGONA SLIVNOG PODRUČJA RIJEKE VRBASA OD IZVORA DO VS HAN SKELA



Slika 13.2. KARTA IZOHIJETA SLIVNOG PODRUČJA RIJEKE VRBASA OD IZVORA DO VS HAN SKELA



ZADATAK BROJ 14

Na osnovu analize ombrografskih traka za meteorološku stanicu Mostar u periodu od 1958-1982 godine (N = 25 godina) formirane su serije maksimalnih bruto kiša, h, trajanja, t_k , 10, 20, 30, 40, 50 i 60 minuta. Odgovarajućom statističkom analizom podataka dobivene su vrijednosti osnovnih statističkih parametara pomenu-tih serija koji su dati u tabeli 14.1.

Tabela 14.1.

Trajanje kiše t_k [minuta]	Statistički parametar			
	Srednja vrijednost h [l/m ²]	Standardna devijacija s [l/m ²]	Koeficijent varijacije C_v	Koeficijent asimetrije C_s
10	14,31	3,80	0,265	1,573
20	20,18	4,89	0,242	0,866
30	25,01	6,34	0,253	0,292
40	27,80	7,36	0,265	0,0975
50	29,52	8,17	0,276	0,260
60	30,61	8,25	0,269	0,354

Potrebno je:

- Pod pretpostavkom da se uzorcima maksimalnih kiša datih trajanja prilagodjava Pearson-III funkcija raspodjele, odrediti intenzitet kiše raznih vjerovatnoća javljanja, te nacrtati teorijske funkcije raspodjele intenziteta kiša datih trajanja.
- Konstruisati slijedeće zavisnosti:
 - Intenzitet kiše - trajanje - povratni period javljanja (ITP)
 - Visina kiše - trajanje - povratni period javljanja (HTP)

Rješenje:

- Visina kiše, h, određenog trajanja, t_k , i vjerovatnoće $\Phi(h) = P[H \geq h]$, odnosno povratnog perioda $T(h) = \frac{1}{\Phi(h)}$ određuje se pomoću izraza

$$h(\Phi) = \bar{h} + Z(\Phi, C_s) \cdot s \quad (1)$$

U gornjem izrazu $Z(\Phi, C_s)$ je vrijednost standardizirane promjenljive za Pearson-III raspodjelu, koja zavisi od vjerovatnoće,

Tabela 14.2.

$\Phi(h)^*$	Trajanje kiše t_k [minuta]																	
	10		20		30		40		50		60							
	Z	$h(\Phi)$	Z	$h(\Phi)$	Z	$h(\Phi)$	Z	$h(\Phi)$	Z	$h(\Phi)$	Z	$h(\Phi)$						
0,1	5,32	34,5	207,1	4,32	41,3	123,9	3,50	47,2	94,4	3,23	51,6	77,3	3,46	57,8	69,3	3,59	60,2	60,2
1	3,37	27,1	162,7	2,93	34,5	103,5	2,53	41,0	82,1	2,40	45,5	68,2	2,51	50,0	60,0	2,58	51,9	51,9
3	2,41	23,5	140,8	2,20	30,9	92,8	2,00	37,7	75,4	1,92	41,9	62,9	1,98	45,7	54,8	2,02	47,3	47,3
5	1,96	21,7	130,5	1,85	29,2	87,7	1,72	35,9	71,8	1,67	40,1	60,1	1,71	43,5	52,2	1,74	44,9	44,9
10	1,33	19,3	116,2	1,34	26,7	80,2	1,31	33,3	66,6	1,29	37,3	55,9	1,31	40,2	48,2	1,32	41,5	41,5
20	0,68	16,9	101,3	0,77	23,9	71,8	0,82	30,2	60,4	0,84	34,0	51,0	0,82	36,2	43,5	0,82	37,4	37,4
30	0,28	15,4	92,2	0,40	22,1	66,4	0,48	28,0	56,1	0,51	31,5	47,3	0,49	33,5	40,2	0,47	34,5	34,5
50	-0,25	13,3	80,2	-0,14	19,5	58,5	-0,05	24,7	49,4	-0,02	27,6	41,5	-0,04	29,2	35,0	-0,06	30,1	30,1
70	-0,64	11,9	71,4	-0,61	17,2	51,6	-0,56	21,4	42,9	-0,53	23,9	35,8	-0,56	24,9	29,9	-0,57	25,9	25,9
90	-0,99	10,5	63,3	-1,16	14,5	43,5	-1,24	17,1	34,3	-1,27	18,4	27,7	-1,25	19,3	23,2	-1,23	20,5	20,5
95	-1,12	10,0	60,3	-1,36	13,5	40,5	-1,55	15,2	30,4	-1,61	15,9	23,9	-1,56	16,8	20,1	-1,53	18,0	18,0
99	-1,21	9,7	58,3	-1,69	11,9	35,7	-2,10	11,7	23,4	-2,25	11,2	16,9	-2,13	12,1	14,5	-2,06	13,6	13,6
99,5	-1,23	9,6	57,8	-1,79	11,4	34,3	-2,29	10,5	21,0	-2,48	9,5	14,3	-2,32	10,5	12,7	-2,24	12,1	12,1
99,9	-1,26	9,5	57,1	-1,95	10,6	31,9	-2,70	7,9	15,8	-2,95	6,1	9,1	-2,73	7,2	8,6	-2,60	9,1	9,1

* Vrijednosti z za neke veličine $\Phi(h)$ preuzete su iz detaljnijih tabela nego što su tabele date u prilogu 4-a i 4-b.

Φ , i koeficijenta asimetrije, C_s . Ove vrijednosti se nalaze u tabeli, prilog br. 4-a i 4-b.

Iz proračunatih visina kiša po obrascu (1) iz tabele 14.2, njihovi intenziteti i [$l/m^2/sat$] dobiju se:

$$i(\Phi) = \frac{h(\Phi)}{t_k} \text{ [mm/sat]}$$

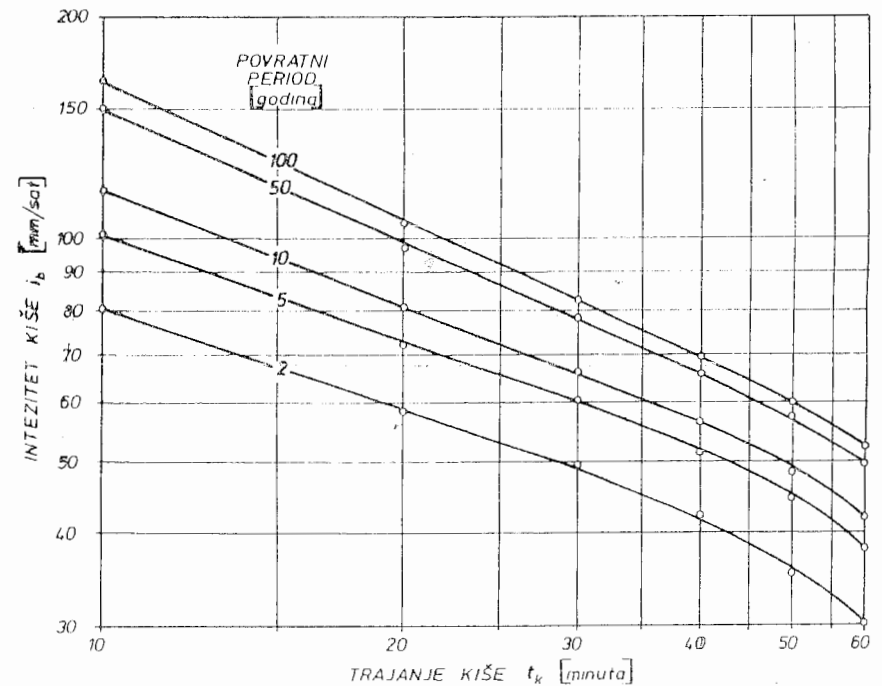
Sračunate veličine intenziteta kiša, $i(\Phi)$, za data trajanja kiše, t_k , (iz kolona 4, 7, 10, 13, 16 i 19) nacrtane su na slici 14.1.

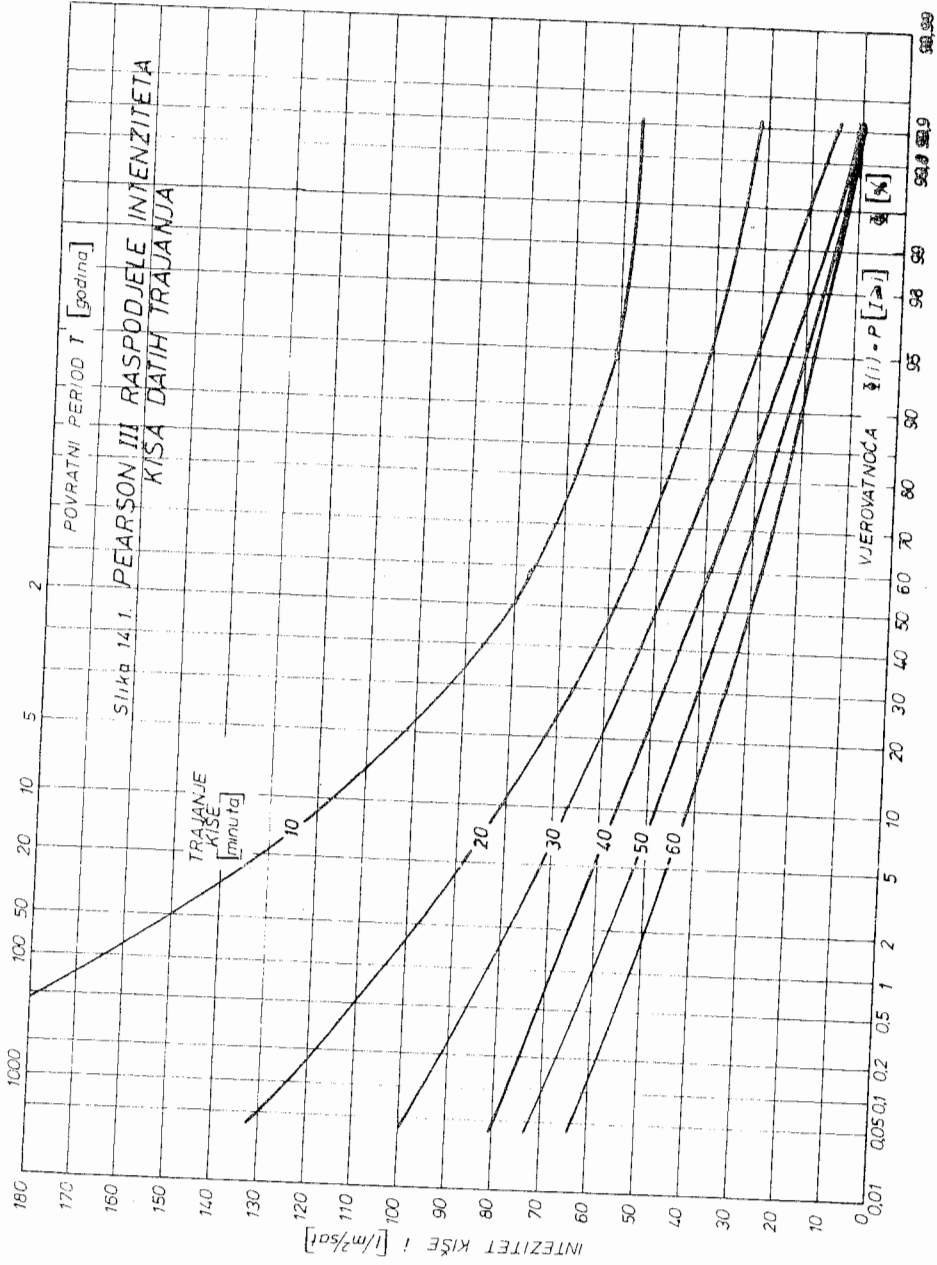
2.1. Zavisnost INTENZITET KIŠE-TRAJANJE-POVRATNI PERIOD, dobiju se kada se za unaprijed izabrano $\Phi(i) = const$, odnosno povratni period T , nanesu vrijednosti intenziteta razmatranih trajanja kiše, t_k , i kroz njih provuče linija (slika 14.2). Ove vrijednosti se, za proračunate vjerovatnoće (proizvoljno odabrane), mogu pročitati iz tabele 14.2. Za vjerovatnoće koje ne postoje u tabeli, vrijednosti $i(\Phi)$ se mogu približno očitati sa slike 14.1.

2.2. Postupak za konstruisanje zavisnosti VISINA KIŠE-TRAJANJE-POVRATNI PERIOD je identičan kao u tački 2.1., s tim što se, umjesto $i(\Phi)$ nanose vrijednosti $h(\Phi)$.

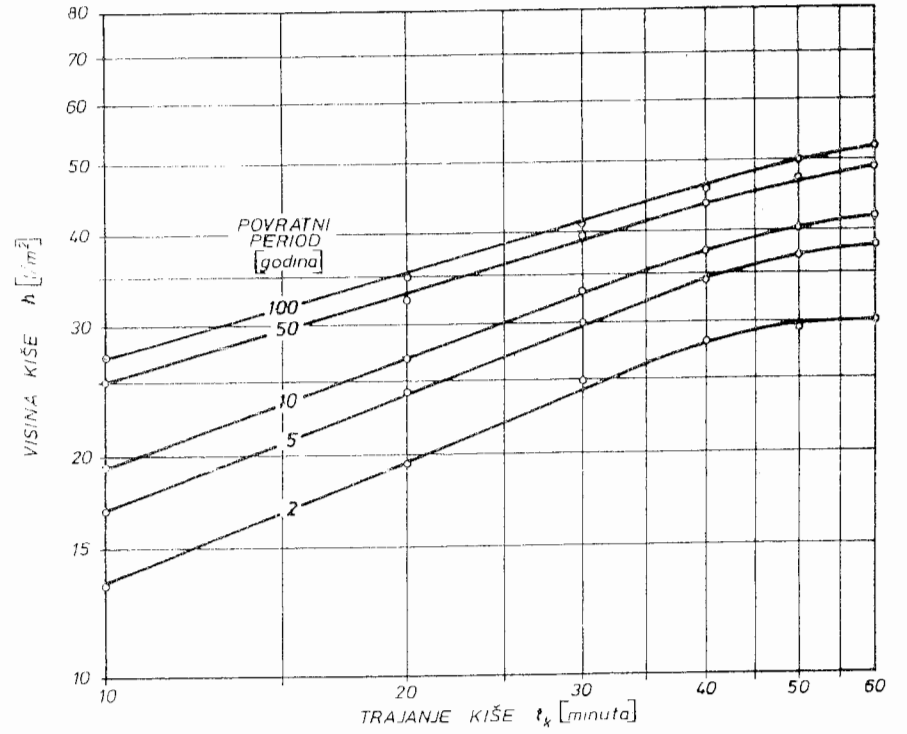
Ove zavisnosti su prikazane u slici 14.3.

SLIKA 14.2. ZAVISNOSTI: INTEZITET KIŠE - TRAJANJE -
-POVRATNI PERIOD





SLIKA 14.3. ZAVISNOSTI: VISINA KISE - TRAJANJE - POVRATNI PERIOD



ZADATAK BROJ 15

Kao posljedica kiše koja je pala na sliv rijeke Bukovice 11.XI 1979. godine, na vodomjernoj stanici Podgaj registrovan je slijedeći hidrogram oticanja (tabela 15.1):

Tabela 15.1.

Vrijeme pojave		Bruto kiša P_b [mm]	Proticaj Q [m ³ /s]	Vrijeme pojave		Bruto kiša P_b [mm]	Proticaj Q [m ³ /s]
Datum	Sat			Datum	Sat		
(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
11. XI 1979.	2		0,25	11. XI 1979.	16,30		1,68
	2,30		0,24		17		1,52
	3	0	0,24		17,30		1,37
	3,30		0,23		18		1,21
	4	2	0,23		18,30		1,09
	4,30		0,55		19		1,00
	5	8,2	1,51		19,30		0,91
	5,30		3,84		20		0,82
	6	9,8	7,34		20,30		0,73
	6,30		9,44		21		0,65
	7		9,41		21,30		0,56
	7,30		8,59		22		0,50
	8		7,74		22,30		0,47
	8,30		7,00		23		0,45
	9		6,38		23,30		0,43
	9,30		5,83		24		0,40
10		5,31	0,30			0,38	
10,30		4,86	1			0,36	
11		4,44	1,30			0,34	
11,30		4,05	2			0,32	
12		3,70	2,30			0,30	
12,30		3,37	3			0,29	
13		3,13	3,30			0,27	
13,30		2,87	4			0,26	
14		2,62	4,30		0,25		
14,30		2,40	5		0,23		
15		2,21	5,30		0,21		
15,30		2,02	6		0,20		
16		1,83					

Površina sliva do vodomjerne stanice iznosi $F_s = 60 \text{ km}^2$. Visine kiša u koloni (3) tabele 15.1. predstavljaju ukupnu visinu kiše na slivu na kraju odgovarajućeg sata. (od 3 do 6 sati ukupno je palo 9,8 mm kiše).

Vrijednosti za proticaj vode u koloni (4) odnose se na kraj odgovarajućeg sata.

Na osnovu podataka osmatranja kiša i proticaja vode potrebno je:

1. Odrediti i nacrtati hidrogram direktnog oticanja.
2. Odrediti ukupnu visinu i hijetogram efektivne kiše, te sračunati koeficijent direktnog oticanja.
3. Odrediti ordinate jednosatnog jediničnog hidrograma.
4. Odrediti ordinate 30-minutnog jediničnog hidrograma.
5. Ako je poznato da maksimalne proticaje na slivu izazivaju kiše približnog trajanja 2 sata, odrediti maksimalni proticaj direktnog oticanja od kiše ovog trajanja povratnog perioda 100 godina. Prethodnom analizom niza podataka 2-satnih padavina utvrđeni su slijedeći parametri uzorka:

$$P_{br} = 34 \text{ mm}$$

$$S = 10,6 \text{ mm}$$

$$C_s = 1.28$$

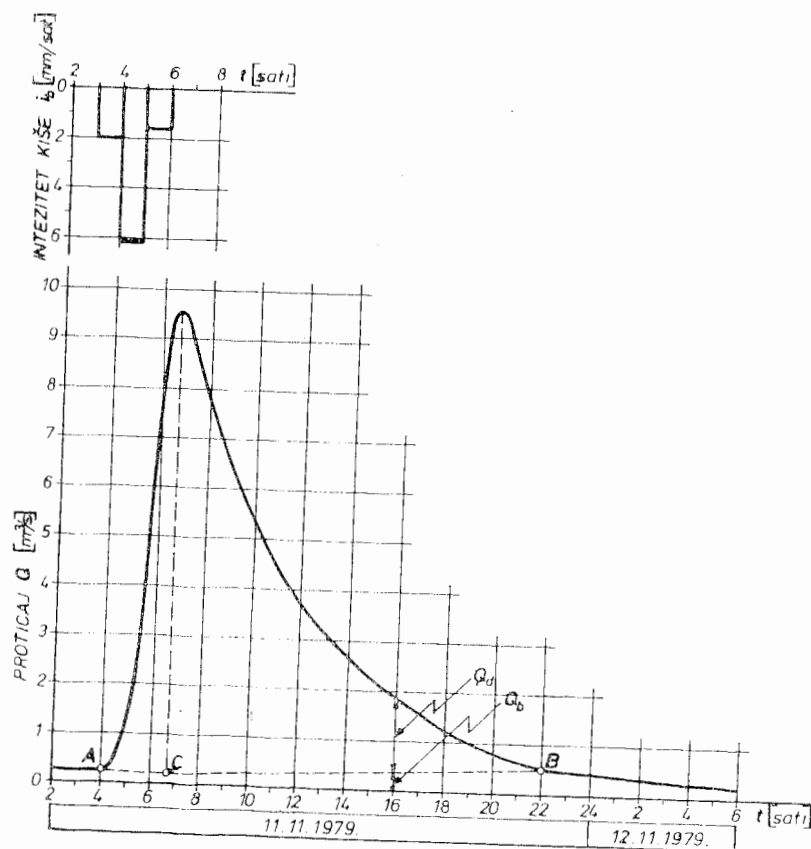
Pri analizi padavina koristiti Pearson III funkciju raspodjele. Pretpostaviti da koeficijent direktnog oticanja iznosi $\eta = 0.60$.

Rješenje:

1. Za određivanje hidrograma direktnog oticanja, prethodno je potrebno izvršiti razdvajanje baznog i direktnog oticanja. Jedna od metoda razdvajanja zasniva se na pretpostavci da se recesioni dio krive hidrograma oticanja (kriva iscrpljenja sliva) može aproksimirati funkcijom:

$$Q(t) = Q(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)}$$

gdje su: $Q(t_0)$ - proticaj vode u trenutku t_0
 $Q(t)$ - proticaj vode u trenutku $t > t_0$
 α - koeficijent recesije



Slika 15.1.

Pod ovom pretpostavkom recesiona kriva koja predstavlja bazno oticanje će na dijagramu $\log Q-t$ biti predstavljena pravcem (slika 15.2). Vrijeme prestanka direktnog oticanja (tačka B na slici 15.2) je ono vrijeme kada zavisnost $\log Q-t$ poprima oblik krive linije. U ovom slučaju direktno oticanje je prestalo 11.XI 1979. u 22 sata (tačka B). Hidrogram direktnog oticanja je određen tako što je recesiona kriva prije početka direktnog oticanja (tačka A) produžena do tačke C, tj. do vremena koje odgovara pojavi maksimalnog proticaja na hidrogramu oticanja.

Zatim je tačka C spojena sa tačkom B linearno (slika 15.1). Ordinate hidrograma direktnog oticanja, Q_d , (tabela 15.2 - kolona 5) se dobiju kao razlika:

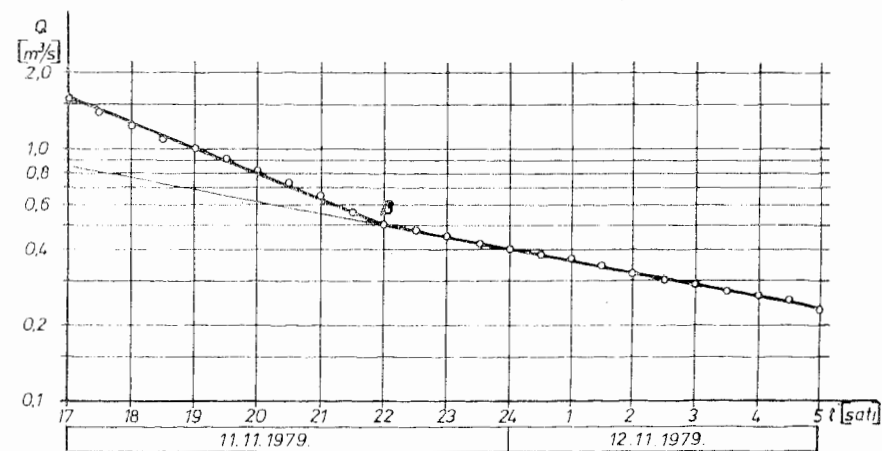
$$Q_d = Q - Q_b$$

gdje je:

Q - ukupni proticaj (tabela 15.2, kolona 3)

Q_b - bazno oticanje (tabela 15.2, kolona 4), dobijeno očitanjem ordinata sa slike 15.1.

Hidrogram direktnog oticanja nacrtan je na slici 15.4.



Slika 15.2.

2. Ukupna visina efektivne kiše određuje se kao količnik:

$$P_e = \frac{W_d}{F_{sl}}$$

gdje je W_d zapremina direktno otekle vode a F_{sl} površina sliva.

Zapremina direktnog oticanja:

$$W_d = \sum Q_d \cdot \Delta t = 110,58 \cdot 1800 = 199044 \text{ m}^3$$

(gdje je $\Delta t = 0,5 \text{ sati} = 1800 \text{ s}$).

Tabela 15.2.

Vrijeme pojave		Ukupni proticaj	Bazni proticaj	Direktni proticaj	Ordinate jed.hidr. u(1,t)
Datum	Sat	Q [m ³ /s]	Q_b [m ³ /s]	Q_d [m ³ /s]	[m ³ /s/mm]
		3	4	5	6
	2	0,25	0,25	0	
	2,30	0,24	0,24	0	
	3	0,24	0,24	0	
	3,30	0,23	0,23	0	
	4	0,23	0,23	0	0
	4,30	0,55	0,22	0,33	0,10
	5	1,51	0,22	1,29	0,39
	5,30	3,84	0,21	3,63	1,10
	6	7,34	0,21	7,13	2,16
	6,30	9,44	0,20	9,24	2,80
	7	9,41	0,20	9,21	2,79
	7,30	8,59	0,21	8,38	2,54
	8	7,74	0,22	7,52	2,28
	8,30	7,00	0,23	6,77	2,05
	9	6,38	0,24	6,14	1,86
	9,30	5,83	0,25	5,58	1,69
	10	5,31	0,26	5,05	1,53
	10,30	4,86	0,27	4,59	1,39
	11	4,44	0,28	4,16	1,26
	11,30	4,05	0,29	3,76	1,14
	12	3,70	0,30	3,40	1,03
	12,30	3,37	0,31	3,07	0,93
	13	3,13	0,32	2,81	0,85
	13,30	2,87	0,33	2,54	0,77
	14	2,62	0,34	2,28	0,69
	14,30	2,40	0,35	2,05	0,62
	15	2,21	0,36	1,85	0,56
	15,30	2,02	0,37	1,65	0,50
	16	1,83	0,38	1,45	0,44
	16,30	1,68	0,39	1,29	0,39
	17	1,52	0,40	1,12	0,34
	17,30	1,37	0,41	0,96	0,29
	18	1,21	0,42	0,79	0,24
	18,30	1,09	0,43	0,66	0,20
	19	1,00	0,44	0,56	0,17
	19,30	0,91	0,45	0,46	0,14
	20	0,82	0,46	0,36	0,11
	20,30	0,73	0,47	0,26	0,08
	21	0,65	0,48	0,17	0,05
	21,30	0,56	0,49	0,07	0,02
	22	0,50	0,50	0	0
	22,30	0,47	0,47		
	23	0,45	0,45		
	23,30	0,43	0,43		
	24	0,40	0,40		
			Σ	110,58	33,50

11. XI 1979.

Iz prednjih vrijednosti proizilazi da je visina efektivne kiše:

$$P_e = \frac{W_d}{F_{sl}} = \frac{199044}{60 \cdot 10^6} \approx 0,0033 \text{ m} = 3,3 \text{ mm} = 3,3 \text{ l/m}^2$$

Koeficijent direktnog oticanja je:

$$\eta_d = \frac{W_d}{W_b} = \frac{P_e \cdot F_{sl}}{P_b \cdot F_{sl}} = \frac{P_e}{P_b} = \frac{3,3}{9,8} = 0,336$$

gdje je W_b zapremina ukupno pale kiše.

Jedan od načina da se odredi hijetogram efektivne kiše je da se pretpostavi da su gubici na infiltraciju konstantni u vremenu, pod uslovom da je intenzitet bruto padavina, i_b , veći od kapaciteta infiltracije f , tj. $i_b \geq f$. U tom slučaju visina efektivne kiše dobije se probanjem, pri čemu mora biti zadovoljen uslov

$$\sum_{j=1}^n i_{ej} \Delta t = \sum_{j=1}^n i_{ej} \cdot 1 = 3,3 \text{ mm} = 3,3 \text{ l/m}^2$$

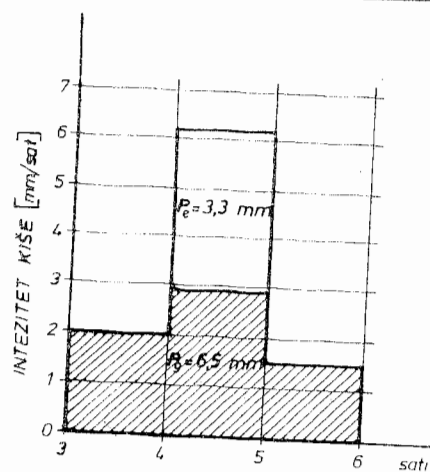
gdje je broj blokova kiše, u ovom primjeru $n = 3$, a i_{ej} su satni intenziteti.

Treba uočiti da je raspored padavina u vremenu, za dati primjer takav da kiša iz prvog sata ne uzrokuje direktno oticanje, dakle $i_b < f$. Nadalje, obzirom da je $P_e = 3,3 \text{ mm}$ iz slike 15.3. proizilazi da su samo padavine iz drugog sata učestvovalе u formiranju direktnog oticanja. Pod usvojenim pretpostavkama, padavine iz trećeg sata također nisu učestvovalе u formiranju direktnog oticanja ($i_b < f$).

Vrijednosti efektivnih padavina po pojedinim satima date su u tabeli 15.3, odakle se vidi da je trajanje efektivne kiše iznosilo 1 sat.

Tabela 15.3.

Vrijeme pojave		Bruto kiša ΣP_b [mm]	i_b [mm/sat]	i_e [mm/sat]	ΣP_e [mm]
Datum	Sat				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
11. XI 1979.	3	0,0			0,0
	4	2,0	2,0	0,0	0,0
	5	8,2	6,2	3,3	3,3
	6	9,8	1,6	0,0	3,3
		Σ	9,8	3,3	



Slika 15.3.

3. U tački 2 dobiveno je da je trajanje efektivne kiše 1 sat. Ordinate jednočasovnog jediničnog hidrograma, dakle $u(1,t)$, od izolovane efektivne kiše takodje trajanja 1 sat, izračunavaju se tako što se ordinate hidrograma direktnog oticanja podjele sa P_e :

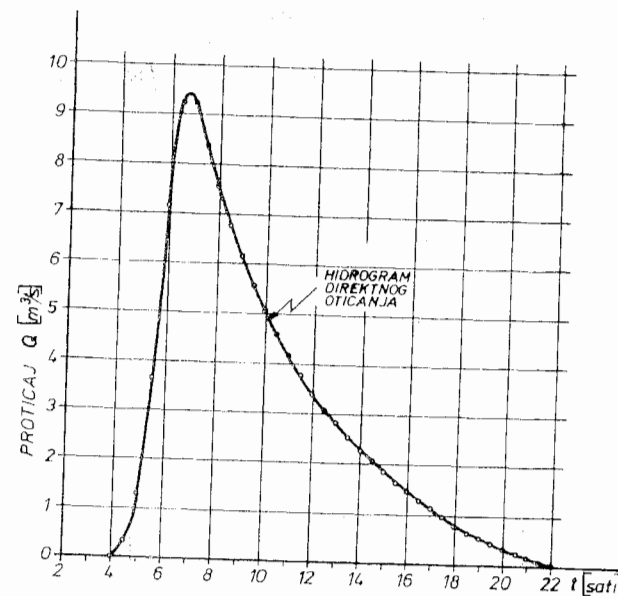
$$u(1,t) = \frac{Q_d(t)}{P_e}$$

Proračun ordinata jednočasovnog jediničnog hidrograma dat je u tabeli 15.2. kolona (6), koji je nacrtan na slici 15.5.

Za kontrolu ordinata jediničnog hidrograma mora biti zadovoljena relacija:

$$W_o = \Sigma u(1,t) \times 1800 = F_{sl.} \times 1 \text{ mm}$$

$$33,50 \times 1800 \approx 60 \times 10^3 \text{ m}^3/\text{mm}$$



Slika 15.4.

4. Ordinate jediničnog hidrograma za kišu trajanja $T_1 < T$ ($T_1 = 0,5$ časova, $T = 1$ čas) određuju se pomoću S-krive. S-kriva je hidrogram direktnog oticanja od ravnomjerne kiše beskonačnog trajanja čiji je efektivni intenzitet $i_e = 1/T$ (dakle isti intenzitet koji se odnosi na prethodno određeni jedinični hidrogram i koji je iznosio 1 mm/čas). Ordinate S-krive odrede se uzastopnim sabiranjem ordinata jediničnog hidrograma, tj.

$$S(T,t) = S(T,t-T) + u(T,t) = \sum_{\tau=0}^t u(T,\tau)$$

Za razmatrani primjer ordinate $S(T,t)$ su sračunate u tabeli 15.4. kolona 4 i nacrtane na slici 15.5.

Napomena: U praksi se ponekad, ukoliko je $T \neq 1$, $S(T, t)$ svodi na vremensku bazu $T = 1$. Ovo se čini na slijedeći način

$$S(t) = S(1, t) = T \cdot S(T, t)$$

Ordinate T_1 časovnog jediničnog hidrograma se dobiju tako da se od ordinata $S(t)$ oduzmu $S(t - T_1)$ uz odgovarajuću korekciju intenziteta padavina. Naime, razlika $S(t) - S(t - T_1)$ predstavlja ordinate hidrograma direktnog oticanja od kiše koja je trajala T_1 a imala je intenzitet 1. Da bi ovaj hidrogram predstavljao T_1 -časovni jedinični hidrogram, tj. bio hidrogram direktnog oticanja od kiše trajanja T_1 i intenziteta $1/T_1$, to ovu razliku treba podijeliti sa T_1 pa je konačno

$$u(T_1, t) = \frac{1}{T_1} [S(t) - S(t - T_1)] = \frac{T}{T_1} [S(T, t) - S(T, t - T_1)]$$

Ove ordinate su sračunate u tabeli 15.5, a prikaz jediničnih hidrograma $u(0,5, t)$ i $u(2, t)$ nalazi se skupa sa $u(1, t)$ na slici 15.5.

5. Kod određivanja maksimalnih proticaja od kiše datog trajanja (za poznati jedinični hidrogram), uobičajena je pretpostavka da protok ima isti povratni period kao i padavine.

Ordinate dvočasovnog jediničnog hidrograma, pored određivanja pomoću S-krive, mogu se, u ovom primjeru, odrediti i metodom superpozicije. Ova metoda se sastoji u sabiranju $n \cdot T$ ordinata T časovnog jediničnog hidrograma, od kojih je svaki hidrogram pomjeren za T -časova udesno, uz odgovarajuću korekciju intenziteta padavina. Dakle

$$u(nT, t) = \frac{1}{n} \sum_{K=1}^n u[T, t - (K-1)T],$$

što za razmatrani primjer daje

$$u(2, t) = \frac{1}{2} [u(1, t) + u(1, t-1)]$$

Proračun $u(2, t)$ je proveden u tabeli 15.6, odakle se vidi da su ordinate iste kao i u proračunu preko S-krive (Tab. 15.5.-kol.7)

Za zadane parametre uzorka padavina:

$$\begin{aligned} P_{br} &= 34 \text{ mm} \\ S &= 10.6 \text{ mm} \\ C_s &= 1.28 \end{aligned}$$

i uz upotrebu Pearson-III raspodjele dvosatne padavine vjerovatnoće $\Phi(P) = P[\max P_{br} \geq P] = 0,01 = 1\%$ (povratni period 100 god.).

$$P_{100} = P_{br} + z(\Phi, C_s) \cdot S = 34 + 3.20 \cdot 10.6 \cong 68 \text{ mm}$$

$$z(0.01, 1.28) = 3.2 \text{ (vidi tabelu priloga 4-a).}$$

$$P_e = \gamma \cdot P_{br} = 0.60 \cdot 68 \cong 41 \text{ mm}$$

Ordinate hidrograma direktnog oticanja od dvočasovne kiše sračunaju se prema obrascu

$$Q_d(t) = u(2, t) \cdot P_e$$

Ove vrijednosti su sračunate u tabeli 15.6 - kolona 6. Maksimalna vrijednost se javlja u 7.30 časova (odnosno 3.5 sati nakon početka padavina) i iznosi $\max Q \cong 109 \text{ m}^3/\text{s}$.

Tabela 15.4.

Proračun S-kurve na osnovu poznatog jediničnog hidrograma $u(T,t) = u(1,t)$

Vrijeme t [sati]	Red.broj ordinate i	$u(1,t)$ [m ³ /s/mm]	$S(1,t)=S(1,t-T)+u(1,t)$ [m ³ /s/mm]
1	2	3	4
4	0	0	0
4,30	1	0,10	0,10
5	2	0,39	0,39
5,30	3	1,10	1,20
6	4	2,16	2,55
6,30	5	2,80	4,00
7	6	2,79	5,34
7,30	7	2,54	6,54
8	8	2,28	7,62
8,30	9	2,05	8,59
9	10	1,86	9,48
9,30	11	1,69	10,28
10	12	1,53	11,01
10,30	13	1,39	11,67
11	14	1,26	12,27
11,30	15	1,14	12,81
12	16	1,03	13,30
12,30	17	0,93	13,74
13	18	0,85	14,15
13,30	19	0,77	14,51
14	20	0,69	14,84
14,30	21	0,62	15,13
15	22	0,56	15,40
15,30	23	0,50	15,63
16	24	0,44	15,84
16,30	25	0,39	16,02
17	26	0,34	16,18
17,30	27	0,29	16,31
18	28	0,24	16,42
18,30	29	0,20	16,51
19	30	0,17	16,59
19,30	31	0,14	16,65
20	32	0,11	16,70
20,30	33	0,08	16,73
21	34	0,05	16,75
21,30	35	0,02	16,75
22	36	0	16,75

Tabela 15.5.

Proračun 30-min i 2-satnog jediničnog hidrograma na osnovu S-kurve $S(1,t)$

Vrijeme t [sati]	i	$S(1,t)$ [m ³ /s/mm]	$S(1,t-0.5)$	$U(10.5,t) = \frac{S(1,t)-S(1,t-0.5)}{0.5}$	$S(1,t-2)$	$U(2,t) = \frac{S(1,t)-S(1,t-2)}{2}$
1	2	3	4	5	6	7
4	0	0	0	0	0	0
4,30	1	0,10	0	0,20		0,05
5	2	0,39	0,10	0,58		0,19
5,30	3	1,20	0,39	1,62		0,60
6	4	2,55	1,20	2,70	0	1,27
6,30	5	4,00	2,55	2,90	0,10	1,95
7	6	5,34	4,00	2,68	0,39	2,47
7,30	7	6,54	5,34	2,40	1,20	2,67
8	8	7,62	6,54	2,16	2,55	2,53
8,30	9	8,59	7,62	1,94	4,00	2,29
9	10	9,48	8,59	1,78	5,34	2,07
9,30	11	10,28	9,48	1,60	6,54	1,87
10	12	11,01	10,28	1,46	7,62	1,69
10,30	13	11,67	11,01	1,32	8,59	1,54
11	14	12,27	11,67	1,20	9,48	1,39
11,30	15	12,81	12,27	1,08	10,28	1,26
12	16	13,30	12,81	0,98	11,01	1,14
12,30	17	13,74	13,30	0,88	11,67	1,03
13	18	14,15	13,74	0,82	12,27	0,94
13,30	19	14,51	14,15	0,72	12,81	0,85
14	20	14,84	14,51	0,66	13,30	0,77
14,30	21	15,13	14,84	0,58	13,74	0,69
15	22	15,40	15,13	0,54	14,15	0,62
15,30	23	15,63	15,40	0,46	14,51	0,56
16	24	15,84	15,63	0,42	14,84	0,50
16,30	25	16,02	15,84	0,36	15,13	0,44
17	26	16,18	16,02	0,32	15,40	0,39
17,30	27	16,31	16,18	0,26	15,63	0,34
18	28	16,42	16,31	0,22	15,84	0,29
18,30	29	16,51	16,42	0,18	16,02	0,24
19	30	16,59	16,51	0,16	16,18	0,20
19,30	31	16,65	16,59	0,12	16,31	0,17
20	32	16,70	16,65	0,10	16,42	0,14
20,30	33	16,73	16,70	0,06	16,51	0,11
21	34	16,75	16,73	0,04	16,59	0,08
21,30	35	16,75	16,75	0	16,65	0,05
22	36	16,75	16,75		16,70	0,03
22,30	37	16,75	16,75		16,73	0,01
23	38	16,75	16,75		16,75	0
23,30	39	16,75	16,75		16,75	0

Tabela 15.6.

Proračun 2-satnog jediničnog hidrograma na osnovu poznatog $u(1,t)$, metodom superpozicije					$Q_d(t) -$ $U(2,t) \cdot P_e$
Vrijeme t [sat]	i	$U(1,t)$ [m ³ /s/cm]	$U(1,t-1)$	$\frac{U(2,t) - U(1,t) \cdot U(1,t-1)}{2}$	[m ³ /s]
1	2	3	4	5	6
4	0	0		0	0
4,30	1	0,10		0,05	2,05
5	2	0,39	0	0,19	7,80
5,30	3	1,10	0,10	0,60	24,60
6	4	2,16	0,39	1,27	52,07
6,30	5	2,80	1,10	1,95	79,95
7	6	2,79	2,16	2,47	101,27
7,30	7	2,54	2,80	2,67	109,47
8	8	2,28	2,79	2,53	103,73
8,30	9	2,05	2,54	2,29	93,90
9	10	1,86	2,28	2,07	84,87
9,30	11	1,69	2,05	1,87	76,67
10	12	1,53	1,86	1,69	69,29
10,30	13	1,39	1,69	1,54	63,14
11	14	1,26	1,53	1,39	56,99
11,30	15	1,14	1,39	1,26	51,66
12	16	1,03	1,26	1,14	46,47
12,30	17	0,93	1,14	1,03	42,23
13	18	0,85	1,03	0,94	38,54
13,30	19	0,77	0,93	0,85	34,85
14	20	0,69	0,85	0,77	31,57
14,30	21	0,62	0,77	0,69	28,29
15	22	0,56	0,69	0,62	25,42
15,30	23	0,50	0,62	0,56	22,96
16	24	0,44	0,56	0,50	20,50
16,30	25	0,39	0,50	0,44	18,04
17	26	0,34	0,44	0,39	15,99
17,30	27	0,29	0,39	0,34	13,94
18	28	0,24	0,34	0,29	11,89
18,30	29	0,20	0,29	0,24	9,84
19	30	0,17	0,24	0,20	8,20
19,30	31	0,14	0,20	0,17	6,97
20	32	0,11	0,17	0,14	5,74
20,30	33	0,08	0,14	0,11	4,51
21	34	0,05	0,11	0,08	3,28
21,30	35	0,02	0,08	0,05	2,05
22	36	0	0,05	0,03	1,23
22,30	37		0,02	0,01	0,41
23	38		0	0	0

Z A D A T A K 16

Na sliv rijeke Ričine, koji do VS Tribistovo zahvata površinu od $F = 21 \text{ km}^2$, pala je dana 28.09.1981. godine jaka kiša čiji su intenziteti dati u donjoj tabeli.

Tabela 16.1.

Vrijeme		ΣP_{br} [l/m ²]	P_{br} [l/m ²]	I_{br} [l/m ² /h]
Dan	Sat			
28.09. 1981.	14 ⁰⁰	0	0	0
	14 ³⁰	0	0	0
	15 ⁰⁰	12	12	24
	15 ³⁰	63	51	102
	16 ⁰⁰	102	39	78
	16 ³⁰	130	28	56
			130	

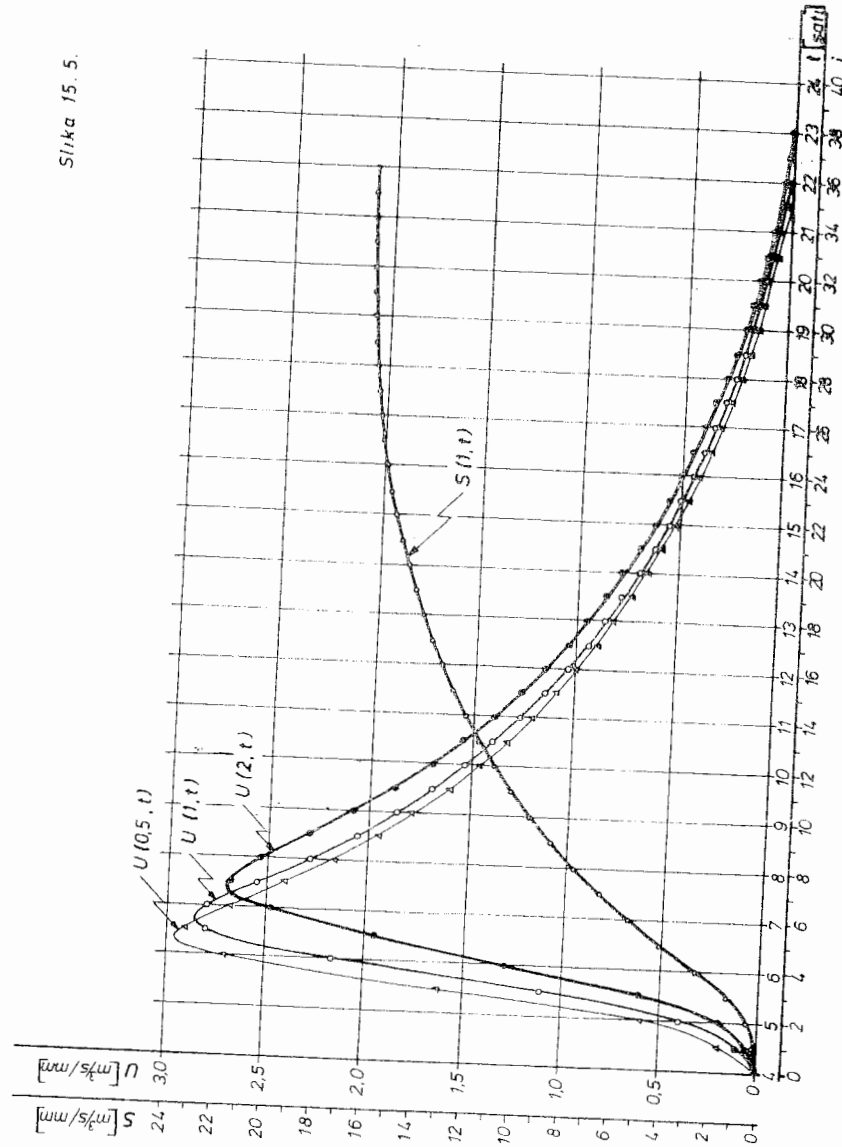
Ove padavine su izazvale vodni val čije su ordinate date u tabeli br. 16.2. a koji je grafički prikazan u dijagramu (Sl.16.1) odakle je očigledno da je direktno oticanje otpočelo dana 28.09.1981. u 15⁰⁰ časova. Odgovarajućim analizama je utvrđeno da je direktno oticanje prestalo 29.09.1981. u 02⁰⁰ časova.

Razdvajanje baznog i direktnog oticanja je izvršeno pod pretpostavkom da se ono linearno povećava od 0,90 m³/s do 3,10 m³/s, koliko iznose proticaji u 15⁰⁰ časova (28.09.) i u 02⁰⁰ časova (29.09.).

Neposredno uzvodno od profila vodomjerne stanice Tribistovo predviđena je izgradnja jedne male akumulacije, čije bitne karakteristike su slijedeće:

- Kota krune preliva $H_0 = 912,00 \text{ m n.m.}$, kojoj odgovara zapremina akumulacionog prostora $V_0 = 12,3 \cdot 10^6 \text{ m}^3$
- Kota maksimalnog nivoa vode $H_{max} = 915 \text{ m n.m.}$, pri čemu je zapremina vode u akumulaciji $V_{max} = 15,0 \cdot 10^6 \text{ m}^3$
- Promjena zapremine između H_0 i H_{max} može se smatrati da je linearna

Slika 15.5.



- Širina preliva $b_p = 15$ m
- Koefficijnt preliivanja $m = 0,45$

Potrebno je:

1. Na bazi zadatog hidrograma oticanja i ostalih uslova odrediti 30 minutni (polučasovni) jedinični hidrogram $u(T, t) = u(0,5, t)$
2. Odrediti približne vrijednosti maksimalnog preliivanja iz akumulacije kao i maksimalni nivo koji bi se pojavio u njoj pri nailasku registrovanog vodnog vala. Nivo vode u akumulaciji na početku vodnog vala bio je na koti $H_p = H_o = 912,00$ m n.m. Proračun provesti pod pretpostavkom da se ulazni i izlazni hidrogrami mogu aproksimirati trouglom.

Tabela 16.2.

Vrijeme		j	Q [m ³ /s]	Q_b [m ³ /s]	Q_d [m ³ /s]
Dan	Sat				
1	2	3	4	5	6
28.09. 1981.	13		0,90	0,90	0
	13,30		0,90	0,90	0
	14		0,90	0,90	0
	14,30		0,90	0,90	0
	15		0,90	0,90	0
	15,30	1	5,68	1,00	4,68
	16	2	18,1	1,10	17,0
	16,30	3	47,1	1,20	45,9
	17	4	66,7	1,30	65,4
	17,30	5	72,2	1,40	70,8
	18	6	62,5	1,50	61,0
	18,30	7	50,7	1,60	49,1
	19	8	40,8	1,70	39,1
	19,30	9	33,2	1,80	31,4
	20	10	27,5	1,90	25,6
	20,30	11	22,9	2,00	20,9
	21	12	19,3	2,10	17,2
	21,30	13	16,2	2,20	14,0
22	14	13,5	2,30	11,2	
22,30	15	11,22	2,40	8,82	
23	16	9,18	2,50	6,68	
23,30	17	7,36	2,60	4,76	
24	18	5,82	2,70	3,12	
29.09. 1981.	0,30	19	4,58	2,80	1,78
	1	20	3,46	2,90	0,56
	1,30	21	3,20	3,00	0,20
	2	22	3,10	3,10	0
	2,30	23	3,05	3,05	0
Σ					499,20

RJEŠENJE:

1. Zapremina onog dijela vodnog vala koji predstavlja direktno oticanje iznosi

$$W_o = \sum_{j=1}^l Q_{dj} \Delta t = 499,20 \times 1800 = 898.560 \text{ m}^3$$

Prosječni sloj efektivne kiše koji je sa sliva otekao u formi direktnog oticanja je

$$\Sigma P_e = \frac{W_o}{F} = \frac{898.560}{21.000.000} = 0,0428 \text{ m} = 42,8 \text{ mm} \sim 43 \text{ mm} = 43 \text{ l/m}^2$$

Imajući u vidu raspored padavina i vrijeme početka direktnog oticanja, može se zaključiti da padavine iz prvog polučasovnog intervala (14³⁰-15⁰⁰ časova) nisu proizvele nikakvo direktno oticanje. Uz pretpostavku da su gubici u naredna tri polučasovna intervala (15⁰⁰-16³⁰ časova) bili konstantni, tj.

$P_g = C$ proizilazi

$$(P_2 - C) + (P_3 - C) + (P_4 - C) = \Sigma P_e$$

$$(51 - C) + (39 - C) + (28 - C) = 43 \text{ l/m}^2$$

$$P_g = C = \frac{(51+39+28) - 43}{3} = \frac{118-43}{3} = 25 \text{ l/m}^2/30 \text{ min.}$$

Efektivne padavine, po razmatranim polučasovnim intervalima

$P_e = P_{br} - P_g$, date su u donjoj tabeli

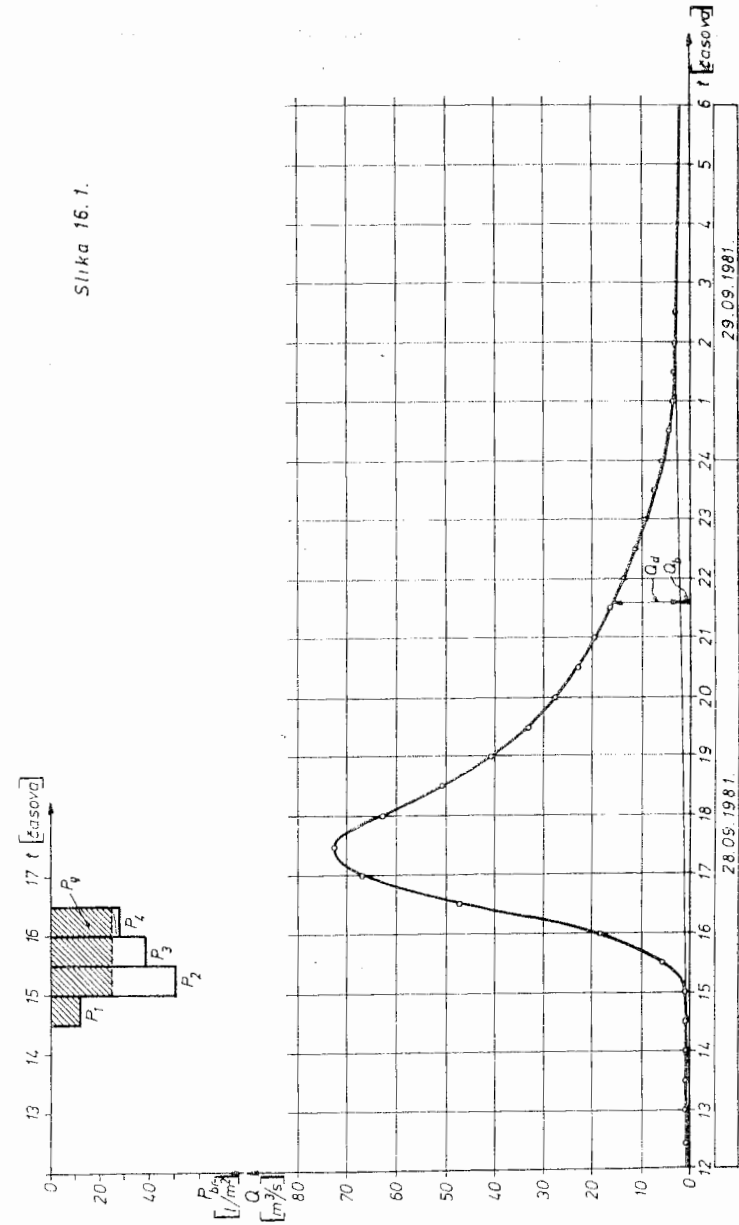
Tabela 16.3.

Vrijeme		P_{br} [l/m ²]	P_g [l/m ²]	P_e [l/m ²]
Dan	Sat			
28.09. 1981.	14 ³⁰ -15 ⁰⁰	12	12	0
	15 ⁰⁰ -15 ³⁰	51	25	26
	15 ³⁰ -16 ⁰⁰	39	25	14
	16 ⁰⁰ -16 ³⁰	28	25	3
Σ		130	87	43

Koeficijent direktnog oticanja iznosi

$$\eta_d = \frac{P_e}{P_{br}} = \frac{43}{130} = 0,33$$

Slika 16.1.



Teorija jediničnog hidrograma bazirana je na pretpostavci da se riječni sliv ponaša kao linearni sistem. Takav sistem se, po teoriji linearnih sistema, može predstaviti slijedećom jednačinom:

$$\underline{P} \cdot \underline{U} = \underline{Q} \quad (1)$$

tj. u razvijenom obliku

k	i	1	2	3	4	...	$m-3$	$m-2$	$m-1$	m		u_1	u_2	u_3	u_4	...	u_{m-3}	u_{m-2}	u_{m-1}	u_m		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	...	Q_{l-3}	Q_{l-2}	Q_{l-1}	Q_l		
1		P_1	0	0	0	...	0	0	0	0		u_1										Q_1										
2		P_2	P_1	0	0	...	0	0	0	0		u_2										Q_2										
3		P_3	P_2	P_1	0	...	0	0	0	0		u_3										Q_3										
4		0	P_3	P_2	P_1	...	0	0	0	0		u_4										Q_4										
...											
$l-3$		0	0	0	0	...	P_3	P_2	P_1	0		u_{m-3}										Q_{l-3}										
$l-2$		0	0	0	0	...	0	P_3	P_2	P_1		u_{m-2}										Q_{l-2}										
$l-1$		0	0	0	0	...	0	0	P_3	P_2		u_{m-1}										Q_{l-1}										
l		0	0	0	0	...	0	0	0	P_3		u_m										Q_l										

gdje je $l = m+n-1$
 l - broj ordinata direktnog oticanja većih od nule ($Q > 0$)
 m - broj ordinata jediničnog hidrograma većih od nule ($u > 0$)
 n - broj blokova kiše

Za razmatrani primjer $l=21, m=19, a n=3$.

Iz prednjeg sistema jednačina proizilazi da se vrijednost proticaja Q_k može odrediti kao suma

$$Q_k = \sum_{j=1}^n P_j u_{k-j+1}, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (2)$$

odakle se za nekoliko karakterističnih vremenskih trenutaka dobije:

$$\begin{aligned} Q_1 &= P_1 u_1 \\ Q_2 &= P_1 u_2 + P_2 u_1 \\ Q_3 &= P_1 u_3 + P_2 u_2 + P_3 u_1 \\ Q_4 &= P_1 u_4 + P_2 u_3 + P_3 u_2 \\ &\dots \\ Q_{l-3} &= P_1 u_{m-1} + P_2 u_{m-2} + P_3 u_{m-3} \\ Q_{l-2} &= P_1 u_m + P_2 u_{m-1} + P_3 u_{m-2} \\ Q_{l-1} &= P_2 u_m + P_3 u_{m-1} \\ Q_l &= P_3 u_m \end{aligned}$$

Zadatkom je zahtjevano da se odrede ordinate polučasovnog ($T = 0,5$ čas) jediničnog hidrograma, $u_k = u(T, t)$. Ovaj zadatak se može riješiti na nekoliko načina.

a) Približni način

Iz prethodnog sistema jednačina slijedi

$$u_1 = \frac{Q_1}{P_1} = \frac{4,68}{2,6} = 1,80$$

$$u_2 = (Q_2 - P_2 u_1) \cdot \frac{1}{P_1} = (17-1,4 \cdot 1,80) \frac{1}{2,6} = 5,57$$

$$u_3 = (Q_3 - P_2 u_2 - P_3 u_1) \cdot \frac{1}{P_1} = (45,9 - 1,4 \cdot 5,57 - 0,3 \cdot 1,8) \frac{1}{2,6} = 14,45$$

Generalno uzevši može se napisati

$$u_k = (Q_k - \sum_{j=2}^n P_j u_{k-j+1}) \cdot \frac{1}{P_1}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

Proračun ordinata jediničnog hidrograma po ovom postupku prikazan je u tabeli 16.4. kolona 5, a grafička predstava je data na slici 16.3.

Za kontrolu ordinata jediničnog hidrograma potrebno je da bude zadovoljen uslov da je zapremina vala izazvanog jediničnom kišom (površina ispod jediničnog hidrograma) jednaka zapremini sloja efektivne kiše visine 1 cm na površini sliva F , tj.

$$\sum_{k=1}^m u_k \cdot \Delta t = F \cdot l$$

što u razmatranom primjeru iznosi

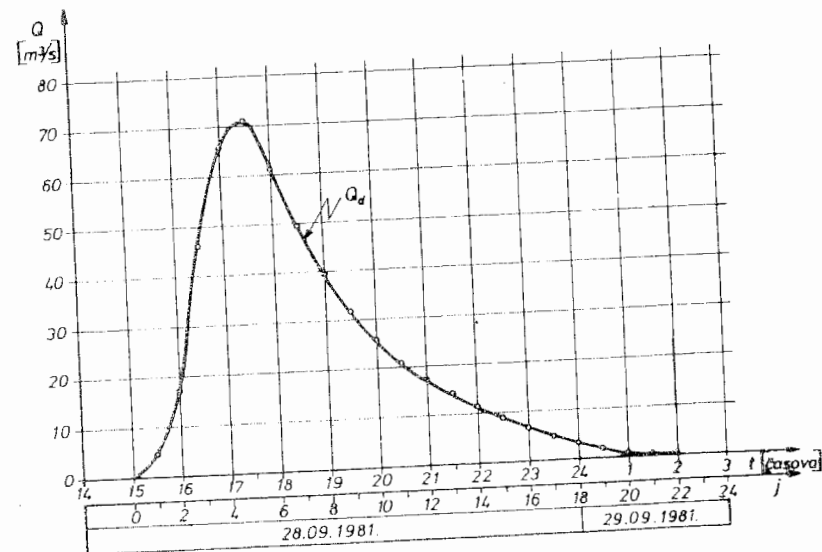
$$116,06 \cdot 1800 = 21 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-2}$$

$$208.908 \text{ m}^3/\text{cm} \cong 210.000 \text{ m}^3/\text{cm}$$

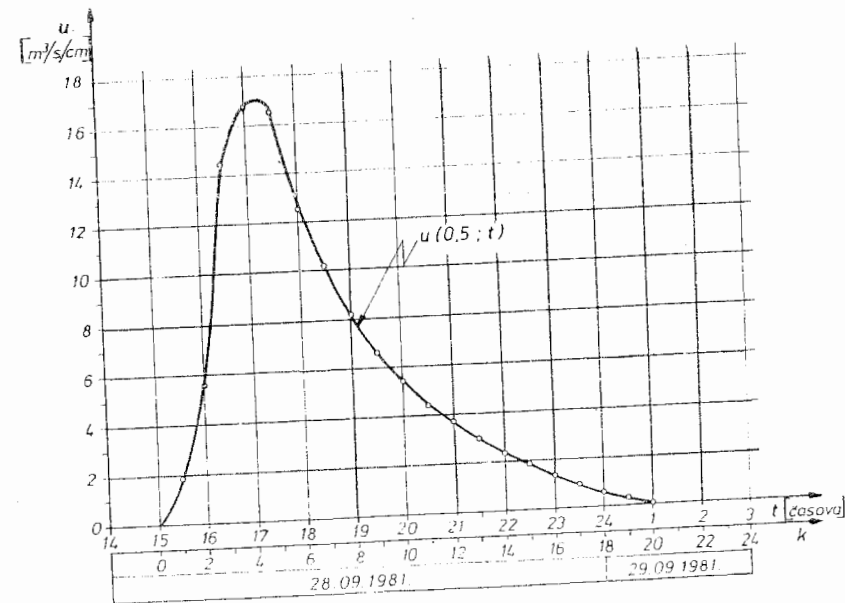
Tabela 16.4

k	Q_d	$P_2 \cdot u_{k-1}$	$P_3 \cdot u_{k-2}$	$u_k = u(0,5; t)$	
	$[\text{m}^3/\text{s}]$	$[\text{m}^3/\text{s}]$	$[\text{m}^3/\text{s}]$	$[\text{m}^3/\text{s}/\text{cm}]$	$[\text{m}^3/\text{s}/\text{cm}]$
1	2	3	4	5	6
0	0,00	-	-	-	-
1	4,68	-	-	1,80	1,80
2	17,00	2,52	-	5,57	5,57
3	45,90	7,80	0,54	14,45	14,45
4	65,40	20,23	1,67	16,73	16,73
5	70,80	23,42	4,34	16,55	16,55
6	61,00	23,18	5,02	12,62	12,62
7	49,10	17,66	4,97	10,18	10,18
8	39,10	14,25	3,79	8,10	8,10
9	31,40	11,34	3,05	6,54	6,54
10	25,60	9,16	2,43	5,39	5,39
11	20,90	7,55	1,96	4,38	4,38
12	17,20	6,13	1,62	3,63	3,63
13	14,00	5,09	1,31	2,92	2,92
14	11,20	4,09	1,09	2,31	2,31
15	8,82	3,24	0,88	1,81	1,81
16	6,68	2,53	0,70	1,33	1,33
17	4,76	1,86	0,54	0,91	0,91
18	3,12	1,27	0,40	0,56	0,56
19	1,78	0,78	0,27	0,28	0,28
20	0,56	0,39	0,17	0,00	0,00
21	0,20	0,00	0,08	-	-
22	0,00	-	-	-	-
Σ				116,06	116,06

Slika 16.2.



Slika 16.3.



- b) Prethodno opisani način predstavlja rješenje $l = m+n-1$ jednačina sa m nepoznatih. Sa matematskog stanovišta, procedura koja slijedi je ispravnija i ona se sastoji u tome da se sistem reducira na m jednačina sa m nepoznatih, pri čemu se dobije rješenje koje zadovoljava uslov

$$\sum_{k=1}^l (Q_k - \hat{Q}_k)^2 = \min \quad (4)$$

gdje je: Q_k - registrovani proticaj
 \hat{Q}_k - proticaj sračunat preko jediničnog hidrograma

Sistem jednačina (1) može se napisati na slijedeći način:

$$\underline{P} \underline{U} = \underline{Q} \quad (5)$$

$$\underline{U} = (\underline{P}^T \underline{P})^{-1} \underline{P}^T \underline{Q} \quad (6)$$

Sistem jednačina (5) sadrži m jednačina koje treba riješiti po m nepoznatih. Rješenje ovog sistema je dato jednačinom

(6). Obzirom da je m relativno veliki broj (u našem slučaju $m = 19$) to je njegovo rješavanje klasičnim postupkom veoma dugotrajno (praktično je nemoguće). Rješenje se obično dobije kompjuterskim proračunima čiji rezultati su dati u tabeli 16.4. - kolona 6. Treba uočiti da su rezultati dobijeni po ovom postupku identični sa rezultatima iz prethodno provedenog približnog proračuna, što nije uobičajeno.

2. Da bi se odredilo maksimalno prelivanje preko brane (maksimalni proticaj na izlazu, $\max Q_i$), i maksimalni nivo u akumulaciji pri nailasku vodnog vala, potrebno je prvo utvrditi karakteristike akumulacije:

$$V = V(H)$$

$$Q_i = Q_i(H)$$

Funkcija $V = V(H)$ se odredi na bazi podataka i pretpostavki datih u postavci zadatka, tj.

$$\begin{aligned} V_0 &= V(912) = 12,3 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\ V_{\max} &= V(915) = 15,0 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\ V(H) &= V_0 + K \cdot (H - H_0) = \\ &= 12,3 + \frac{V_{\max} - V_0}{H_{\max} - H_0} (H - H_0) \\ &= 12,3 + \frac{2,7}{3,0} (H - 912) = \\ &= 12,3 + 0,9 (H - 912) \end{aligned}$$

Zavisnost $V(H)$ koju predstavlja gornji izraz prikazana je na Sl. 16.5.

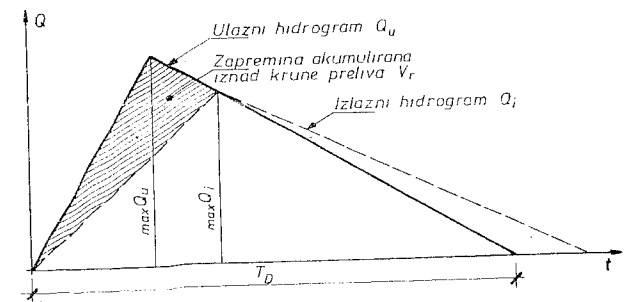
Funkcija $Q = p Q_i(H)$ slijedi iz jednačine preliva

$$\begin{aligned} p Q_i &= mb \sqrt{2g h_p^3} = 0,45 \cdot 15 \cdot 4,43 \cdot h_p^{3/2} \\ &= 29,90 h_p^{3/2} \end{aligned}$$

gdje je $h_p = H - 912$.

Zavisnost $p Q_i(H)$ takodje je prikazana na dijagramu (Sl.16.5.).

Zahtjevana metoda proračuna transformacije zasniva se na slijedećem:

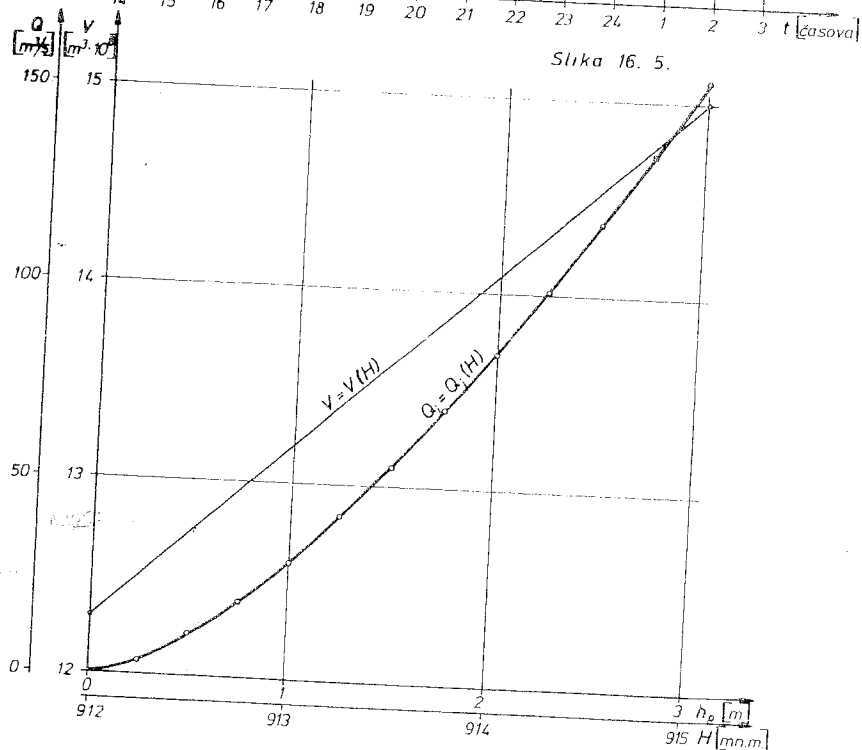
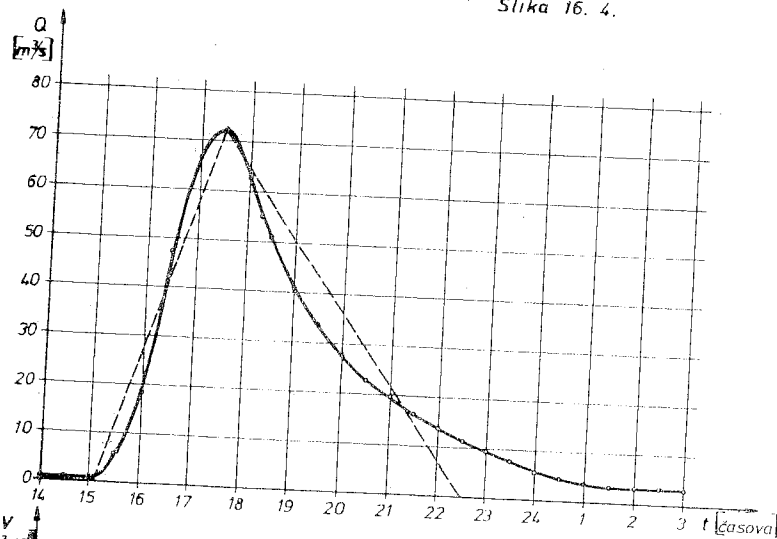


Iz prednje skice može se pokazati da je

$$\max Q_i = \max Q_u \left(1 - \frac{V_r}{V}\right)$$

Proračun po ovoj jednačini poznat je kao metoda Kočerina.

Slika 16. 4.



Zapremina hidrograma aproksimiranog trouglom (Sl.16.4) iznosi

$$V_v = \frac{\max Q \cdot T_D}{2} = \frac{72,2 \cdot 7,4 \cdot 3600}{2} \approx 962.000 \text{ m}^3$$

Rješenje postavljenog problema se dobije postepenim približavanjem kako je pokazano u nastavku.

I iteracija: pretpostavka $h_p = 0,50 \text{ m}$.

$$\text{Iz dijagrama 16.5. } V_r = 12,75 - 12,30 = 0,45 \text{ hm}^3$$

$$\max Q_i = 10,57 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$10,57 \neq 72,2 \left(1 - \frac{0,45}{0,962}\right) = 38,4 \text{ m}^3/\text{s}$$

II iteracija: pretpostavka $h_p = 1,0 \text{ m}$

$$\text{Iz dijagrama } V_r = 13,20 - 12,30 = 0,9 \text{ hm}^3$$

$$\max Q_i = 29,9 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$29,9 \neq 72,2 \left(1 - \frac{0,90}{0,962}\right) = 4,65 \text{ m}^3/\text{s}$$

III iteracija: pretpostavka $h_p = 0,70 \text{ m}$

$$\text{Iz dijagrama } V_r = 12,93 - 12,30 = 0,63 \text{ hm}^3$$

$$\max Q_i = 17,5 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$17,5 \neq 72,2 \left(1 - \frac{0,63}{0,962}\right) = 24,92 \text{ m}^3/\text{s}$$

IV iteracija: pretpostavka $h_p = 0,77 \text{ m}$

$$\text{Iz dijagrama } V_r = 12,99 - 12,30 = 0,69 \text{ hm}^3$$

$$\max Q_i = 20,0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$20,0 \approx 72,2 \left(1 - \frac{0,68}{0,962}\right) \approx 20,41 \text{ m}^3/\text{s}$$

Rješenje dobiveno IV iteracijom zadovoljava praktične potrebe i usvaja se

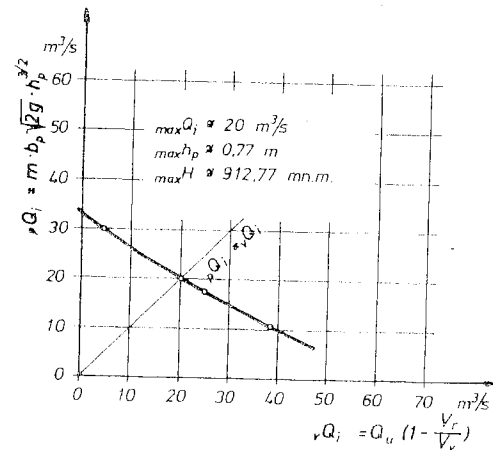
$$\max Q_i \approx 20,0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\max h_p = 0,77 \text{ m}$$

$$\max H = 912,77 \text{ m n.m.}$$

Rezultati iterativnih proračuna grafički su prikazani na slici 16.6.

Slika 16. 6.



ZADATAK BROJ 17

Na jednom vodotoku izgrađena je brana koja formira akumulaciju sa karakteristikama akumulacionog bazena datim na slici 17.1.

Iz akumulacije se uzima konstantna količina vode, koja se nakon korištenja (bez promjene kvaliteta) upušta u vodotok neposredno nizvodno od brane. Količina zahvaćene vode je zanemarljivo mala u odnosu na kapacitet evakuacionih organa (temeljni ispusti i preliv).

Brana ima dva temeljna ispusta postavljena na koti 54 m n.m. prečnika $D = 2,7$ m, čija propusna moć, Q_T , se može izraziti kao:

$$Q_T = C_T \cdot \omega \cdot \sqrt{2gh_T} \quad \text{gdje je:}$$

$C_T = 0,8$ - koeficijent protoka

$\omega = \frac{D^2 \pi}{4}$ - površina poprečnog presjeka temeljnog ispusta

h_T - dubina vode u odnosu na osovину ulaza u temeljni ispust (m)

Pored temeljnog ispusta, za evakuaciju velikih voda na brani postoji i preliv bez ustave širine $B = 75$ m sa kotom krune preliva 66 m n.m. čija propusna moć, Q_P , se može izraziti kao:

$$Q_P = C_P \cdot B \cdot \sqrt{2gh_p^3} \quad \text{gdje je:}$$

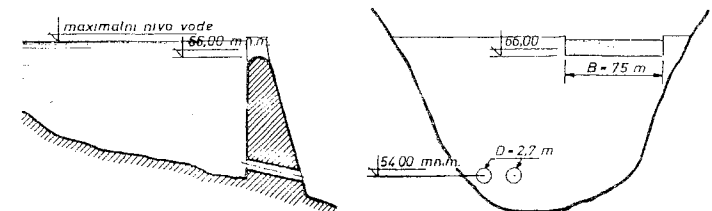
$C_P = 0,48$ - koeficijent preliivanja

$B = 75$ m - širina preliva

h_p - nivo vode iznad krune preliva (m)

Zatvarači temeljnih ispusta se po pravilu otvaraju pri koti nivoa vode u akumulaciji 63,5 m n.m.

Slika 17.1.

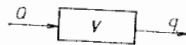


Ako se kao posljedica jake kiše na ulazu u akumulaciju oformi poplavni talas, za koji su vrijednosti protoka date u koloni 3 tabele 17.2, odrediti:

1. Ordinate poplavnog talasa na izlazu (vrijednosti izlaznih proticaja) iz akumulacije
 2. Maksimalnu kotu nivoa vode u akumulaciji pri nailasku vala
- Prednji račun provesti pod pretpostavkom da je kota nivoa vode u akumulaciji u vremenu $t = 0$, $H_0 = 63,5$ m n.m.

RJEŠENJE:

1. Akumulacioni bazen je jedan sistem, koji se može predstaviti blok dijagramom kao na donjoj skici, gdje je $Q(t)$ proticaj na ulazu u akumulaciju a $q(t)$ proticaj na izlazu iz nje. Stanje sistema, odnosno zapremina vode u akumulaciji u vremenu t označena je sa $V(t)$.



Obzirom da količina vode koja udje u akumulaciju mora ili da izadje ili da se privremeno zadrži u akumulaciji, ovdje se može primjeniti jednačina kontinuiteta:

$$Q(t) - q(t) = \frac{dV(t)}{dt} \quad (1)$$

Ako se proticaji na ulazu i izlazu iz akumulacije posmatraju u sukcesivnim vremenskim intervalima veličine Δt , gornja diferencijalna jednačina se može predstaviti u diferentnoj formi

$$\bar{Q}_j - \bar{q}_j = \frac{\Delta V_j}{\Delta t} \quad (2)$$

gdje su \bar{Q}_j i \bar{q}_j prosječni proticaji vode u intervalu $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ a ΔV_j promjena zapremine akumulacije u istom intervalu.

Dakle:

$$\bar{Q}_j = \frac{Q_j + Q_{j-1}}{2}$$

$$\bar{q}_j = \frac{q_j + q_{j-1}}{2}$$

$$\frac{\Delta V_j}{\Delta t} = \frac{V_j - V_{j-1}}{t_j - (t_{j-1} - \Delta t)} = \frac{V_j - V_{j-1}}{\Delta t}$$

Proračun transformacije ulaznog hidrograma u akumulaciji, odnosno određivanje izlaznog hidrograma vrši se na bazi jednačine (2) koja, ako se izvrši zamjena za \bar{Q}_j , \bar{q}_j i $\frac{\Delta V_j}{\Delta t}$ dobija oblik:

$$V_j + q_j \frac{\Delta t}{2} = V_{j-1} - q_{j-1} \frac{\Delta t}{2} + (Q_j + Q_{j-1}) \frac{\Delta t}{2} \quad (3)$$

Kod ovih proračuna, prethodno se moraju definirati zavisnosti

$$F_1(q) = V, \quad F_2(q) = V - q \frac{\Delta t}{2}, \quad F_3(q) = V + q \frac{\Delta t}{2}$$

Prije iznalaženja naprijed navedenih zavisnosti, treba izvršiti proračun Q_T i Q_P u funkciji nivoa vode u akumulaciji, te ove vrijednosti povezati sa veličinom zapremine akumulirane vode za dati nivo.

$$Q_T = 2 \cdot 0,8 \cdot \frac{2,7^2 \pi}{4} \cdot \sqrt{2g(H-54)} = 40,58 \sqrt{(H-54)}$$

$$Q_P = 0,48 \cdot 75 \sqrt{2g(H-66)^3} = 159,46 \cdot \sqrt{(H-66)^3}$$

Gdje je H kota nivoa vode u akumulaciji u m n.m.

Proračuni ovih zavisnosti izvršeni su u tabeli 17.1., a grafički prikaz dat je na slici 17.3.

Proračun transformacije ulaznog hidrograma izvršen je u tabeli br. 17.2, na bazi jednačine (3) i zavisnosti $F_1(q) = V$, $F_2(q) = V - q \frac{\Delta t}{2}$ i $F_3(q) = V + q \frac{\Delta t}{2}$, sa slike 17.3.

Vrijednosti u pojedinim kolonama tabele 17.2. su dobijene na slijedeći način i slijedećim redoslijedom:

Kolona (3): Zadane ordinate ulaznog hidrograma u akumulaciju
 Kolona (4): Prosječna zapremina dotoka vode u akumulaciju kroz period vremena Δt

Vrijednost q u koloni (7) za $t = 0$, dobije se na slijedeći način:

$$Q_T = 20,8 \cdot 10^{-6} \cdot 177 = 4958 \text{ l/s}$$

Tabela 17.1.

Kota nivoa vode u akumulac. H [m n.m.]	Zapremina vode u akumulac. V [hm ³]	h_T [m]	Q_T [m ³ /s]	h_p [m]	Q_p [m ³ /s]	Ukupni izlazni proticaj $q_j = Q_T + Q_p$ [m ³ /s]	$V_j - q_j \frac{\Delta t}{2}$ [hm ³]	$V_j + q_j \frac{\Delta t}{2}$ [hm ³]
1	2	3	4	5	6	7	8	9
58	21,78	4,0	81,15					
59	26,07	5,0	90,73			81,15	20,90	22,66
60	30,41	6,0	99,39			90,73	25,09	27,05
61	34,80	7,0	107,36			99,39	29,34	31,48
62	39,23	8,0	114,77			107,36	33,64	35,96
63	43,72	9,0	121,73			114,77	37,99	40,47
64	48,27	10,0	128,32			121,73	42,41	45,03
65	52,87	11,0	134,58			128,32	46,88	49,66
66	57,56	12,0	140,56			134,58	51,42	54,32
66,1	58,04	12,1	141,15	0,1	5,04	140,56	56,04	59,08
66,2	58,51	12,2	141,73	0,2	14,26	146,19	56,46	59,62
66,3	58,99	12,3	142,31	0,3	26,21	155,99	56,83	60,19
66,4	59,46	12,4	142,89	0,4	40,35	168,52	57,17	60,81
66,6	60,42	12,6	144,04	0,6	74,13	183,24	57,48	61,44
66,8	61,37	12,8	145,17	0,8	114,13	218,16	58,06	62,78
67,0	62,32	13,0	146,30	1,0	159,50	259,30	58,57	64,17
67,2	63,29	13,2	147,43	1,2	209,67	305,80	59,02	65,62
67,4	64,25	13,4	148,54	1,4	264,21	357,09	59,43	67,15
66,6	65,22	13,6	149,64	1,6	322,80	412,75	59,79	68,71
67,8	66,18	13,8	150,74	1,8	385,18	472,45	60,12	70,32
68,0	67,15	14,0	151,83	2,0	451,13	535,92	60,39	71,97
						602,96	60,64	73,66

* $\Delta t = 6$ sati = 21600 sec., iz razloga što su ordinate ulaznog hidrograma date na vremenskom razmaku 6 sati.

- Za zadanu kotu nivoa vode u akumulaciji $H = 63,5$ m n.m. u trenutku $t = 0$ (u trenutku kada se otvore zatvarači temeljnog ispusta), sa zavisnosti kote nivoa vode u akumulaciji (H) i aktivne zapremine (V), (Slika 17.2.) dobije se vrijednost $V = 46$ hm³.
- Za $V = 46$ hm³ sa zavisnosti $F_1(q) = V$, (Slika 17.3.) dobije se vrijednost $Q = 125$ m³/s, koliko ističe iz akumulacije kroz temeljne ispuste prije nailaska poplavnog talasa. U prvom koraku

je, dakle, u trenutku $t = 0$, q_1 poznato.

Kolona (5): Za q_1 u trenutku $t=0$ ($q_1=125$ m³/s) sa zavisnosti $F_2(q) = V - q \frac{\Delta t}{2}$ očita se vrijednost $V_2 - q_2 \frac{\Delta t}{2} = 44,50$ hm³

Kolona (6): Na osnovu jednačine (3) vrijednost $V_2 + q_2 \frac{\Delta t}{2}$ dobije se sabiranjem veličina iz kolona (4) i (5), tj.

kolona (6) = kolona (4) + kolona (5)

$$V_2 + q_2 \frac{\Delta t}{2} = 1,35 + 44,50 = 45,85 \text{ hm}^3$$

Kolona (7): Za izračunatu vrijednost $V_2 + q_2 \frac{\Delta t}{2} = 45,85$ hm³ sa zavisnosti $F_3(q) = V + q \frac{\Delta t}{2}$ očita se vrijednost $q_2 = 123$ m³/s.

Kolona (8): Za vrijednost $q_2 = 123$ m³/s sa zavisnosti $F_1(q) = V$, očita se vrijednost $V_2 = 44,5$ hm³

Kolona (9): Za vrijednost $V_2 = 44,5$ hm³ sa zavisnosti kote nivoa vode u akumulaciji (H) i aktivne zapremine (V), očita se vrijednost $H = 63,20$ m n.m. - slika 17.2.

Procedura za računanje q_j u narednim vremenima, tj. koracima, se u potpunosti ponavlja.

2. Vrijednost maksimalne kote nivoa vode u akumulaciji pri nailasku vodnog vala, dobije se nalaženjem maksimalne vrijednosti u koloni (9), a koja iznosi

$$H_{\max} = 67,60 \text{ m n.m.}$$

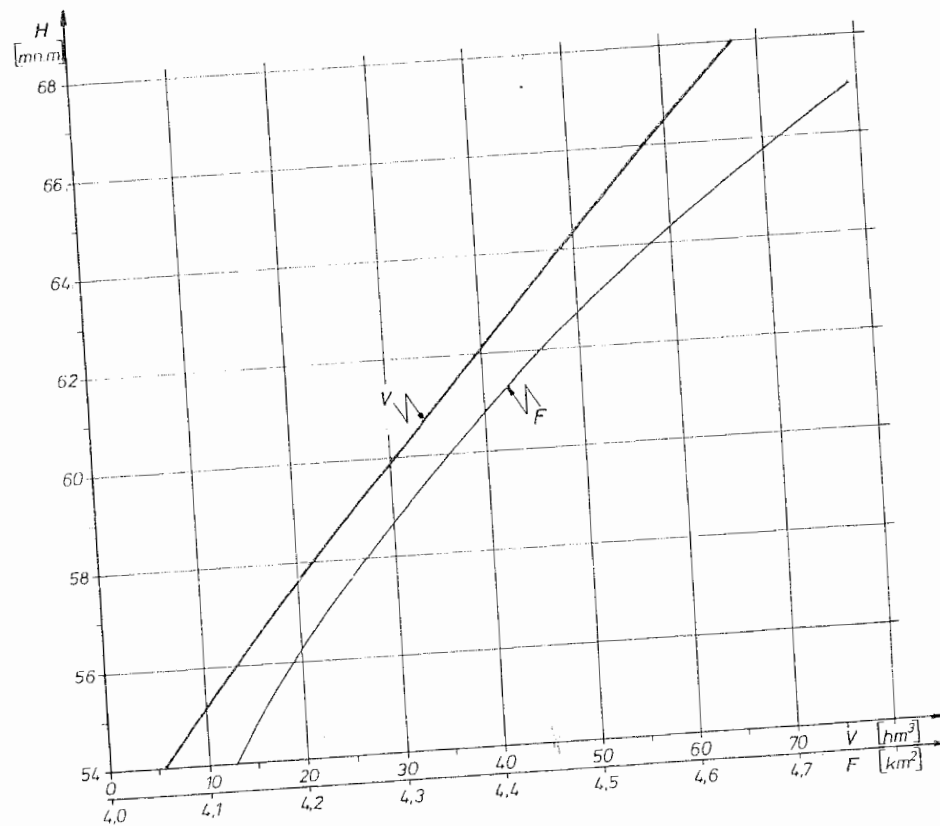
Grafički prikaz ulaznog i izlaznog hidrograma dat je na slici 17.4. Kao što se vidi zahvaljujući retenzionim osobinama akumulacije, maksimalni proticaj ulaznog hidrograma ($Q_{\max} = 520$ m³/s) je redukovan na maksimalni proticaj izlaznog hidrograma ($q_{\max} = 466$ m³/s). Jasno da zapremine ulaznog i izlaznog hidrograma moraju biti iste. Takođe treba uočiti da se maksimalni izlazni proticaj pojavio 12 sati nakon pojave maksimalne ordinate ulaznog hidrograma.

Tabela 17.2.

$Q_0 \leftarrow \begin{matrix} \text{odliva} \\ \text{odtok} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{akumulacija} \\ \text{odtok} \end{matrix}$

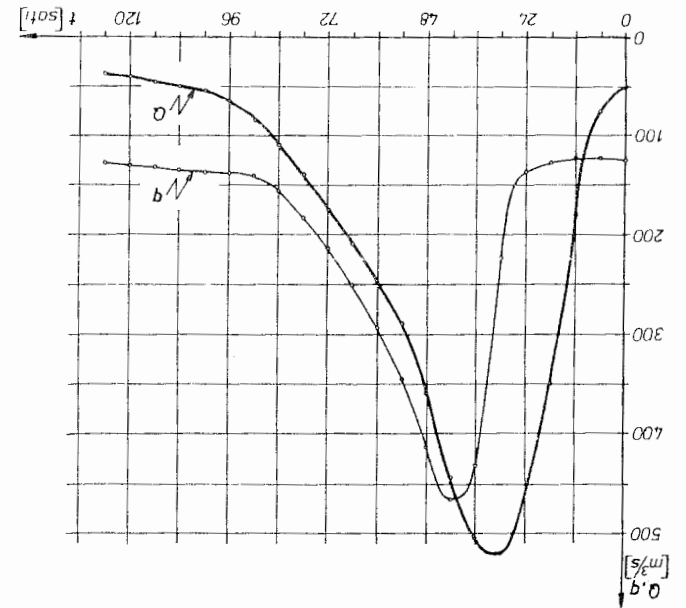
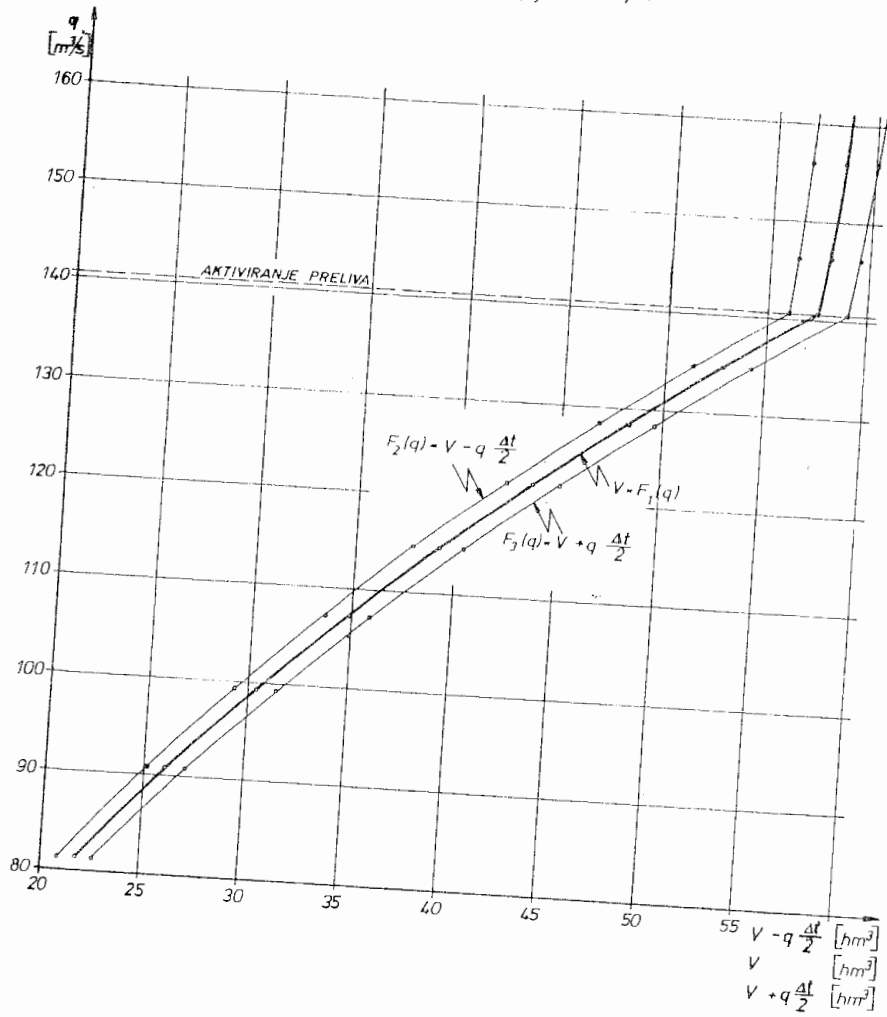
j	Vrijeme t [sati]	Ordinate ulaznog hidrogr. Q_j [m^3/s]	$Q_j + q_{j-1} \frac{\Delta t}{2}$ [hm^3]	$V_j - q_j \frac{\Delta t}{2}$ [hm^3]	$V_j + q_j \frac{\Delta t}{2}$ [hm^3]	q_j [m^3/s]	Zapremina vode u akumulac. V_j [hm^3]	Kota nivoa vode u akumulac. H_j [m n.m.]
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	50	-	-	-	125,0	46,0	63,50
2	6	75	1,35	44,50	45,85	123,0	44,5	63,20
3	12	180	2,75	43,30	46,05	123,3	44,6	63,20
4	18	350	5,72	43,40	49,12	127,5	48,0	64,00
5	24	450	6,64	46,40	55,04	135,7	53,8	65,25
6	30	520	10,48	52,50	62,98	224,0	60,6	66,60
7	36	505	11,07	58,15	69,22	432,0	64,5	67,50
8	42	445	10,26	59,90	70,16	466,0	65,1	67,60
9	48	360	8,69	60,05	68,74	414,0	64,2	67,40
10	54	290	7,02	59,80	66,82	346,0	63,1	67,15
11	60	250	5,83	59,40	65,23	294,0	62,1	66,95
12	66	210	4,97	58,95	63,92	252,0	61,2	66,75
13	72	175	4,16	58,50	62,66	215,0	60,3	66,55
14	78	140	3,40	58,00	61,40	183,0	59,5	66,40
15	84	110	2,70	57,50	60,20	156,0	58,5	66,20
16	90	85	2,11	56,80	58,91	140,5	57,5	66,00
17	96	65	1,62	56,00	57,62	139,0	56,4	65,80
18	102	55	1,30	55,00	56,30	137,5	55,2	65,50
19	108	50	1,13	53,80	54,93	135,5	53,8	65,20
20	114	45	1,03	52,30	53,33	133,5	52,0	64,85
21	120	40	0,92	50,60	51,52	130,7	50,2	64,45
22	126	38	0,84	48,80	49,64	128,0	48,2	64,00

Slika 17.2.
 ODNOS KOTE NIVOA VODE U AKUMULACIJI (H) I
 POVRŠINE VODNOG LICA (F) I ODNOS KOTE NIVOA
 VODE I AKTIVNE ZAPREMINE VODE (V)



Slika 17.3. DIJAGRAM ZAVISNOSTI

$F_1(q) = V$, $F_2(q) = V - q \frac{\Delta t}{2}$, $F_3(q) = V + q \frac{\Delta t}{2}$
 (DIO ZAVISNOSTI DO $q_j = 160 \text{ m}^3/\text{s}$)



Slika 17.4.

07.06.2004

ZADATAK 18

Na dionici vodotoka, bez pritoka, u periodu A registrovan je val velikih voda na uzvodnoj stanici (ulaz - Q) i na nizvodnoj stanici (izlaz - q). Veličine ordinata hidrograma date su u tabeli 18.1. i grafički predstavljene na slici 18.1. Iz slike je očigledno da se na razmatranoj dionici vodni val transformiše.

Potrebno je metodom Muskinguma odrediti ordinate transformisanog hidrograma (na izlazu iz posmatrane dionice) u periodu B kada je registrovan samo ulazni val. Zadatak riješiti pod pretpostavkom da su parametri određeni na bazi podataka iz perioda A, mjerodavni za bilo koji ulazni val.

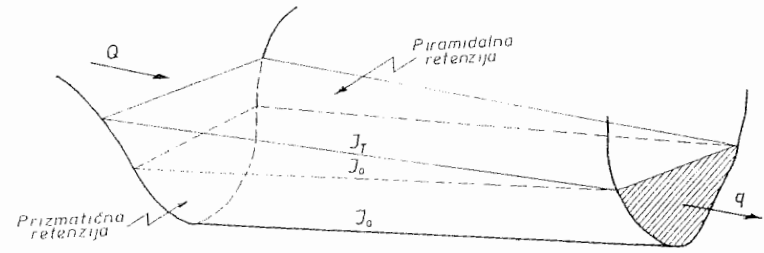
RJEŠENJE:

Kod metode Muskinguma, pretpostavka je da stanje sistema u vremenskom trenutku, t, (zapremina vode u koritu dionice vodotoka, V) je funkcija ulaznog proticaja, Q, i izlaznog proticaja, q, tj.

$$V_t = K [xQ_t + (1-x)q_t] \quad (1)$$

gdje su: x - bezdimenzionalna konstanta koja karakteriše dionicu riječnog toka i koja se određuje probanjem; K - nepoznata konstanta koja predstavlja vrijeme putovanja talasa duž razmatrane dionice.

Grafička ilustracija prednje pretpostavke izgleda kao na donjoj skici.



Slika 17.3. DIJAGRAM ZAVISNOSTI $F_1(q) = V$, $F_2(q) = V - q \frac{\Delta t}{2}$, $F_3(q) = V + q \frac{\Delta t}{2}$ (DIO ZAVISNOSTI $q > 160 \text{ m}^3/\text{s}$)

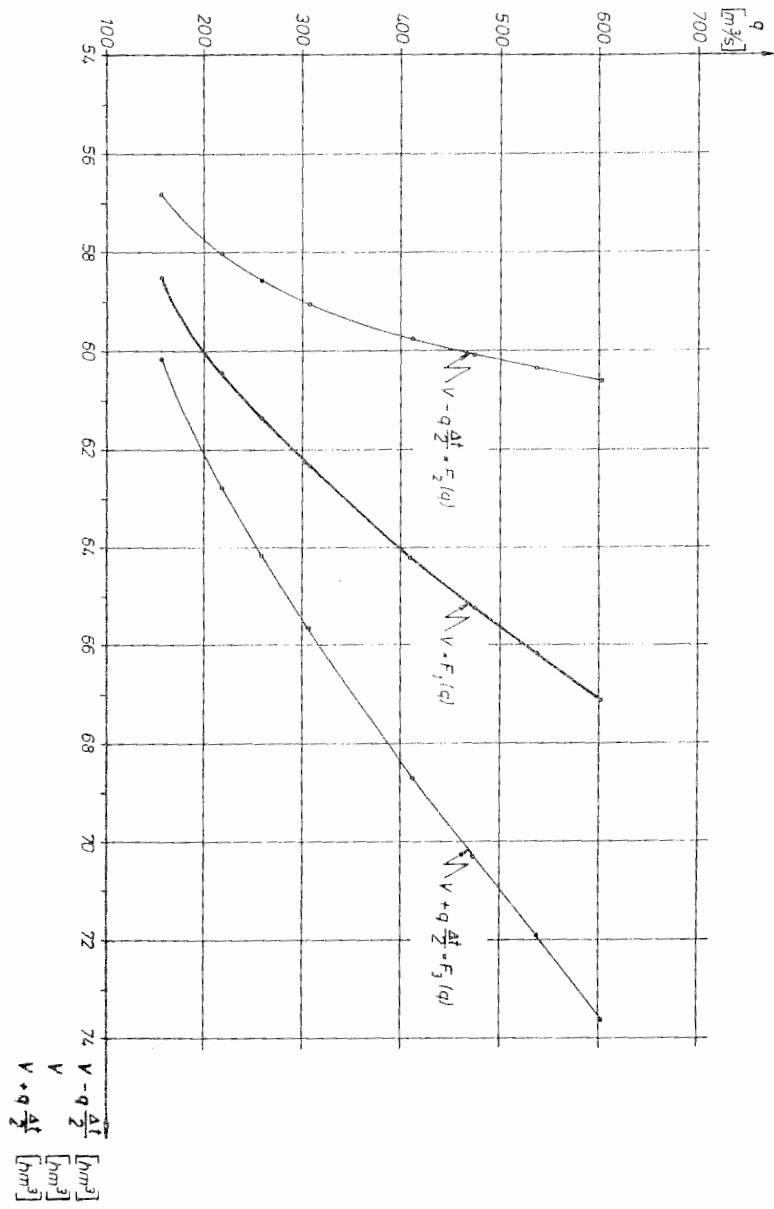


Tabela 18.1.

j	t [sati]	PERIOD A			PERIOD B	
		Osmotreni ulaz Q [m ³ /s]	Osmotreni izlaz q [m ³ /s]	Proračunati izlaz \hat{q} [m ³ /s]	Osmotreni ulaz Q [m ³ /s]	Proračunati izlaz \hat{q} [m ³ /s]
0	0	52	52	52		
1	12	52	52	52	100	100
2	24	52	52	52	100	100
3	36	82	52	52	120	102
4	48	240	65	56	370	139
5	60	500	120	85	920	301
6	72	910	230	180	1330	606
7	84	1330	380	362	1460	922
8	96	1530	625	639	1345	1131
9	108	1560	980	949	1230	1206
10	120	1490	1200	1194	1340	1229
11	132	1350	1330	1337	1930	1345
12	144	1240	1370	1384	2460	1651
13	156	1110	1360	1357	2560	1998
14	168	980	1300	1293	2460	2219
15	180	860	1200	1202	2220	2290
16	192	740	1090	1095	2000	2235
17	204	650	970	984	1800	2114
18	216	550	885	872	1640	1965
19	228	480	775	768	1460	1809
20	240	410	680	669	1300	1645
21	252	330	600	582	1140	1483
22	264	250	515	501	1000	1324
23	276	180	425	421	870	1174
24	288	140	345	342	740	1033
25	300	110	280	270	620	897
26	312	70	215	212	520	770
27	324	60	165	165	415	654
28	336	50	125	125	325	544
			100	97	255	445

Pošto se u proračunu ne upotrebljavaju kontinualni hidrogrami $Q(t)$ i $q(t)$, nego njihove vrijednosti u određenim vremenskim trenucima Q_t i q_t (u vremenskom intervalu Δt), prirast zapremine može se definisati na slijedeći način:

$$\Delta V = V_t - V_{t-1} = K [x(Q_t - Q_{t-1}) + (1-x)(q_t - q_{t-1})] \quad (2)$$

Sa druge strane, za posmatranu riječnu dionicu mora biti zadovoljena jednačina kontinuiteta:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q(t) - q(t) \quad (3)$$

ili u diferentnom obliku

$$\Delta V = V_t - V_{t-1} = (Q_t + Q_{t-1}) \cdot \frac{\Delta t}{2} - (q_t + q_{t-1}) \cdot \frac{\Delta t}{2} \quad (4)$$

Izjednačavanjem jednačina (2) i (4) dobije se:

$$q_t = \beta_1 Q_t + \beta_2 Q_{t-1} + \beta_3 q_{t-1} \quad (5)$$

gdje su parametri sistema β dati slijedećim izrazima:

$$\beta_1 = - \frac{Kx - 0,5 \Delta t}{K - Kx + 0,5 \Delta t} \quad (6)$$

$$\beta_2 = \frac{Kx + 0,5 \Delta t}{K - Kx + 0,5 \Delta t} \quad (7)$$

$$\beta_3 = \frac{K - Kx - 0,5 \Delta t}{K - Kx + 0,5 \Delta t} \quad (8)$$

$$\text{Suma parametara } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$$

Za simuliranje ponašanja sistema pomoću jednačine (5) potrebno je prethodno odrediti parametre K i x . Ovi parametri se određuju probanjem na osnovu osmotrenih hidrograma Q_t i q_t (identifikacija sistema).

Iz jednačina (2) i (4) slijedi

$$K = \frac{0,5 \Delta t [(Q_t + Q_{t-1}) - (q_t + q_{t-1})]}{x(Q_t - Q_{t-1}) + (1-x)(q_t - q_{t-1})} \quad (9)$$

Vrijednost parametra K se proračunava tako što se za nekoliko različitih (pretpostavljenih) vrijednosti x sračunaju uzastopne

sumarne vrijednosti brojnika (povećanje zapremine) i istovremene uzastopne sumarne vrijednosti nazivnika (ponderisano povećanje protoka). Težinski koeficijent, odnosno koeficijent ponderisanja za ulaz Q je x a za izlaz q je $(1-x)$.

Za svaku pretpostavljenu vrijednost x sračunate uzastopne sumarne vrijednosti brojnika i nazivnika (Tabela 18.2 - kolone 5 i 6, 5 i 7, te 5 i 8) nanose se u koordinatnom sistemu sa abscisom koja predstavlja nazivnik (ponderisano povećanje protoka) i ordinatom koja predstavlja brojnik (povećanje zapremine), što je učinjeno na sl. 18.2. Sa ove slike se vidi da zavisnost brojnika i nazivnika nije jednoznačna i da je predstavljena petljom.

Ova nejednoznačnost je rezultat pogrešno pretpostavljene veličine za parametar x . Usvaja se ona vrijednost x koja daje približno jednoznačan odnos, tj. kada se grane petlje najviše približe jedna drugoj. U razmatranom primjeru najuža petlja se dobije za $x = 0,10$. Iz jednačine (9) slijedi da osrednjena vrijednost parametra K predstavlja nagib linije koja se povuče kroz sredinu petlje (crtkana linija na slici 18.2.c) i u razmatranom primjeru je određeno:

$$K = \frac{18000}{700} \approx 25,5 \text{ časova}$$

Za usvojene vrijednosti $K = 25,5$ časova, $x = 0,10$ i $4t = 12$ časova, sračunati su parametri sistema:

$$\beta_1 = 0,11917$$

$$\beta_2 = 0,29534$$

$$\beta_3 = 0,58549$$

Sa vrijednostima β izvršen je proračun transformacije ulaznog hidrograma iz perioda A, \hat{q} (Tabela 18.1 - kolona 5). Iz slike 18.1. je očigledno da se proračunate vrijednosti izlaznog hidrograma \hat{q} dobro slažu sa njegovim osmotrenim vrijednostima q .

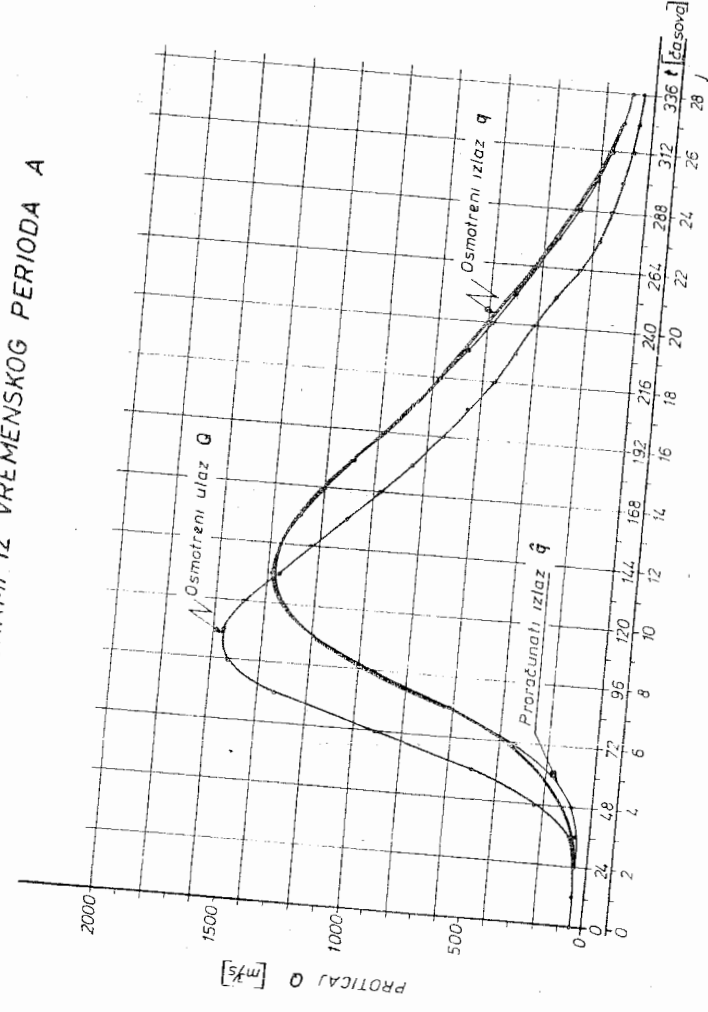
Proračun transformacije ulaznog hidrograma iz perioda B, koristeći jednačinu (5) i uz pretpostavku da su parametri sistema određeni na osnovu osmatranja iz perioda A mjerodavni, izvršeni su u tabeli 18.1. (kolona 7) i predstavljeni na slici 18.3. Iz ove

slike se vidi da se maksimalni proticaj zbog transformacije umanjuje sa oko $2560 \text{ m}^3/\text{s}$ na oko $2300 \text{ m}^3/\text{s}$.

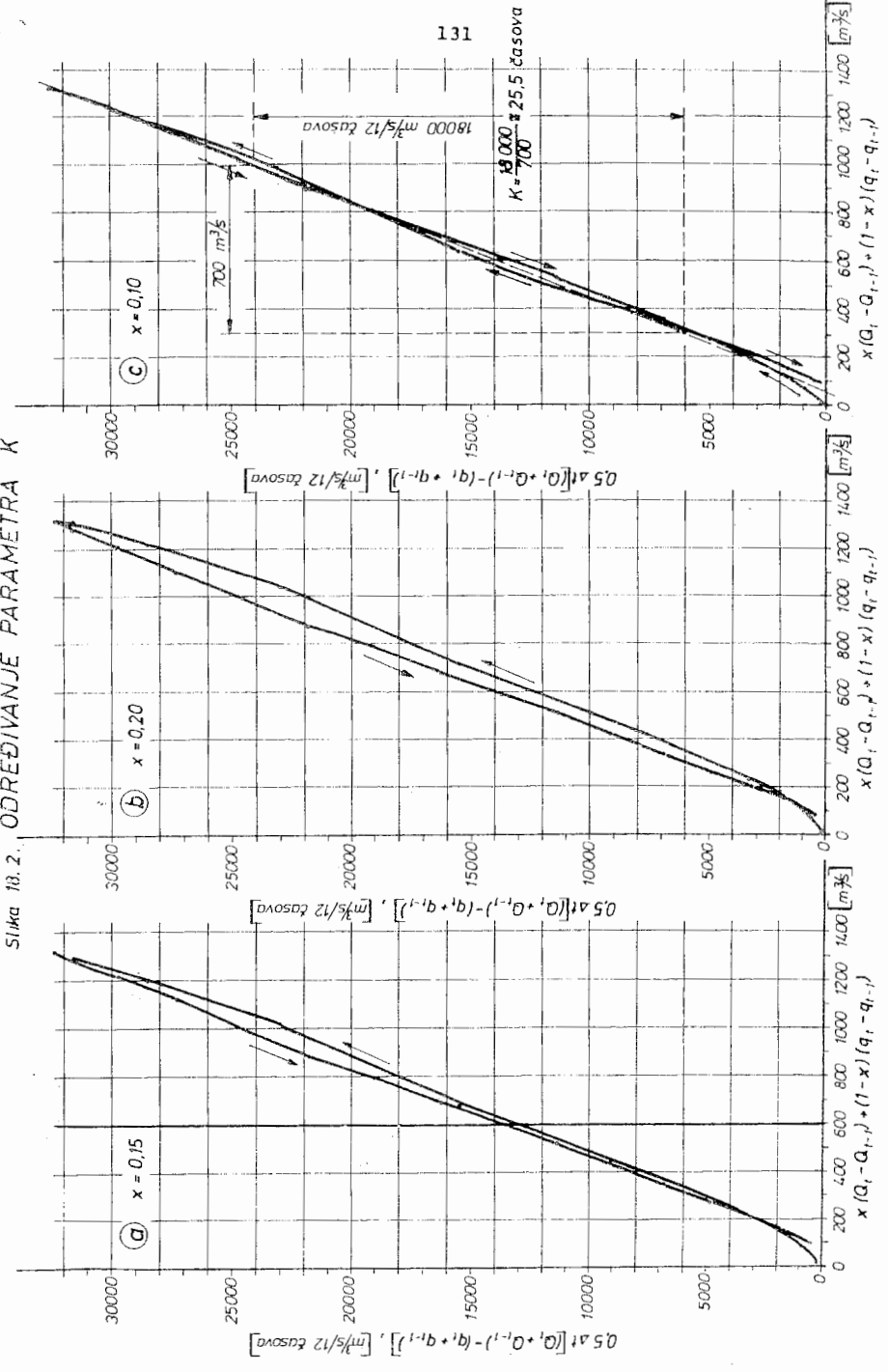
Tabela 18.2.

j	t [sat]	Osmotreni ulaz Q [m^3/s]	Osmotreni izlaz q [m^3/s]	Povećanje zapremine- brojnik (jedn.9)	Ponderisano povećanje protoka - nazivnik (jednačina 9)		
					x=0,15	x=0,20	x=0,10
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	52	52				
1	12	52	52	0	0	0	0
2	24	52	52	0	0	0	0
3	36	82	65	102	16	16	15
4	48	240	120	924	86	92	80
5	60	500	230	3264	219	232	205
6	72	910	380	8064	408	434	381
7	84	1330	625	15474	679	714	644
8	96	1530	980	23004	1011	1038	983
9	108	1560	1200	28464	1202	1220	1184
10	120	1490	1330	31584	1302	1310	1294
11	132	1350	1370	32424	1315	1314	1316
12	144	1240	1360	31584	1290	1284	1296
13	156	1110	1300	29724	1220	1210	1229
14	168	980	1200	27264	1115	1104	1126
15	180	860	1090	24564	1004	992	1015
16	192	740	970	21804	884	872	895
17	204	650	885	19014	798	786	810
18	216	550	775	16254	689	678	701
19	228	480	680	13704	598	588	608
20	240	410	600	11364	520	510	529
21	252	330	515	9114	435	426	445
22	264	250	425	6954	347	338	356
23	276	180	345	4914	268	260	277
24	288	140	280	3084	207	200	214
25	300	110	215	1614	147	142	153
26	312	70	165	414	99	94	104
27	324	60	125	-546	63	60	67
28	336	50	100	-1236	41	38	43

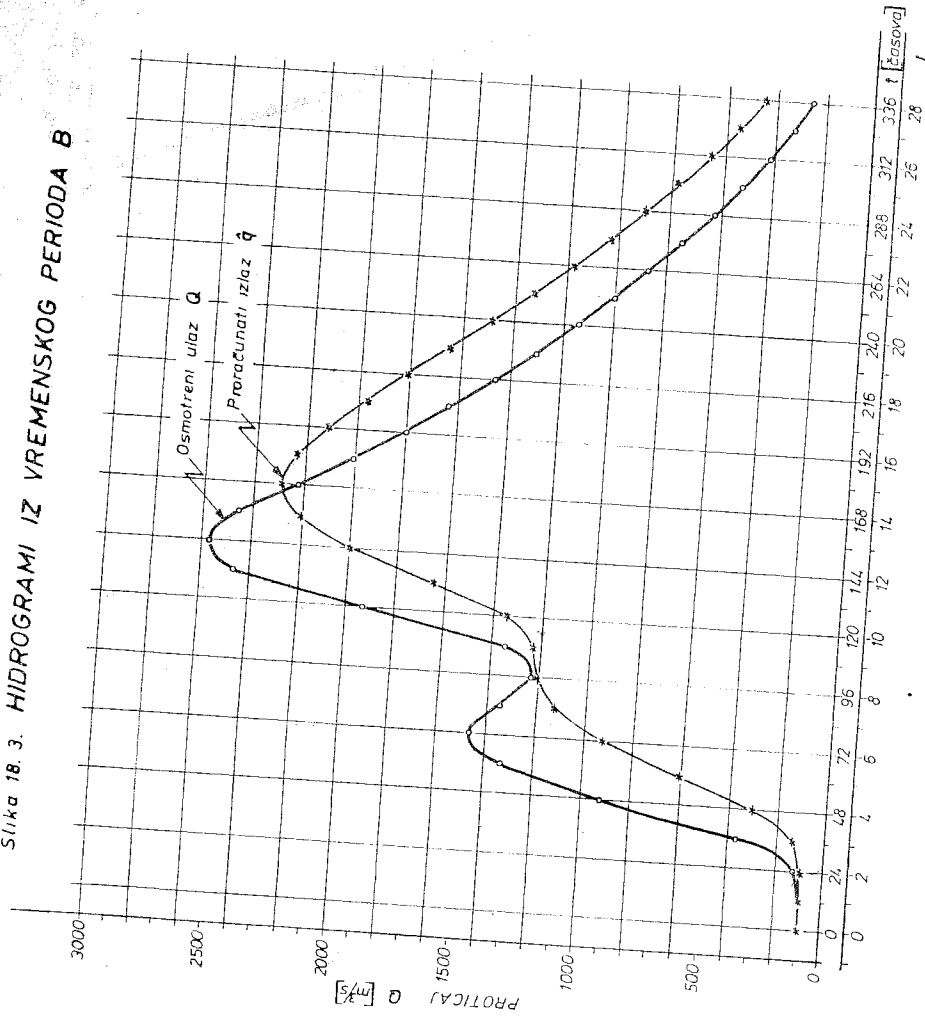
Slika 18.1. HIDROGRAMI IZ VREMENSKOG PERIODA A



Slika 18.2. ODREĐIVANJE PARAMETRA K



Slika 18.3. HIDROGRAMI IZ VREMENSKOG PERIODA B



L I T E R A T U R A

1. Jovanović, Bonacci, Andjelić: Hidrometrija, Gradjevinski fakultet Beograd, 1980.
2. Jovanović: Primjena metoda matematičke statistike u hidrologiji, Gradjevinski fakultet Beograd, 1977.
3. Jovanović: Parametarska hidrologija, Jugosl.društvo za hidrologiju, 1975.
4. Jovanović, Radić: Zadaci iz hidrologije, Gradjevinski fakultet Beograd, 1981.
5. Vranić: Vjerojatnost i statistika, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
6. Ivanović: Teorija verovatnoće, Naučna knjiga, Beograd, 1977.
7. Ivković: Matematička statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1980.
8. Krive protoka, Jugoslovensko društvo za hidrologiju, Seminar o obradi hidroloških podataka, Izola 1975.
9. Jevdjević: Hidrologija I dio, Institut "Jaroslav Černi", Beograd, 1956.
10. Srebrenović: Problemi velikih voda, Tehnička knjiga, Zagreb 1970.
11. Chow: Handbook of Applied Hydrology, Mc Graw-Hill, 1964.
12. Linsley, Kohler, Paulhus: Hydrology for Engineers, McGraw-Hill, 1975.
13. Jevdjević: Vjerovatnoća i statistika u hidrologiji, Poslovna zajednica za izučavanje krša, Sarajevo, 1977.

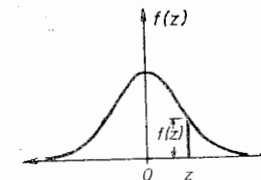
PRILOZI

Prilog br. 1.

ORDINATE $f(z)$ STANDARDNE NORMALNE FUNKCIJE RASPODJELE

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad -\infty < z < \infty$$

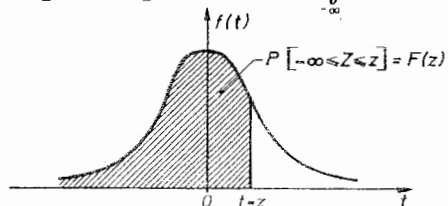
$$f(z) = f(-z)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

POVRŠINA ISPOD STANDARDNE NORMALNE FUNKCIJE
RASPODJELE

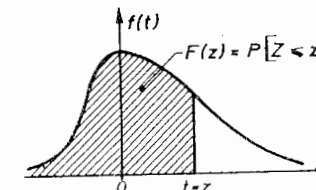
$$P[-\infty \leq Z \leq z] = F(z) = 1 - \Phi(z) = \int_{-\infty}^z f(t) dt$$



z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)
-3,90	0,0000	-0,80	0,2119	0,85	0,8023
-3,80	0,0001	-0,75	0,2266	0,90	0,8159
-3,70	0,0001	-0,70	0,2420	0,95	0,8289
-3,60	0,0002	-0,65	0,2578	1,00	0,8413
-3,50	0,0002	-0,60	0,2742	1,10	0,8643
-3,40	0,0003	-0,55	0,2912	1,20	0,8849
-3,30	0,0005	-0,50	0,3085	1,30	0,9032
-3,20	0,0007	-0,45	0,3264	1,40	0,9192
-3,10	0,0010	-0,40	0,3446	1,50	0,9332
-3,00	0,0013	-0,35	0,3632	1,60	0,9452
-2,90	0,0019	-0,30	0,3821	1,70	0,9552
-2,80	0,0026	-0,25	0,4013	1,80	0,9641
-2,70	0,0035	-0,20	0,4207	1,90	0,9713
-2,60	0,0047	-0,15	0,4404	2,00	0,9772
-2,50	0,0062	-0,10	0,4602	2,10	0,9821
-2,40	0,0082	-0,05	0,4801	2,20	0,9861
-2,30	0,0107	0,00	0,5000	2,30	0,9893
-2,20	0,0139	0,05	0,5199	2,40	0,9918
-2,10	0,0179	0,10	0,5398	2,50	0,9938
-2,00	0,0228	0,15	0,5596	2,60	0,9953
-1,90	0,0287	0,20	0,5793	2,70	0,9965
-1,80	0,0359	0,25	0,5987	2,80	0,9974
-1,70	0,0446	0,30	0,6179	2,90	0,9981
-1,60	0,0548	0,35	0,6368	3,00	0,9987
-1,50	0,0668	0,40	0,6554	3,10	0,9990
-1,40	0,0808	0,45	0,6736	3,20	0,9993
-1,30	0,0968	0,50	0,6915	3,30	0,9995
-1,20	0,1151	0,55	0,7088	3,40	0,9997
-1,10	0,1357	0,60	0,7258	3,50	0,9998
-1,00	0,1587	0,65	0,7422	3,60	0,9998
-0,95	0,1711	0,70	0,7580	3,70	0,9999
-0,90	0,1841	0,75	0,7734	3,80	0,9999
-0,85	0,1977	0,80	0,7881	3,90	1,0000

POVRŠINA ISPOD GUMBEL-ove FUNKCIJE RASPODJELE

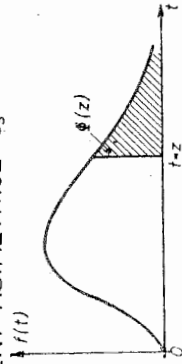
$$F(z) = e^{-e^{-z}}; z = \frac{1}{0,78\sigma_x} (x - \mu_x + 0,45\sigma_x)$$



z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)
-2,0	0,00067	1,7	0,83454	5,4	0,99554
-1,9	0,00133	1,8	0,84903	5,5	0,99596
-1,8	0,00251	1,9	0,86236	5,6	0,99634
-1,7	0,00443	2,0	0,87459	5,7	0,99669
-1,6	0,00742	2,1	0,88582	5,8	0,99701
-1,5	0,01183	2,2	0,89610	5,9	0,99729
-1,4	0,01805	2,3	0,90550	6,0	0,99755
-1,3	0,02644	2,4	0,91409	6,1	0,99778
-1,2	0,03737	2,5	0,92194	6,2	0,99799
-1,1	0,05109	2,6	0,92910	6,3	0,99818
-1,0	0,06780	2,7	0,93562	6,4	0,99836
-0,9	0,08759	2,8	0,94157	6,5	0,99851
-0,8	0,11043	2,9	0,94698	6,6	0,99865
-0,7	0,13620	3,0	0,95190	6,7	0,99878
-0,6	0,16465	3,1	0,95637	6,8	0,99890
-0,5	0,19548	3,2	0,96044	6,9	0,99900
-0,4	0,22833	3,3	0,96414	7,0	0,99910
-0,3	0,26279	3,4	0,96749	7,1	0,99918
-0,2	0,29843	3,5	0,97054	7,2	0,99926
-0,1	0,33483	3,6	0,97331	7,3	0,99933
0,0	0,37157	3,7	0,97582	7,4	0,99939
0,1	0,40828	3,8	0,97809	7,5	0,99945
0,2	0,44461	3,9	0,98016	7,6	0,99950
0,3	0,48026	4,0	0,98203	7,7	0,99955
0,4	0,51498	4,1	0,98372	7,8	0,99959
0,5	0,54855	4,2	0,98526	7,9	0,99963
0,6	0,58081	4,3	0,98665	8,0	0,99970
0,7	0,61163	4,4	0,98792	8,1	0,99973
0,8	0,64092	4,5	0,98906	8,2	0,99975
0,9	0,66864	4,6	0,99010	8,3	0,99975
1,0	0,69475	4,7	0,99103	8,4	0,99978
1,1	0,71925	4,8	0,99188	8,5	0,99980
1,2	0,74216	4,9	0,99265	8,6	0,99982
1,3	0,76352	5,0	0,99335	8,7	0,99984
1,4	0,78337	5,1	0,99398	8,8	0,99985
1,5	0,80179	5,2	0,99455	8,9	0,99986
1,6	0,81882	5,3	0,99507	9,0	0,99988

VRIJEDNOSTI PROMJENLJIVE, z, (PEARSON III RASPODJELA - PO FOSTER-RIBKIN-U)
ZA ZADATU VJEROVATNOĆU, $\Phi(z)$, I POZITIVAN KOEFICIJENT ASIMETRIJE C_s

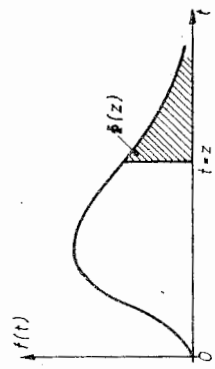
$$\Phi(z) = 1 - F(z) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{t=z}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt$$



C _s	V j e r o v a t n o ć a										Φ(z) [%]									
	0,01	0,1	1	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95	97	99	99,9			
0,00	3,72	3,09	2,33	1,64	1,28	0,84	0,52	0,25	0,00	-0,26	-0,52	-0,84	-1,28	-1,64	-1,88	-2,33	-3,09			
0,10	3,94	3,16	2,40	1,67	1,29	0,84	0,51	0,24	-0,02	-0,27	-0,53	-0,85	-1,27	-1,61	-1,84	-2,25	-2,95			
0,30	4,38	3,52	2,54	1,72	1,31	0,82	0,48	0,20	-0,05	-0,30	-0,56	-0,85	-1,24	-1,55	-1,75	-2,10	-2,67			
0,50	4,83	3,81	2,68	1,77	1,32	0,81	0,46	0,18	-0,08	-0,33	-0,58	-0,85	-1,22	-1,49	-1,66	-2,00	-2,40			
0,70	5,28	4,10	2,82	1,82	1,33	0,79	0,43	0,14	-0,12	-0,36	-0,60	-0,83	-1,18	-1,42	-1,57	-1,81	-2,14			
0,90	5,73	4,38	2,96	1,86	1,34	0,77	0,40	0,11	-0,15	-0,38	-0,61	-0,85	-1,15	-1,35	-1,47	-1,66	-1,90			
1,00	5,96	4,53	3,02	1,88	1,34	0,76	0,38	0,09	-0,16	-0,39	-0,62	-0,85	-1,13	-1,32	-1,42	-1,59	-1,79			
1,20	6,41	4,81	3,15	1,91	1,34	0,73	0,35	0,05	-0,19	-0,42	-0,63	-0,84	-1,08	-1,24	-1,33	-1,45	-1,58			
1,40	6,87	5,09	3,27	1,94	1,34	0,71	0,31	0,02	-0,22	-0,44	-0,64	-0,83	-1,04	-1,17	-1,23	-1,32	-1,39			
1,60	7,31	5,37	3,39	1,96	1,33	0,68	0,28	-0,02	-0,25	-0,46	-0,64	-0,81	-0,99	-1,10	-1,14	-1,20	-1,24			
1,80	7,76	5,64	3,50	1,98	1,32	0,64	0,24	-0,05	-0,28	-0,48	-0,64	-0,80	-0,94	-1,02	-1,06	-1,09	-1,11			
2,00	8,21	5,91	3,60	2,00	1,30	0,61	0,20	-0,08	-0,31	-0,49	-0,64	-0,78	-0,90	-0,95	-0,97	-0,99	-1,00			
2,2	-	6,20	3,68	2,02	1,28	0,57	0,16	-0,11	-0,33	-0,49	-0,64	-0,75	-0,84	-0,88	-0,89	-0,90	-0,90			
2,4	-	6,47	3,78	2,00	1,25	0,52	0,12	-0,14	-0,35	-0,50	-0,62	-0,72	-0,79	-0,82	-0,82	-0,83	-0,83			
2,6	-	6,73	3,86	2,00	1,23	0,48	0,08	-0,17	-0,37	-0,50	-0,61	-0,70	-0,74	-0,76	-0,77	-0,76	-0,76			
2,8	-	6,99	3,96	2,00	1,20	0,44	0,05	-0,21	-0,39	-0,50	-0,60	-0,67	-0,70	-0,71	-0,71	-0,71	-0,71			
3,0	-	7,29	4,05	1,97	1,18	0,39	0,02	-0,23	-0,40	-0,50	-0,59	-0,64	-0,66	-0,66	-0,66	-0,66	-0,66			
3,2	-	-	4,11	1,96	1,16	0,35	-0,00	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41			
3,4	-	-	4,18	1,94	1,14	0,31	-0,03	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41			
3,6	-	-	4,24	1,93	1,12	0,28	-0,07	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42			
3,8	-	-	4,29	1,90	1,10	0,24	-0,09	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42			
4,0	-	-	4,34	1,90	1,08	0,21	-0,12	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41			
4,2	-	-	4,39	1,88	1,06	0,19	-0,13	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41			
4,4	-	-	4,42	1,86	1,04	0,15	-0,15	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40			
4,6	-	-	4,46	1,84	1,02	0,13	-0,17	-0,40	-0,39	-0,39	-0,39	-0,39	-0,39	-0,39	-0,39	-0,39	-0,39			
4,8	-	-	4,50	1,81	1,00	0,10	-0,19	-0,39	-0,38	-0,38	-0,38	-0,38	-0,38	-0,38	-0,38	-0,38	-0,38			
5,0	-	-	4,54	1,78	0,98	0,06	-0,20	-0,38	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37			

VRIJEDNOSTI PROMJENLJIVE, z, (PEARSON III RASPODJELA - PO FOSTER-RIBKIN-U)
ZA ZADATU VJEROVATNOĆU, $\Phi(z)$, I NEGATIVAN KOEFICIJENT ASIMETRIJE C_s

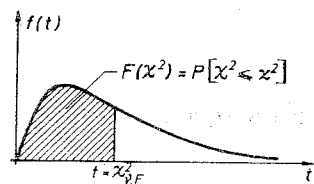
$$\Phi(z) = 1 - F(z) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{t=z}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt$$



C _s	V j e r o v a t n o ć a										Φ(z) [%]									
	0,1	0,5	1	5	10	20	30	50	60	70	80	90	95	99	99,5	99,9				
-0,0	3,09	2,58	2,33	1,64	1,28	0,84	0,52	0,00	-0,25	-0,52	-0,84	-1,28	-1,64	-2,33	-2,58	-3,09				
-0,2	2,81	2,39	2,18	1,58	1,26	0,85	0,55	0,03	-0,22	-0,50	-0,83	-1,30	-1,70	-2,47	-2,78	-3,38				
-0,4	2,54	2,20	2,03	1,52	1,23	0,85	0,57	0,07	-0,19	-0,47	-0,82	-1,32	-1,75	-2,61	-2,95	-3,55				
-0,6	2,27	2,02	1,88	1,45	1,20	0,85	0,59	0,10	-0,16	-0,44	-0,80	-1,33	-1,80	-2,75	-3,13	-3,96				
-0,8	2,02	1,84	1,74	1,38	1,17	0,85	0,60	0,13	-0,12	-0,41	-0,78	-1,34	-1,84	-2,89	-3,31	-4,24				
-1,0	1,79	1,66	1,59	1,32	1,13	0,85	0,62	0,16	-0,09	-0,38	-0,76	-1,34	-1,88	-3,02	-3,49	-4,53				
-1,2	1,58	1,50	1,45	1,24	1,08	0,84	0,63	0,19	-0,05	-0,35	-0,73	-1,34	-1,91	-3,15	-3,66	-4,81				
-1,4	1,39	1,35	1,32	1,17	1,04	0,83	0,64	0,23	-0,02	-0,31	-0,71	-1,34	-1,92	-3,27	-3,83	-5,09				
-1,6	1,24	1,22	1,20	1,10	0,99	0,81	0,64	0,25	+0,02	-0,28	-0,68	-1,33	-1,96	-3,39	-3,99	-5,37				
-1,8	1,11	1,10	1,09	1,02	0,94	0,80	0,64	0,28	0,05	-0,24	-0,64	-1,32	-1,98	-3,50	-4,15	-5,64				
-2,0	0,999	0,995	0,99	0,95	0,90	0,78	0,64	0,31	0,08	-0,20	-0,61	-1,30	-2,0	-3,60	-4,30	-4,91				

VRIJEDNOSTI PROMJENLJIVE, χ^2 , ZA ZADATU VJEROVATNOĆU, $F(\chi^2)$, I BROJ STEPENI SLOBODE, ν

$(\chi^2_{\nu, F})$

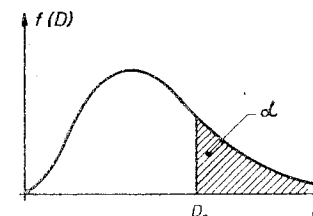


ν	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.85}$	$\chi^2_{0.80}$	$\chi^2_{0.75}$	$\chi^2_{0.70}$	$\chi^2_{0.65}$	$\chi^2_{0.60}$	$\chi^2_{0.55}$	$\chi^2_{0.50}$	$\chi^2_{0.45}$	$\chi^2_{0.40}$	$\chi^2_{0.35}$	$\chi^2_{0.30}$	$\chi^2_{0.25}$	$\chi^2_{0.20}$	$\chi^2_{0.15}$	$\chi^2_{0.10}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.005}$	
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.455	0.102	0.0158	0.0039	0.0010	0.0002	0.0000													
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.575	0.211	0.103	0.0306	0.0201	0.0100													
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.584	0.352	0.216	0.115	0.072													
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.711	0.484	0.297	0.207													
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.831	0.554	0.412													
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.872	0.676													
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.989													
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34													
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73													
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16													
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60													
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07													
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57													
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07													
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60													
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14													
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70													
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26													
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84													
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43													
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03													
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64													
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26													
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89													
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5													
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2													
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.1	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8													
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5													
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1													
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8													
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7													
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0													
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5													
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3													
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2													
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2													
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3													

KOLMOGOROV-SMIRNOV TEST SAGLASNOSTI

Kritične vrijednosti $D_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{N}}$ u funkciji veličine uzorka N i koeficijenta rizika α .

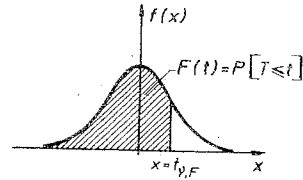
$$P\{\max |F_n(x) - F(x)| \geq D_0\} = \alpha$$



Veličina uzorka N	Koeficijent rizika, α , [%]						
	1	2	5	10	15	20	30
5	0,73	0,68	0,61	0,55	0,51	0,48	0,44
10	0,51	0,48	0,43	0,39	0,36	0,34	0,31
15	0,42	0,39	0,35	0,32	0,29	0,28	0,25
20	0,36	0,34	0,30	0,27	0,25	0,24	0,22
25	0,32	0,30	0,27	0,24	0,23	0,20	0,19
30	0,30	0,28	0,25	0,22	0,21	0,19	0,18
35	0,27	0,26	0,23	0,21	0,19	0,18	0,17
40	0,26	0,24	0,21	0,19	0,18	0,17	0,16
45	0,24	0,23	0,20	0,18	0,17	0,16	0,15
50	0,23	0,21	0,19	0,17	0,16	0,15	0,14
60	0,21	0,20	0,17	0,16	0,15	0,14	0,13
70	0,19	0,18	0,16	0,15	0,14	0,13	0,12
80	0,18	0,17	0,15	0,14	0,13	0,12	0,11
90	0,17	0,16	0,14	0,13	0,12	0,11	0,10
100	0,16	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10	0,09

Prilog br. 7.

VRIJEDNOSTI PROMJENLJIVE, t , (PO STUDENTU) ZA ZADATU
VJEROVATNOĆU, $F(t)$, I BROJ STEPENI SLOBODE, ν

 $(t_{\nu, F})$ 

ν	$t_{0.995}$	$t_{0.99}$	$t_{0.975}$	$t_{0.95}$	$t_{0.90}$	$t_{0.80}$	$t_{0.75}$	$t_{0.70}$	$t_{0.60}$	$t_{0.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	0.727	0.325	0.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	0.816	0.617	0.289	0.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	0.978	0.765	0.584	0.277	0.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	0.941	0.741	0.569	0.271	0.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	0.920	0.727	0.559	0.267	0.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	0.906	0.718	0.553	0.265	0.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	0.896	0.711	0.549	0.263	0.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	0.889	0.706	0.546	0.262	0.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	0.883	0.703	0.543	0.261	0.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	0.879	0.700	0.542	0.260	0.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	0.876	0.697	0.540	0.260	0.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	0.873	0.695	0.539	0.259	0.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	0.870	0.694	0.538	0.259	0.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	0.868	0.692	0.537	0.258	0.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	0.866	0.691	0.536	0.258	0.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	0.865	0.690	0.535	0.258	0.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	0.863	0.689	0.534	0.257	0.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	0.862	0.688	0.534	0.257	0.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	0.861	0.688	0.533	0.257	0.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	0.860	0.687	0.533	0.257	0.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	0.859	0.686	0.532	0.257	0.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	0.858	0.686	0.532	0.256	0.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	0.858	0.685	0.532	0.256	0.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	0.857	0.685	0.531	0.256	0.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.32	0.855	0.684	0.531	0.256	0.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.32	0.855	0.683	0.530	0.256	0.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.32	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.32	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	0.851	0.681	0.529	0.255	0.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	0.848	0.679	0.527	0.254	0.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	0.845	0.677	0.526	0.254	0.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	0.842	0.674	0.524	0.253	0.126