UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET

Biljana Rašović

BLACK-SCHOLESOV MODEL VREDNOVANJA OPCIJA

-MAGISTARSKI RAD-

Podgorica, 2010.

PODACI I INFORMACIJE O MAGISTRANTU

Ime i prezime: Biljana Rašović

Datum i mjesto rođenja: 09. 09. 1985. godine, Podgorica

Naziv završnog osnovnog studijskog programa i godina diplomiranja: Matematika i računarske nauke, 2008.

INFORMACIJE O MAGISTARSKOM RADU

Naziv postdiplomsog studija: Matematika

Naziv rada: Black-Scholesov model vrednovanja opcija

Fakultet na kojem je rad odbranjen: Prirodno-matetamtički fakultet

UDK, OCJENA I ODBRANA MAGISTARSKOG RADA

Datum prijave teme za izradu magistarskog rada: 31.12.2009.

Datum sjednice Vijeća univerzitetske jedinice na kojoj je prihvaćena tema: 13.04.2010.

Komisija za ocjenu teme i podobnosti magistranta:
dr Milojica Jaćimović, red. prof. PMF-a
dr David Kaljaj, van. prof. PMF-a
dr Darko Mitrović, docent PMF-a

Mentor: dr Milojica Jaćimović, red. prof. PMF-a

Komisija za ocjenu rada:
dr David Kaljaj, van. prof. PMF-a
dr Darko Mitrović, docent PMF-a
dr Milojica Jaćimović, red. prof. PMF-a

Komisija za odbranu rada:
dr David Kaljaj, van. prof. PMF-a
dr Darko Mitrović, docent PMF-a
dr Milojica Jaćimović, red. prof. PMF-a

Datum odbrane: 06. 09. 2010. godine

Predgovor

Od pojave opcija, određivanje njihovih vrijednosti predstavlja jednu od najatraktivnijih oblasti finansijske teorije ali i primijenjene matematike. Sa pojavom novih vrsta opcija, razvijene su i nove matematičke metode kao i modeli za određivanje vrijednosti.

Rad pripada finansijskoj matematici i odnosi se na modele vrednovanja opcija. Među njima se izdvajaju dva najznačajnija modela - binomni i Black-Scholesov model. Oba polaze od činjenice da se vrijednost opcije mijenja sa svakom promjenom cijene akcije iz osnove opcije, tako da je nemoguće utvrditi očekivani novčani tok opcije čijim diskontovanjem bi se utvrdila vrijednost opcije. Zato se vrijednost opcija utvrđuje indirektnim putem - formiranjem finansijskog instrumenta ili portfolija koji će donositi isti prinos kao i opcije pa stoga i njegova cijena mora biti jednaka cijeni opcije. Utvrđivanje cijena opcija na neku drugu imovinu (obveznice, indekse, valutu i sl.) radi se na veoma sličan način.

Predmet ovog rada upravo predstavlja Black-Scholesov model za određivanje vrijednosti opcija koji je maja 1973. godine u časopisu *Political Journal* objavljen pod nazivom *Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Rad ima dva autora: Myron Scholes i Fischer Black. U tom trenutku, izraz Black-Scholesov model za određivanje vrijednosti opcija nije postojao. Ovaj termin je prvi koristio Robert Merton u radu *Theory of Rational Option Pricing* objavljenom u časopisu *Bell Journal of Economics and Management Science*. U svom radu Merton je dodatno opisao i proširio matematičko shvatanje koje su iznijeli Black i Scholes u svom radu. Jedan od tvoraca modela, Myron Scholes je 1997. godine, zajedno sa kolegom Robertom Mertonom, dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju. Scholesov kolega, Fischer Black, je preminuo 1995. godine, pa je uskraćen na osnovu pravila da se Nobelove nagrade ne dodjeljuju posthumno. Za utjehu je da su istakli i naglasili njegovu ulogu i značaj.

Ispostavilo se da model dobro funkcioniše i u praktičnoj trgovini opcijama. Model je postao veoma popularan jer je jednostavan za izračunavanje a pri tom ne zahtijeva poznavanje investitorove sklonosti ka riziku.

Black-Scholesova diferencijalna jednačina je samo dio Black-Scholesovog modela za određivanje vrijednosti opcija. Ova jednačina je jedan od najpoznatijih i najkorišćenijih matematičkih modela u finansijskom poslovanju.

Rad je podijeljen u pet glava. Svaka od glava je podijeljena na poglavlja, a poglavlja na odjeljke.

U prvoj glavi daje se kratak pregled osnovnih struktura i terminologije u teoriji finansija. Opisani su elementi finansijskog sistema (finansijsko tržište, finansijski instrumenti i finansijske institucije). Definisani su forvard i fjučers ugovori i dokazano nekoliko tvrđenja o njima.

U drugoj glavi razmatraju se opcije, počev od njihovog razvitka preko podjela do određivanja vrijednosti opcija. Razmatra se proračun cijena opcionog ugovora evropskog i američkog tipa.

U trećoj glavi motivišemo i izvodimo klasični model za ponašanje vrijednosti imovine. To radimo na heuristički način, raščišćavajući pretpostavke pod kojim pravimo modele i imajući u vidu da će taj model da se koristi kao osnov za teoriju vrednovanja opcija. Da bismo procijenili vrijednost jedne opcije, moramo napraviti matematički opis ponašanja predmetne imovine. U ovoj glavi dati su računski primjeri kao i neki osnovni statistički testovi koji daju podatke o cijenama akcija. Ti testovi otvaraju put za matematički opis koji se prezentira u sljedećem poglavlju. Ovu glavu počinjemo sa iznošenjem hipoteze efikasnog tržišta.

Naredna glava posvećena je izvođenju i rješenjima Black-Scholesove parcijalne diferencijalne jednačine. Pojam hedžinga, koji se iskoristio za izvođenje Black-Scholesove PDJ, oblikuje najvažniji koncept u ovom radu. U ovom poglavlju uvodimo i drugi računski pristup: binomni metod, koji predstavlja najjednostavnije sredstvo za procjenu američkih opcija. U proučavanju tog metoda vratićemo se na diskretni model vrijednosti imovine i definisati neutralisanje rizika.

Peta cjelina se bavi egzotičnim opcijama, kao sto su opcije sa barijerom, opcije sa gledanjem unazad i druge, i diskutuju motivi za primjenu ovih opcija.

U radu se nalazi veliki broj računskih primjera, praćenih odgovarajućim slikama, koji ilustruju teorijska razmatranja i daju bolji uvid u izloženi materijal. Treba napomenuti da se u našoj državi ne trguje opcijama, te usled nemogućnosti pronalaska svježih primjera, ovi računski primjeri su preuzeti iz knjige Desmonda Highama *An introduction to financial option valuation*. Kroz čitav tekst definicije nisu posebno naznačene, nego su uključene u tekst, a pojam koji se definiše označen je podebljanim(bold) slovima. Još treba naglasiti, da u nedostatku konkretnih izraza na našem jeziku, u radu se nalazi i određen broj stranih riječi koje su označene iskošenim (italic) slovima. Na kraju rada je dat spisak literature koja je korišćena prilikom izrade.

Izvod rada

Black-Scholesova formula je najznačajnije otkriće na polju finansijskih tržišta koje je omogućilo brz razvoj finansijske industrije, izvedenih i osnovnih instrumenata. Metoda zasnovana na Black-Scholesovom modelu pokazala je znatne dodirne tačke i sa područjima izvan finansijskih tržišta, poput vrednovanja polisa osiguranja, garancija ali i fleksibilnosti prilikom preduzimanja investicionih projekata.

Black-Scholesov model je baziran na nekoliko pretpostavki: nema troškova transakcije, kupovina i prodaja imovine može da se odvija u svakom trenutku, dozvoljena je kratka prodaja, ne plaćaju se dividende. Takodje, ovdje se pojavljuje niz elemenata kojima možemo izmjeriti rizik - ovi elementi mjerenja rizika su poznatiji kao "Grčka slova" (Delta, Gamma, Vega, Theta i Rho). Ono što je bitno, je da je ovaj model analitički, dakle unošenjem promjenljivih u jednačinu možemo relativno lako dobiti cijenu evropskih opcija - dok je binomni model u neku ruku empirijski model jer u svakoj konkretnoj situaciji moramo konstruisati "drvo" i onda empirijski dobiti cijenu opcije. Za američke opcije, i egzotične opcije uglavnom se koristi binomni model, mada - postoje razne ekstenzije i dodatci na Black-Sholesov model.

KLJUČNE RIJEČI I FRAZE: forvardi, fjučersi, evropske call i put opcije, američke call i put opcije, diskretan i kontinuiran model imovine, suma kvadrata prinosa, hedžing, Black-Scholesova PDJ, grčka slova, binomni model, opcije sa gledanjem unazad, opcije sa barijerom, azijske opcije, bermudske opcije, opcije sa oglašavanjem itd.

Abstract

Black-Scholes formula is the most important discovery in the field of financial markets and enable the rapid development of the financial industry, derived and basic instruments. This method has shown significant points with areas outside of financial markets, such as pricing insurance policies, guarantees and flexibility when undertaking investment projects.

Black-Scholes model is based on several assumptions: there no transaction costs, the asset can be bought/sold in arbitrary units, short selling is permitted, no dividends are paid. Also, here appears a number of elements which we measure risk - these elements of risk measurement are known as „Greeks“ (Delta, Gamma, Vega, Theta i Rho). What matters, is that this model is an analytical model, then entering the variable into the equation, we can relatively easily get a price of European option - while the binomial model is the kind of empirical model because we have to construct a "tree" and then get empirical price options. For American options an Exotic options is mainly used binomial model, though - there are various extensions and additives on the Black-Sholes model.

KEYWORDS AND PHRASES: Forward, Futures, Europian call and put options, American call and put options, Discrete and continuous asset model, Sum-of-square returns, Hedging, Black-Scholes PDE, Greeks, Binomial model, Lookback options, Barrier options, Asian options, Bermudan options, Shout options etc.

Sadržaj

1
Uvod

Predmet Finansijeske analize se može izraziti kroz veoma aktuelno pitanje sa kojim se susrijeće svaki građanin: *gdje uložiti novac*? Pošto je broj mogućnosti veliki to samo dodatno otežava izbor. U osnovi ove nauke leži Finansijska matematika, pomoću čijih metoda se može egzaktno izračunati efekti kod pojedinih mogućnosti i time direktno sugerisati optimalan izbor (pod određenim pretpostavkama).

U okviru privrednog sistema jedan od najvažnijih podsistema je finansijski sistem. Finansijski sistem je kao dio privrednog sistema, i sam sastavljen od više elemenata koji omogućuju nesmetan tok finansijskih sredstava u jednoj društveno-ekonomskoj zajednici. Finansijski sistem predstavlja mehanizam i vodič, odnosno sistem kanala kojim se vrši transfer finansijskih sredstava između različitih grupa i subjekata u privredi.

Razvijenost finansijskog sistema jedne zemlje može se pratiti preko razvijenosti njegovih najvažnijih elemanata:

- Finansijska tržišta
- Finansijski instrumenti
- Finansijske institucije

1.1 Finansijsko tržište

Veoma je teško dati jedinstvenu i univerzalnu definiciju finansijskog tržišta. Najšire posmatrano, finansijsko tržište postoji svuda gdje se obavljaju finansijske transakcije. U okviru ovog rada finansijsko tržište se može definisati kao mjesto na kome se susrijeću ponuda i tražnja za različitim oblicima finansijskih instrumenata.

Finansijsko tržište je osnovni elemenat svakog finansijskog sistema. Riječ je o mjestu gdje se povezuju različiti učesnici privrednog i društvenog života i gdje se zaključuju poslovi u vezi kupoprodaje različitih finansijskih insrumenata. Finansijsko tržište predstavlja instituciju kreiranu od strane društva kako bi se na što bolji način alocirali ograničeni i oskudni finansijski resursi i kako bi se na najefikasniji način zadovoljila potreba za njima. To je mjesto gdje se kreiraju finansijski instrumenti, gdje se okupljaju svi učesnici. Na njima se formiraju različite cijene pojedinih hartija od vrijednosti, kamatne stope, devizni kursevi. Na njemu se vrši distribucija prihoda i mjeri efikasnost poslovanja.

U teoriji i praksi razlikuju se i primarno i sekundarno tržište. **Primarno tržište** je finansijsko tržište na kom preduzeća ili državne jedinice kojima nedostaju novčana sredstva, ta ista dobijaju od prvih kupaca prodajom **nove** emisije hartija od vrijednosti poput obveznica ili akcija. **Sekundarno tržište** je finansijsko tržište na kom se preprodaju prethodno izdate hartije od vrijednosti. Obično primarna tržišta hartija od vrijednosti nisu dovoljno poznata široj javnosti, jer se prodaja hartija od vrijednosti prvim kupcima često odvija iza zatvorenih vrata. Veoma bitna finansijska institucija koja pomaže u početnoj prodaji hartija od vrijednosti na primarnom tržištu se naziva **investiciona banka**. Najpoznatiji primjeri sekundarnih tržišta su Njujorška berza koja trguje prethodno izdatim akcijama, mada se na tržištima obveznica na kojima se trguje prethodno izdatim obveznicama korporacija i američke vlade, ostvaruje daleko veći obim trgovine. Drugi primjeri sekundarnih tržišta su tržišta deviza, terminskih ugovora i opcija. Ključne uloge na ovim sekundarnim tržištima pripadaju brokerima i dilerima.

Kada na sekundarnom tržištu dođe do prodaje hartija od vrijednosti, osoba koja je prodala papir dobija novac, ali kompanija koja je izdala vrijednosni papir ne dolazi do novih sredstava, jer je do tih sredstava došla kada je svoje hartija od vrijednosti prvi put prodala na primarnom tržištu. Pitamo se kakva je onda svrha sekundarnih tržišta? Sekundarna tržišta posjeduju svoje dvije vrlo važne funkcije. Prva je da olakšavaju prodaju finansijskih instrumenata radi dolaženja do novca tj. drugim riječima zbog njih finansijski instrumenti postaju likvidniji – lakše se njima trguje. Povećana likvidnost finansijskih instrumenata čini ih privlačnijim, što kompaniji izdavatelju olakšava nove prodaje hartija od vrijednosti na primarnom tržištu. Druga vrlo bitna funkcija sekundarnih tržišta je da ona određuju cijenu hartija od vrijednosti koje je kompanija prethodno izdala na primarnom tržištu. Institucije koje kupuju hartije od vrijednosti na primarnom tržištu kompaniji izdavatelju za njih neće platiti veću cijenu od one za koju smatraju da mogu postići na sekundarnom tržištu. Što je veća cijena na sekundarnom tržištu veća će biti i cijena koju će kompanija izdavatelj postići putem nove emisije hartija od vrijednosti na primarnom tržištu a naravno time će i biti veći iznos kapitala koji će kompanija tim putem prikupiti. Na taj način kretanja na sekundarnom tržištu postaju najznačajnija za korporacije koje izdaju hartije od vrijednosti.

Poslovi na finansijskom tržištu mogu biti: promptni (kada se ralizacija vrši odmah ili najkasnije u roku od dva dana) i terminski (sa utvrđenim rokom).

Po svom predmetu poslovanja, finansijsko tržište se obično dijeli na sledeće vrste:

(1) *Tržište kapitala* – na njemu se organizovano i institucionalizovano susrijeću ponuda i tražnja za kapitalom. Pod kapitalom se smatra novac raspoloživ u roku dužem od godinu dana. Na primarnom tržištu kapitala se pojavljuje dugoročna ponuda i tražnja za kapitalom, a na sekundarnom tržištu kapitala se vrši trgovanje dugoročnim hartijama od vrijednosti u cilju pribavljanja investicionih sredstava emitovanjem obveznica (zajmovni kapital) ili akcija i drugih hartija od vrijednosti (akcijski kapital). Na tržištu kapitala kapital se koristi kao zajmovni kapital (vlasnik kapitala je povjerilac a korisnik je dužnik; oblici zajmovnog kapitala su: investicioni kredit, hipotekarni kredit i dugoročni zajam) i kao akcijski kapital (korisnik kapitala je budući vlasnik a sadašnji vlasnik je budući upravljač kapitalom).

(2) *Devizno tržište* – Na njemu se obavlja promet stranih sredstava plaćanja, odnosno kupovina i prodaje deviza preko brokera, ovlašćenih lica i ovlašćenih banaka, kao i otkup i prodaja deviza od strane nacionalne (interventne) banke.

(3) *Novčano tržište* – Na njemu se susrijeću kratkoročna ponuda i tražnja novca; ovdje se pojavljuju dvije vrste tržišnih instrumenata: krediti i hartije od vrijednosti na kratak rok. Najčešći poslovi koji se obavljaju na novčanom tržištu su: međubankarsko kreditiranje, kupovina i prodaja hartija od vrijednosti radi održavanja likvidnosti, realizacija kamatne arbitraže, realizacija špekulativnih altivnosti i sl. Poslovi na tržištu novca se mogu podijeliti na poslove na dnevnom tržištu novca i poslove na terminskom tržištu novca.

Najčešća terminologija tržišta je da kupac zauzima dugu poziciju (*long position*), a prodavac zauzima kratku poziciju (*short position*). Kratku poziciju treba razlikovati od pojma tzv. kratke prodaje (*short selling*) kada prodavac prodaje nešto što mu ne pripada – što je sasvim legalno ako npr. neko u ponedjeljak sačini ugovor o prodaji 100kg šećera (koje nije u njegovom vlasništvu) sa terminom isporuke za srijedu, a u medjuvremenu kupi šećer.

Visoko organizovano tržište na kome se okupljaju posebno ovlašćeni učesnici koji povezuju kupce i prodavce različitih finansijskih instrumenata nazivamo **berzom**. Razlikujemo:

1. robne ili produktne berze
2. finansijske berze
3. mješovite berze

Robne berze su specijalizovane za promet odgovarajućih roba ili proizvoda. Na njima se trguje sa žitaricama, metalima, naftom, zemnim gasom, električnom energijom i ostalim poljoprivrednim proizvodima kao što su meso, mlijeko, južno voće pa čak i sir. Finansijske berze su berze na kojima se trguje različitim finansijskim instrumentima (sredstvima, aktivom).

Postoje dva načina organizovanja berzanskih tržišta. Jedan je tržište sa organizovanom berzom, gdje se kupci i prodavci hartija od vrijednosti sastaju na jednom središnjem mjestu, radi obavljanja trgovine. Primjeri ovakvih berzi su: Njujorška i Američka berza akcija i Čikaška robna berza (Chicago Board of Trade). Drugi način organizacije sekundarnog tržišta je neuređeno ili vanberzansko OTC tržište. Na ovom tržištu dileri koji su smješteni na različitim lokacijama, drže zalihu hartija od vrijednosti i spremni su ih kupovati i prodavati bilo kome ko želi prihvatiti njihove cijene. Kompjuteri dilera na ovom tržištu su konstantno povezani, što im daje mogućnost poznavanja cijena kod svih drugih dilera, pa OTC tržište može biti veoma konkurentno i ne mora se bitno razlikovati od tržišta sa organizovanom berzom. Mnoge obične akcije se kupuju i prodaju na OTC tržištima, mada velike korporacije imaju svoje akcije uvrštene na organizovanim berzama poput Njujorške, Londonske, Tokijske. Tržište državnih obveznica vlade SAD, koje ima veći obim trgovanja nego Njujorška berza je organizovano kao OTC tržište. Četrdesetak dilera sa svojom spremnošću da u svakom trenutku kupe ili prodaju obveznice američke vlade sačinjava ovo tržište. Na drugim OTC tržištima trguje se drugim finansijskim instrumentima kao što su depozitni ertifikati, federalna sredstva, bankovni akcepti i devize.

Market mejker (*market-maker*) je agent (diler) na berzi koji je stalno prisutan i kao kupac i kao prodavac vrijednosnih papira i na taj način održava neprekidno tržište tj. kupovina ili prodaja se uvijek može izvršiti po nekoj cijeni i to bez odlaganja. Market mejker je osoba koja će uvijek ponuditi dvije cijene kada se zamoli za to. Cijena ponude (*ask price*) je cijena po kojoj je market mejker spreman da prodaje, a kupovna cijena (*bid price*) je cijena po kojoj je on spreman da kupuje. U trenutku kada se poziva market mejker i pita za cijene, on ne zna da li investitor želi da kupi ili proda vrijednosni papir. Zato uvijek imenuje veću cijenu ponude nego kupovnu cijenu. Njegov profit proističe iz ove razlike, a maksimum za raspon kupovne i cijene ponude određuje tržište.

Broker na berzi (*floor broker*) izvršava trgovinu za široku publiku. Kada investitor kontaktira svog brokera da kupi ili proda aktivu, broker prosleđuje naredbu brokeru na berzi odgovarajuće firme, koji zatim izvršava trgovinu sa drugim brokerom na berzi ili sa market mejkerom.

Mnoge narudžbine koje stižu do brokera na berzi su ograničenog karaktera – mogu se izvršiti samo do određene cijene, pa je ponekad nemoguće trenutno izvršavanje. U tom slučaju broker na berzi prosleđuje narudžbinu **upravnom brokeru** (*board broker, order book official*) koji unosi narudžbinu u kompjuter, a čim se pojavi povoljna cijena, narudžbina se izvršava.

1.2 Finansijski instrumenti

Finansijski instrumenti predstavljaju predmet trgovanja na finansijskim tržištima. Njihova razvijenost i diverzifikovanost su najbolji indikatori i pokazatelji stepena razvijenosti pojedinih finansijskih tržišta. Kada se govori o finansijskim instrumentima često se u udžbenicima iz ove oblasti u svijetu koristi jedan sinonim – finansijska aktiva. Riječ je o neopipljivoj aktivi, čija vrijednost direktno ne zavisi od vrijednosti fizičkih dobara, već predstavlja prava na neke buduće prihode ili koristi. Tu možemo podrazumijevati razne novčane i finansijske instrumente kojima se može trgovati na finansijskim tržištima. Iz računovodstva je poznato da svaka aktiva mora da ima svoju pasivu. Otuda, sa druge strane posmatrano, postoji kategorija subjekata za koje finansijski instrumenti predstavljaju finansijsku pasivu. Finansijske instrumente emituju ili izdaju oni subjekti koji imaju nedostatke finansijskih sredstava ili kapitala u datom trenutku. Najvažnije karakteristike koje imaju uticaja u procesu odlučivanja o alokaciji finansijskih sredstava su likvidnost, rizik i prinos (dobit).

Finansijske berze su berze na kojima se trguje različitim finansijskim instrumentima (sredstvima, aktivom). Instrumente dijelimo u dvije grupe:

1. osnovne
2. izvedene

Osnovni instrumenti su :

- roba (*commodity*) , koja ima sopstvenu vrijednost – zlato, srebro, nafta, struja, žito…
- valute (*currencies*) – euri, dolari, funte,…

- akcije (*stocks, shares*) raznih kompanija, koje svojim vlasnicima (dioničarima kompanije) donose prihod u vidu dividende, a u slučaju da kompanija bude preuzeta od strane neke druge kompanije ili u slučaju bankrota se ostvareni odnosno preostali profit firme proporcionalno dijeli dioničarima.
- mjenice (obveznice) i državne hartije od vrijednosti (*bonds*) su kreditni vrijednosni papiri u kojima se izdavalac (*obligor*) obavezuje da će imenovanom licu (*obligee*) određenog dana ili u određene dane isplatiti sumu novca koja je označena kao glavnica i da će uz to platiti kamatu.

Izvedeni instrumenti su poznatiji pod imenom finansijski derivati (*derivatives, securities, contingent claims*). Ime su dobili zbog toga što se njihova vrijednost izvodi iz vrijednosti nekog osnovnog finansijskog instrumenta koji se nalazi u njihovoj osnovi. Njihova cijena zavisi kako od odnosa ponude i potražnje za njima, tako i od vrijednosti osnovnog instrumenta. Finansijski derivati se smatraju vrlo važnim instrumentom za upravljanje rizicima na finansijskim tržištima. Oni omogućavaju da se rizik podijeli i mnogo racionalnije kontroliše. Najznačajniji derivati su:

- terminski ugovori – takozvani forvordi (*forward*)
- likvidni terminski ugovori – fjučersi (*futures*)
- opcije (*options*)

Nešto više o ovim ugovorima nalazi se u nastavku, a posebna pažnja biće usmjerena na opcije koje su i predmet ovog rada.

1.3 Finansijske institucije

Finansijske institucije čini veliki broj fizičkih i pravnih lica koja se pojavljuju u najrazličitijim ulogama i često sa dijametralno suprotnim motivima. Veći broj učesnika sugeriše da je jedno finansijsko tržište dostiglo viši stepen razvoja. Najčešća podjela se vrši na:

- tzv. učesnici u širem shvatanju i učesnici u užem shvatanju
- Hedžeri, špekulanti i arbitražeri
- Emitenti i investitori
- Nefinansijski i finansijski učesnici

Učesnici u širem shvatanju su svi učesnici privrednog i društvenog života jedne zemlje. Tu ne pravimo razliku između njihove veličine, značaja ili namjera. Zato je moguće grupisati ih u jedan od sledeća 4 sektora: javni sektor, sektor privrede i vanprivrede, sektor stanovništva i subjekte iz inostranstva. Za razliku od šireg shvatanja koje se može odnositi na učesnike koji dolaze izvan samog finansijskog tržišta, uže shvatanje učesnika se vezuje za one subjekte čije je postojanje i poslovanje tijesno povezano sa samom suštinom finansijskih tržišta. To su finansijski posrednici i finansijske institucije. Finsijske institucije imaju veliku ulogu na finansijskim tržištima razvijenih zemalja, jer je u njihovim rukama skoncentrisan ogroman kapital i moć. Razlika proističe iz toga što svaka institucija ne mora biti i posrednik, kao i činjenice da posrednici (brokeri, dileri i investicioni bankari) posluju sa primarnim pravima, a institucije sa sekundarnim. Većina finansijskih institucija obavlja i posredničke funkcije, što otežava njihovo precizno razgraničenje. U osnovi finansijske institucije spadaju centralna banka, komercijalne banke, kreditne i štedne asocijacije, štedionice, investicione kompanije, penzioni fondovi, osiguravajuća društva, finansijske kompanije i drugo.

Hedžeri (*hedgers*) su subjekti koji se uključuju u poslove na finansijskom tržištu sa prvenstvenim ciljem da se zaštite od rizika i da obezbijede skoro konstantnu vrijednost svog portfolija, npr. istovremenim zauzimanjem različitih pozicija.

Špekulanti (*speculators*) su druga velika grupa učesnika na finansijskim tržištima. Njihova osnovna djelatnost je da ostvare zaradu na bazi promjena cijena i to u što kraćem roku. Najčešće se koriste različitim strategijama i pristupima, često kombinujući trgovanje pomoću više različitih finansijskih instrumenata. To su ljudi koji ulaze u velike rizike na tržištu, pa samim tim ostvaruju i veći profit ili gubitak. Naravno svi su oni optimisti, ali neki od njih očekuju da će cijene da rastu, a neki očekuju da će cijene padati, pa u zavisnosti od toga zauzimaju dugu ili kratku poziciju tj. kupuju ili prodaju. Oni koji očekuju rast cijena se nazivaju **bikovima** (*bulls*), a oni koji očekuju pad cijena **medvedima** (*bears*).

Arbitraža (*arbitrage*) je mogućnost da se ostvari *trenutni* profit bez rizika sa početnim ulaganjem, ili da se vremenom ostvari profit ali bez ikakvih ulaganja. Osnovna pretpostavka efikasnog funkcionisanja tržišta je da ARBITRAŽA NE POSTOJI (*no-arbitrage principle*) - odnosno skoro sigurno ne postoji (skup trenutaka u kojima se javlja arbitraža je zanemarljiv, u matematičkoj terminologiji to je skup mjere nula). Naravno, pošto ti momenti u kojima se javlja arbitraža postoje, onda postoje i ljudi koji čekaju, traže i iskorišćavaju te momente. Oni se nazivaju arbitražerima. U principu time što neko iskoristi arbitražni momenat, on izaziva reakciju na tržištu npr. u vidu povećanja cijene, i time prekida ovu arbitražnu priliku.

Primjer: Ako na tržištu valuta neki diler, recimo A ponudi euro po cijeni od 1.25 dolara, dok ih drugi diler B, npr. želi kupiti za 1.28 dolara, očigledno postaji mogućnost arbitraže.

Postojanje arbitražne strategije upućuje na to da je neko pogrešno odredio cijenu. Takve mogućnoti su rijetke u praksi.

Jedna od inovacija i posebna vrsta investicionih kompanija su **hedž fondovi** (*hedge funds*). Riječ je o novoj vrsti fondova koju su se razvili u poslednjih petnaestak godina. Mnogi su u početku bili organizovani kao društva sa ograničenom odgovornošću i zakonski nisu bili regulisani. Strategijski su bili usmjereni ka bogatim pojednicima ili pojedinim finansijskim institucijama, kao na primjer penzionim fondovima, od kojih su za usluge naplaćivali visoke provizije. Ovi fondovi su investitorima garantovali zaštitu od potencijalnih gubitaka, uz veliku vjerovatnoću ostvarivanja dobiti. U ostvarivanju takvih investicionih ciljeva oni su formulisali portfolio na različite načine – korišćenjem hartija sa različitim rokovima dospjeća, instrumentima hedžinga i tome slično. Pretežno su dugoročno orijentisani. Jedan od najpoznatijih hedž fondova je Dugoročni menadžment kapitala (*Long Term Capital Management* - LTCM), u čije poslovanje su se aktivno uključili i mnogi čuveni eksperti, kao što su Robert Merton i Miron Scholes - dobitnici Nobelove nagrade iz oblasti ekonomije. U toku svoga poslovanja LTCM je dosta koristio pozajmljena sredstava, pa je tokom 1998. godine zapao u određene probleme, što je dovelo do toga da je poslovanje i ove vrste fondova moralo detaljnije zakonski da se reguliše.

Emitenti su subjekti na finansijskim tržištima koji se nalaze na strani tražnje za finansijskim sredstvima ili kapitalom. Imaju manjak sredstava koji pokušavaju da zatvore kroz emisiju najrazličitijih hartija od vrijednosti. I investicione kompanije su jedna od institucija koje mogu putem emisije hartija od vrijednosti da sakupljaju kapital neophodan za finansiranje svojih aktivnosti i veće angažovanje u poslovima na finansijskim tržištima. **Investitor** ima potpuno drugačije motive od emitenta. To je učesnik na finansijskim tržištima koji raspolaže viškovima finansijskih sredstava koje želi da unosno uloži, odnosno investira kroz kupovinu određenog finansijskog instrumenta. U ulozi investitora na finansijskim tržištima se može pojaviti veliki broj učesnika i to iz svih sektora, pa ih je moguće podijeliti u dvije osnovne kategorije: individualne i institucionalne. Istaknimo i to da jedno te isto pravno i fizičko lice može biti i emitent i investitor i posrednik.

Nefinansijski učesnici su oni koji obavljaju svoju djelatnost i ostvaruju ciljeve koji nisu dominantno vezani za poslove na finansijskim tržištima. To se vidi i po strukturama bilansa gdje dominiraju realni oblici imovine. Samo se sa vremena na vrijeme, pojavljuju na finansijskim tržištima i to u slučajevima kada žele da plasiraju viškove ili imaju nedostatak sredstava, pa žele da ta sredstva pribave posredstvom finansijskih tržišta.

1.4 Forvard i fjučers ugovori

Forvard (*forward*) je ugovor između dvije strane o kupoprodaji neke imovine za unaprijed određenu cijenu isporuke K (*delivery price, strike price*) u određenom vremenskom momentu T, koji se naziva datumom isteka ili datumom dospjeća (*expiry date*). U momentu sklapanja forvard ugovora ne zna se buduća cijena imovine. Zato se vrijednost forvard ugovora f_t (*forward value*) mijenja sa vremenom u zavisnosti od promjena cijene imovine S_t (*asset price*). Bitna osobina forvard ugovora je da u trenutku sklapanja ugovora t_0 nijedna strana ne plaća ništa za ulaz u ugovor, odnosno vrijednost ugovora u trenutku sklapanja je $f_{t_0} = 0$.

Forvard cijena F_t (*forward price*) u trenutku t je ona cijena isporuke za koju bi vrijednost ugovora bila jednaka nuli. U trenutku sklapanja ugovora cijena isporuke se određuje tako da bude jednaka forvard cijeni tj. $F_{t_0} = K$.

U trenutku T kada se izvršava ugovor, cijena imovine je S_T. Ona strana koja je zauzela dugu poziciju u forvard ugovoru (kupila imovinu), ima prihod $S_T - K$, i kažemo da će ostvariti pozitivan finansijski efekat ako je $S_T > K$. Strana koja je zauzela kratku poziciju (prodala imovinu) ima prihod $K - S_T$, znači prodavac će ostavriti pozitivan efekat ako je $K > S_T$. Dakle i moguć dobitak i gubitak su neograničeni (kasnije se kod opcija nameće ograničenje na prihod).

Tvrđenje: Forvard cijena je data sa

$$F_t = S_t e^{r(T-t)}$$

gde je r konstantna kamatna stopa za period (t, T), a S_t cijena imovine u trenutku t.

Dokaz: Pokazaćemo da ako forvard cijena nije data gornjom jednačinom, postoji mogućnost arbitraže, što dovodi do kontradikcije.

(1) Pretpostavimo da je $F_t > S_t e^{r(T-t)}$ i pratimo sledeću strategiju: u trenutku t pozajmimo S_t eura na period $T - t$ po kamatnoj stopi r i kupimo imovinu. U forvard ugovoru zauzimamo kratku poziciju, tj. u trenutku T ćemo prodati imovinu po cijeni K. U momentu T vraćamo banci sumu novca $S_t e^{r(T-t)}$, a dobijamo prihod K, koji se po definiciji određivao tako da važi $F_t = K$. Dakle naš profit je

$$F_t - S_t e^{r(T-t)} > 0$$

odnosno postoji mogućnost sigurne zarade bez ulaganja – dakle, arbitraža. Kontradikcija!

(2) Pretpostavimo da je $F_t < S_t e^{r(T-t)}$ i pratimo sledeću strategiju: u trenutku t zauzimamo dugu poziciju u forvard ugovoru (kupićemo robu po cijeni K) i istovremeno pozajmimo imovinu, odmah je prodamo na tržištu po cijeni S_t, i uložimo tih S_t eura u banku. Tada u trenutku T dobijamo iz banke $S_t e^{r(T-t)}$, kupujemo robu za cijenu $K = F_t$ i vratimo je pošto je bila pozajmljena. Naš profit je dakle

$$F_t - S_t e^{r(T-t)} < 0$$

što omogućava arbitražu. Kontradikcija!

∎

Tvrđenje: Vrijednost forvard ugovora u proizvoljnom trenutku t data je sa

$$f_t = S_t - K e^{-r(T-t)}$$

Dokaz: Posmatrajmo sledeća dva portfolija:

portfolio A: jedan forvard ugovor sa dugom pozicijom i količinom novca jednakom $K e^{-r(T-t)}$

portfolio B: jedna jedinica imovine.

Ako bismo novac u portfoliju A investirali u banku po kamatnoj stopi r, ona bi do trenutka T porasla na sumu K. Tada smo u trenutku T u stanju da kupimo imovinu po cijeni K, tj. izvršavamo forvard ugovor iz portfolija A. Dakle u trenutku T se oba portfolija sastoje iz jedne jedinice imovine pa imaju istu vrijednost. Iz toga slijedi da oni moraju imati istu vrijednost u svakom ranijem trenuku t (ako to ne bi bilo tačno, investitor bi mogao doći do nerizičnog profita tako što bi kupio jeftiniji portfolio i prodao skuplji portfolio). Dakle,

$$f_t + K e^{-r(T-t)} = S_t$$

Odnosno

$$f_t = S_t - K e^{-r(T-t)} = (F_t - K) e^{-r(T-t)}$$

∎

Kada se sačinjava forvard ugovor, forvard cijena je jednaka cijeni isporuke koja je naznačena u ugovoru i birana je tako da je vrijednost ugovora nula. Forvard cijena F_t je dakle ona vrijednost K za koju je $f_t = 0$ u prethodnoj jednačini, tj

$$F_t = S_t e^{r(T-t)}$$

Fjučers predstavlja obavezu da se kupi ili proda određena roba ili finansijska aktiva kao što su npr. žito, zlato ili hartije od vrijednosti određenog dana, po unaprijed određenoj cijeni. Fjučers ugovor, kao i terminski ugovor, predstavlja sporazum između dvije strane o kupovini ili prodaji aktive u poznato buduće vrijeme za poznatu cijenu. Za razliku od terminskog ugovora, fjučers ugovorom se normalno trguje ne berzi. Da bi se omogućila trgovina, berza postavlja izvjesne standarde za fjučers ugovore. Pošto dvije strane u ugovoru ne moraju da se međusobno poznaju, berza utvrđuje i garantne mehanizme za izvršenje ugovora. Kod fjučersa obično nije određen tačan datum isporuke. U ugovoru se poziva na mjesec isporuke, a dotična berza utvrđuje period unutar mjeseca kada se mora izvršiti isporuka. Vrijeme isporuke za berzanske proizvode je često cio mjesec.

Shodno vrsti proizvoda kojim se trguje, fjučersi se dijele na: robne i finansijske. U osnovi finansijskih fjučersa nalazi se neki finansijski instrument (kratkoročni ili dugoročni), kretanje nivoa berzanskih indeksa i devizni kursevi. Cijene fjučers ugovora se utvrđuju na berzi, mada još uvijek nisu identifikone čvrste veze između fundamentalnih ekonomskih kretanja i cijena valutnih i indeksnih fjučersa. Kada je aktiva za fjučers ugovor berzanski proizvod moguće su varijacije u kvalitetu. Zbog toga je nakon izbora aktive važno da berza tačno odredi stepen kvaliteta robe koji je prihvatljiv. Veličina ugovora utvrđuje iznos aktive koji se mora isporučiti u okviru datog ugovora. Ovo je važna odluka za berzu. Ako je ugovor isuviše veliki, mnogi investitori koji bi željeli da pokriju relativno malu izloženost ili koji bi željeli da steknu relativno malu špekulativnu poziciju, bili bi onemogućeni da koriste berzu. Na drugoj strani, ako je ugovor isuviše mali, trgovina može biti skupa, jer svaki ugovor podrazumijeva određene troškove.

Primjer: Jedan investitor je na dan 1. juna 2010. sklopio forvard ugovor koji ga obavezuje da kupi (duga pozicija u ugovoru) od budućeg prodavca (kratka pozicija u ugovoru) 100.000 eura po kursu 1eur = 102 din, sa rokom dospjeća 60 dana. Neka je kurs 31. jula te iste godine 1eur = 105 din. Kakav je finansijski efekat ostvaren?

Ovdje je K = 10.200.000 eur, t = 1. jun, T = 31. jul, τ = 60 dana i S_T = 10.500.000 eur. Invetitor će 31. jula 2010. kupiti sredstva za K eura i može je prodati za S_T eura, i ostvariće pozitivan finansijski efekat od 300.000 eura.

Primjer: Jedan investitor je na dan 1. oktobra 2010. sklopio forvard ugovor koji ga obavezuje da nakon 3 mjeseca kupi akciju čija je sadašnja cijena S_0 = 50eur, a cijena isporuke je ugovorena po forvard cijeni. Obračunava se 6% kamate godišnje na bezrizična sredstva, uz kontinuirano kamaćenje. Odredite forvard cijenu i izračunati koliki je finansijski efekat ako je cijena sredstva na dan dospjeća 60eur.

Vrijednost ugovora je
$f_t = S_t - Ke^{-r(T-t)} = 50 - 60 \cdot e^{-0.06\cdot(90/360)} = 50 - 60 \cdot 0{,}985112 = S_T - K \cdot 0{,}985112$
Forvard cijena je

$F_t = S_0 e^{r(T-t)} = 50 \cdot e^{0.06 \cdot (90/360)} = 50 \cdot 1{,}1015113 = 50{,}76$eur
Finansijski efekat na dan dospjeća je
$S_T - F_T = 60 - 50{,}76 = 9{,}24$eur.

2
Opcije

2.1 Razvoj opcija

Opcije se po prvi put pojavljuju u Holandiji i Japanu, u samim začecima terminskog trgovanja 30-ih godina XVII vijeka. Prvo trgovanje opcijama na akcije zabilježeno je na Londonskoj berzi 20-ih godina XIX vijeka. Sredinom XIX vijeka na Čikaškoj robnoj berzi (*Chicago Board of Trade* - CBOT) razvija se sistem robnih opcija. Prva berza finansijskih opcija formirana je u aprilu 1973. godine u Čikagu pod nazivom CBOE (*Chicago Board Options Exchange*). Nakon CBOE dolazi do osnivanja niza velikog broja berzi na kojima se trguje opcijama. Tako se 1976. godine osniva berza fjučersa i opcija u Hong Kongu, 1978. u Amsterdamu, 1982. u Londonu, 1985. u Stokholmu i Parizu.

Danas se opcijama trguje na berzama širom svijeta: LIFFE (London *International Financial Futures and Options Exchange*) - London, CBOE - Čikago, EOE - Evropska berza opcija, MONEP - Francuska, DTB - Njemačka, SOFFEX - Švajcarska i druge.

2.2 Pojam i definicija opcija

Opcija predstavlja ugovor između prodavca i kupca u kome je sadržano pravo, ali ne i obaveza, kupca da kupi ili proda neki finansijski instrument po unaprijed ugovorenoj cijeni (*strike – exercise price*) do tačno određenog dana u budućnosti (*expiry date*).

Kupovna opcija (*call option, call*) daje pravo (bez obaveze) imaocu (kupcu opcije, duga pozicija) da kupi određeni finansijski instrument po ugovorenoj cijeni isporuke određenog dana, dok je izdavalac opcije (kratka pozicija) u obavezi da proda instrument ako je imalac opcije traži.

Prodajna opcija (*put option, put*) daje pravo (bez obaveze) imaocu (kupcu opcije, duga pozicija) da proda određeni finansijski instrument po ugovorenoj cijeni isporuke određenog dana, dok je izdavalac opcije (kratka pozicija) u obavezi da kupi instrument ako je imalac opcije to zahtijeva.

Jedna strana je izdavalac i prodavac opcije (kratka opcija), a druga strana je kupac i imalac opcije (duga pozicija).

Unutrašnja vrijednost (*intrinsic value*) kupovne opcije je razlika između tržišne cijene akcija i ugovorena (*strike*) cijene ako je ona pozitivna, inače je jednaka nuli. Opciju - opciono pravo - nije vrijedno koristiti ukoliko opcija nema unutrašnju vrijednost. **Opcija u dobitku *(in the money)*** - u tržišnoj termiinologiji znači da opcija ima unutrašnju vrijednost (ima smisla koristiti opciono pravo). **Opcija u gubitku *(out of the money)*** - u tržišnoj tenninologiji znači da opcija nema unutrašnju vrijednost tj. ugovorena cijena je veća od tržišne cijene akcija (nema smisla koristiti opciono pravo). **Opcija na svome *(at the money)*** - u tržišnoj terminologiji znači da je ugovorena cijena opcije jednaka tržišnoj cijeni akcije (nema smisla koristiti opciono pravo).

Analogno razmatranje važi i za put opcije.

Opcije se odnose se na realnu imovinu, finansijsku imovinu (vrijednosne papire) i na druge finansijske derivate. Sa opcijama se trguje na sekundarnim tržištima. Opcije spadaju u širu kategoriju aktive – kontigentna ili uslovna prava (*contigent claim*).

Opcionim ugovorom (*option contract*) regulišu se odnosi za vrijeme emisije opcija. Kupcu opcije - vlasniku daje se pravo da kupi ili proda određenu aktivu po fiksnoj cijeni, koja je unaprijed određena, u okviru određenog vremenskog perioda. Prodavac opcije - emitent ima obavezu da uradi ono što vlasnik opcije od njega traži, da proda ili kupi određenu aktivu, u određenom periodu i po ugovorenoj cijeni. Opcioni sporazum kao visoko standardizovani dokument najčešće sadrži elemente:

- Tip aktive – instrument na koji se opcija odnosi. Najčešće su to hartije od vrijednosti. Ukoliko se radi o opcijama na akcije, u opcionom sporazumu obavezna su još dva elementa:
    - naziv emitenta na čije akcije se opcija odnosi, i
    - količina odnosno broj akcija koje se mogu kupiti ili prodati
- Ugovorena cijena izvršenja (*exercise, striking price)* – cijena po kojoj kupac može da kupi ili proda određenu aktivu ili instrument.
- Rok dospijeća opcije – krajnji (ili fiksirani) datum do kada opcija može da se iskoristi.

Posrednici u trgovanju opcijama dogovaraju se samo o cijeni - premiji i količini opcionih sporazuma.

Tri mogućnosti koje stoje kupcu na raspolaganju za vrijeme posjedovanja opcije:

1. Da iskoristi opciju – kupovina ili prodaja osnovne aktive na koju se opcija odnosi
2. Da opciju proda na sekundarnom tržištu nekom drugom subjektu – berzanski ili vanberzanski promet
3. Da ne iskoristi pravo iz opcije – da pusti da istekne rok dospjeća bez korišćenja opcionog prava.

Prodavac opcije - nosilac obaveze mora da izvrši preuzetu obavezu na osnovu prodate opcije. Ukoliko prodavac ne želi da izrši obavezu, na raspolaganju su mu dvije mogućnosti:

1. Da se pokuša nagoditi sa vlasnikom opcije - kupcem o raskidu sporazuma, uz vraćanje premije i plaćanja određene provizije
2. Da nađe drugog subjekta koji će preuzeti ugovorenu obavezu tj. da proda opciju na sekundarnom tržištu.

2.3 Vrste opcije

Postoji više podjela opcija. Pomenućemo samo neke koje su važne u daljem radu.

Prema mogućnosti izvršenja:

1. američke – mogu se izvršiti u bilo koje vrijeme do isticanja važenja

2. evropske – mogu se izvršiti na tačno određeni dan[1]
3. egzotične – vrijeme isticanja važenja određuje izvršnu cijenu.

Prema vremenu trajanja:
1. kratkoročne
2. dugoročne.

Prema zauzetoj investicijskoj poziciji:
1. call
2. put opcije.

Opcije predstavljaju najznačajniji instrument hedžinga, pomoću koga se investitori štite od različitih vrsta rizika. Pomoću opcija je moguće smanjiti, nekada i eliminisati rizik promjena cijena, tržišnih indeksa, kamatnih stopa, deviznih kurseva i time povećati sigurnost investitora na tržištu.

2.4 Određivanje vrijednosti opcija

Od pojave opcija, određivanje njihovih cijena predstavlja jednu od najatraktivnijih oblasti finansijske teorije ali i primijenjene matematike. Sa pojavom novih vrsta opcija, razvijane su i nove matematičke metode kao i modeli za određivanje cijene. Standardne metode određivanja vrijednosti akcija ili obveznica ne mogu se primijeniti na opcije jer njihova vrijednost zavisi od vrijednosti osnovnog instrumenta iz koga su izvedene kao i rizika koji taj instrument nosi sa sobom. Na primjer, vrijednost opcije na akcije direktno zavisi od kretanja cijene same akcije. Kako se te promjene dešavaju često, uz postojanje visokog rizika i neizvjesnosti, neophodno je bilo razviti posebne modele i tehnike.

Osnovni faktori koju utiču na cijenu opcija su:

- **Cijena aktive** koja se nalazi u osnovi opcije. U slučaju da cijena aktive raste, raste i potražnja za call opcijama, a samim tim i njihova tržišna cijena. Kod put opcija, situacija je obrnuta – rast cijene aktive usloviće pad cijene prodajnih opcija, pošto će opasti tražnja za njima jer niko neće htjeti da kupi pravo po cijeni iporuke koja je fiksna dok tržišna cijena aktive raste, a samim tim i mogućnost da se proda po višoj cijeni.
- **Cijena izvršenja** (*strike price*). Ova cijena je izvjesnija nego cijena aktive jer je fiksirana i poznata unaprijed do datuma dospjeća. Ukoliko je cijena izvršenja viša i cijena put opcije će bit viša dok će niža cijena izvršenja obarati cijenu put opcija. Sa druge strane viša cijena izvršenja će usloviti nižu cijenu call opcija i obrnuto, niža cijena izvršenja će voditi višoj tržišnoj cijeni call opcija.
- **Datum dospjeća opcije**. Uticaj roka izvršenja na cijenu opcija je veoma kompleksan. U slučaju američkih opcija (put i call), ako je rok dospjeća duži i cijena opcije će biti veća jer postoji dovoljno vremena za povoljna cijenovna kretanja tako da je dugoročna opcija vrednija od kratkoročne. Kada se govori o evropskom tipu opcija, naprijed navedeno

[1] Nazivi evropske i američke opcije su istorijskog, a ne geografskog porijekla

pravilo ne mora da važi već se može desiti da su kratkoročne vrednije od dugoročnih opcija.

- **Volatilnost aktive** tj. rizik cijenovnih kolebanja aktive. U nestabilnim tržišnim prilikama investitori će pokazati veću sklonost za držanjem opcija u svom portfoliju i to kako za potrebe hedžinga tako i iz špekulativnih namjera. Upravo zato, ako je predviđena volatilnost cijena aktive veća, veća će biti i cijena opcija i obrnuto.
- **Bezrizična kamatna stopa**. U uslovima rasta kamatnih stopa, cijena put opcije će opadati, dok će u isto vreme cijene call opcija rasti.

Da bi kupac mogao da koristi prava iz opcije, on za to mora da plati odgovarajuću cijenu, koja se naziva premija (*premium*). Cijena opcije se formira na tržištu kao posljedica sučevljavanja ponude i potražnje, a pod uticajem gore navedenih faktora. Premija se računa, ako je opcija na akcije, po *per share* principu.

Primjer: Marko Marković želi da kupi kuću. Posle nekoliko nedjelja razgledanja, pronalazi jednu koja mu odgovara. Nažalost, imaće tek za 6 mjeseci potreban novac da je kupi. Zato, on dogovara sa vlasnikom opciju da kupi kuću u roku do 6 mjeseci za 100.000 eura. Vlasnik se slaže da proda opciju za 2.000 eura.

Scenario l: Tokom perioda od ovih 6 mjeseci, Marko otkriva naftu ispod imanja. Vrijednost kuće skače naglo na 1.000.000 eura. Sve u svemu, prodavac opcije (vlasnik kuće) je u obavezi da proda, kuću Marku jer on želi da iskoristi pravo koje ima, da kupi kuću. Marko je kupio kuću za 102.000 eura (100.000 eura za kuću plus 2.000 eura premija za opciju). Marko je odmah prodaje za milion dolara i ostvaruje veliki profit od 898.000 eura (1.000.000 – 102.000 = 898.000 eura).

Scenario 2: Marko otkriva toksičan otpad na imanju. Sada vrijednost kuće pada na nulu, i on očigledno odlučuje da ne iskoristi opciju da kupi kuću. U ovom slučaju, Marko gubi 2.000 eura tj. premiju koju je platio za opciju vlasniku kuće.

Primjer: Investitor X je kupio od izdavaoca opcije Y prodajnu opciju za prodaju *n*=300 akcija kompanije A po ugovorenoj cijeni $E(1) = 56 eur/akcija$. Tekuća cijena jedne akcije na tržištu je $S_0(1) = 60 eur/akcija$. Trgovac X očekuje da će se cijene smanjivati na tržištu i plaća trgovcu Y cijenu opcije (premiju) u iznosu $P_0(1) = 3 eur/akcija$.

Scenario1: Neka je na dan dospjeća tržišna cijena akcije $S_T = 50 eur/akcija$. Pošto je tržišna cijena na dan dopjeća manja od ugovorene cijene, trgovac X će na tržištu kupiti 300 akcija u iznosu $S_T(300) = 300 \cdot 50 = 15.000 eur$ i prodati je trgovcu Y za $E(300) = 300 \cdot 56 = 16800 eur$.

Na dan dospjeća unutrašnja vrijednost opcije je:

$E(300) - S_T(300) = 16.800 - 15.000 = 1.800 eur$

Profit trgovac X će biti:

$F_T(300) = K(300) - S_T(300) - P_0(300) = 16.800 - 15.000 - 900 = 900 eur$

Trgovac Y je dobio 900 eura za prodatu opciju na 300 akcija, kupuje od trgovca X 300 akcija po cijeni 16.800 eura, neto iznos zadatka je $16.800 - 900 = 15.900$, a postao je vlasnik akcija čija je tržišna cijena 15.000 eura, dakle ima potencijalni gubitak 900 eura.

Scenario2: Neka je na dan dospjeća tržišna cijena akcije $S_T(1) = 58 eur/akcija$. Pošto je tržišna cijena akcija na dan dospjeća veća od ugovorene cijene, trgovac X će odustati i neće izvršiti opciju. Njegov gubitak iznosi toliko koliko je platio za opciju: $P_0(300) = 300 \cdot 3 = 900 eur$, a toliki je i profit trgovca Y koji je za taj iznos prodao opciju.

Pored mogućnosti da iskoristi opciju do njenog roka dospjeća ili da to ne učini kupac opcije ima pravo i da je poništi (*offset*). Offseting je postupak obrnut od originalne transakcije sa ciljem izlaska iz trgovine. U slučaju kupovine call opcije, treba prodati call opciju sa istom cijenom izvršenja i datumom dospjeća. Ako se proda call, kupije se call sa istom cijenom izvršenja i datumom dospjeća. Isto važi i za put opcije. U slučaju kupovine put opcije, treba prodati put sa istom cijenom izvršenja i datumom dospjeća. Analogno, ako se proda put, treba kupiti put opciju sa istom cijenom izvršenja i datumom dospjeća.

Danas u literaturi postoji više teorija koje pokušavaju da utvrde cijenu opcija. Među njima se izdvajaju dva najznačajnija modela – **binomni i Black-Scholesov model**. Oba modela će biti razrađena u sledećim poglavljima, posebno Black-Scholesov model koji je i tema ovog rada.

2.5 Evropske opcije

Evropska kupovna opcija (*European call option*) je ugovor koji daje svom vlasniku (*holder*) pravo – ali ne i obavezu – da u određenom datumu dospjeća T (*expiry date*) kupi određenu aktivu (*underlying asset*) po ugovorenoj cijeni izvršavanja E (*exercise price*). Druga strana ugovora, poznata kao pisac opcije (*writer*) ima obavezu da proda aktivu, ako vlasnik opcije želi da je kupi. Pošto opcija svom vlasniku daje pravo ali ne i obavezu da nešto kupi, a pisac opcije ima obavezu da je proda, vlasnik opcije mora da plati određenu sumu za to pravo tj. plaća opciju. Prava cijena ovakvih ugovora jedno je od centralnih pitanja matematičkih finansija. Vrijednost kupovne opcije u trenutku t označavaćemo sa $C(S(t), t)$, gdje je $S(t)$ vrijednost aktive na koju se odnosi opcija u momentu t. Na vrijednost opcije utiču još i cijena izvršavanja E datum dospjeća T , volatilnost cijene aktive kao i kamatna stopa, ali se one u modelima o kojima će biti riječi smatraju konstantnima.

Vlasnik kupovne opcije zauzima dugu poziciju, a pisac kratku poziciju. Vrlo često se evropske kupovne opcije karakterišu preko prihoda koje one donose svom vlasniku u momentu T. U trenutku T mogu se realizovati dvije mogućnosti: cijena aktive $S(T)$ je veća ili manja od E.

1. Ako je cijena $S(T)$ veća od E, vlasnik opcije će iskoristiti svoje pravo i izvršiti (*exercise*) opciju tj. kupiće robu po nižoj cijeni E, pa ako je odmah proda na tržištu ostvario je prihod $S(T) - E$. Pisac opcije u tom slučaju ima negativan prihod (gubitak) $E - S(T)$.
2. Ako je cijena $S(T)$ manja od E, vlasnik opcije neće izvršiti opciju tj. njegov prihod je nula. Pisac opcije takođe ima prihod nula.

Dakle možemo zaključiti da je u kupovnoj opciji:

	Duga pozicija (*holder*)	Kratka pozicija (*writer*)
prihod	$C(S(T), T) = \max\{S(T) - E, 0\}$	$\min\{E - S(T), 0\}$

profit	$\max\{S(T)-E,0\}-C$	$\min\{E-S(T),0\}+C$

Evropska prodajna opcija (*European put option*) je je ugovor koji daje svom vlasniku (*holder*) pravo – ali ne i obavezu – da u određenom datumu dospjeća T (*expiry date*) proda određenu aktivu (*underlying asset*) po ugovorenoj cijeni izvršavanja E (*exercise price*). Druga strana ugovora, poznat kao pisac opcije (*writer*) ima obavezu da kupi aktivu, ako vlasnik opcije želi da je proda. Vrijednost prodajne opcije u trenutku t ćemo označavati sa $P(S(t),t)$, a vrijednost u trenutku sklapanja ugovora sa P.

Vlasnik prodajne opcije zauzima kratku poziciju, a pisac dugu poziciju. Prodajna opcija se analogno može okarakterisati preko prihoda, naravno u ovom slučaju će opcija biti izvršena ako je u momentu T cijena aktive $S(T)$ manja od ugovorene cijene E. Možemo zaključiti da je u kupovnoj opciji:

	Kratka pozicija (*holder*)	Duga pozicija (*writer*)
prihod	$P(S(T),T)=\max\{E-S(T),0\}$	$\min\{S(T)-E,0\}$
profit	$\max\{E-S(T),0\}-P$	$\min\{S(T)-E,0\}+P$

Posmatrajući ove dijagrame možemo zaključiti da ako investitor smatra da će cijena aktive vremenom dobiti na vrijednosti (tj. ako je "bik"), onda će kupiti kupovnu opciju ili napisati prodajnu opciju. Ako neko smatra da će cijene da padaju (tj. ako je "medved"), onda treba da kupi prodajnu opciju ili da napiše kupovnu opciju. Prihod i profit ako smo vlasnici opcije mogu biti neograničeni, dok je gubitak tj. rizik ograničen (za razliku od forvard i fjučersa).

Posmatrajmo sledeća dva portfolija:

portfolio A: jedna Evropska kupovna opcija sa cijenom izvršavanja E i svota novca jednaka $Ee^{-r(T-t)}$

portfolio B: jedna Evropska prodajna opcija i jedinica aktive.

U trenutku dospijeća T oba portfolija imaju vrijednost

$$\max\{S(T),E\}$$

Iz toga slijedi da oni moraju imati istu vrijednost u svakom ranijem trenuku t (ako to ne bi bilo tačno, investitor bi mogao doći do nerizičnog profita tako što bi kupio jeftiniji portfolio i prodao skuplji portfolio). Dakle

$$C(S(t),t)+Ee^{-r(T-t)}=P(S(t),t)+S(t) \qquad (2.1)$$

Gornja jednačina je poznata kao **put-call paritet**, a na osnovu nje se može izračunati vrijednost kupovne opcije ako je poznata vrijednost prodajne opcije i obratno, naravno ako se odnosi na istu hartiju od vrijednosti.

Vrijednost opcije u trenutku dospjeća T jednaka je prihodu tj.

$$C(S(T),T) = \max\ \{S(T) - E, 0\} \text{ i } P(S(T),T) = \max\ \{E - S(T), 0\}.$$

Za evropske opcije je njihova vrijednost prije dospjeća tj. u proizvoljnom trenutku $t < T$ data Black-Scholesovim jednačinama o kojima ćemo detaljno govoriti u četvrtom poglavlju. Specijalno, za evropske kupovne opcije je njihova vrijednost kao funkcija od cijene aktive $S(T)$ uvijek veća od max $\{S(T) - E, 0\}$ a kako se približava datum dospjeća odnosno $t \to T$ grafik funkcije vrijednosti opcije se sve više približava grafiku prinosa.

Unutrašnja vrijednost (*intrinsic value*) opcije u trenutku t je maksimum od nule i od vrijednosti koju bi opcija imala ako bi se u tom trenutku izvršila. Dakle za kupovnu opciju je unutrašnja vrijednost max $\{S(T) - E, 0\}$, a za prodajnu opciju je max $\{E - S(T), 0\}$.

Vremenska vrijednost (*time value*) opcije je razlika izmedju njene vrijednosti i unutrašnje vrijednosti. Na primjer za kupovnu opciju je vremenska vrijednost $C(S(t),t) -$ max $\{S(T) - E, 0\}$. Vremenska vrijednost opcije ima tzv. efekat sniježne grudve (*snowball effect*).

Opcija može imati:

1. neutralnu vijednost (**in-the-money** = opcija pri novcu)
2. pokrivenu vrijednost (**at-the-money** = dobitna opcija, opcija u novcu)
3. nepokrivena vrijednost opcije (**out-of-the-money** = gubitna opcija, opcija izvan novca)

Kažemo da je u trenutku t opcija ITM ako bi dovela do pozitivnog prihoda u slučaju da se odmah izvrši, ATM ako u slučaju trenutnog izvršavanja dovodi do nula prihoda, a OTM ako dovodi do negativnog prihoda. Jasno, evropska opcija će se izvršiti samo ako je ona ITM u trenutku dospjeća T.

	Kupovna opcija	Prodajna opcija
ITM	$S(t) > E$	$S(t) < E$
ATM	$S(t) = E$	$S(t) = E$
OTM	$S(t) < E$	$S(t) > E$

ITM opcije imaju pozitivnu unutrašnju vrijednost, dok je za ATM i OTM kupovne opcije njihova unutrašnja vrijednost jednaka nuli, a imaju pozitivnu vremensku vrijednost koja opada ka nuli kako $t \to T$, pa u trenutku T vrijednost opcije postaje jednaka unutrašnjoj vrijednosti a vremenska vrijednost postaje nula. ATM i OTM prodajne opcije imaju negativnu vremensku vrijednost koja raste ka nuli kad $t \to T$.

Ako investitor kupi ATM ili OTM opciju, ona ima samo vremensku vrijednost koja je u jakoj korelaciji sa vremenom preostalim do datuma dospjeća tj. $t - T$. Što je preostalo vrijeme duže, veća je verovatnoća da će se cijene na tržištu promijeniti, te da će se opcija izvršiti kao ITM.

2.6 Američke opcije

Američka kupovna opcija (*American call option*) i **Američka prodajna opcija** (*American put option*) garantuju svom vlasniku ista prava kao i evropske opcije, sa razlikom da se ove opcije mogu izvršiti i prije datuma dospjeća T. Kako američke opcije daju više prava svojim vlasnicima od evropskih, logično je očekivati i da je njihova vrijednost veća. Ipak, to je tačno samo za američke prodajne opcije. Američku kupovnu opciju nikad nije povoljno izvršiti prije datuma dospjeća, pa je ona u principu isto što i evropska kupovna opcija.

Tvrđenje: Američku kupovnu opciju nije optimalno izvršiti prije datuma dospjeća.

Dokaz: Posmatrajmo sledeća dva portfolija:

portfolio A: jedna američka kupovna opcija (na akciju) i svota novca jednaka $Ee^{-r(T-t)}$

portfolio B: jedna akcija

Primijetimo da ako izvršimo opciju tj. kupimo akciju, tada se u stvari portfolio A pretvara u portfolio B.

Vrijednost novca iz portfolija A je u trenutku dospjeća T jednaka E, a u proizvoljnom ranijem trenutku $\tau < T$ je njegova vrijednost $Ee^{-r(T-t)}$.

Ako bismo izvršili opciju u ranijem trenutku τ vrijednost portfolija A bi bila

$$S(\tau) - E + Ee^{-r(T-t)} < S(\tau)$$

jer je $\tau < T$ i $r > 0$. Kako je $S(\tau)$ vrijednost portfelja B u trenutku τ, slijedi da je portfolio A u svakom trenuku manje vrijedan nego portfolio B, ako se opcija izvrši prije trenutka dospjeća T.

Ako se opcija drži do trenutka T, vrijednost portfolija A na dospjeću postaje $\max \{S(T), E\}$, a vrijednost portfolija B je tada $S(\tau)$. Naravno, uvijek postoji mogućnost da je u tom trenutku $S(T) < E$. To znači da je u slučaju da se opcija drži, portfolio A uvijek vrijedan koliko i portfolio B ili čak i više. Dakle nema smisla ranije izvršavati opciju.

Ovo tvrđenje potvrđuje i činjenica da je vrijednost evropske kupovne opcije za svako $t < T$ iznad njene unutrašnje vrijednosti $\max \{S(T) - E, 0\}$.

Američke prodajne opcije međutim imaju uvijek veću vrijednost od svojih evropskih duala. Razlog je u tome što je vrijednost evropske prodajne opcije u trenutku $t < T$ ispod njene unutrašnje vrijednosti. Pretpostavimo da je u nekom trenutku $t < T$ prije dospjeća vrijednost akcije $S(t)$ u opsegu takvom da je $P(S,T) = \max \{E - S, 0\}$ tj. vrijednost opcije je manja od unutrašnje vrijednosti, i posmatrajmo šta se dešava ako u tom trenutku izvršimo prodajnu opciju. Očigledno postoji mogućnost arbitraže: možemo kupiti akciju za $S(t)$, istovremeno kupiti prodajnu opciju za $P(S(t), t)$ koju odmah i izvršavamo tako što prodajemo akciju po cijeni E. Tako smo bez rizika ostvarili profit $E - P(S(t), t) - S(t)$. Dakle, moramo pretpostaviti da je vrijednost američke prodajne opcije uvijek veća od njene unutrašnje vrijednosti:

$$P(S(t),t) \geq \max\ \{E - S(t), 0\}.$$

Odavde slijedi i da je vrijednost američke prodajne opcije uvijek veća od vrijednosti evropske prodajne opcije $P_a(S(t),t) > P_e(S(t),t)$ za svako $t < T$, a za kupovne opcije smo već konstatovali da imaju istu vrijednost $C_a(S(t),t) = C_e(S(t),t)$. Primijetimo da za američke opcije ne važi put-call paritet; možemo tvrditi samo da važi nejednakost

$$C_a(S(t),t) + Ee^{-r(T-t)} < P_a(S(t),t) + S(t).$$

Evropske opcije su okarakterisane funkcijama prihoda u momentu T. Američke opcije imaju iste funkcije prihoda, ali se kod njih pored problema izračunavanja vrijednosti opcije postavlja još i problem nalaženja optimalnog trenutka kada treba izvršiti opciju.

Naravno, nema razloga zašto neko ne bi napisao opciju sa proizvoljnom funkcijom prihoda u momentu T. Takodje, vrijednost evropskih i američkih opcija zavisi samo od cijene aktive $S(T)$ u momentu T. Postoje tzv. **egzotične opcije** čija vrijednost zavisi i od prošlosti - od ranijih cijena aktive. Nešto više o ovim opcijama nalazi se u poslednjem, petom, poglavlju.

3

Model vrijednosti imovine

3.1 Kretanje cijena imovine

3.1.1 Hipoteza efikasnog tržišta (*efficient market hypothesis*)

Cijena neke imovine je mjera pouzdanosti investitora pa, kao takva, dosta zavisi od novosti, govorkanja, špekulacija itd. Prirodno je pretpostaviti da tržište trenutno reaguje na spoljašnje uticaje, a time i da

trenutna cijena imovine odražava sve prethodne informacije.

Ovaj jednostavni zaključak je poznat kao **hipoteza efikasnosti tržišta** (slabi oblik). Po toj hipotezi, želimo li predvidjeti vrijednost imovine u nekoj tački u budućnosti, kompletna istorija cijene imovine nema nikakvu prednost u poređenju sa poznavanjem samo njene trenutne cijene („čitanje grafičkih prikaza" nam neće osigurati neku prednost).

Sa stanovišta modeliranja, ako prihvatimo hipotezu efikasnog tržišta, onda jednačina za opis evolucije imovine od trenutka t do $t + \Delta t$ treba da obuhvati samo cijenu imovine u trenutku t i ni u jednom, prethodnom trenutku.

3.1.2 Podaci o cijeni imovine

Na slici 3.1 prikazujemo dnevne vrijednosti IBM akcija od januara do kraja septembra 2001.[2] To su cijene „na zatvaranju"; tj. cijene pri zadnjoj transakciji svakog dana trgovanja. Slika 3.2 daje odgovarajući sedmični prikaz cijena akcija od januara 1998. do decembra 2001. Na slici 3.1 je 184 tačaka, a na slici 3.2 je 209 tačaka. Iako ne pokrivaju isti vremenski period, obje slike pokazuju jasnu „nazubljenost"[3].

[2] Desmond J.Higham: *An introduction to financial option valuation,* Cambridge University Press 2004. strana 46-48
[3] Eng. Jaggedness

Da bi pregledali te podatke, treba ih tretirati na istom nivou kao izlaz za generator pseudo-slučajnih brojeva i ispitati da li ima ikakve statističke karakteristike. Na slici 3.3 dati su rezultati jednog takvog testa. Gornja slika obuhvata *dnevne prinose:*

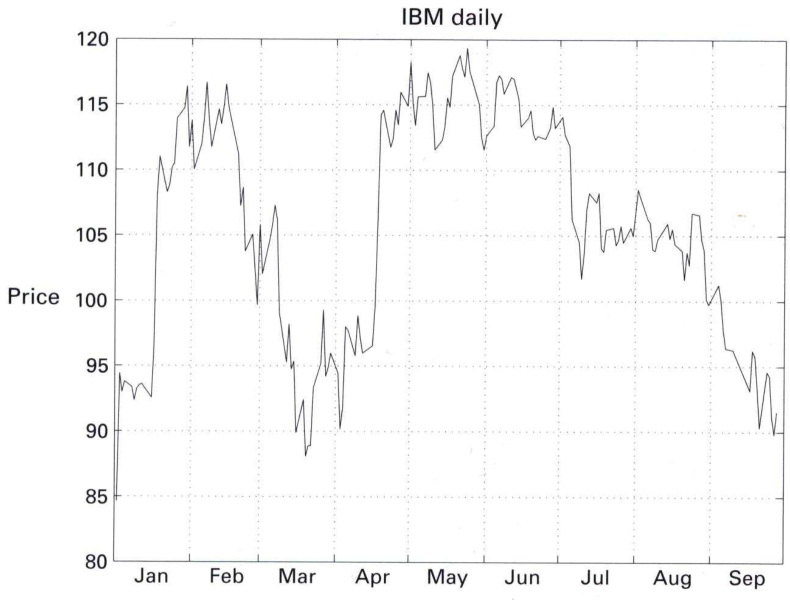
$$r_i^{dnevno} := \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)}$$

gdje su $S(t_i)$ i $S(t_{i+1})$ cijene imovine u uzastopnim danima kako su korišćene na slici 3.1. Ti dnevni prinosi su normalizovani na

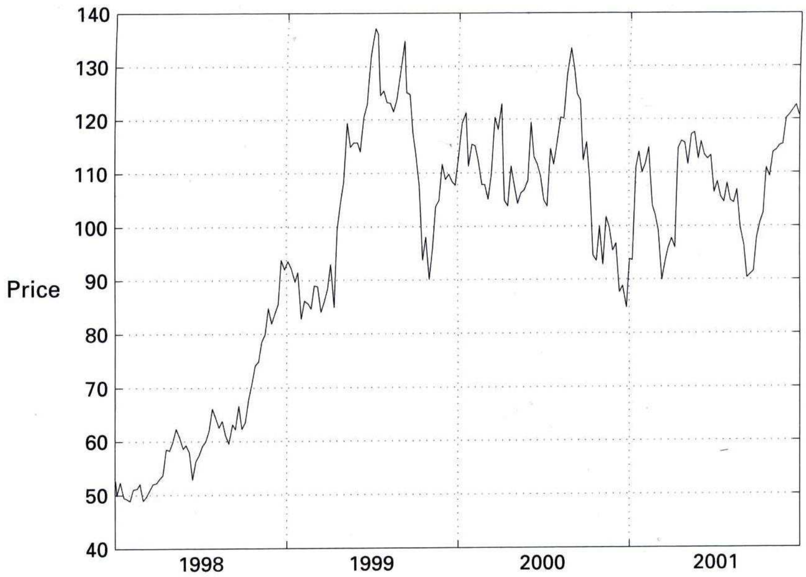
$$\hat{r}_i^{dnevno} := \frac{r_i^{dnevno} - \mu}{\sigma}$$

gdje su μ i σ^2 izračunata uzoračka sredina μ_M i uzoračka disperzija σ_M^2 definisane redom kao

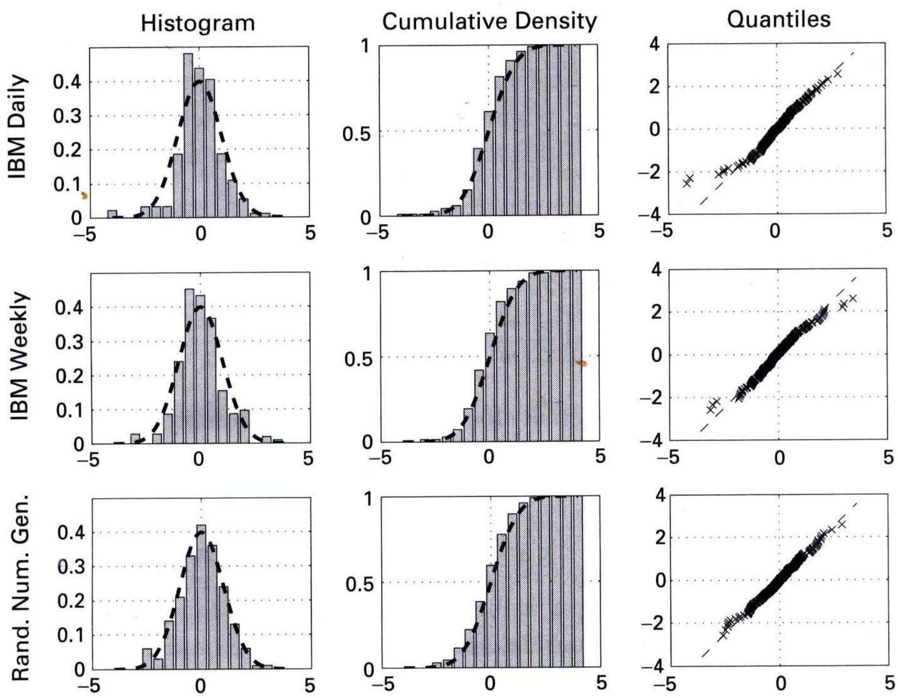
$$\mu_M := \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \xi_i, \qquad \sigma_M^2 := \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M} (\xi_i - \mu_M)^2$$



Slika 3.1: Dnevne cijene IBM akcija od januara do septembra 2001.



Slika 3.2: Sedmične cijene IBM akcija od januara 1998. do decembra 2001.



Slika 3.3: Statistički test koji daje podatke o IBM-ovim cijenama akcija. Gornja slika: dnevne. Srednja slika: sedmične. Donja slika: N(0,1) uzorci za poređenje.

Ako su dnevni prinosi nezavisni i jednako raspodijeljeni uzorci iz normalne raspodjele, onda će $\hat{r}_i^{dnevno}$ biti nezavisna i jednako raspodijeljena slučajna promjenljiva sa raspodjelom N(0,1). Gornji lijevi crtež na slici 3.3 daje procjenu za $\hat{r}_i^{dnevno}$ podatke u obliku histograma, sa N(0,1) krivom gustine $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ koja je označena isprekidanom linijom. Da bi se procijenila

odgovarajuća funkcija raspodjele, možemo koristiti histogram zbira, gdje u svakom bin-u (klasi histograma) bilježimo proporciju uzoraka koji spada u taj bin ili u bin sa lijeve strane. Tako dobijemo histogram na srednjoj slici. N(0,1) funkcija raspodjele, $\mathrm{N}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ je prikazana kao isprekidana linija. Na kraju, na gornjoj desnoj slici prikazan je kvantile-kvantile (*quantile-quantile*) graf. Tri srednja crteža na slici 3.3 prikazuju iste rezultate za normalizovane sedmične prinose pomoću podataka sa slike 3.2. Kao osnova za to poređenje, donja slika daje prikaz koji nastaje kada se 200 tačaka iz N(0,1) generatora pseudo-slučajnih brojeva podvrgne istom ispitivanju.
Slika 3.3 pokazuje da se dnevni i sedmični prinosi imovine ponašaju kao nezavisni i jednako raspodijeljeni uzorci iz normalne raspodjele. Kvantile-kvantile grafovi, koji najviše otkrivaju, mogu ukazati da je najveće odstupanje na krajevima oblasti raspona – poznato kao ponašanje "debelog repa" (*fat-tailed*).

Na kraju, zabilježićemo da, pošto su dnevni i sedmični prinosi dosta mali, aproksimacija $\log(1+x) \approx x$ daje

$$\log\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) = \log\left(1 + \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)}\right) \approx \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)} \tag{3.1}$$

i imali bismo, u suštini, isti prikaz kao 3.3 ako zamijenimo prinose sa *logaritamskim količnicima*, $\log(S(t_{i+1})/S(t_i))$.

3.1.3 Pretpostavke

U sljedećem poglavlju biće razvijan matematički opis kretanja cijene imovine kojim će se obuhvatiti široki raspon karakteristika koje se u praksi primjećuju. Prije toga, istaknimo sledeće pretpostavke koje ćemo postaviti u narednoj analizi:

- Cijena imovine može imati bilo koju nenegativnu vrijednost.
- Kupovina i prodaja aktive može da se odvija u svakom trenutku $0 \leq t \leq T$.
- Moguće je prodati i kupiti bilo koju količinu aktive.
- Razlika između ponuđene i tražene cijene (*bid-ask spread*) je nula – kupovna i prodajna cijena su jednake.
- Nema troškova transakcije (*frictionless market hypothesis*).
- Nema dividendi.
- Dozvoljena je „kratka prodaja“[4] (moguće je imati negativnu količinu imovine).
- Postoji jedna, bezrizična, kamatna stopa koja se primjenjuje na svaku količinu novca koji se pozajmi iz banke ili se položi u njoj.

3.2 Model vrijednosti imovine: dio I

[4] Eng. „short-selling“ – prodaja bez pokrića na berzi.

U ovom poglavlju se iznose motivi i izvodimo klasični model ponašanja cijene imovine. To se radi na heuristički način, raščišćavajući pretpostavke i imajući u vidu da će se taj model koristiti kao osnov za teoriju vrednovanja opcija.

Ako je cijena imovine S_0 u vrijeme $t = 0$, nas će interesovati proces koji opisuje cijena imovine $S(t)$ za svako vrijeme $0 \leq t \leq T$. Zbog nepredvidive prirode kretanja cijena imovine, $S(t)$ će biti slučajna promjenljiva za svako t. Iako se cijena imovine obično zaokružuje na jednu ili dvije decimale, ovdje pretpostavljamo da neka imovina može imati bilo koju cijenu ≥ 0.

U radu će se naći izraz za relativnu promjenu u intervalu vremena δt i onda pustiti da $\delta t \to 0$ da bi se dobio izraz koji važi za proizvoljno t.

3.2.1 Diskretni model imovine

Kao početnu tačku za model, treba napomenuti da promjena vrijednosti bezrizičnog ulaganja u malom vremenskom intervalu δt može da se modelira kao

$$D(t + \delta t) = D(t) + r\delta t D(t) \tag{3.2}$$

gdje je r kamatna stopa. Da bi se uračunale tipične, nepredvidive promjene u cijeni imovine, dodaje se slučajni element toj jednačini. Vidjeli smo, u prvom dijelu, da hipoteza efikasnog tržišta kaže da trenutna cijena imovine reflektuje sve informacije poznate ulagačima pa je svaka promjena cijene posljedica novih informacija. To se može ugraditi u model tako što se doda slučajni „fluktuacijski“ porast jednačini kamatne stope i čineći te poraste nezavisnima za različite podintervale. Da bismo to precizirali, neka $t_i = i\delta t$, pa se cijena imovine određuju u diskretnim tačkama (t_i). (Tada se za $\delta t \to 0$ dobija model cijene imovine u $0 \leq t \leq T$). Naš diskretni model glasi

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + \mu\delta t S(t_i) + \sigma\sqrt{\delta t} Y_i S(t_i) \tag{3.3}$$

gdje je

- μ konstantni parameter. (Obično je $\mu > 0$ pa $\mu\delta t S(t_i)$ predstavlja opšti uzlazni tok strujanja (*drift*) cijene imovine. Parametar μ ima istu ulogu kao kamatna stopa r u (3.2))
- $\sigma \geq 0$ je konstantni parametar koji određuje jačinu slučajnih fluktuacija (kolebanja).
- $Y_0, Y_1, Y_2, ...$ su nezavisne i jednako raspodijeljene slučajne promjenljive sa normalnom raspodjelom N(0,1).

Važno je da se naglasi nekoliko činjenica:

1. Pošto je N(0,1) slučajna promjenljiva simetrična oko izvora, faktor fluktuacije $\sigma\sqrt{\delta t} Y_i$ će sa istom vjerovatnoćom da bude pozitivan ili negativan, a vjerovatnoća da leži u intervalu $[a, b]$ je ista kao vjerovatnoća da leži u intervalu $[-b, -a]$.
2. Prisustvo faktora $\sqrt{\delta t}$ pokazalo se neophodno za egzistenciju limesa, tj. za prelaz na neprekidni model.

3. Izbor normalne raspodjele za Y_i nije proizvoljan – na osnovu centralne granične teoreme, dolazi se do istog neprekidnog modela za $S(t)$ ako pretpostavimo da su $\{Y_i\}_{i\geq 0}$ bili nezavisne i jednako raspodijeljene slučajne promjenljive sa nultim matematičkim očekivanjem i jediničnom disperzijom.

Parametar μ u (3.3) se obično naziva strujanje (*drift*), a σ se naziva *volatilnost.* Model je statistički isti ako se σ zamijeni sa $-\sigma$. Obično se uzima da je $\sigma \geq 0$. Tipične vrijednosti za σ leži između 0.05 i 0.5, tj. 5% i 50% volatilnosti. Pošto vrijeme mjerimo u godinama, jedinice σ^2 su za jednu godinu. Parametar toka (*drift*) μ je obično između 0.01 i 0.1, ali će njegova vrijednost da se pokaže nebitna u vrednovanju neke opcije.

3.2.2 Neprekidni model imovine

Posmatrajmo vremenski interval $[0,t]$ pri čemu je $t = L\delta t$. Znamo da $S(0) = S_0$, a diskretni model (3.3) nam daje izraze za $S(\delta t), S(2\delta t), \dots, S(L\delta t = t)$. Plan je da pustimo da $\delta t \to 0$, a odatle i da $L \to \infty$, da bismo dobili izraz za $S(t)$.

Diskretni model (3.3) kaže da se u svakom δt vremenskom intervalu cijena imovine množi faktorom $1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}Y_i$, i daje

$$S(t) = S_0 \prod_{i=0}^{L-1}\left(1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}Y_i\right)$$

Dijeljenje prethodne jednačine sa S_0 i logaritmovanje daje

$$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \sum_{i=0}^{L-1}\log\left(1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}Y_i\right) \tag{3.4}$$

U garničnom procesu kada $\delta t \to 0$, iskoristićemo aproksimaciju $\log(1+\epsilon) \approx \epsilon - \epsilon^2/2 + \cdots$, za malo ϵ. Javljaju se tehnički problemi koje treba prevazići. Veličina Y_i u (3.3) je slučajna promjenljiva, ne samo realan broj, ali će se pokazati da je ono što ćemo da uradimo opravdano jer je matematičko očekivanje $\mathbb{E}(Y_i^2)$ konačno. Dakle, koristeći aproksimaciju logaritma, dobijamo

$$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \approx \sum_{i=0}^{L-1}\left(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}Y_i - \frac{1}{2}\sigma^2\delta t Y_i^2\right) \tag{3.5}$$

pri čemu su zanemarljivi izrazi koji uključuju sabirke reda većeg ili jednakog od $\delta t^{3/2}$.

Centralna granična teorema sugeriše da će se $\log(S(t)/S_0)$ u (3.5) ponašati kao normalna slučajna promjenljiva sa matematičkim očekivanjem $L\left(\mu\delta t - {}^1\!/_2\,\sigma^2\delta t\right) = \left(\mu - {}^1\!/_2\,\sigma^2\right)t$ i disperzijom $L\sigma^2\delta t = \sigma^2 t$, tj. aproksimativno,

$$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim \mathrm{N}\left(\left(\mu - {}^1\!/_2\,\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) \qquad (3.6)$$

Na osnovu tih argumenata, izraz za cijenu imovine u vremenu t postaje

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \qquad \text{gdje je } Z \sim \mathrm{N}(0,1) \qquad (3.7)$$

Možemo pretpostaviti da se posmatraju promjene cijena imovine u vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$, gdje je $t_2 > t_1$. Dakle, imamo

$$\log\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) \sim \mathrm{N}\left(\left(\mu - {}^1\!/_2\,\sigma^2\right)(t_2 - t_1), \sigma^2\,(t_2 - t_1)\right)$$

Ključno je da će, u nepreklapajućim vremenskim intervalima, normalne slučajne promjenljive koje opisuje te promjene, biti **nezavisne**. To slijedi iz toga što su slučajne promjenljive Y_i u (3.3) nezavisne i jednako raspodijeljene. Odatle, za $t_3 > t_2 > t_1$ imamo

$$\log\left(\frac{S(t_3)}{S(t_2)}\right) \sim \mathrm{N}\left(\left(\mu - {}^1\!/_2\,\sigma^2\right)(t_3 - t_2), \sigma^2\,(t_3 - t_2)\right)$$

i ova slučajna veličina je nezavisana sa $\log\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right)$.
Tako možemo da opišemo evoluciju cijene imovine u vremenskim trenutcima $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_m$ sa

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_i}, \qquad (3.8)$$

za nezavisne i jednako raspodijeljene slučajne promjenljive $Z_i \sim \mathrm{N}(0,1)$.

3.2.3 Lognormalna raspodjela

Slučajna promjenljiva $S(t)$ oblika (3.7) ima tzv. lognormalnu raspodjelu. Uočimo iz (3.7) da pošto $S_0 > 0, S(t)$ je pozitivno za svako t, tj. $\mathbb{P}(S(t) > 0) = 1$, za svako $t > 0$. Odgovarajuća funkcija gustine za $S(t)$ je

$$f(x) = \frac{exp\left(\frac{-(\log(x/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)t)^2}{2\sigma^2 t}\right)}{x\sigma\sqrt{2\pi t}}, za\ x > 0 \qquad (3.9)$$

uz $f(x) = 0, za\ x \leq 0$.

Matematičko očekivanje, drugi moment i disperzija slučajne promjenljive $S(t)$ sa ovim modelom, imaju sledeće vrijednosti:

$$\mathbb{E}\big(S(t)\big) = S_0 e^{\mu t}, \qquad (3.10)$$

$$\mathbb{E}(S(t)^2) = S_0^2 e^{(2\mu+\sigma^2)t}, \tag{3.11}$$

$$\mathrm{var}\big(S(t)\big) = S_0^2 e^{2\mu t}\big(e^{\sigma^2} - 1\big). \tag{3.12}$$

Napomena. Proces $S(t)$ može se posmatrati kao rješenje jedne stohastičke diferencijalne jednačine ali takav pristup zahtijeva korišćenje složene teorije SDJ.

3.2.4 Karakteristike modela imovine

Određeni utisak o neprekidnoj slučajnoj promjenljivi možemo da dobijemo ispitivanjem njenih intervala pouzdanosti. Pretpostavimo da

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 0.95.$$

Onda kažemo da je $[a, b]$ 95% pouzdani interval za X. U slučaju kad je X normalna slučajna promjenljiva, postoji jednostavna formula za inverziju funkcije raspodjele $\mathrm{N}(x)$ u formuli $\mathrm{N}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ pa se odatle intervali pouzdanosti moraju računati numerički. U odgovarajućim tablicama, napravljenim po tim numeričkim proračunima, nalazimo

$$\mathbb{P}(|X| \leq 1.96) = 0.95 \tag{3.13}$$

pa $[-1.96, 1.96]$ je 95% pouzdani interval za slučajnu promjenljivu X sa raspodjelom $\mathrm{N}(0,1)$. Uopšteno, za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, imamo $(Y - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$ pa

$$\mathbb{P}(\mu - 1.96\sigma \leq Y \leq \mu + 1.96\sigma) = 0.95 \tag{3.14}$$

i stoga je $[\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma]$ 95% pouzdani interval. Taj se rezultat često izražava sa sledećom konstatacijom

za nezavisne i jednako raspodijeljene normalne slučajne promjenljive, 95 od 100 promjenljivih leži između dvije standardne devijacije oko srednje vrijednosti.

Iz (3.6) slijedi da je

$$\left[S_0 e^{-1.96\sqrt{t} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}, S_0 e^{1.96\sqrt{t} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}\right] \tag{3.15}$$

95% pouzdan interval za cijenu imovine $S(t)$. Ako je t malo, onda

$$e^{-1.96\sqrt{t} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \approx e^{-1.96\sqrt{t}} \approx 1 - 1.96\sigma\sqrt{t}$$

i

$$e^{1.96\sqrt{t} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \approx e^{1.96\sqrt{t}} \approx 1 + 1.96\sigma\sqrt{t}$$

Tako je interval pouzdanosti približno

$$\left[S_0\left(1-1.96\sigma\sqrt{t}\right), S_0\left(1+1.96\sigma\sqrt{t}\right)\right].$$

Veličina tog intervala je $2S_0 1.96\sqrt{t}$. Ako taj interval posmatramo kao mjeru nesigurnosti u buduću cijenu imovine, onda rezultat objašnjava osnovno pravilo (*traders' rule-of-thumb*) da

u malim vremenskim periodima, nesigurnost raste kao kvadratni korijen vremena.

Iako se vrednovanje opcije tiče samo cijene imovine u konačnom segmentu, $[0, T]$, zanimljivo je pogledati kakvo dugotrajno ponašanje predviđa taj model. Pošto su μ i σ pozitivni, iz (3.11) slijedi

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(S(t)^2) = \infty, \quad \text{jer } t \to \infty.$$

Sa druge strane, veličina $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t$ dominira nad $\sigma\sqrt{t}\, Z$ u (3.7), pa, sa vjerovatnoćom 1,

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = \begin{cases} \infty, & \text{ako } \mu - \dfrac{1}{2}\sigma^2 > 0, \\ 0 & \text{ako } \mu - \dfrac{1}{2}\sigma^2 < 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Prema ovom modelu, ako je volatilnost dovoljno velika ($\sigma^2 \geq 2\mu$), tada će sa vjerovatnoćom 1, cijena imovine opadati ka nuli.

3.3 Model vrijednosti imovine: II dio

3.3.1 Kriva kretanja imovine

Nakon što smo izveli model, sada možemo iskoristiti (3.8) i za razvoj kompjuterske simulacije cijena imovine. Pretpostavimo da želimo izračunati vrijednosti $S(t)$ u određenim tačkama $\{t_i\}_{i=0}^{K}$ pri čemu je $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots t_K = T$. Imamo:

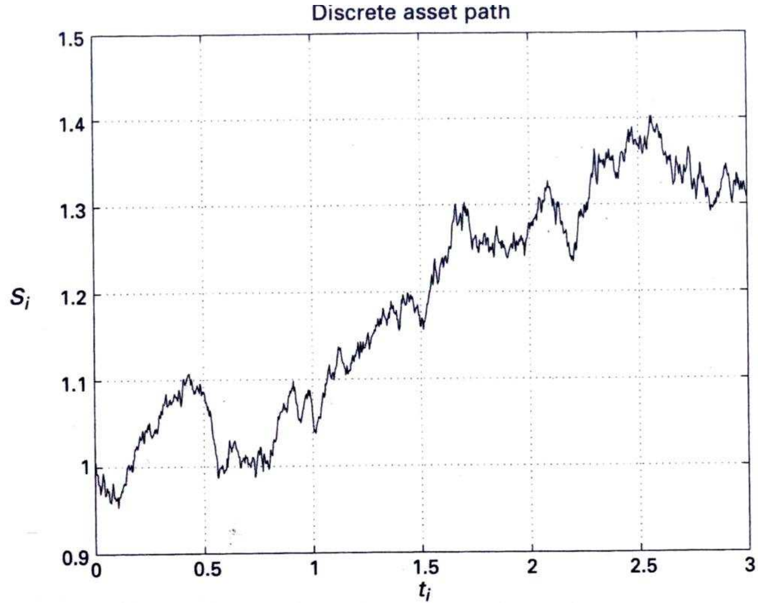
$$S_{i+1} = S_i e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1}-t_i)+\sigma\sqrt{t_{i+1}-t_i}\xi_i}, \tag{3.17}$$

gdje je svaki ξ_i slučajna promjenljiva iz N(0,1) generatora pseudo-slučajnog broja. Rezultantne tačke (t_i, S_i) oblikuju *diskretno kretanje imovine.*

Računski primjer. Slika 3.4 prikazuje rezultate kretanja sa 10^3 ravnomjerno raspoređenih tačaka u $[0,3]$. Uzećemo da je $S_0 = 1, \mu = 0.05\ i\ \sigma = 0.1$. Slika je dobijena uobičajnim spajanjem tačaka (t_i, S_i). U cjelini, rezultirajuća slika se kvalitativno slaže sa tipičnim prikazima cijene imovine, kao što su oni na slikama 3.1 i 3.2.

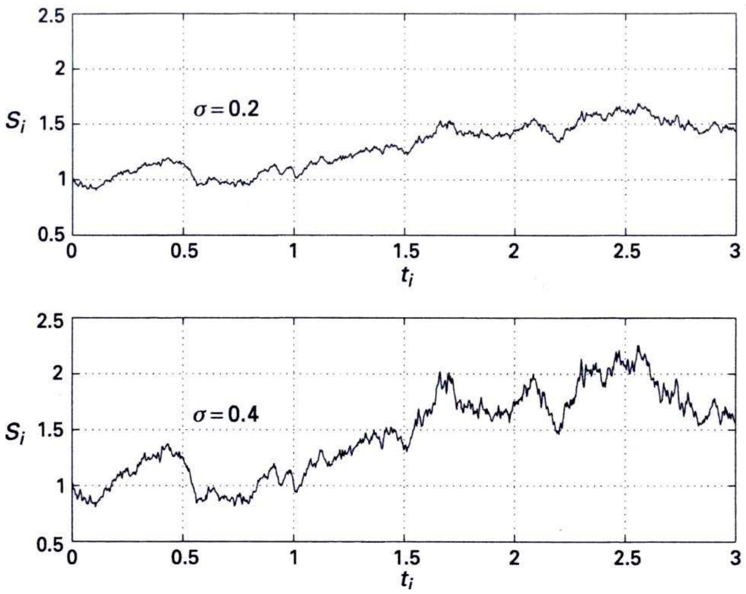
Slika sugeriše da tačke leže na neprekidnoj, ali „nazubljenoj“ krivoj. Taj koncept može da se formalizuje. Sa jedne strane pokazuje se da će, sa vjerovatnoćom 1, kretanje imovine koje se dobija kada $\delta t \to 0$ biti neprekidna funkcija od t. Sa druge strane, pokazuje se i da, sa vjerovatnoćom 1, to kretanje neće imati strogo definisanu tangentu ni u jednoj tački.

Od originalnog diskretnog modela (3.3) očekivali bismo da povećavanjem parametra volatilnosti σ će se pojačati „nazubljenost“. Na sljedećem računskom primjeru testiran je taj efekat.



Slika 3.4: Diskretno kretanje imovine iz formule (3.17). Diskretne tačke povezane pravim linijama daju utisak neprekidne krive.

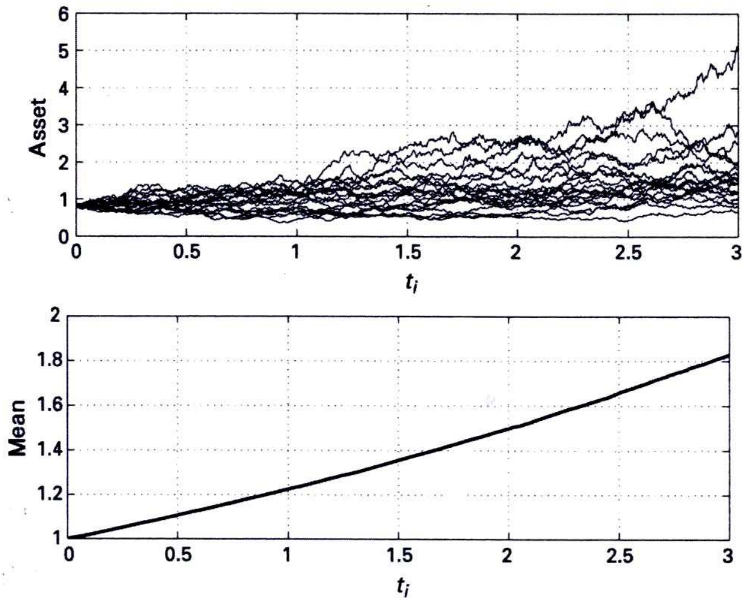
Računski primjer. Slika 3.5 prikazuje kretanje imovine izračunato sa istim parametrima kao na slici 3.4, osim što je na gornjoj slici $\sigma = 0.2$, dok je na donjoj slici $\sigma = 0.4$. U oba slučaja korišćen je isti niz pseudo-slučajnih brojeva $\{\xi_i\}$. Rezultati potvrđuju da parametar volatilnosti σ “kontroliše“ nazubljenost tog kretanja.



Slike 3.5: Dva diskretna kretanja imovine u formuli (3.17). Donja slika ima veću volatilnost.

Iako pojedina kretanja imovine nisu glatke funkcije, iz (3.10) matematičko očekivanje $S(t)$ je glatka funkcija. To se potvrđuje u sljedećem računskom primjeru.

Računski primjer. Račun je pravljen za $\mu = 0.2$ i $\sigma = 0.3$ sa 10^3 jednako raspoređenih vremenskih tačaka intervala [0,3]. U svakom od njih korišćeni su različiti generatori slučajnih brojeva. Gornji crtež na slici 3.6 pokazuje 20 kretanja. Donja slika se odnosi na uzoračku sredinu. Vidi se da je ta uzoračka sredina zaista glatka; vizualno je nerazdvojiva od tačnog matematičkog očekivanja $S_0 e^{\mu t}$ izvedenog u (3.10).



Slika 3.6: Gornja slika: 20 diskretnih kretanja imovine. Donja slika: uzoračka sredina

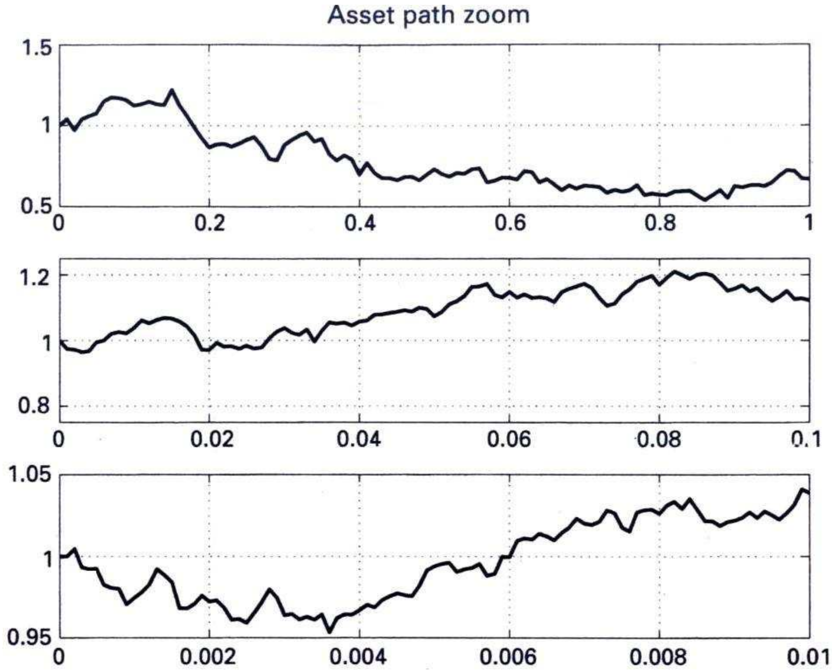
3.3.2 Nepromjenljivost u vremenskim intervalima (*timescale invariance*)

Sljedeći računski primjer otkriva ključnu karakteristiku modela cijene imovine. *Nazubljenost izgleda isto u rasponu različitih vremenskih okvira.* Drugim riječima, zumiranje i odaljavanje slike pokazuje isto kvalitativno ponašanje. Isti efekat se vidi kada se sa dnevnih pređe na sedmične podatke na slikama 3.1 i 3.2.

Računski primjer. Da bi se dobila slika 3.7, izračunate su promjene imovine za $S_0 = 1, \mu = 0.05$ i $\sigma = 0.5$ pri jednako raspoređenim tačkama u [0,1] sa međusobnom udaljenošću 10^{-4}. Uz pomoć tih podataka, napravljene su tri slike. Svaka slika prikazuje promjene pri 100 jednako raspoređenih vremenskih tačaka.

- Gornji crtež pokazuje kretanje u 100 ravnomjerno raspoređenih tačaka u [0,1].
- Srednji crtež pokazuje kretanje u 100 ravnomjerno raspoređenih tačaka u [0,0.1].
- Donji crtež pokazuje kretanje u 100 ravnomjerno raspoređenih tačaka u [0,0.01].

Vidimo da zumiranje krive promjena na taj način ne otkriva nikakve razlike u kvalitativnim karakteristikama – put je „nazubljen“ u svim vremenskim intervalima.



Slika 3.7: Isto kretanje imovine uzrokovano na različitim skalama. Gornja slika: 100 uzoraka preko intervala [0,1]. Srednja slika: 100 uzoraka preko [0,0.1]. Donja slika: 100 uzoraka preko [0,0.01].

Da bi se razumjelo zašto slike imaju tu „stabilnost u vremenskim intervalima“ treba se vratiti na diskretni model (3.3) i razmotriti

- mali vremenski interval δt
- veoma mali vremenski interval $\widehat{\delta t} = \delta t / L$ pri čemu je L veliki cijeli broj (≥ 10). (Na slici 3.7 se koristi vrijednost $L = 10$)

Koristeći (3.3) dobijamo

$$S(\widehat{\delta t}) - S_0 = S_0 \left(\mu\widehat{\delta t} + \sigma\sqrt{\widehat{\delta t}}Y_0\right) = S_0 \, N(\mu\widehat{\delta t}, \sigma^2\widehat{\delta t}) \tag{3.18}$$

Od vremena $t = 0$ do $t = \delta t$ takva povećanja rezultiraju sa

$$S(\delta t) - S_0 = \sum_{i=0}^{L-1}\left(S\left((i+1)\widehat{\delta t}\right) - S(i\widehat{\delta t})\right) = \sum_{i=0}^{L-1} S(i\widehat{\delta t})\left(\mu\widehat{\delta t} + \sigma\sqrt{\widehat{\delta t}}Y_i\right).$$

Aproksimacijom svakog $S(i\widehat{\delta t})$ sa S_0 i koristeći centralnu graničnu teoremu dolazimo do zaključka da važi

$$S(\delta t) - S_0 \approx S_0\sum_{i=0}^{L-1}\left(\mu\widehat{\delta t} + \sigma\sqrt{\widehat{\delta t}}Y_i\right) = S_0 N(\mu L\widehat{\delta t}, \sigma^2 L\widehat{\delta t}) = S_0 N(\mu\delta t, \sigma^2\delta t),$$

što daje (3.18) ali za duži vremenski period δt.

3.3.3 Prinosi sume kvadrata

Ranije smo uveli koncept prinosa imovine; to je jednostavno relativna promjena cijene. Za male $\delta t = t_{i+1} - t_i$, diskretni model (3.3) pretpostavlja da

$$\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)} = \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}Y_i, \tag{3.19}$$

pa je prinos sa raspodjelom $N(\mu\delta t, \sigma^2\delta t)$ slučajna promjenljiva. Tada za proizvoljno a i b , možemo izračunati vjerovatnoću da prinos u sljedećem intervalu leži između a i b, ali, naravno, ne možemo da predvidimo sa bilo kakvom sigurnošću, koliki će da bude stvarni prinos.

Za razliku od nesigurnih predviđanja prinosa, možemo pokazati da su sume kvadrata prinosa **predvidivi.** Pretpostavimo da je interval $[0, t]$ podijeljen na veliki broj ravnomjerno raspoređenih subintervala $[0, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3], \ldots, [t_{L-1}, t_L]$ pri čemu je $t_i = i\delta t$ i $\delta t = t/L$. Tada se, iz (3.19), dobija da je

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S(t_{i+1})-S(t_i)}{S(t_i)}\right)^2\right] = \sigma^2\delta t + \text{sabirci većeg reda od } \delta t, \tag{3.20}$$

i

$$\text{var}\left[\left(\frac{S(t_{i+1})-S(t_i)}{S(t_i)}\right)^2\right] = 2\sigma^4\delta t^2 + \text{sabirci većeg reda od } \delta t, \tag{3.21}$$

Dakle, pozivajući se na centralnu graničnu teoremu, $\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{S(t_{i+1})-S(t_i)}{S(t_i)}\right)^2\right)$ se treba ponašati kao $N(L\sigma^2\delta t, L2\sigma^4\delta t^2)$, tj. $N(\sigma^2 t, 2\sigma^4 t\delta t)$. Ta slučajna promjenljiva ima disperziju proporcionalnu sa δt pa je u suštini konstantna. Na taj način, iako su individualni prinosi nepredvidivi, sume kvadrata prinosa uzet kroz veliki broj malih intervala približno je jednak $\sigma^2 t$.

4
Black-Scholes model

4.1 Black-Scholesova parcijalna diferencijalna jednačina[5] i formula

Do sada smo definisali šta podrazumijevamo pod evropskom call ili put opcijom na određenu imovinu i razvili smo model kretanja cijena imovine. Sve je spremno za prelazak na ključno pitanje: kolika je vrijednost jedne opcije? Preciznije :

možemo li sistematično odrediti fer vrijednost opcije u trenutku $t = 0$?

Odgovor je, naravno, potvrdan ako se prihvate određene pretpostavke. Iako je osnovni cilj vrednovanje opcije u trenutku $t = 0$ cijenom imovine $S(0) = S_0$, tražićemo funkciju $V(S,t)$ koja daje vrijednost opcije za svaku vrijednost imovine $S \geq 0$ u bilo kojem trenutku $t \epsilon [0,T]$. Osim toga, pretpostavljamo da ta opcija može da bude kupljena i prodata po toj vrijednosti na tržištu u bilo kojem trenutku $0 \leq t \leq T$. U tom slučaju, $V(S_0, 0)$ je zahtijevana početna vrijednost opcije. Pretpostavićemo da takva funkcija $V(S,t)$ postoji i da je glatka po obje promjenljive, u smislu da postoje izvodi po tim promjenljivima. U poglavlju 3.3.1 rečeno je da $S(t)$ nije glatka funkcija od t - ona je nazubljena, nema prvi izvod. Međutim, sasvim je moguće da vrijednost opcije $V(S,t)$ bude glatka po promjenljivima S i t.

Analize će nas dovesti do proslavljene Black-Scholesove parcijalne diferencijalne jednačine (PDJ) za funkciju V. Taj je pristup je prilično opšti, a Black-Scholesova PDJ važi u slučajevima kada $V(S,t)$ odgovara vrijednosti evropske call ili put opcije.

Ključni pojam u ovom poglavlju je pojam *hedžing*. Hedžing je i praktično i teorijsko važno sredstvo za eliminisanje rizika, a naredno poglavlje je posvećeno konkretnim računskim primjerima koji pokazuju kako to funkcionišu u praksi.

4.1.1 Suma kvadrata za cijenu imovine

Posmatraćemo dva vremenska okvira

- *Mali* vremenski interval koji je određen promjenom vremena Δt, i

[5] Eng skraćenica PDE (partial differential equation)

- *Veoma mali* vremenski interval određen promjenom vremena $\delta t = \Delta t / L$ gdje je L cio broj

Neka je $S(t) \geq 0$ cijena imovine u nekom trenutku $t \epsilon [0, T]$. Posmatrajmo mali vremenski interval $[t, t + \Delta t]$. On se razlaže na jednake, veoma male podintervale dužine δt dajući $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{L-1}, t_L]$ pri čemu je $t_0 = t, t_L = t + \Delta t$ i, opšte, $t_i = t + i\delta t$.
Izrazom

$$\delta S_i := S(t_{i+1}) - S(t_i)$$

ćemo označiti promjenu u cijeni imovine kroz veoma malu promjenu vremena. Prije nego što pokušamo da izvedemo Black-Scholesovu PDJ, treba utvrditi preliminarni rezultat o rastu sume kvadrata $\sum_{i=0}^{L-1} \delta S_i^2$. Slična analiza je sprovedena u poglavlju 3.3.3 za sume kvadrata prinosa, $\sum_{i=0}^{L-1} (\delta S_i / S(t_i))^2$.

Vraćajući se na diskretan model (3.2.1), dobijamo

$$\delta S_i = S(t_i)\left(\mu \delta t + \sigma \sqrt{\delta t} Y_i\right)$$

gdje su Y_i nezavisne slučajne promjenljive sa normalnom raspodjelom $N(0,1)$. Tada je

$$\sum_{i=0}^{L-1} \delta S_i^2 = \sum_{i=0}^{L-1} S(t_i)^2 \left(\mu^2 \delta t^2 + 2\mu\sigma\delta t^{\frac{3}{2}} Y_i + \sigma^2 \delta t Y_i^2\right). \qquad (4.1)$$

Sada ovo sumiranje prilagođavamo centralnoj graničnoj teoremi[6] tako što svaku $S(t_i)$ mijenjamo sa $S(t)$. Takva aproksimacija, daje:

$$\sum_{i=0}^{L-1} \delta S_i^2 \approx S(t)^2 \sum_{i=0}^{L-1} \left(\mu^2 \delta t^2 + 2\mu\sigma\delta t^{\frac{3}{2}} Y_i + \sigma^2 \delta t Y_i^2\right). \qquad (4.2)$$

Računanje matematičkog očekivanja i disperzije slučajnih promjenljivih u sumi i pozivanje na centralnu graničnu teoremu sugeriše približnu jednakost

$$\sum_{i=0}^{L-1} \delta S_i^2 \sim S(t)^2 N(\sigma^2 L \delta t, 2\sigma^4 L \delta t^2) = S(t)^2 \mathrm{N}(\sigma^2 \Delta t, 2\sigma^4 \Delta t \delta t). \qquad (4.3)$$

Budući da je δt veoma malo, disperzija u posljednjoj jednakosti je zanemarljiva što nas vodi do zaključka da je

[6] Eng. Central Limit Theorem

$$\sum_{i=0}^{L-1} \delta S_i^2 \approx S(t)^2\sigma^2\Delta t. \tag{4.4}$$

Korak u kojemu se svaka $S(t_i)$ u (4.1) zamjenjuje sa $S(t)$ može da se opravda na sljedeći način. Model (3.8) pokazuje da

$$S(t_i) = S(t)e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)i\delta t+\sigma\sqrt{i\delta t}Z} \qquad \text{za neke } Z\sim N(0,1)$$

Ako koristimo $e^x \approx 1 + x$ za malo x, dobićemo

$$S(t_i) \approx S(t)\left(1 + \sigma\sqrt{i\delta t}Z\right)$$

A pošto je $i\delta t \leq L\delta t = \Delta t$, možemo pisati,

$$S(t_i) - S(t) = O\left(\sqrt{\Delta t}\right)$$

Aproksimacija svake $S(t_i)$ sa $S(t)$ unosi grešku koja je grubo proporcionalna sa $\sqrt{\Delta t}$. Iz tog razloga može se tvrditi da zamjena svake $S(t_i)$ u (4.1) sa $S(t)$ neće uticati na aproksimaciju (4.4). To je još daleko od čvrstog argumenta – Z je slučajna promjenljiva, nije samo realni broj – ali može se dokazati da je sveukupni zaključak ispravan.

4.1.2 Hedžing

Za određivanje fer vrijednost opcije, treba sastaviti *replikujući portfolio* koji je kombinacija imovine i gotovog novca, koji ima *potpuno jednak rizik* kao opcija, u svakom trenutku. Portfolio će se sastojati od gotovinskog depozita D i broja A jedinica imovine. Neka D i A budu funkcije cijne imovine S i vremena t. Vrijednost portfolija, označena sa Π, jednaka je

$$\Pi(S,t) = A(S,t)S + D(S,t) \tag{4.6}$$

Moramo navesti kako će vrijednosni papir $A(S,t)$ i gotovinski depozit $D(S,t)$ varirati uz S i t. Prije nego što pređemo na detalje, koristiće nam da se podsjetimo nekih osnovnih pretpostavki koje su postavljene i o kojima smo ranije govorili:

- nema troškova transakcije (*frictionless market hypothesis*),
- kupovina i prodaja imovine može da se odvija u svakom trenutku,
- dozvoljava se „kratka“ tj. nepokrivena prodaja[7],
- ne plaćaju se dividende,
- kamatna stopa *r* je konstantna,
- trgovina imovinom (i opcijama) može se dešavati u neprekidnom vremenu.

[7] eng. short selling

Da bi se izbjegle nečitljivo duge jednačine, uvodi se i kraći način označavanja. Indeks i označava evaluaciju funkcije u $\left(S(t_{i,}), t_i\right)$ pa

$$V_i \text{ znači } V(S(t_i), t_i), \ \Pi_i \text{ znači } \Pi(S(t_i), t_i), \text{ itd.}$$

Odsustvo indeksa označava vrijednost u $(S(t), t)$, pa

$$V \text{ znači } V(S(t), t), \ \Pi \text{ znači } \Pi(S(t), t), \text{ itd.}$$

Simbol δ označava razliku u vremenskom intervalu trajanja δt pa

- δS_i znači $S(t_{i+1}) - S(t_i)$,
- δV_i znači $V(S(t_{i+1}), t_{i+1}) - V(S(t_i), t_i)$,
- $\delta \mathit{\Pi}_i$ znači $\Pi(S(t_{i+1}), t_{i+1}) - \Pi(S(t_i), t_i)$,
- $\delta(V - \Pi)_i$ znači $\delta V_i - \delta \Pi_i$, itd.

Strategija za portfolio (4.6) je da se količina imovine održi konstantnom u svakom malom vremenskom intervalu δt. Slijedi da tada promjena u vrijednosti portfolija ima dva izvora.

1. Fluktuacija cijene imovine. Promjena δS_i izaziva promjenu $A_i \delta S_i$ u vrijednosti portfolija.
2. Stečena kamata na gotovinski depozit. Koristeći diskretnu verziju možemo zapisati taj doprinos promjeni portfolija kao $r D_i \delta t$.

Sve zajedno daje

$$\delta \Pi_i = A_i \delta S_i + r D_i \delta t \tag{4.7}$$

Budući da se pretpostavlja da je V glatka funkcija od S i t, razvoj u Taylorov red daje

$$\delta V_i \approx \frac{\partial V_i}{\partial t} \delta t + \frac{\partial V_i}{\partial S} \delta S_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} \delta S_i^2 \tag{4.8}$$

Zadržali smo izraz δS_i^2 u (4.8) jer iskustvo iz prethodna dva poglavlja sugeriše da će se time dobiti doprinos veličine proporcionalne δt. Oduzimajući (4.7) od (4.8), da bismo uporedili promjenu u portfoliju sa promjenom vrijednosti imovine, dolazimo do

$$\delta(V - \Pi)_i \approx \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} - r D_i\right) \delta t + \left(\frac{\partial V_i}{\partial S} - A_i\right) \delta S_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} \delta S_i^2 \tag{4.9}$$

Cilj je da portfolio replikuje opciju tako da je razlika među njima predvidiva. Nepredvidivi izraz δS_i možemo eliminisati iz (4.9) postavljanjem

$$A_i = \frac{\partial V_i}{\partial S} \tag{4.10}$$

a u tom slučaju je

$$\delta(V-\Pi)_i \approx \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} - rD_i\right)\delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\delta S_i^2 \tag{4.11}$$

Konačni korak u eliminisanju slučajnosti je da dodavanje tih razlika za $0 \le i \le L-1$ i korišćenje (4.4) pokazuje da suma δS_i^2 nije slučajna.

Prije nego što nastavimo sa tim korakom, objasnimo šta (4.10) znači u praksi. Ako je moguće odrediti funkciju V, tada je moguće nju diferencirati po S da bi se specifirala strategija za ažuriranje portfolija. Na kraju koraka od t_i do t_{i+1}, vrši se rebalans vrijednosnih papira $A_{i+1} = \partial V_{i+1}/\partial S$. To može uključivati prodaju (ako $\partial V_{i+1}/\partial S > \partial V_i/\partial S$) ili kupovinu (ako $\partial A_{i+1}/\partial S > \partial A_i/\partial S$) neke količine imovine. Želimo da portfolio bude samofinansirajući; ne želimo dodavati ili oduzimati novac. To može da se postigne korišćenjem gotovinskog računa za ažuriranje finansiranja, rebalans imovine se reflektuje odgovarajućom promjenom od D_i do D_{i+1}. Taj pojam neprestanog podešavanja portfolija radi redukovanja ili uklanjanja rizika poznat je kao *hedžing*.

4.1.3 Black-Scholesova PDJ

Ako sa $\Delta(V-\Pi)$ označimo promjenu u $V-\Pi$ od vremena t do $t+\Delta t$ tj.

$$\Delta(V-\Pi) = V(S(t+\Delta t), t+\Delta t) - \Pi(S(t+\Delta t), t+\Delta t) - \big(V(S(t),t) - \Pi(S(t),t)\big)$$

tada sumiranjem (4.11) dobijamo

$$\Delta(V-\Pi) \approx \sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} - rD_i\right)\delta t + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2}\,\delta S_i^2 \tag{4.12}$$

Kako su V i D glatke funkcije, zamijenićemo argumente $S(t_i), t_i$ u $\partial V_i/\partial t$, D_i i $\partial^2 V_i/\partial S^2$ sa $S(t), t$ slično kao u aproksimaciji korišćenoj u (4.1). Dakle, koristeći $L\delta t = \Delta t$, imamo:

$$\Delta(V-\Pi) \approx \left(\frac{\partial V}{\partial t} - rD\right)\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sum_{i=0}^{L-1}\delta S_i^2$$

Sada, koristeći (4.4) i puštajući $\delta t \to 0$, možemo pisati

$$\Delta(V-\Pi) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} - rD + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\Delta t \tag{4.13}$$

Na kraju, budući da ta promjena u portfoliju $V-\Pi$ nije slučajna, ona mora da bude jednaka odgovarajućem rastu koji nudi bezrizična kamatna stopa, pa

$$\Delta(V-\Pi) = r\Delta t(V-\Pi) \tag{4.14}$$

To slijedi iz principa nepostojanja arbitraže. Ako je $\Delta(V-\Pi) > r\Delta t(V-\Pi)$ tada se može imati zagarantovani profit veći od onoga koji nudi bezrizična kamatna stopa tako što će se

(i) formirati portfolio $V-\Pi$ u trenutku t – kupiti opciju za V na tržištu i prodati portfolio Π (tj. kratka prodaja A jedinica imovine i pozajmica D količine novca) i
(ii) prodati portfolio $V-\Pi$ u trenutku $t+\Delta t$.

Slično, ako je $\Delta(V-\Pi) < r\Delta t(V-\Pi)$ tada možemo imati zagarantovani profit veći od onoga koji nudi bezrizična kamatna stopa tako što ćemo

(i) prodati portfolio $V-\Pi$ u trenutku t – prodati opciju za V na tržištu i kupiti portfolio Π (tj. kupiti A jedinica imovine i pozajmiti jednu D količinu novca) i
(ii) kupiti portfolio $V-\Pi$ u trenutku $t+\Delta t$.

Sada, kombinujući formule (4.6), (4.13) i (4.14) dobijamo

$$\frac{\partial V}{\partial t} - rD + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r(V - AS - D).$$

Koristeći $A = \partial V/\partial S$ iz (4.10) i preuređivanjem, dolazimo do

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \qquad (4.15)$$

Ovo je poznata **Black-Scholesova parcijalna diferencijalna jednačina (PDJ)**. Ona predstavlja odnos između V, S, t i određenih parcijalnih izvoda funkcije V.
Važno je istaći još dvije stvari.

1. Parametar toka μ se u modelu imovine ne pojavljuje u PDJ.
2. Nismo još precizirali koji se tip opcije vrednuje. PDJ mora da bude zadovoljena za **svaku** opciju S čija se vrijednost može izraziti kao neka glatka funkcija $V(S,t)$.

S obzirom na tačku 2., da bi se dobilo jedinstveno rješenje $V(S,t)$ treba uključiti druge uslove o određenoj opciji. Kao što je slučaj sa mnogim diferencijalnim jednačinama, oni će se formirati za krajeve domena $0 \le S, 0 \le t \le T$ na koje se odnosi problem.

Koristićemo $C(S,t)$ za označavanje vrijednosti Evropske *call* opcije. U tom slučaju je u trenutku $t = T$, isplata max $(S(T) - E, 0)$. To mora da bude vrijednost opcije u trenutku T. U suprotnom slučaju postoji očigledna mogućnost arbitraže. Tako je

$$C(S,T) = \max(S(T) - E, 0) \qquad (4.16)$$

Ako je cijena imovine u bilo kojem trenutku nula, iz (3.8) je jasno da $S(t)$ ostaje nula sve vrijeme pa je i na isteku isplata nula. Dakle, važi

$$C(0,t) = 0 \text{ , za svako } 0 \le t \le T \qquad (4.17)$$

U suprotnom slučaju, ako je cijena imovine u bilo kojem trenutku izuzetno visoka, veoma je vjerovatno da ostane takva i "potopi" izvršnu cijenu[8]. Dakle,

$$C(S,t) \approx S, \quad \text{za veliku vrijednost } S \tag{4.18}$$

Ograničenje (4.16) se naziva *krajnji uslov* jer se primjenjuje u krajnjem vremenu $t = T$. Napomenimo da se kod diferencijalnih jednačina češće sretaju početni uslovi, određeni pri $t = 0$. Druga ograničenja, (4.17) i (4.18) su poznata kao *granični uslovi*.

4.1.4 Black-Scholesove formule

Uslovi (4.16), (4.17) i (4.18) obezbjeđuju da Black-Scholesova PDJ (4.15), za vrijednost call opcije, ima jedinstveno rješenje. Rješenje je

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{4.19}$$

gdje $N(\cdot)$ je $N(0,1)$ funkcija raspodjele, definisana kao $N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds$, i

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{4.20}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{4.21}$$

Možemo takođe pisati

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{4.22}$$

Jednačina (4.19) prikazuje Black-Scholesovu formulu za vrijednost evropske call opcije. Moguće je konstruisati tu formulu rješavanjem PDJ (4.15) pod (4.16), (4.17) i (4.18).

Dobivši formulu za vrijednost evropske call opcije, možemo iskoristiti put – call paritet da bi se ustanovila vrijednost $P(S,t)$ evropske put opcije. U poglavlju 2.5 smo izveli relaciju (2.1) koja povezuje početne call i put vrijednosti. Ako $P(S,t)$ označava vrijednost put opcije pri cijeni imovine S i vremenu t, isti argument daje generalnu relaciju put-call pariteta

$$C(S,t) + Ee^{-r(T-t)} = P(S,t) + S \tag{4.23}$$

Kombinovanje (4.19) i (4.23) vodi do Black-Scholesove formule za vrijednost evropske put opcije

[8] eng. Exercise (strike) price

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}\big(1 - N(d_2)\big) + S(N(d_1) - 1)$$

Ova formula može da se pojednostavi na

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{4.24}$$

Alternativno, može se izvesti krajnje vrijeme i granični uslovi i pokušati da se riješi Black-Scholesova PDJ. Budući da je u trenutku $t = T$ isplata za *put* opciju max $(E - S(T), 0)$ imamo

$$P(S,T) = \max(E - S(T), 0) \tag{4.25}$$

Ako je cijena imovine ikada nula, tada $S(T) = 0$ i isplata u trenutku T će da bude E. Da bi se postigao $P(0,t)$, treba uzeti u obzir inflaciju i dobija se

$$P(0,t) = Ee^{-r(T-t)} \text{ za svako } 0 \leq t \leq T \tag{4.26}$$

Za izuzetno velike vrijednosti S gotovo sigurno je da će isplata biti nula pa

$$P(S,t) \approx 0 \quad \text{ za veliko } S \tag{4.27}$$

Računski primjer. Ako je $t = 0, S_0 = 5, E = 4, T = 1, \sigma = 0.03$ i $r = 0.05$, nalazimo, na četiri decimalna mjesta:

$d_1 = 1.0605,$
$d_2 = 0.7605,$
$N(d_1) = 0.8555,$
$N(d_2) = 0.7765,$
$N(-d_1) = 0.1445,$
$N(-d_2) = 0.2235.$

Odgovarajuće vrijednosti evropske *call* i *put* opcije su

$$C(5,0) = 1.3231\,, P(5,0) = 0.1280.$$

Relacija put-call pariteta provjerava se lako (2.1).

4.1.5 Rješenje Black-Scholesove jednačine u slučaju evropskih call opcija

Diferencijalna jednačina Black-Scholes u slučaju evropskih opcija rješava se dosta jednostavno. Ako u jednačini

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC \tag{4.28}$$

napravimo zamjenu promenljivih $C(S,\tau) \equiv B(S,\tau)e^{-r\tau}X$ dobija se jednačina oblika

$$-\frac{\partial B}{\partial \tau} + rS\frac{\partial B}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 B}{\partial S^2} = 0$$

gdje je $B(0,\tau)=0$ pri $\tau>0$ i $B(S,0)=\max(S/X-1{,}0)$ pri $S>0$. Zatim još jednom smjenom promenljivih $D(x.\tau)\equiv B(S,\tau), x\equiv(S/X)e^{rt}$ dobija se jednačina difuzije

$$-\frac{\partial D}{\partial\tau}+\frac{1}{2}(\sigma x)^2\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}=0$$

gdje je $D(0,\tau)=0$ za $\tau>0$ i $D(x,0)=\max(x-1{,}0)$ za $x>0$. Na kraju, poslije još jedne zamjene $u\equiv\sigma^2\tau$ dobija se da funkcija $H(x,u)\equiv D(x,\tau)$ zadovoljava jednačinu

$$-\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=0.$$

pri čemu je $H(0,u)=0$ za $u>0$ i $H(x,0)=\max(x-1{,}0)$ za $x>0$. Zaključna smjena $\Theta(z,u)x\equiv H(x,u)$ sa $z\equiv(u/2)+\ln x$ će nas dovesti do jednačine

$$-\frac{\partial\Theta}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0.$$

Granični uslovi za nju će biti nejednakost $|\Theta(z,u)|\le 1$ za $u>0$ i jednakost $\Theta(z,0)=\max(1-e^{-z},0)$.
Rješenje prethodne jednačine

$$\begin{aligned}\Theta(z,u)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi u}}\int_0^\infty(1-e^{-y})e^{-(z-y)^2/(2u)}dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi u}}\int_0^\infty e^{-(z-y)^2/(2u)}dy-\frac{1}{\sqrt{2\pi u}}\int_0^\infty e^{-y}e^{-(z-y)^2/(2u)}dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z/\sqrt{u}}^\infty e^{-\omega_1^2/2}\,d\omega_1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\int_{-(z-u)/\sqrt{u}}^\infty e^{-\omega_2^2/2}\,d\omega_2\\&=\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)-\frac{1}{x}\Phi\left(\frac{z-u}{\sqrt{u}}\right).\end{aligned}$$

koje se lako dobija korišćenjem formula za (jedinstveno) rješenje jednačine difuzije za t>0 : $\frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)e^{\frac{-(x-z)^2}{2Dt}}dz$ a zamjenom promjenljivih $\omega_1\equiv(y-z)/\sqrt{u}$ i $\omega_2\equiv(y-z+u)/\sqrt{u}$, imamo

$$H(x,u)=\Theta(\ln x+(u/2),u)x=x\Phi\left(\frac{\ln x+(u/2)}{\sqrt{u}}\right)-\Phi\left(\frac{\ln x-(u/2)}{\sqrt{u}}\right)$$

Ostaje još da se urade koraci u suprotnom smjeru i dobija se formula

$$\begin{aligned}C(S,\tau)&=H\left(\frac{S}{X}e^{r\tau},\sigma^2\tau\right)e^{-rt}X\\&=S\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+r\tau+\sigma^2\tau/2}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\right)-e^{-r\tau}X\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+r\tau-\sigma^2\tau/2}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\right)\end{aligned}$$

koja se u potpunosti poklapa sa formulom Black-Scholesa za vrijednost evropske call opcije.

4.2 Više o hedžingu

4.2.1 Diskretni hedžing

Nakon što smo dobili eksplicitne formule (4.19) i (4.24), sada možemo izvršiti diferenciranje po S da bismo dobili potrebne vrijednosne papire (*asset holding*) A_i u (4.10). Taj parcijalni izvod $\partial V/\partial S$ se naziva *delta* neke opcije, a strategija hedžinga o kojoj smo govorili naziva se *delta hedžing*. Diferenciranjem dobijamo

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \qquad (delta\ evropske\ call\ opcije), \tag{4.29}$$

i

$$\frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1 \quad (delta\ evropske\ put\ opcije), \tag{4.30}$$

O ovoj jednakosti govorićemo u poglavlju 4.4, u kojem se izračunavaju razni parcijalni izvodi.

Vratimo se na delta hedžing proces; iz (4.7) znamo da Π_{i+1}, vrijednost portfolia u $t_i + \delta t$, zadovoljava jednakost:

$$\Pi_{i+1} = A_i S_{i+1} + (1 + r\delta t) D_i \tag{4.31}$$

Pri tom se A_i mijenja u $A_{i+1,}$ a radi kompenzacije, gotovinski račun (*cash account*) se mijenja u D_{i+1}. Pošto novac ne ulazi u sistem, niti izlazi iz sistema, nova vrijednost portfolia, $A_{i+1}S_{i+1} + D_{i+1}$, mora da bude jednaka Π_{i+1}u (4.31), pa važi

$$D_{i+1} = (1 + r\delta t) D_i + (A_i - A_{i+1}) S_{i+1} \tag{4.32}$$

Možemo sumirati cjelokupnu hedžing strategiju na sljedeći način.

Postavi se $A_0 = \partial V_0/\partial S$, $D_0 = 1$ (proizvoljno), $\Pi_0 = A_0 S_0 + D_0$
Za svako novo vrijeme $t = (i+1)\delta t$
    Posmatrati novu cijenu imovine S_{i+1}
    Izračunati novu vrijednost portfolia Π_{i+1} u (4.31)
    Izračunati $A_{i+1} = \frac{\partial V_{i+1}}{\partial S}$
    Izračunati novi gotovinski iznos D_{i+1} u (4.32)
    Nova vrijednost portfolia je $A_{i+1} S_{i+1} + D_{i+1}$
  Kraj

Preciznije rečeno, ta strategija je *diskretni hedžing* jer se rebalans izvodi u trenucima $i\delta t$. Budući da u praksi ne možemo imati da $\delta t \to 0$, doći će do određene greške u eliminaciji rizika.

U svrhu ilustracije, moguće je simulirati jedno kretanje imovine i primijeniti diskretni hedžing. Da bismo zapisali rezultirajući algoritam, koristimo $\{\xi_i\}$ za označavanje slučajnih promjenljivih sa raspodjelom $N(0,1)$ pseudo-slučajnog generatora brojeva koje koristimo u simulaciji kretanja imovine i uzimamo u obzir da je $\delta t = T/N$.

Postaviti $A_0 = \partial V_0/\partial S$, $D_0 = 1$ (proizvoljno), $\Pi_0 = A_0 S_0 + D_0$
Za $i = 0$ za $N - 1$

Izračunati $S_{i+1} = S_i e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t + \sqrt{\delta t}\sigma \xi_i}$
Postaviti $\Pi_{i+1} = A_i S_{i+1} + (1 + r\delta t) D_i$
Izračunati $A_{i+1} = \frac{\partial V_{i+1}}{\partial S}$
Postaviti $D_{i+1} = (1 + r\delta t) D_i + (A_i - A_{i+1}) S_{i+1}$
Kraj

Da bi se opisao sljedeći set eksperimenata, treba se podsjetiti na termine (finansijski žargon) iz poglavlja 2.5 gdje se kaže da je u trenutku t evropska *call* opcija

- **In-the-money** ako je $S(t) > E$
- **Out-of-the-money** ako je $S(t) < E$, i
- **At-the-money** ako je $S(t) = E$.

Taj se žargon na očigledan način proširuje i na druge opcije. Generalno, *in-the-money* znači da će isplata biti pozitivna ako cijena imovine ostane kakva jeste. *Out-of-the-money* znači da se imovina mora promijeniti za neku nezanemarljivu količinu da bi isplata bila pozitivna. *At-the-money* definiše granicu između *in-* i *out-of-the-money*.

Računski primjer.[9] U primjeru se prezentira diskretni hedžing za evropsku call opciju sa $S_0 = 1, E = 1.5, \mu = 0.055, r = 0.05, T = 5$ i $\delta t = 10^{-2}$, da je $N = 500$. Gornji crtež na slici 4.1 pokazuje posebano diskretno kretanje imovine (t_i, S_i), za $t_i = i\delta t$. Izvršna cijena E je prikazana kao isprekidana linija. Vidimo da za to kretanje imovine, call opcija ostaje *out-of-the-money* (cijena imovine ispod E) sve do $t = 1$, a tada pravi brojne ekskurzije *in/out-of-the-money* prije nego što da veoma malu isplatu na isteku perioda. Gornji-srednji crtež prikazuje delte, $(t_i, \partial C_i / \partial S)$, preko kretanja imovine. Donji-srednji crtež daje gotovinu na nivou *(t,D)* i ispunjena kriva na donjem prikazu daje vrijednost portfelja (t_i, Π_i). Ideja delta hedžinga je da se zagarantuje rast portfolia $C - \Pi$ pri bezrizičnoj kamatnoj stopi. Slijedi da je

$$\Pi(S(t), t) = C(S(t), t) - \left(C(S_0, 0) - \Pi(S_0, 0)\right)e^{rt} \tag{4.33}$$

održiv. Da bi se to ispitalo, izračunali smo desnu stranu (4.29) za proizvoljno vrijeme t koristeći Black-Scholesovu formulu (4.19) za računanje $C(S_i, t_i)$. Svaka deseta vrijednost je prikazana kao krug na donjoj slici. Krugovi izgledaju kao da leže na vrhu Π_i krive, pa je (4.29) dobro aproksimirana. Odstupanje u (4.33) na datum isteka,

$$|C(S(T), T) - \Pi(S(T), T) - (C(S_0, 0) - \Pi(S_0, 0))e^{rt}|\,, \tag{4.34}$$

iznosila je 0.0364. Redukovanjem δt na 10^{-4} (i tako računajući različita kretanja imovine), odstupanje je smanjeno na 0.0029.

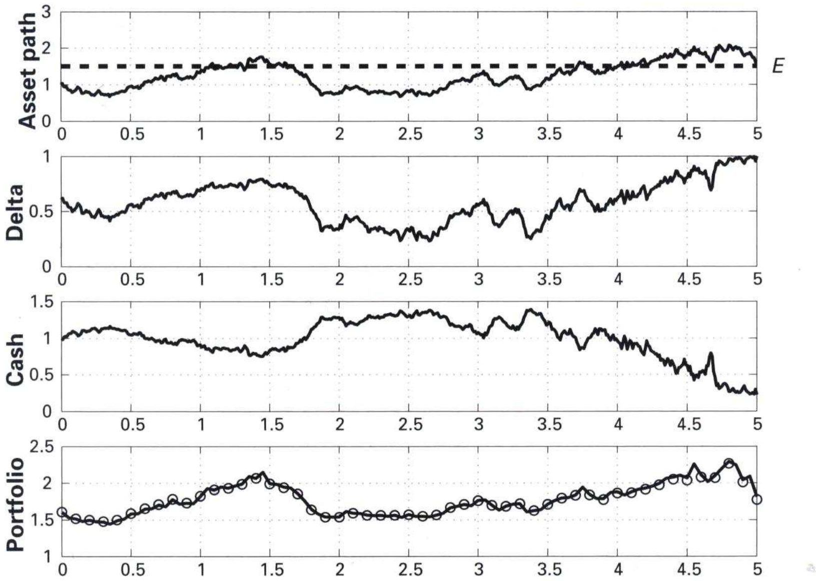
Računski primjer. Na slici 4.2 ponavlja se račun sa slike 4.2 pri čemu je za E uzeta vrijednost 2.5. U tom slučaju, opcija završava *out-of-the-money*. Opet se može primijetiti, na donjoj slici, da je (4.33) blizu tačne vrijednosti.

[9] Desmond J.Higham: *An introduction to financial option valuation*, Cambridge University Press 2004. strana 89-92

4.2.2 Delta na isteku

Ako se pažljivo gleda slika 4.1 i 4.2, vidi se da

- u prvom eksperimentu, kada opcija ističe *in-the-money*, delta se približava vrijednosti 1 na isteku, dok
- u drugom eksperimentu, kada opcija ističe *out-of-the-money*, delta na isteku se približava vrijednosti 0.

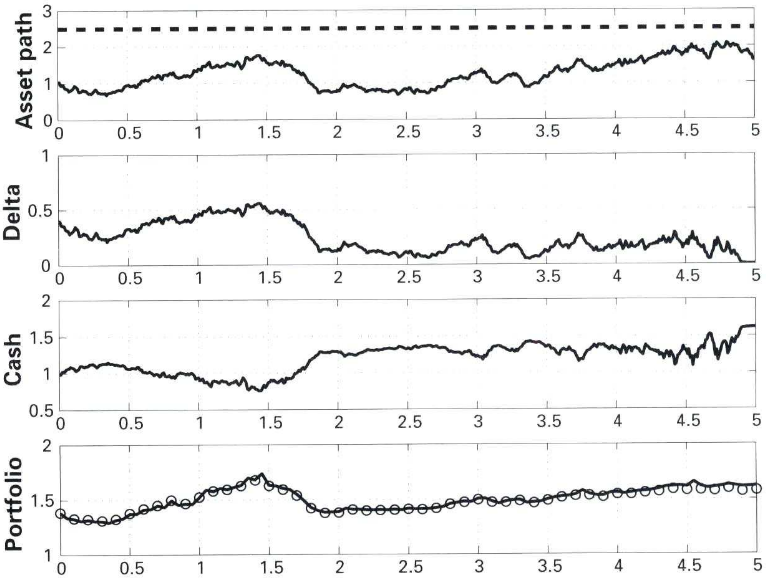


Slika 4.1: Diskretni hedžing. Opcija ističe in-the-money. Gornja: diskretno kretanje imovine. Gornja-srednja: vrijednost delta. Donja-srednja: gotovina u portfoliu. Donja: vrijednost portfolia

To nije slučajno. Koristeći (4.29), analiza pokazuje da

$$\lim_{t\to T^-} \frac{\partial C(S,t)}{\partial S} = \begin{cases} 1, & \text{ako } S(T) > E \\ \frac{1}{2}, & \text{ako } S(T) = E \\ 0. & \text{ako } S(T) < E, \end{cases} \tag{4.35}$$

Vidi se da delta uvijek završava na 1 za opcije koje ističu *in-the-money*, a na 0 za opcije koje ističu *out-of-the-money*. Ako je u vremenu blizu isteka $S(t) \approx E$, tada je delta podložna variranju između vrijednosti ≈ 1 (kada $S(t)$ prelazi E) i ≈ 0 (kada $S(t)$ pada ispod E). Naredni primjer prikazuje taj efekat.



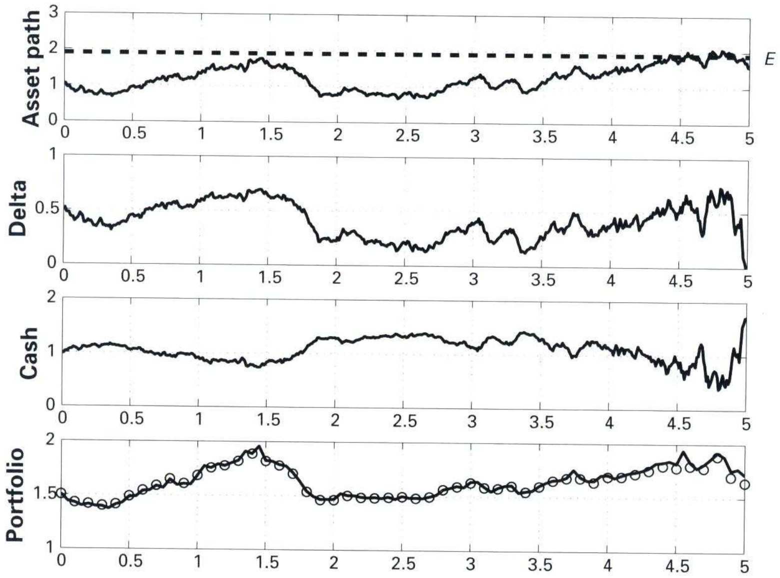
Slika 4.2: Diskretni hedžing. Opcija ističe out-the-money. Gornja: diskretno kretanje imovine. Gornja-srednja: vrijednost delta. Donja-srednja: gotovina u portfoliu. Donja: vrijednost portfolia

Računski primjer. Ovdje se ponavlja račun koji je vezan za slike 4.1 i 4.2 pri čemu je izvršna cijena postavljena na $E = 1.9$ pa opcija često prelazi *in-/out-of-the-money* blizu isteka. Slika 4.3 pokazuje da, kako se vrijeme isteka približava, delta vrijednost dramatično zanosi.

Ponašanje delte blizu isteka vremena, koje se primjećuje na slikama od 4.1 do 4.3, a u konačnom obliku je prikazano u (4.35), ima jednostavno finansijsko tumačenje. Za $t \approx T$ ostaje malo vremena da se promijeni vrijednost imovine – ako je opcija trenutno *in/out-of-the-money*, tada će vjerovatno tako i ostati. Posebno, ako je *call* opcija *in-the-money*, svako silazno ili uzlazno kretanje u imovini odgovara, gotovo direktno, istom silaznom ili uzlaznom kretanju isplate. Drugim riječima, *call* opcija i imovina su veoma povezane – dijele isti rizik. Pošto je portfelj namijenjen da ponovi rizik u opciji, slijedi da je $\Delta_i \approx 1$. Obrnuto, ako je blizu isteka call opcija *out-of-the* money, veoma je vjerovatno da će isplata da bude nula bez obzira na to što se desi sa imovinom - nema rizika, pa ne treba zadržavati nikakvu imovinu.

Rezultati analogni onima (4.35) za Evropsku put opciju su

$$\lim_{t\to T^-} \frac{\partial P(S,t)}{\partial S} = \begin{cases} 0, & \text{ako } S(T) > E \\ -\frac{1}{2}, & \text{ako } S(T) = E \\ -1. & \text{ako } S(T) < E, \end{cases} \tag{4.36}$$



Slika 4.3: Diskretni hedžing. Opcija ističe almost-the-money. Gornja: diskretno kretanje imovine. Gornja-srednja: vrijednost delta. Donja-srednja: gotovina u portfoliu. Donja: vrijednost portfolia

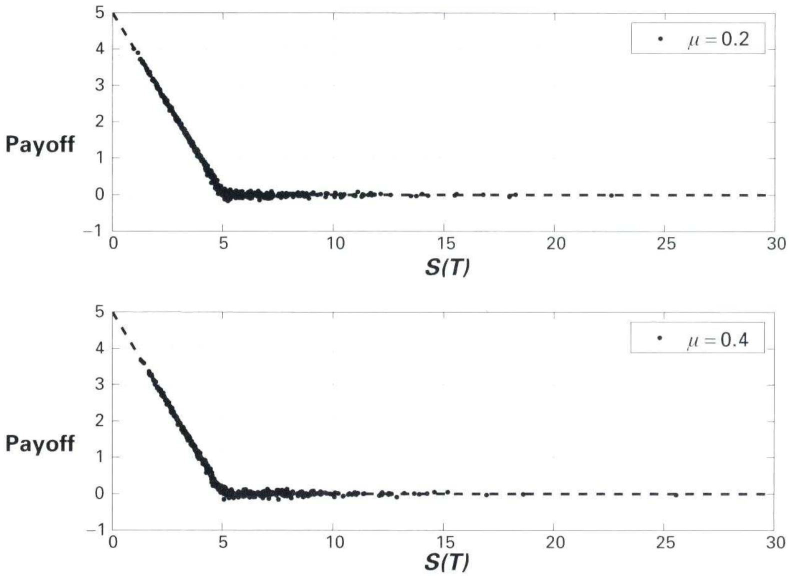
Završavamo sa jednim primjerom diskretnog hedžinga koji pokazuje da je vrijednost opcije nezavisna od parametra toka μ u modelu cijene imovine.

Računski primjer. Ovdje se uzima evropska put opciju gdje je $S_0 = 5, E = 5, r = 0.05$ i $\sigma = 0.3$ pri čemu je $T = 3$. Izračunato je 500 diskretnih kretanja imovine uz vremenske razmake $\delta t = 10^{-2}$. Gornji prikaz na slici 4.4 pokazuje $S(T)$ na horizontalnoj osi uz

$$\Pi(S(T), T) + (P(S_0, 0), 0) - \Pi(S_0, 0))e^{rT} \tag{4.37}$$

na vertikalnoj osi za slučaj $\mu = 0.2$. Ima 500 takvih tačaka, po jedna za svako kretanje imovine. Izračunato je $P(S_0, 0)$ u (4.37) iz Black-Scholesove formule (4.24). Ako je diskretni hedžing uspješan, onda analogni identitet onome (4.29) zadržava $P(S(t), t)$. Posebno, zadržava na isteku, pa bi se (4.37) trebao slagati sa put isplatom $\max(E - S(T), 0)$. Ta „hockey stick“[10] kriva isplate se prikazuje kao isprekidana linija. Vidimo da tačke leže blizu isprekidane linije, pa se stoga algoritam diskretnog hedžinga ponaša prema predviđanjima. Donji crtež na slici 4.4 pokazuje iste račune u kojemu je μ promijenjeno na 0.4. To pokazuje fenomen da vrijednost opcije ne zavisi od μ.

[10] Kriva u obliku hokejske palice.



Slika 4.4: Opsežan primjer diskretnog hedžinga za evropsku put opciju. Tačke predstavljuju konačnu normalizovanu isplatu (4.37) za 500 kretanja imovine.Tačna “hockey stick” isplata je označena kao isprekidana linija. Gornja slika, $\mu = 0.2$. Donja slika: μ= 0.4.

4.3 Više o Black-Scholesovim formulama

4.3.1 Parametar μ

Dodatno ćemo razmatrati Black-Scholesove formule za vrednovanje opcija.

Black-Scholesove formule nam omogućuju da odredimo fer cijenu u početnom vremenu za Evropsku call ili put opciju u terminima početne cijene imovine S_0, izvršne cijene E, volatilnosti σ, bezrizične kamatne stope r i datuma isteka T. Svaka od ovih veličina je poznata, uz izuzetak volatilnosti imovine σ. Veliko iznenađenje, i vjerovatno najznačajniji aspekt Black-Scholesove teorije, leži u tome da cijena opcije ne zavisi od parametra toka μ, koji, iz (3.10), određuje očekivani rast imovine. Posljedica je da dva ulagača mogu imati veoma različite poglede o tome što je odgovarajuća vrijednost μ za određenu imovinu, a ipak, ako se slože o volatilnosti i prihvate pretpostavke iz Black-Scholesove analize, doći će do iste vrijednosti za opciju. Taj fenomen, iako se na prvi pogled može činiti veoma sumnjiv, posljedica je činjenice da Black-Scholesova formula određuje **fer** vrijednost za opciju – vrijednost koja može da se postigne uz pomoć bezrizične delta hedžing strategije pa tako i vrijednost, u prisustvu arbitražera, koju zakoni ponude i potražnje diktiraju za tržište.
Pretpostavimo da postoje dva učesnika na tržištu:

- špekulant A koji vjeruje da će cijena imovine pratiti (3.8) sa parametrom toka μ_A i volatilnosti σ i
- špekulant B koji vjeruje da će cijena imovine pratiti (3.8) sa parametrom toka μ_B i volatilnosti σ.

Pretpostavimo da špekulanti žele uzeti dugu poziciju u Evropskoj call opciji – tj. žele kupiti opciju bez izvođenja ikakvog pratećeg hedžinga. Ako je $\mu_A \gg \mu_B$ tada će, vjerovatno, Black-Scholesova vrijednost opcije biti privlačnija špekulantu A nego špekulantu B. To ne protivurječi prethodnoj teoriji. Špekulant koji *želi prihvatiti* određeni *rizik* može vrednovati opciju različito od Black-Scholesove formule. Međutim, ako prodajete opciju i želite hedž da biste eliminisali rizik (i ako vjerujete u Black-Scholesove pretpostavke), tada su (4.19) i (4.24) relevantne vrijednosti.

4.3.2 Zavisnost od vremena

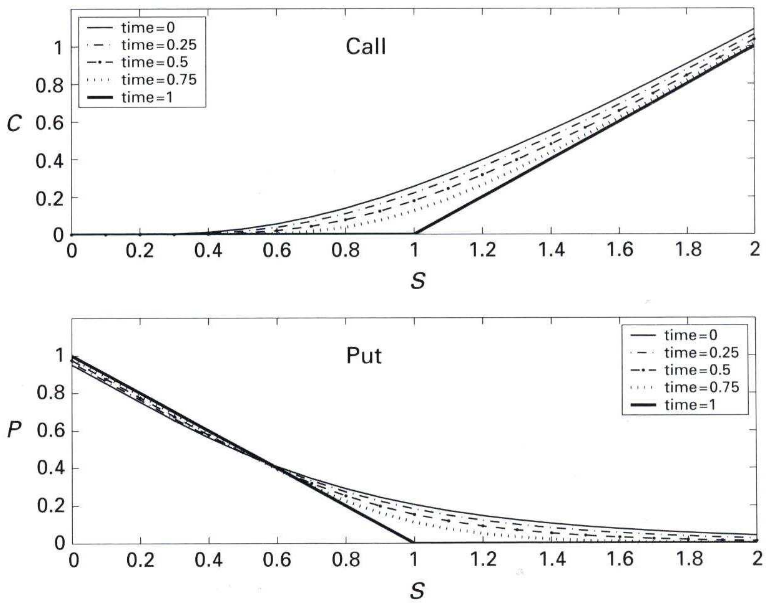
Slika 4.5 pokazuje Black-Scholesove vrijednosti call i put opcije, kao funkcije cijene imovine S, za određene fiksne trenutke t. Postavljamo da je $E = 1, r = 0.05, \sigma = 0.6$ a vrijeme isteka $T = 1$. U ovom slučaja vidimo da, kako se t približava vremenu isteka T, vrijednost opcije se približava „hockey-stick“ funkciji isplate. U slučaju call opcije, za svaki S, čini se da vrijednost konvergira ka „hockey-stick-u“, monotono opadaju, kako se t približava isteku vremena T. Sa druge strane, za put opciju, konvergencija nije monotono opadajuća ili monotono rastuća.

4.3.3 Velika slika

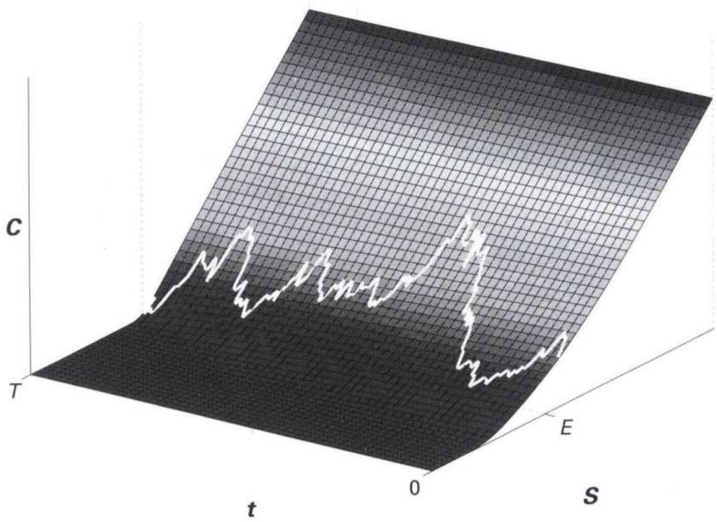
Slika 4.6 ocrtava Black-Scholesovu vrijednost evropske call opcije $C(S.t)$, kao površinu iznad (S,t) – ravni. Time se naglašava da je $C(S.t)$, **glatka** funkcija od S i t. Na $C(S.t)$ – površinu bijela linija dodaje odgovarajuće $C(S_i, t_i)$ vrijednosti označene diskretnim kretanjem imovine. Ta slika pokazuje da

- površina Black-Scholesove vrijednosti opcije je glatka
- kriva kretanja imovine je “nazubljena“
- kako vrijeme varira, kriva kretanja imovine ocrtava nazubljenost „kretanja opcije“ preko glatke površine vrijednosti opcije.

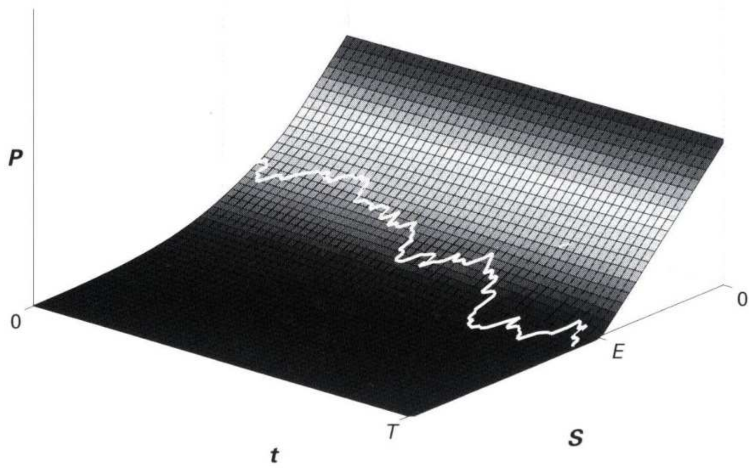
Na slici 4.7 dat je sličan prikaz za put opciju.



Slika 4.5: Vrijednost opcije izražena kao cijena imovine u pet različitih trenutaka. Gornja: evropska call opcija. Donja: evropska put opcija.



Slika 4.6: Evropska call: Black-Scholes površina potavljena sa krivom kretanja imovine.



Slike 4.7: Evropska put: Black-Scholes površina postavljena sa krivom kretanja imovine.

4.3.4 Nove promjenljive

Kao što smo vidjeli, Black-Scholesova vrijednost evropske call ili put opcije zavisi od izvršne cijene E, vremena isteka T, volatilnosti σ i kamatne stope r, kao i od cijene imovine S i vremena t. Međutim reskaliranjem se to može svesti na dvije promjenljive.

Uvesćemo tri nove veličine. Prva je logaritamski odnos (*moneyness ratio*)

$$m := \log \frac{Se^{r(T-t)}}{E}$$

Da bi se protumačilo m, mora se uopštiti (3.10) u formulu $Se^{\mu(T-t)}$ za matematičko očekivanje imovine na isteku vremena, pri čemu se zna cijena imovine S u trenutku T. Sada pretpostavljamo da je stopa rasta imovine jednaka kamatnoj stopi, $\mu = r$. Ta pretpostavka će detaljno biti obrađena kasnije; za sada ćemo primijetiti da ona vodi do sljedećih zaključaka:

- Ako je $m > 0$, tada je očekivana vrijednost imovine na isteku vremena veća od izvršne cijene. U smislu „očekivanja na isteku vremena neutralnog u pogledu rizika“, call opcija je *in-the-money*, a put opcija je *out-of-the-money*.
- Ako je $m = 0$, onda, u istom smislu, call i put opcije su *at-the-money*.
- Ako je $m < 0$, onda, u istom smislu, call opcija je *out-of-the-money*, a put opcija je *in-the-money*.

Drugo, imamo skaliranu volatilnost (*scaled volatility*)

$$\hat{\tau} := \sigma\sqrt{T-t}.$$

Ovdje se volatilnost kombinuje sa kvadratnim korijenom što je prirodno, budući da se, npr. volatilnost pojavljuje u obliku $\sigma^2(t_{i+1} - t_i)$ u modelu određene imovine (3.8).

Treći korak je da se vrijednosti opcije skaliraju sa vrijednošću imovine, označavajući

$$c := \frac{C}{S} \ \ za\ call\ opciju$$

i

$$p := \frac{P}{S} \ \ \ za\ put\ opciju.$$

U tim novim promjenljivima, d_1 i d_2 u (4.20) i (4.21) se pojednostavljuju do

$$d_1 = \frac{m}{\hat{\tau}} + \frac{\hat{\tau}}{2} \quad i \quad d_2 = \frac{m}{\hat{\tau}} - \frac{\hat{\tau}}{2}, \tag{4.38}$$

a, iz formula (4.19) i (4.24), skalirane call i put vrijednosti postaju

$$c(m, \hat{\tau}) = N(d_1) - e^{-m}N(d_2)$$

i

$$p(m, \hat{\tau}) = e^{-m}N(-d_2) - N(-d_1)$$

4.4 Grčka slova

Black-Scholesove formule (4.19) i (4.24) za određivanje vrijednosti opcija zavise od S, t i parametara E, r i σ. U ovom poglavlju ćemo izvesti izraze za parcijalne izvode vrijednosti opcija u odnosu na ove veličine. Ovi rezultati su korisni iz više razloga:

1. Trgovci bi željeli da znaju osjetljivost na promjene vrijednosti opcija u ovim veličinama. Parcijalni izvodi mjere ove osjetljivosti.
2. Računanje parcijalnih izvoda omogućava da se potvrdi da je Black-Scholesova PDJ riješena.
3. Ispitivanje znaka izvoda daje uvid u osnovne formule
4. Izvod $\frac{\partial V}{\partial S}$ je potreban u procesu delta hedžing-a.

4.4.1 Grčka slova

Određeni parcijalni izvodi vrijednosti opcija se toliko često koriste da su označeni grčkim imenima i simbolima,

$$\Delta := \frac{\partial C}{\partial S} \qquad (delta),$$

$$\Gamma := \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \qquad (gama),$$

$$\rho := \frac{\partial C}{\partial r} \qquad (ro),$$

$$\Theta := \frac{\partial C}{\partial t} \qquad (teta),$$

$$\text{vega} := \frac{\partial C}{\partial \sigma} \qquad (vega).$$

Diferencirajući C iz (4.19), koristeći (4.20) i (4.21), moguće je naći eksplicitni izraz za ove veličine. Prije nego uđemo u ovaj proces navešćemo dvije korisne činjenice. Prva, da je za $N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$,

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Druga važna činjenica je

$$SN'(d_1) - e^{-r(T-t)} EN'(d_2) = 0 \tag{4.39}$$

Diferecirajući S iz (4.19) dobijamo

$$\Delta = N(d_1) + SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} = N(d_1) + \frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{T-t}} - Ee^{-r(T-t)}\frac{N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

S obzirom na (4.39), imamo da se drugi i treći sabirak na desnoj strani se poništavaju, odakle slijedi:

$$\Delta = N(d_1), \tag{4.40}$$

a to je rezultat koji smo mi koristili u poglavlju 4.2. Dalje imamo da je

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} \tag{4.41}$$

Dalje, diferencirajući C po r nalazimo da je

$$\rho := \frac{\partial C}{\partial r} = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + (T-t)Ee^{-r(T-t)}N(d_2) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r}$$
$$= SN'(d_1)\frac{T-t}{\sigma\sqrt{T-t}} + (T-t)Ee^{-r(T-t)}N(d_2) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{T-t}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Kao i ranije, (4.39) omogućava da se izraz uprosti, i nalazimo da je

$$\rho = (T-t)Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{4.42}$$

Slične analize pokazuju da je

$$\Theta = \frac{-S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d_1) - rEe^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{4.43}$$

i

$$\text{vega} = S\sqrt{T-t}N'(d_1). \tag{4.44}$$

4.4.2 Interpretacija grčkih slova

Formule za grčka slova moguće je tumačiti sa finansijskog stanovišta i provjeriti da se one slažu sa intuicijom.

Sjetimo se da je graničeno ponašanje delte okarakterisano i protmačeno u odjeljku 4.2.2. Takođe znamo da je $\Delta > 0$ do isteka vremena. Ovo ima smisla, jer povećanja cijene imovine dovodi vjerovatno do poskupljenja profita na isteku vremena**. Delta hedžing** se sastoji u održavanju pozicije takve da je $\Delta = 0$ u svakom trenutku. Takva pozicija se naziva **delta-neutralna pozicija**. Primijetimo da pozicija investitora ostaje delta-neutralna samo za kratko vrijeme, stoga se mora vršiti periodično rebalansiranje portfolia.

Iz (4.42) slijedi da je $\rho > 0$ prije isteka vremena. Da bi smo objasnili ovo treba da imamo na umu da je povećanje kamatnih stopa ekvivalentno sniženju cijene E. (Vrijednost fiksnog iznosa E u nekom fiksnom trenutku u budućnosti postaje manja ako kamatna stopa raste).

Dalje, imamo da je $\Theta < 0$. Razlog je u tome da što se više približava datum dospjeća T, opcija sve više gubi na vrijednosti. Kada je cijena imovine vrlo niska Θ je blizu nule. Teta se ne koristi za hedžing jer nema smisla obezbjedjivati portfolio protiv prolaska vremena – vrijeme sigurno prolazi! Ako su i delta i gama opcije nula, tada Θ pokazuje da će vrijednost opcije rasti po nerizičnoj kamatnoj stopi.

Slično se može tumačiti žašto je vega pozitivno do isteka.

4.4.3 Rješenje Black-Scholes PDJ u grčkim slovima

Pošto su izračunati parcijalni izvodi, u poziciji smo da potvrdimo da $C(S,t)$ u (4.19) zadovoljava Black-Scholesovu PDJ (4.15). Koristeći naše formule za $\Delta, \Gamma, \rho, \Theta$ dobijamo

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC=$$
$$=\frac{-S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d_1)-rEe^{-r(T-t)}N(d_2)+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}+rSN(d_1)$$
$$-r\left(SN(d_1)-Ee^{-r(T-t)}N(d_2)\right)=0$$

4.5 Neutralisanje rizika

U vremenu prije nastanka Black-Scholesove formule, često se tvrdilo da se na razuman način za vrijednost opcije može uzeti očekivana isplata (*expected payoff*). U ovom poglavlju ćemo pokazati kako se ideja o očekivanoj isplati uklapa u Black-Scholesovu metodologiju. To nas dovodi do koncepta o neutralisanju rizika.

4.5.1 Očekivana isplata (*expected payoff*)

Da bi istovremeno uzeli u obzir evropsku call i put opciju, označićemo sa $\Lambda(x)$ funkciju isplate

$$\Lambda(x)=\max(x-E,0) \text{ za call}$$
$$\Lambda(x)=\max(E-x,0) \text{ za put opciju.}$$

Potupak se lako generalizuje na druge evropske-stilove opcija, tj. opcije čija isplata može biti izražena kao funkcija cijene imovine na isteku vremena.

Pod našim modelom, konačna cijena imovine $S(T)$ je slučajna promjenljiva

$$S(t)=S_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}Z} \quad \text{gdje je } Z\sim N(0,1),$$

Iako je isplata $\Lambda(S(T))$ takođe poznata slučajna promjenljiva.

Zašto ne možemo jednostavno uzeti da u početnom trenutku vrijednost opcije bude prosječna isplata, umanjena za kamatu? Ovo bi davalo

$$e^{-rT}E\left(\Lambda\big(S(T)\big)\right) \tag{4.45}$$

Koristeći $E\big(h(x)\big)=\int h(x)f(x)dx$ i funkciju gustine (3.9), ovo se može zapisati kao

$$e^{-rt}\int_0^\infty \frac{\Lambda(x)}{x\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{T}}\exp\left(-\frac{\left(\log x-\log S_0-\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)^2}{2\sigma^2T}\right)dx. \tag{4.46}$$

Uopšteno, možemo vrijednost opcije sa cijenom imovine S i vremenom t posmatrati kao očekivanu isplatu. Označimo li sa $W(S,t)$ ovu vrijednost, dobijamo

$$W(S,t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left(\Lambda\big(S(T)\big)\right), \text{ cijena imovine u trenutku } t \tag{4.47}$$

što može biti napisano eksplicitnije kao

$$W(S,t) = e^{-rt}\int_0^{\infty} \frac{\Lambda(x)}{x\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{\left(\log x - \log S_0 - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T}\right)dx. \tag{4.48}$$

U poređenju sa Black-Scholes pristupom za nalaženje fer vrijednosti opcija, ovdje postoji niz povezanih tačaka:

1) Formule (4.46) i (4.48) su izvedene bez promjena ideje hedžinga da se eliminiše rizik
2) Formule (4.46) i (4.48) su izvedene bez bilo kakvih pretpostavki o arbitraži
3) Za razliku od Black-Scholes PDJ, formule (4.46) i (4.48) zavise od parametra μ.

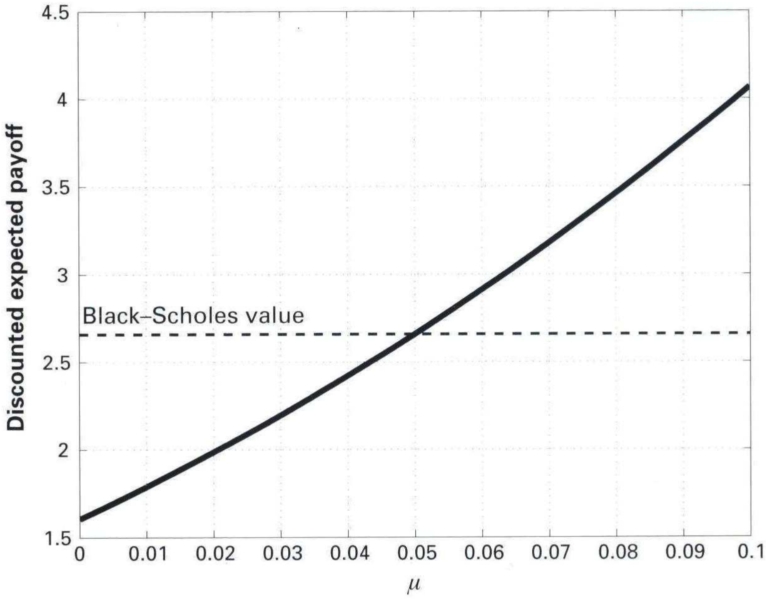
Sada Black-Scholesova teorija govori da postoji samo jedna fer vrijednost, i ona mora biti naznačena na tržištu. Ako bi se na tržištu nalazile opcija sa drugim vrijednostima, arbitražeri bi masovno kupovali/prodavali, jer bi to značilo da je moguće ostvariti profit bez rizika i samim tim garantuje manje rizičan profit. Dejstva ponude i tražnje stoga treba ograničiti na Black-Scholesovom nivou. Ovo slijedi iz tačke (3), tako da pristup preko očekivane isplate ne može biti iskorišćen da bi se dobila fer vrijednost opcije.

4.5.2 Neutralisanje rizika

Slika 4.8 potvrđuje da je očekivana isplata sa umanjivanjem ustvari funkcija od μ. Puna linija (kada se μ mijenja od 0 do 0.1) odnosi se na evropske call opcije za

$$S_0 = 10, E = 9, r = 0.05, \sigma = 0.2 \text{ i } T = 3.$$

Očekivana isplata raste sa rastom μ. Black-Scholesova vrijednost opcije je na slici označena isprekidanom linijom.



Slika 4.8: Očekivana isplata – vrijednost u početnom trenutku sa umanjenjem za Evropsku call opciju. Black-Scholesova vrijednost označena isprekidanom linijom.

Primijetimo da puna kriva na slici 4.8 prolazi kroz Black-Scholesov nivo za vrijednost $\mu = r = 0.05$ tj kada parametar stope rasta odgovara kamatnoj stopi. Ovo nije slučajno.

Sada provjeravamo krajnje vrijeme i granične uslove. Uzimajući $t = T$ u (4.47) primijetićemo da ako je $S(T)$ dato, i nije slučajno, tada je $\mathbb{E}\left(\Lambda\big(S(T)\big)\right) = \Lambda(S(T))$ odakle slijedi:

$$W(S,T) = \Lambda\big(S(T)\big).$$

To znači da su uslovi (4.16) za call i (4.25) za put opciju su zadovoljeni. Slično, ako je $S = 0$ u svakom trenutku tada iz (3.10) imamo da je $S(T) = 0$ a odatle kada uvrstimo u (4.47), dobijamo

$$W(0,t) = e^{-r(T-t)}\Lambda(0).$$

Formule (4.17) i (4.26) su formule za call i put opcije i vidimo da su ti uslovi zadovoljeni.
Na kraju, primijetimo da argumenti dati u (4.18) i (4.27) jednako važe i za (4.47). Sve u svemu, s obzirom da $W(S,t)$ sa $\mu = r$ zadovoljava iste PDJ i iste krajnje tj. granične uslove, jedinstvenost rješenja nam govori da je

$W(S,t)$ u (4.48) jednaka vrijednosti Black-Scholesove opcije za $\mu = r$.

Postavljajući $\mu = r$ dobijamo prepostavku poznatu kao neutralisanje rizika.

4.6 Binomni metod

Binomni metod ima prednost u odnosu na Black-Scholesov u tome što se lako prilagođava za cijeli raspon ne-evropskih opcija za koje nije dostupna analitička formula. Binomni metod predstavlja najjednostavnije sredstvo za procjenu američkih opcija. U proučavanju tog metoda, podsjetićemo se na dva pojma, diskretni model vrijednosti imovine i neutralisanje rizika.

4.6.1 Metod

Binomni metod koristi jednostavni diskretni model za kretanje cijene imovine. Neka $\delta t = T/M$ označava razmak između dvije uzastopne vremenske tačke, pri čemu T označava datum isteka. Tako će se cijene imovine posmatrati u vremenu $t_i = i\delta t$, za $0 \leq i \leq M$. Ključna pretpostavka u binomnom metodu je da se između uzastopnih vremenskih nivoa cijena imovine kreće ili uzlazno sa faktorom u ili silazno sa faktorom d. Uzlazno kretanje se dešava sa vjerovatnoćom p, a silazno sa vjerovatnoćom $1-p$. Taj scenarijo može da se posmatra kao pojednostavljena verzija diskretnog modela koji smo uveli u poglavlju 3.2.
Pošto je početna cijena imovine S_0 poznata, u trenutku $t_1 = \delta t$, moguće cijene imovine su uS_0 i dS_0. Slično, u vrijeme $t_2 = 2\delta t$, moguće cijene imovine su u^2S_0, udS_0 i d^2S_0. (Cijena udS_0 može proizići iz uzlaznog kretanja praćenog silaznim kretanjem ili iz silaznog kretanja praćenog uzlaznim kretanja). Uglavnom, u vremenu $t = t_i := i\delta t$, postoje $i+1$ mogućih cijena imovine koje označavamo

$$S_n^i = d^{i-n}u^nS_0, \quad 0 \leq n \leq i \tag{4.49}$$

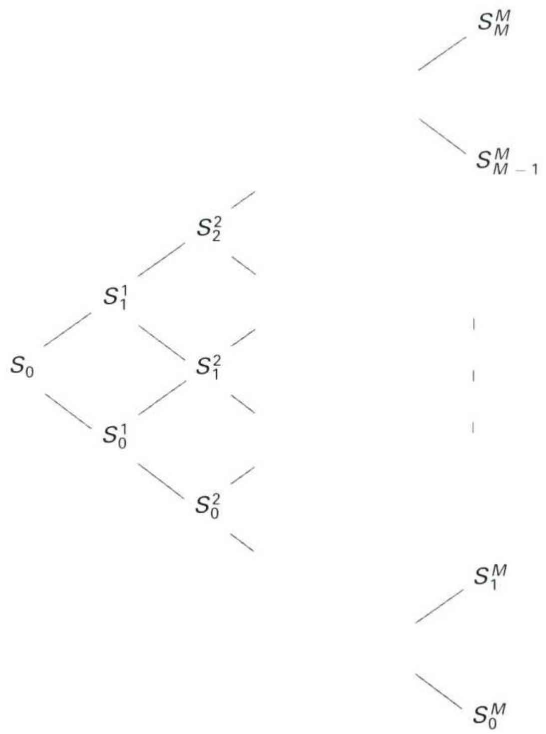
Dakle, u vremenu isteka $t = t_M = T$, postoji $M+1$ mogućih cijena imovine. Vrijednosti S_n^i za $0 \leq n \leq i$ i $0 \leq i \leq M$ formiraju binomno stablo. Za call opciju evropskog stila, isplata na isteku vremena ima oblik $\Lambda(S(T))$. Dakle, ako imovina ima cijenu S_n^M u vremenu $t = t_M = T$, vrijednost opcije u to vrijeme je $\Lambda(S_n^M)$. Uopšteno, sa V_n^i označavamo vrijednost opcije u vrijeme $t = t_i$, koja odgovara cijeni imovine S_n^i. Tako imamo da je

$$V_n^M = \Lambda(S_n^M) \qquad 0 \leq n \leq M \tag{4.50}$$

Naš zadatak je da nađemo V_0^0, vrijednost opcije u početnom vremenu. To možemo uraditi i odrađujući stablo unazad. Pretpostavimo da su $\{V_n^{i+1}\}_{n=0}^{i+1}$ poznati; tj. imamo vrijednosti opcije koje odgovaraju vremenu $t = t_{i+1}$ i sve moguće cijene imovine. Razmotrimo vrijednost opcije V_n^i koja odgovara cijeni imovine S_n^i u vremenu $t = t_i$. Zbog naših uzlazno/silaznih pretpostavki o kretanju cijene imovine, radeći s desna na lijevo, cijene imovine S_n^i potiče ili od S_{n+1}^{i+1}, sa vjerovatnoćom p, ili od S_n^{i+1} sa vjerovatnoćom $1-p$. Sada, sjetimo se definicije za matematičko očekivanje diskretne slučajne promjenljive. Da bi se dobilo matematičko očekivanje treba vrijednosti V_{n+1}^{i+1} i V_n^{i+1} množiti sa odgovarajućim vjerovatnoćama da bi dobili matematičko očekivanje. Na taj način, vrijednost opcije V_n^i koja odgovara vrijednosti imovine S_n^i, uzima se da je $pV_{n+1}^{i+1} + (1-p)V_n^{i+1}$. Ako se uzme u obzir efekat kamate, uz kamatnu stopu r, dobija se osnovna relacija:

$$V_n^i = e^{-r\delta t}\left(pV_{n+1}^{i+1} + (1-p)V_n^{i+1}\right), \quad 0 \le n \le i, 0 \le i \le M-1 \qquad (4.51)$$

Kada se odaberu parametri u, d, p i M, formule (4.49) – (4.51) potpuno određuju binomni metod. Ponovno vraćanje na (4.49) pokazuje kako da se u binomno stablo ubace cijene imovine. Kada se dobiju cijene imovine u trenutku $t = t_M = T$, jednačina (4.50) daje odgovarajuće vrijednosti opcije za to vrijeme. Relacija (4.51) tada može da se iskoristi da bi se "koračalo" unazad kroz drvo dok se ne izračuna vrijednost opcije u trenutku $t = t_0 = 0$, tj. V_0^0.



Slika 4.9 Binarno drvo

4.6.2 Podešavanje parametara

Pošto se diskretni model cijene imovine u binomnom metodu uklapa u okvir (3.3), mogli bi se podesiti parametre tražeći odgovarajuće Y_i koji će da ima matematičko očekivanje nula i jediničnu disperziju. To će da dovede do dva ograničenja.

Da bi se napisao izraz za model uzlazne/izlazne cijene imovine koji je korišćen u binomnom metodu, definišimo slučajnu promjenljivu R_i tako da je $R_i = 1$ ako cijena imovine raste od vremena $(i-1)\delta t$ do $i\delta t$ i $R_i = 0$ ako cijena imovine opada. Na taj način, $R_i = 1$ sa vjerovatnoćom p i $R_i = 0$ sa vjerovatnoćom $1-p$. To znači da je R_i Bernoullijeva slučajna promjenljiva sa parametrom p pa iz $\mathbb{E}(x) = p$ i $var(x) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = p - p^2$ imamo da je $\mathbb{E}(R_i) = p$ i $var(R_i) = p(1-p)$.

Nakon isteka n intervala vremena u raste $\sum_{i=1}^{n} R_i$ a d sa $n - \sum_{i=1}^{n} R_i$ puta. Tako je cijena imovine $S(n\delta t)$ u trenutku $t = n\delta t$ data formulom

$$S(n\delta t) = S_0 u^{\sum_{i=1}^{n} R_i} d^{n-\sum_{i=1}^{n} R_i}.$$

To možemo preurediti u

$$\frac{S(n\delta t)}{S_0} = d^n \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum_{i=1}^{n} R_i}.$$

Logaritmovanjem dobijamo

$$\log\left(\frac{S(n\delta t)}{S_0}\right) = n \log d + \log\left(\frac{u}{d}\right) \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{4.52}$$

Sada, prema centralnoj graničnoj teoremi, za veliko n suma $\sum_{i=1}^{n} R_i$ se ponaša kao normalna slučajna promjeljiva. Dakle, za veliko n, $\log(S(n\delta t)/S_0)$ će da bude blizu normalne slučajne promjenljive. Da bi se sve slagalo sa neprekidnim modelom cijene imovine (3.7), koji se koristi u Black-Scholesovoj analizi, potrebno nam je da matematičko očekivanje $\log(S(n\delta t)/S_0)$ bude $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) n\delta t$ i da disperzija bude $\sigma^2 n\delta t$. Osim toga, kako binomni metod radi sa očekivanim vrijednostima, mi uvodimo pretpostavku neutralisanja rizika $\mu = r$. To vodi do uslova

$$p \log u + (1-p) \log d = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \delta t\ , \tag{4.53}$$

$$\log\left(\frac{u}{d}\right) = \sigma \sqrt{\frac{\delta t}{p(1-p)}}\ , \tag{4.54}$$

Postavljajući da je $\delta t = T/M$ dobijamo dvije jednačine sa tri nepoznate, p, u i d. Uopšteno, možemo fiksirati jednu od tri nepoznate i odrediti ostale dvije. Recimo za $p = \frac{1}{2}$ dobijamo

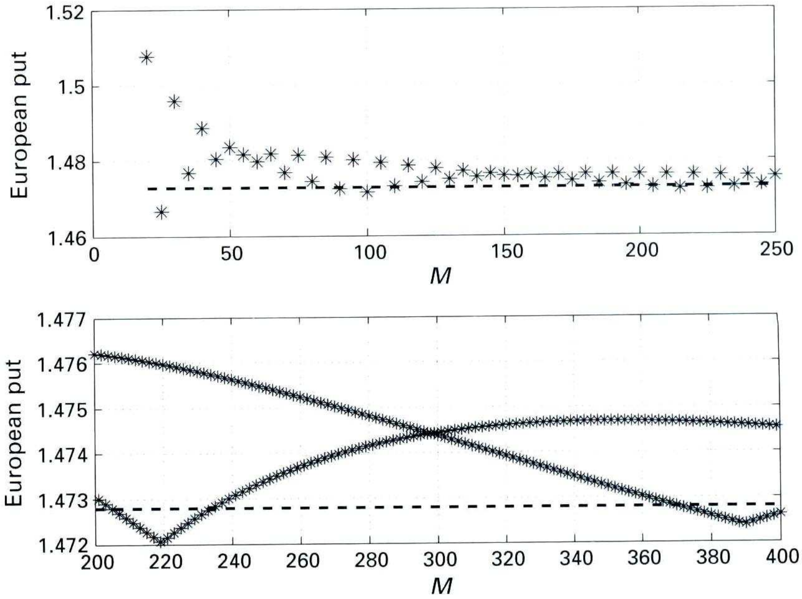
$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t},$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t}.$$

4.6.3 Binomni metod u praksi

Argumenti u prethodnom poglavlju sugerišu da se binomni metod modela imovine podudara sa onim koji se koristi u Black-Scholesovoj analizi za malo δt, tj. za veliko M. Možemo očekivati da će se vrijednosti opcija izračunate binomnom metodom dobro slagati sa onima iz Black-Scholesovih formula i da je to slaganje bolje što je M veće.

Tabela 4.1. Evropska put vrijednost računata pomoću binomnog motoda

	Option value
$M = 100$	1.4716
$M = 200$	1.4762
$M = 400$	1.4726
Black–Scholes	1.4728



Slika 4.10[11]: Konvergencija binomnog metoda za Evropsku put sa povećanjem broja M. Gornja slika: M ide od 20 do 250 u koracima od 5. Isprekidana linija je "tačno" rješenje. Donja slika: M ide od 200 do 400 u koracima od 1.

Računski primjer. Koristimo binomni metod da bismo procijenili vrijednost evropske put opcije pri čemu $S_0 = 9, E = 10, T = 3, r = 0.06$ i $\sigma = 0.3$. Tablica 4.1 pokazuje rezultate za $M = 100, M = 200$ i $M = 400$, uz Black-Scholesovu vrijednost 1.4728. Prvo zapažamo da je, kod sva tri izbora M, aproksimacija binomnog metoda tačna na barem dva decimalna mjesta. Najbolja aproksimacija od ovih 3 je u slučaju najveće vrijednosti M, što je intuitivno logično. Međutim, vjerovatno iznenađuje da je preciznost manja u slučaju $M = 200$, nego kada je $M = 100$. Da bismo provjerili da li je to samo izmišljotina, gornja slika na slici 4.10 prikazuje izračunate vrijednosti opcija za $M = 20,25,30, \dots ,250$, uz Black-Scholesovu vrijednost koju označava isprekidana linija. Vidimo da iako izgleda da se aproksimacija binomnog metoda konvergira kako M raste, ta konvergencija nikako nije monotona

Dakle slika 4.10 govori o dva svojstva

(i) Aproksimacija binomnog metoda konvergira ka Black-Scholesovoj vrijednosti kako $M \to \infty$

(ii) Konvergencija nije monotona.

---

[11] Desmond J.Higham: *An introduction to financial option valuation*, Cambridge University Press 2004. strana 155.

5

Egzotične opcije

Do sada smo govorili o opcijama evropskog i američkog stila čija vrijednost zavisi samo od cijene opcije $S(T)$ u trenutku T. Međutim, postoje i one kod kojih to nije slučaj i upravo su *egzotične opcije* jedne od tih. Tipovi ovih opcija se razlikuju po:

(i) prirodi svoje zavisnosti od kretanja – načinu na koji isplata zavisi od kretanja imovine $S(t)$ za $0 \leq t \leq T$, i
(ii) tome da li je dozvoljeno ranije izvršavanje.

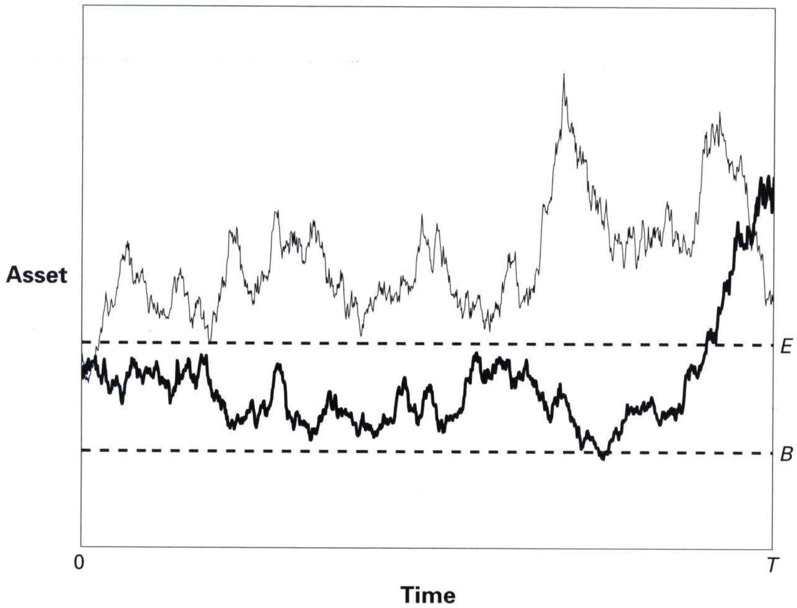
U mnogim slučajevima, kod egzotičnih opcija, nisu dostupni tačni izrazi za vrijednost opcije pa se moraju računati aproksimacije. Ovo poglavlje se bavi nekim egzotičnim opcijama i diskutuje primjenu dva računska algoritma.

5.1 Opcije sa barijerom (*barrier options*)

Opcije sa barijerom imaju isplatu tj. izvršenje koje se uključuje ili isključuje u zavisnosti od toga prelazi li vrijednost imovine prethodno određeni nivo.

- *Down-and-out call* opcija ima isplatu nula **ako** cijena imovine prelazi neku prethodno određenu granicu $B < S_0$ u nekom vremenu u $[0.T]$. Ako se granica ne prelazi, tada isplata postaje isto kao u evropskoj *call* opciji, max $(S(T) - E, 0)$.
- *Down-and-in call opcija* ima isplatu nula **osim ako** cijena **imovin**e ne prelazi neku prethodno određenu granicu $B < S_0$ u nekom vremenu u $[0.T]$. Ako se barijera prelazi, tada isplata postaje isto kao u evropskoj *call* opciji, max $(S(T) - E, 0)$.

Jedan od razloga popularnosti opcija sa barijerom je da su, pošto su mogućnosti isplate ograničene, jeftinije za kupiti od evropskih. To prikazuje slika 5.1. Tu su prikazana dva kretanja imovine. Oba počinju iznad izvršne cijene: $S(T) > E$. Iako završava kao veća, deblja od dvije krive kretanja pada niže i prelazi barijeru B. Isplata za deblju krivu kretanja neće biti nula za down-and-in call opciju, ali će da bude nula za down-and-out call opciju. Obrnuto, tanja kriva kretanja daće nula isplatu za down-and-in call, ali neće biti nula za down-and-out call opciju.



Slika 5.1: Dvije krive kretanja imovine i barijera, B. Deblja kriva kretanja imovine prelazi barijeru i zato daje nula isplatu u down-and-out call opciji. Tanja kriva kretanja imovine ne prelazi barijeru i zato daje nula isplatu u dawn-and-in call opciji.

Pojam hedžinga iz poglavlja 4.1 važi i za opcije sa barijerom. Neka $C^B(S,t)$ označava vrijednost down-and-out call opcije pri cijeni imovine S i vremenu t. Black-Scholesova PDJ (4.15) je relevantna i u ovom slučaju, osim ako se pređe granica, pa $C^B(S,t)$ mora da zadovolji PDJ u domenu $0 \leq t \leq T, B \leq S$. Ako je $S = B$, tada opcija postaje bezvrijedna, dajući

$$C^B(B,t) = 0 \quad za \;\; 0 \leq t \leq T \tag{5.1}$$

Takođe, na isteku vremena, za $S(T) > B$ je

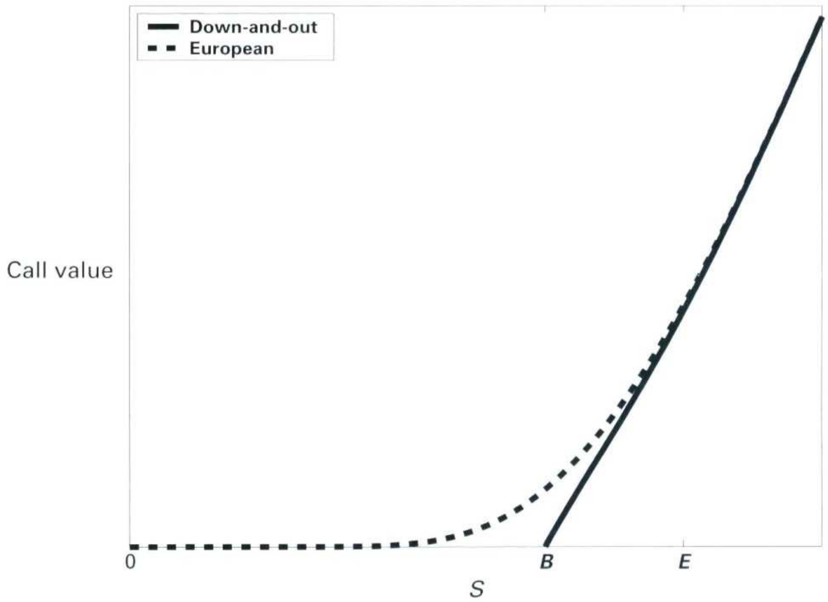
$$C^B(S,T) = C(S,T), \qquad\qquad za \;\; B \leq S \tag{5.2}$$

Ovdje $C(S,t)$ označava evropsku vrijednost (4.19). U slučaju kad je $B < E$, može se pokazati da je rješenje Black-Scholesove PDJ u domenu $0 \leq t \leq T$, $B \leq S$ koje zadovoljava (5.1) i (5.2) dato sa

$$C^B(S,t) = C(S,t) - (S/B)^{1-2r/\sigma^2} C(B^2/S\,,t); \tag{5.3}$$

Primjećujemo da (5.3) neposredno potvrđuje da down-and-out call manje vrijedi od evropske call opcije.

Skica početne vrijednosti $C^B(S,0)$ u (5.3) za $B < E$ je prikazana na slici 5.2. Pokazana je i vrijednost evropske opcije. Kao što smo i očekivali, kako raste početna cijena imovine, a time se smanjuje i vjerovatnoća prelaženja granice, vrijednost down-and-out call opcije se približava vrijednosti evropske opcije.



Slika 5.2: Down-and-out call vrijednost (5.3) kao funkcija od S

Iz formule za down-and-out call opciju, odgovarajuća down-and-in opcija može da se odredi iz jednakosti

$$\text{in} + \text{out} = \text{evropska opcija} \tag{5.4}$$

Zamjenjujući „down“ sa „up“, dolazi se do nove klase opcija sa barijerom

- *Up-and-out call* opcija ima isplatu nula **ako** cijena imovine prelazi neku prethodno određenu granicu $B > S_0$ u nekom vremenu u $[0, T]$. Ako se granica ne pređe, isplata postaje ona iz evropske *call* opcije, max $(S(T) - E, 0)$.
- *Up-and-in call* opcija ima isplatu nula **osim ako** cijena imovine ne pređe neku prethodno određenu granicu $B > S_0$ u nekom vremenu u $[0, T]$. Ako se granica pređe, isplata postaje ona iz evropske *call* opcije, max $(S(T) - E, 0)$.

Postoje, naravno, *put* opcije koje odgovaraju za gore navedenu *call* opciju; samo treba zamijeniti riječ *call* sa *put* u svakom slučaju. Time dobijamo ukupno osam različitih up/down-and-in/out call/put opcija. U svakom slučaju, analitička formula za vrijednost opcije može da se dobije rješavanjem Black-Scholesove PDJ. Dajemo formulu za jednu *up-and-out call* opciju:

$$S\left(N(d_1) - N(e_1) - \left(\frac{B}{S}\right)^{1+2r/\sigma^2} \left(N(f_2) - N(g_2)\right)\right)$$
$$- Ee^{-r(T-t)}\left(N(d_2) - N(e_2) - \left(\frac{B}{S}\right)^{-1+2r/\sigma^2} \left(N(f_1) - N(g_1)\right)\right) \quad (5.5)$$

Ovdje, d_1 i d_2 su definisani u (4.20) i (4.21), a

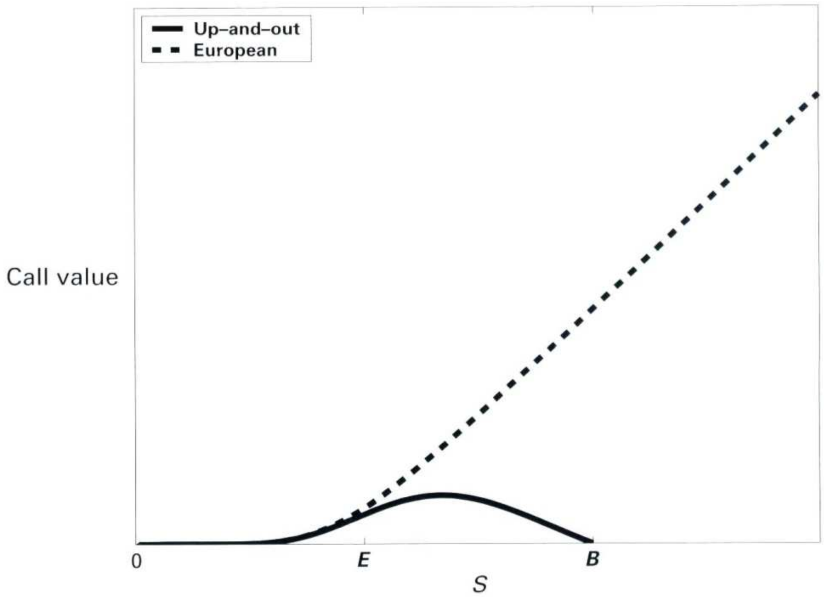
$$e_1 = \frac{\log(S/B) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$e_2 = \frac{\log(S/B) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$f_1 = \frac{\log(S/B) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$f_2 = \frac{\log(S/B) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$g_1 = \frac{\log(SE/B^2) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$g_2 = \frac{\log(SE/B^2) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

Slika 5.3 prikazuje vrijednost up-and-out call opcije (5.5) u početnom vremenu uz odgovarajuću evropsku opciju. Slika prikazuje da opcija sa barijerim može da bude značajno jeftinija od evropske opcije. Up-and-out call opcija je ograničena odozgo – isplata ne može preći $B - E$ pa se stoga može kupiti mnogo jeftinije od evropske verzije.

Postoji mnogo generalizacija tih osam osnovnih graničnih opcija.

- Dvostruko ograničene *(double barrier)* opcije postavljaju gornje i donje granice na cijene imovine i mogu da postanu bezvrijedne ako se pređe jedna (ili obje) barijere.
- Parcijalno ograničene *(partial barrier)* opcije imaju barijere koje se primjenjuju u ograničenom vremenskom intervalu.
- Pariške (*Parisian options*) opcije imaju barijere koje moraju ostati prevaziđene u prethodno određenom vremenskom periodu.

Iako Black-Scholesova analiza ostaje relevantna u svim slučajevima, za komplikovanije opcije sa barijerom ne važe analitički izrazi iz Black-Scholesove formule.



Slika 5.3: Up-and-out call vrijednost (5.3) kao funkcija od *S*

5.2 Opcije sa gledanjem unazad (*lookback options*)

Isplata za opcije sa gledanjem unazad zavisi od maksimalne ili minimalne vrijednosti koju je imovina postigla. Postoje dvije široke kategorije; fiksirana i promjenljiva izvršenja (*fixed* i *floating strikes*). Za njihov opis koristimo oznake

$$S^{max} := \max_{[0,T]} S(t) \quad \text{i} \quad S^{min} := \min_{[0,T]} S(t)$$

za označavanje ekstremnih vrijednosti imovine.

- *Fiksirano izvršenje call* opcija sa gledanjem unazad ima na dan isteka T isplatu datu sa $max(S^{max} - E, 0)$
- *Fiksirano izvršenje put* opcija sa gledanjem unazad ima na dan isteka T isplatu datu sa $max\left(E - S^{min}, 0\right)$
- *Promjenljivo izvršenje call* opcija sa gledanjem unazad ima na dan isteka T isplatu $S(T) - S_{min}$
- *Promjenljivo izvršenje put* opcija sa gledanjem unazad ima na dan isteka T isplatu $S^{max} - S(T)$.

Ove opcije sa gledanjem unazad su očigledno vrijednije od odgovarajućih evropskih opcija. Fiksirano izvršenje opcija sa gledanjem unazad se razlikuje od evropskih opcija u tome što se konačna cijena imovine $S(T)$ zamjenjuje „najboljom“ cijenom imovine – maksimalnom u slučaju *call* i minimalnom u slučaju put opcije. Kod promjenljivog izvršenja opcije sa gledanjem unazad, izvršna cijena postaje ekstremno favorizovana minimalnom cijenom imovine za call, a maksimalna cijena imovine za put opciju. U slučaju promjenljive opcije, njeno izvršenje je uvijek isplativo pa je riječ „opcija“ vjerovatno neodgovarajuća.

Moguće je izvesti Black-Scholesove formule za četiri gore navedena slučaja opcija sa gledanjem unazad. Postoje mnogo proširenja ovih ideja koje su obično namijenjene da ponude neke od svojstava ovih opcija po nižoj cijeni; npr. gledajući unazad na jedan ograničeni vremenski period ili na ograničeni broj tačaka u vremenu. U mnogim slučajevima, vrijednosti tih opcija moguće je dobiti samo približno računanjem.

5.3 Azijske opcije

Dok se opcije sa barijerom i gledanjem unazad fokusiraju na neke ekstremne vrijednosti, azijske opcije su određene prosječnim ponašanjem vrijednosti imovine.

- Prosječna cijena azijske call opcije na dan isteka vremena ima isplatu:

$$\max\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau - E, 0\right).$$

- Prosječna cijena azijske put opcije na dan isteka vremena ima isplatu:

$$\max\left(E - \frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau, 0\right).$$

Ovdje se zamjenjuje konačna cijena imovine $S(T)$, koja bi se koristila u evropskoj opciji, sa prosječnom cijenom imovine u određenom vremenskom periodu.

- Prosječna vrijednost izvršenja azijske call opcije na dan isteka ima isplatu

$$\max\left(S(T) - \frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau, 0\right).$$

- Prosječna vrijednost izvršenja azijske put opcije na dan isteka ima isplatu

$$\max\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau - E, 0\right)$$

Ovdje prosječnom cijenom imovine zamjenjujemo izvršnu cijenu E koja bi se koristila u evropskoj opciji.

Druge azijske opcije se mogu definisati, na primjer, zamjenjujući neprekidnu prosječnu vrijednost $\int_0^T S(\tau)d\tau/T$ aritmetičkim prosjekom

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i),$$

ili geometrijskim prosjekom

$$\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{1/n}$$

kroz n vremenskih tačaka, $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots t_n \leq T$. (U praksi, budući da se realna cijena imovine ne mijenja neprekidno, čak bi i neprekidni prosjek $\int_0^T S(\tau)d\tau/T$ trebalo računati na osnovu diskretnih tržišnih podataka).

Zavisnost od kretanja je za azijske, na neki način, komplikovanija nego za opciju sa barijerom i sa gledanjem unazad. Isplata zavisi od raspona cijena imovine, ne samo od ekstremnih vrijednosti. Moguće je uklopiti azijske opcije u Black-Scholesov okvir, ali bi se tačna rješenja mogla odrediti samo u određenim slučajevima.

5.4 Bermudske opcije i opcije sa oglašavanjem (*shout options*)

Bermudska opcija se razlikuje od odgovarajuće američke opcije samo u jednom pogledu. Dok američka opcija omogućuje vlasniku izvršavanje u bilo koje vrijeme $[0, T]$, bermudska opcija ograničava ranija izvršavanja na fiksni broj prethodno određenih datuma.
Kao i kod američkih opcija, nema opšte analitičke formule za vrijednost bermudske opcije.

Najjednostavnija verzija *call* opcija sa oglašavanjem omogućuje vlasniku opcije da se najviše jednom "javi" izdavaču opcije u vremenu između 0 i T i zatraži izvršenje. Isplata na isteku je data sa

$$\begin{array}{cc} max(S(T)-E, S(\tau)-E), & \text{ako se vlasnik javi u vrijeme } \tau \\ max(S(T)-E, 0), & \text{ako se vlasnik ne javlja} \end{array}$$

Možemo postaviti osjetljivu pretpostavku da će se "javljanje" desiti samo ako $S(\tau) > E$. "Javljanje" se obično dešava onda kada vlasnik osjeća da je vrijednost imovine postigla vrhunac i da će opadati. Kao i kod bermudskih i američkih opcija, nema tačne analitičke formule.

Literatura:

[1] Alison Etheridge, Martin Baxter: *A course in Financial calculus*, Cambridge University Press 2002.

[2] Aswath Damodaran: *Corporate Finance-Theory and Practice*, John Wiley & Sonc, 2001.

[3] Bojan Basrak: *Matematičke finansije*, Zagreb, Jun 2009.

[4] C.C.W. Leentvaar: *Numerical solution of the Black-Scholes equation with a small number of grid points*, Master's Thesis (Delft University of Technology, Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science, Section Applied Mathematics, Numerical Analysis Group), March-December 2003.

[5] Dora Seleši: *Modeli finansijske matematike*, Novi Sad, 2002.

[6] Desmond J.Higham: *An introduction to financial option valuation*, Cambridge University Press 2004.

[7] Erik Lindecrantz, Karl Hagerman and Karl Nilsson: *The Greeks with applications*, March 2009.

[8] Eugene F. Brigham, Philip R. Daves: *Intermediate Financial Management*, Cengage Learning 2010.

[9] Frans De Weert: *Exotic Options Trading*, John Wiley & Sons Ltd, England, 2008.

[10] Israel Nelken: *The Handbook of Exotic Options: instruments, Analysis and applications* McGraw-Hill companies 1996.

[11] John Hull: *Options, futures & other derivatives*, Prentice Hall, Inc. 2000.

[12] Lawrence G. McMillan: *Options as a strategic investment*, Penguin Putnam Inc. 2002.

[13] Mark Davis: *Mathematics of Financial Markets*, Austrian Science Foundation under grant Wittgenstein-Prize Z36-MAT 2000.

[14] Milica Bogdanović, Lazar Šestović: *Ekonomija od A do Ž,* Beogradska otvorena škola i Dosije, 2002.

[15] Neil Chriss: *Black-Scholes and beyond: option pricing models*, A Divison of The McGraw-Hill Companies 1997.

[16] *Option Pricing Models and the "Greeks"* http://www.hoadley.net/options/bs.htm

[17] Paul Wilmott, Sam Howison, Jeff Dewynne: *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*, Cambridge University Press 1995.

[18] Reinhold Hafner: *Stochastic implied volatility: a factor-based model*, Spinger-Verlag Berlin Heidelberg 2004.

[19] Robert W. Kolb, James A. Overdahl: *Financial Derivatives: Pricing and Risk Management*, John Wiley&Sons 2010.

[20] *Solving The Black-Scholes Equation* http://www.quantnotes.com/fundamentals/options/solvingbs.htm

[21] Steven E. Shreve: *Stochastic Calculus for Finance: Continuous-time models*, Springer Science+Business Media 2005.

[22] Sheldon Natenberg: *Option volatility & pricing*, Times Mirror Higher Education Group, Inc. Company 1994.

[23] *The Black-Scholes formula*, Financial Instruments, spring 2008. www.keele.ac.uk/depts/ec/t_worrall/fin-40008/bscholes.pdf

[24] *The Black-Scholes Equation, Charter 4* www.worldscibooks.com/etextbook/p556/p556_chap04.pdf

[25] Yuh-Dauh Lyuu: *Financial engineering and computation*, Cambridge University Press 2002.