OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet u Podgorici
Univerzitet Crne Gore

Tema 3

Dizajn estimatora stanja

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Dizajniraju kontinualni i digitalni opserver stanja linearnog sistema
- Razumiju uticaj šumova i poremećaja da performanse opservera i u skladu sa tim izvrše odabir odgovarajućih polova opservera
- Implementiraju povratnu spregu po estimiranim stanjima opservera
- Implementiraju opserver poremećaja

Opserveri stanja

Na prethodnim predavanjima je pokazano da se povratnom spregom po stanjima polovi spregnutog sistema mogu postaviti na željenu vrijednost. Formule za postavljanje polova predstavljaju jednostvan, ali veoma moćan metod za dizajniranje sistema automatskog upravljanja.

Mana pole placement metoda je što ta što je potrebno mjeriti svaku promjenljivu stanja sistema. Ako, na primjer, imamo sistem 25-og reda, to znači da nam je potrebno 25 senzora za mjerenje varijabli sistema. Nekad, za sisteme manjeg reda neke promjenljive je nemoguće izmjeriti. Na primjer, nekad treba izmjeriti temperaturu, međutim temperaturni senzor je fizički nemoguće postaviti na lokaciju od interesa, jer su temperature koje treba izmjeriti previše visoke.

Opserveri (estimatori) stanja su uređaji/algoritmi koji vrše estimaciju stanja na bazi dostupnih mjerenja. Da bi mogli dizajnirati opserver stanja, neophodno je da sistem bude potpuno opservabilan. Ako sistem nije potpuno opservabilan, onda bar treba da bude zadovoljen uslov detektabilnosti.

Primjena opservera stanja

- Monitoring procesa

  Vrši se provjera da li se estimirane varijable nalaze u okviru odgovarajućih granica, na osnovu čegu se generišu odgovarajući alarmi i upozorava operator.

- Automatska zaštita

  U slučaju da neko stanje sistema pređe dozvoljeni prag, moguće je automatskim putem preduzeti odgovorajuću reakciju (na primjer gašenje nekog prekidača).

- Dijagnostika kvarova

  Koristeći estimirana stanja mogu se dizajnirati razne inteligentne tehnike pomoću kojih se može vršiti dijagnostika, lokalizacija ili čak i predikcija kvarova u sistemu.

- Upravljanje procesima (povratna sprega po estimiranim stanjima)

  Na bazi estimiranih stanja mogu se dizajnirati napredni algortimi za upravljanje sistemima. Linearna povratna sprega je samo jedna od najjednostavnijih metoda upravljanja zasnovanih na state-space metoda.

Opserveri stanja u otvorenoj sprezi

Posmatrajmo kontinualni proces čija je dinamika opisana jednačinama stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \ \mathbf{x}(0) = \mathrm{x}_0,$$

dok su izlazne jednačine (jednačine mjerenja):

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t).$$

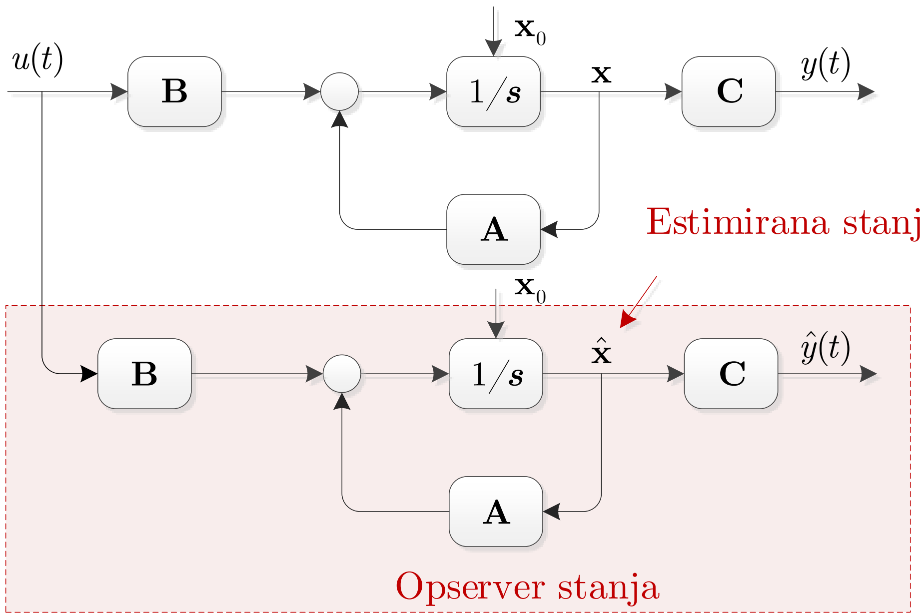
Opserver stanja u otvorenoj sprezi može trenutno i bez greške estimirati stanja sistema jedino ako su ispunjeni sljedeći uslovi:

- Poznata su početna stanja sistema $\mathbf{x}_0$.
- Poznat je tačan model sistema u prostoru stanja $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$,
- Nema poremaćaja koji djeluju na sistem.

Ako početni uslovi opservera nijesu jednaki početnim uslovima sistema, tada će opserver da da netačne vrijednosti promjenljivih stanja. Međutim, ukoliko je sistem u otvorenoj sprezi stabilan, nakon nekog vremena prirodni odziv opservera će da iščezne (odziv usljed početnih uslova), pa ćemo u stacionarnom stanju ipak dobiti dobru estimaciju stanja.

Opserveri stanja u otvorenoj sprezi

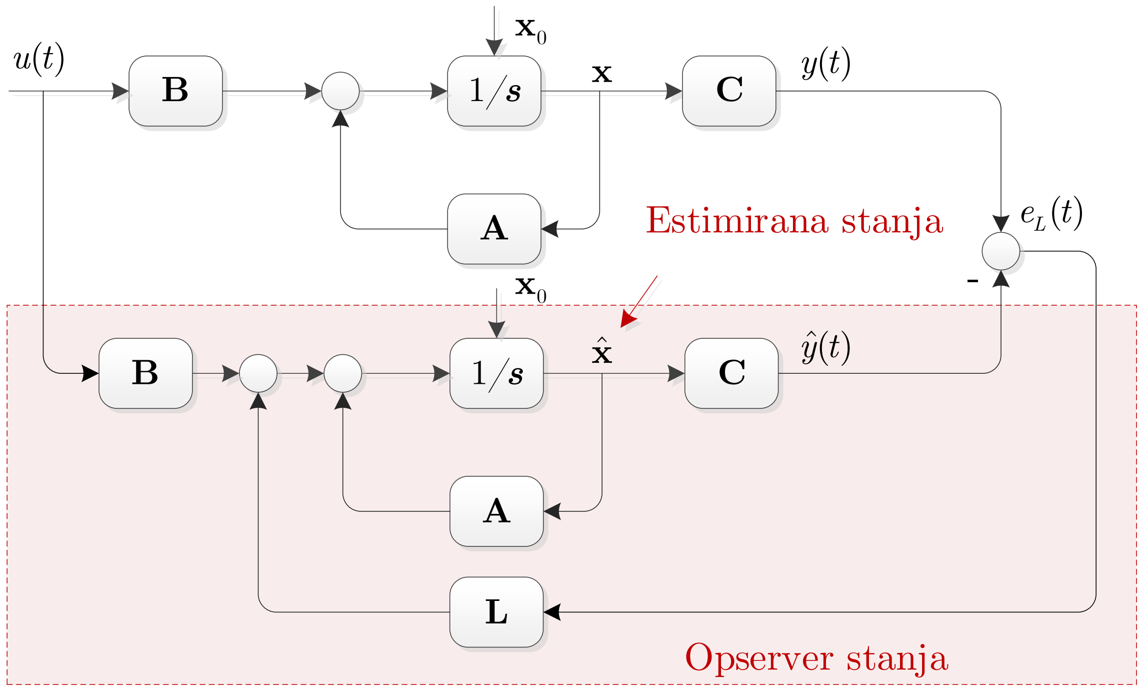
Na slici ispod je prikazan opserver stanja u otvorenoj sprezi.



Sasvim je jasno da se opserver stanja u otvorenoj sprezi može primijeniti samo u idealnom slučaju, jer u praksi nikad ne poznajemo egzaktan model sistema, a pored toga sistemi se najčešće nalaze u okruženju u kojem djeluju spoljni poremećaji. Možemo odmah pretpostaviti, da bi smanjili uticaj poremećaja i nepoznavanja egzaktnog modela sistema potrebno je na neki način uvesti povratnu spregu.

Opserveri stanja sa zatvorenom spregom

Na slici ispod je prikazan opserver stanja sa zatvorenom spregom.



Dakle, u jednačine estimiranih stanja potrebno je uvrstiti korektivni član $\mathbf{L}e_L(t)=\mathbf{L}(y(t)\text{-}\hat{y}(n))$, gdje $y(t)$ predstavlja mjerenu promjenljivu, a $\hat{y}(n)$ estimiranu vrijednost mjerene varijable.

Opserveri stanja sa zatvorenom spregom

Jednačine estimiranih stanja su:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}e_{\mathrm{L}}(t),\ \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0. \qquad \boxed{\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times 1}}$$

Prethodne jednačine stanja se dalje mogu zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}(y(t) - \hat{y}(t)) + \mathbf{B}u(t) = \\ &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{LC}(\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}u(t).\end{aligned}$$

Gornjim jednačinama možemo dodati član $\mathbf{Ax}(t)$, a zatim ga i oduzeti:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{LC}(\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)) - \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ &= \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)) - \mathbf{LC}(\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)) + \dot{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}$$

Na kraju, možemo uvesti transformaciju (smjenu) $\mathbf{e}(t)=\hat{\mathbf{x}}(t)$-$\mathbf{x}(t)$:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{Ae}(t) - \mathbf{LCe}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}$$

Vektor $\mathbf{e}(t)$ će asimptotski da konvergira ka nuli u slučaju kada su sopstvene vrijednosti matrice **A**-**LC** manje od nule.

Opserveri stanja sa zatvorenom spregom

Dakle, cilj je da razlika između estimiranih i stvarnih vrijednosti stanja asimptotski konvergira ka nuli:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{e}(t) - \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{e}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}.$$

Odgovarajućim odabirom vektora **L** možemo podesiti željenu brzinu konvergencije gornje jednačine (vrijeme smirenja). Može se uočiti da je gornji problem veoma sličan problemu postavljanja polova, kod kojeg se podešavaju sopstvene vrijednosti matrice **A**-**BK**.

Jedan način da se podese sopstvene vrijednosti matrice **A**-**LC** je da se sistem transformiše u OKF (opservabilnu kanoničnu formu). Međutim, isti problem se može modifikovati i transformisati u standardni problem postavljanja polova. Poći ćemo od činjenice da su sopstvene vrijednosti neke matrice **M** iste kako i sopstvene vrijednosti transponovane matrice $\mathbf{M}^T$. Drugim riječima sopstvene vrijednosti matrice **A**-**LC** su jednake sopstvenim vrijednostima matrice $(\mathbf{A}\text{-}\mathbf{LC})^T = \mathbf{A}^T\text{-}\mathbf{C}^T\mathbf{L}^T$. Konačno, vektor $\mathbf{L}^T$ možemo odrediti na isti način kao što određujemo vektor **K** kod pole placement problema – `L`^{T}`=acker(A', C', [željene sopstv. vr.])`.

Opserveri stanja sa zatvorenom spregom

Da bi mogli podesiti sve sopstvene vrijednosti par ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$,$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$) mora biti potpuno kontrolabilan:

$$rank\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & \cdots & \left(\mathbf{A}^T\right)^{n-1}\mathbf{C}^T \end{bmatrix} = n.$$

Može se uočiti ukoliko je par ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$,$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$) kontrolabilan, tada će par ($\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$) biti opservabilan. Ovo je Kalman nazvao principom dualnosti. Drugim riječima, ukoliko imamo sistem ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$) i ako želimo da dizajniramo opserver stanja, tada je potrebno da sistem bude potpuno opservabilan. Sa druge strane, isti problem možemo posmatrati kao problem postavljanja polova dualnog sistema ($\mathbf{A}^T$, $\mathbf{C}^T$, $\mathbf{B}^T$), pri čemu da mogli postaviti polove dualnog sistema, on mora biti potpuno kontrolabilan.

Primjer – opserver stanja

Sistem je zadat u prostoru stanja matricama:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

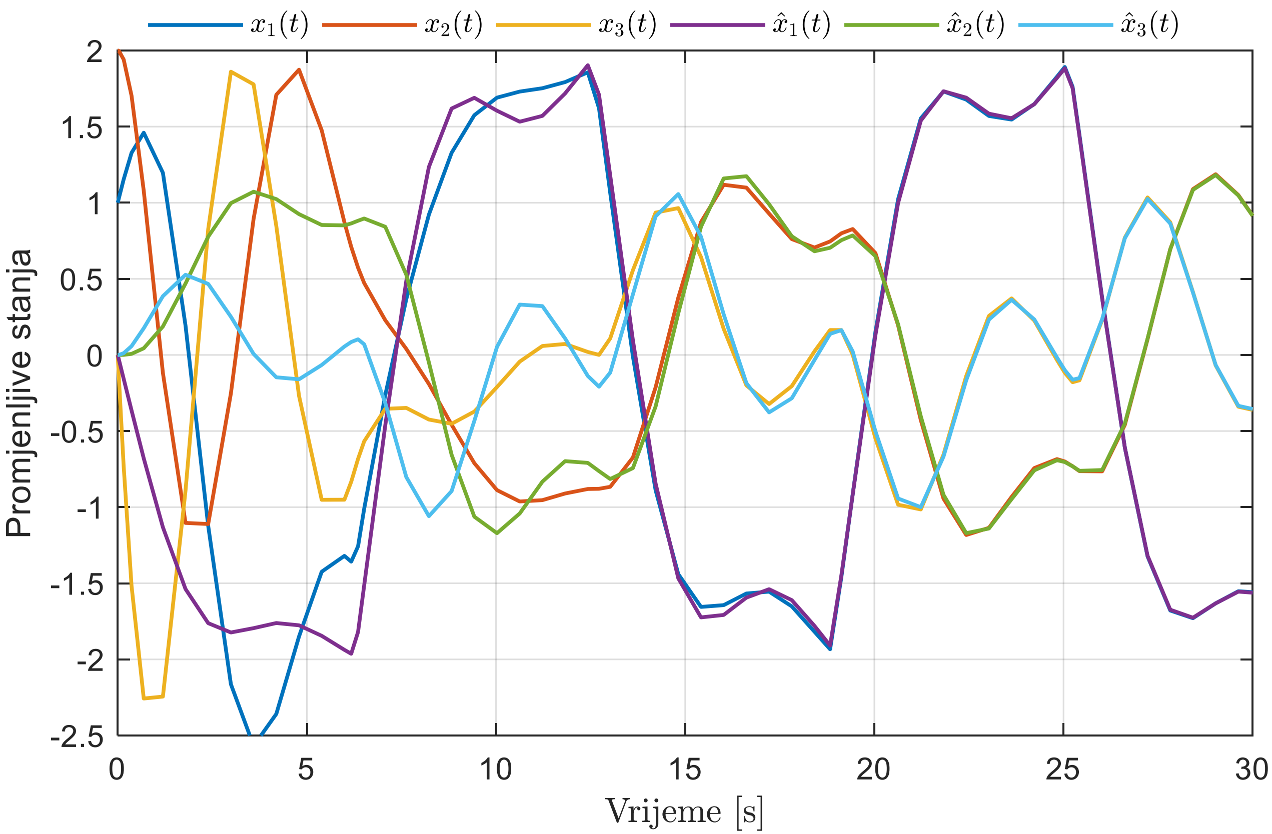
Projektovati opserver stanja sistema u otvorenoj i sa zatvorenom spregom. Upravljački signal je periodični pravougaoni signal kome se amplituda mijenja sa vrijednosti 1 na -1. Trajanje jedne periode upravljačkog signala je 2s. Polove spregnutog opservera usvojiti tako da budu 3 puta dalji od polova sistema u otvorenoj sprezi (u odnosu na imaginarnu osu).

Opserver stanja u otvorenoj sprezi predstavlja samo kopiju sistema koja koja se „veže“ paralelno sa sistemom i na čiji ulaz dovodimo upravljački signal. Usvojićemo da su početna stanja opservera jednaka nuli. Opserver za zatvorenom spregom ima korektivni član. Vektor **L** treba odabrati iz uslova da polovi opservera bud 3 puta dalji od polova sistema u otvorenoj sprezi. Polovi sistema u otvorenoj sprezi su: -0.57, -0.22 + 1.31i, -0.22 - 1.31i. Odnosno:

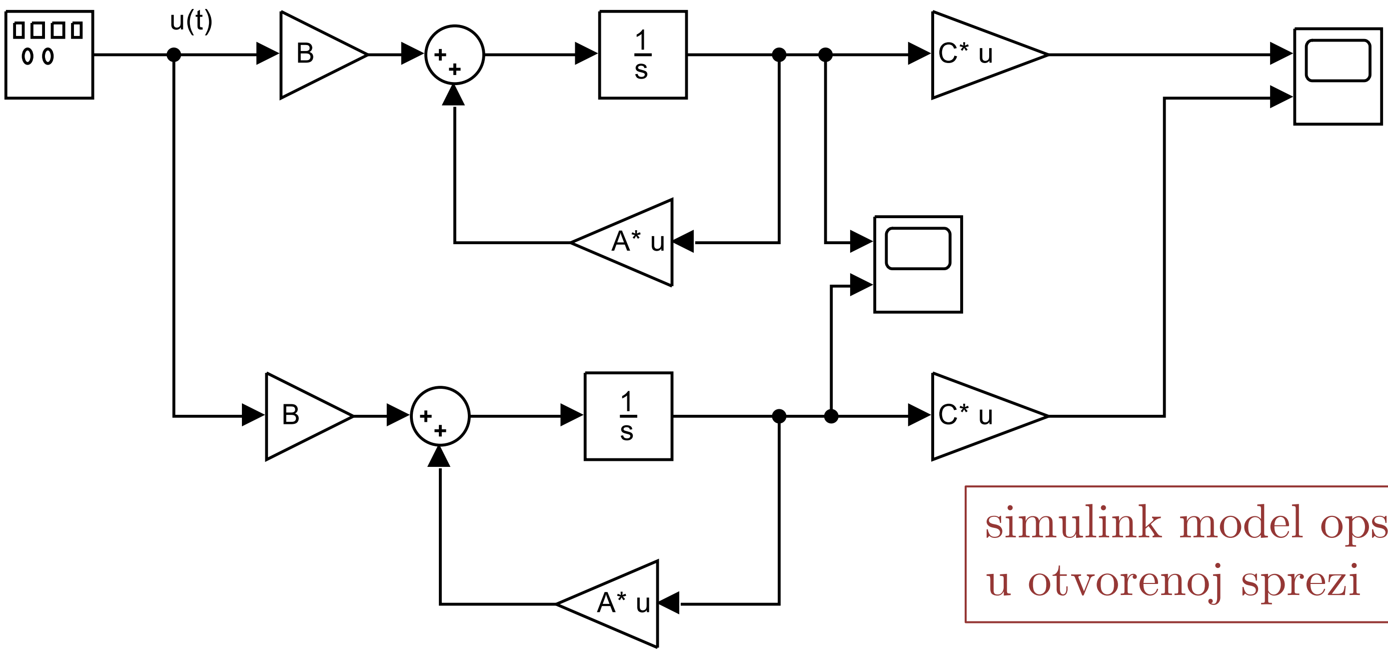
$\mathbf{L}^T$`=acker(A', C', 3*[-0.57, -0.22 + 1.31i, -0.22 - 1.31i])=[2 14 8].`

Primjer – opserver stanja

Na slici ispod su prikazane promjenljive stanja i njihove estimirane vrijednosti. Kako početni uslovi sistema i opservera nijesu isti, potrebno je oko 20 sekundi da prirodni odziv iščezne, nakon čega opserver stanja na izlazu daje vrijednosti koje su jednake promjenljivima stanja sistema.



Primjer – opserver stanja

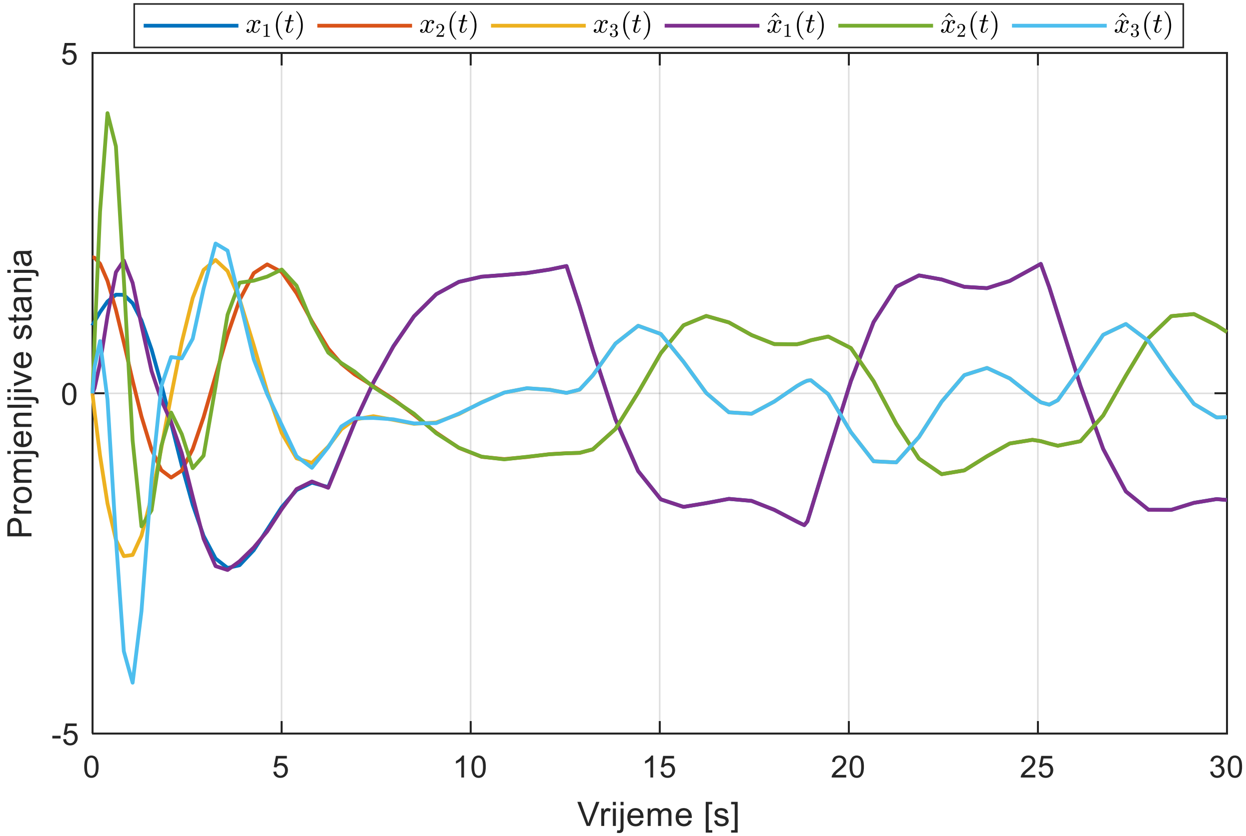


simulink model opservera u otvorenoj sprezi

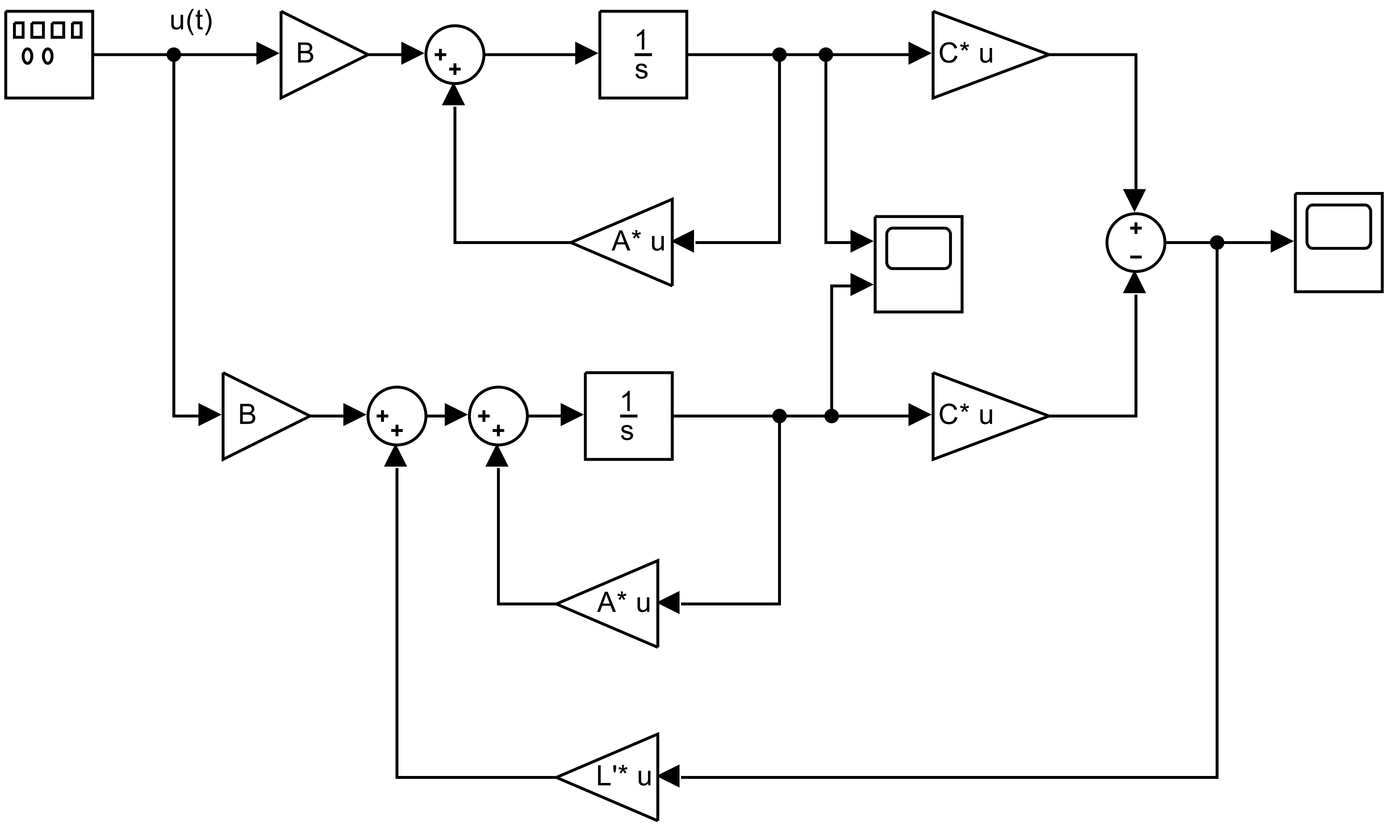
```
>> A=[0 1 0;0 0 1;-1 -2 -1]
>> B=[1;0;0];
>> C=[1 0 0];
>> L=acker(A',C',3*eig(A))
>> plot(a.time,a.signals(1).values), hold on
>> plot(a.time,a.signals(2).values)
>> leg1=legend('${x_1}(t)$','${x_2}(t)$','${x_3}(t)$','${\hat x_1}(t)$','${\hat
x_2}(t)$','${\hat x_3}(t)$','orientation','horisontal')
>> set(leg1,'Interpreter','latex');
```

Primjer – opserver stanja

Na slici ispod su stvarne i estimirane promjenljive stanja opservera sa zatvorenom spregom. Može se uočiti da opserver nakon 5s počinje da generiše tačne vrijednosti promjenljvih stanja. Međutim, objekat upravljanja se obično nalazi u okruženju u kojem djeluju poremećaji, što proces estimacije čini težim.



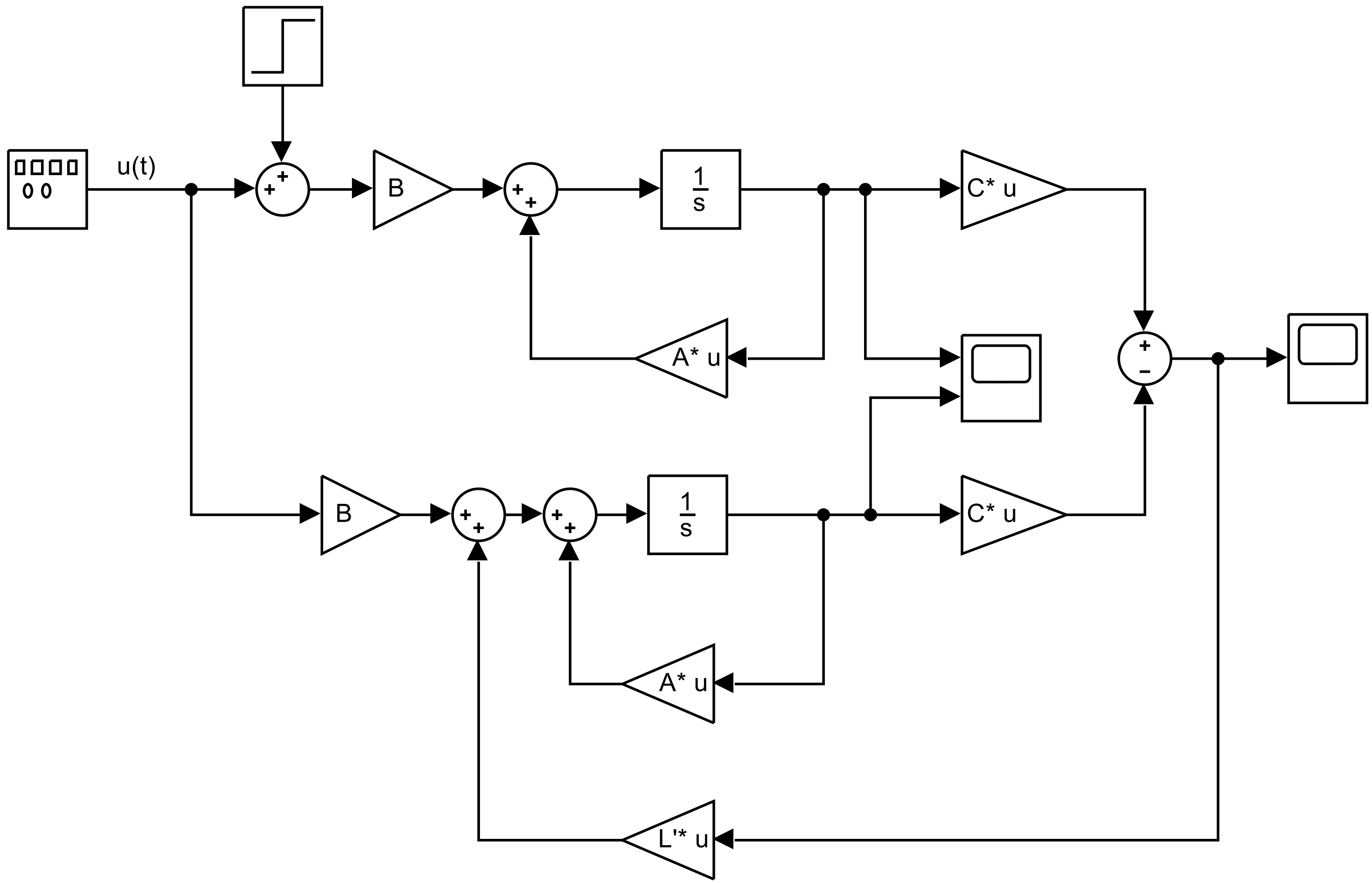
Primjer – opserver stanja



simulink model opservera
sa zatvorenom spregom

Primjer – opserver stanja

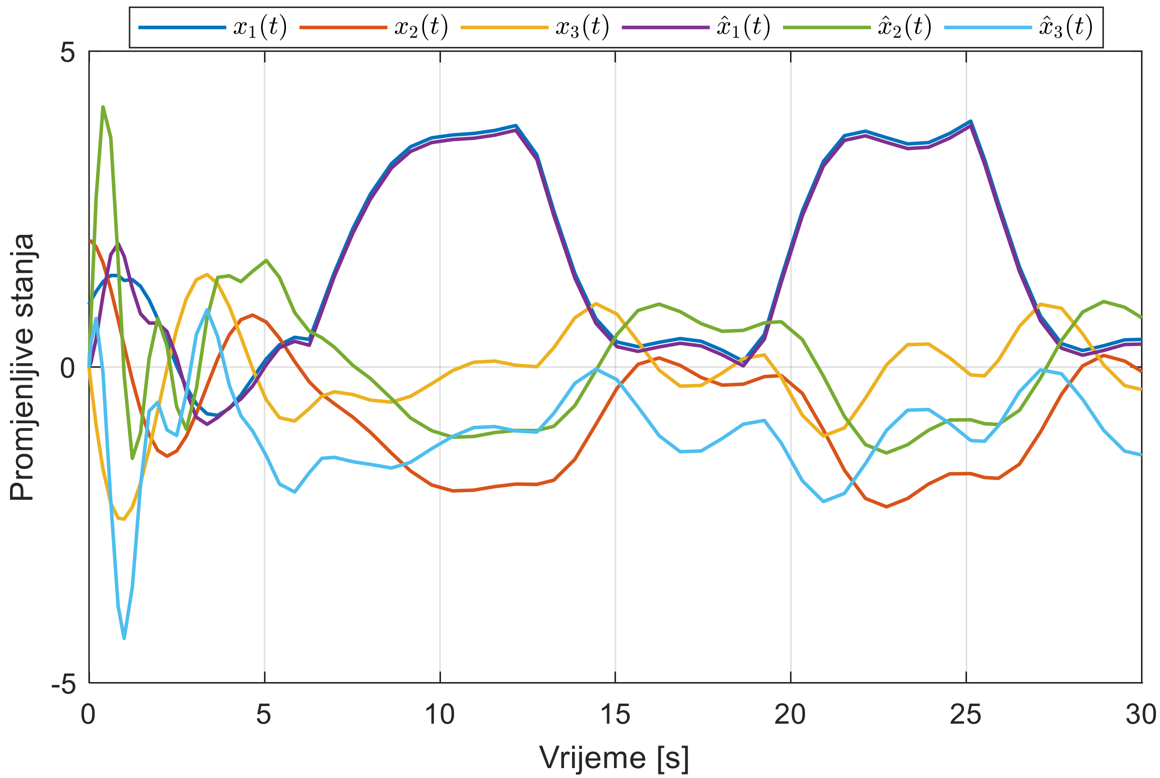
U ovom scenariju je razmotren step poremećaj koji djeluje na ulaz objekta upravljanja. Simulink model je dat ispod.

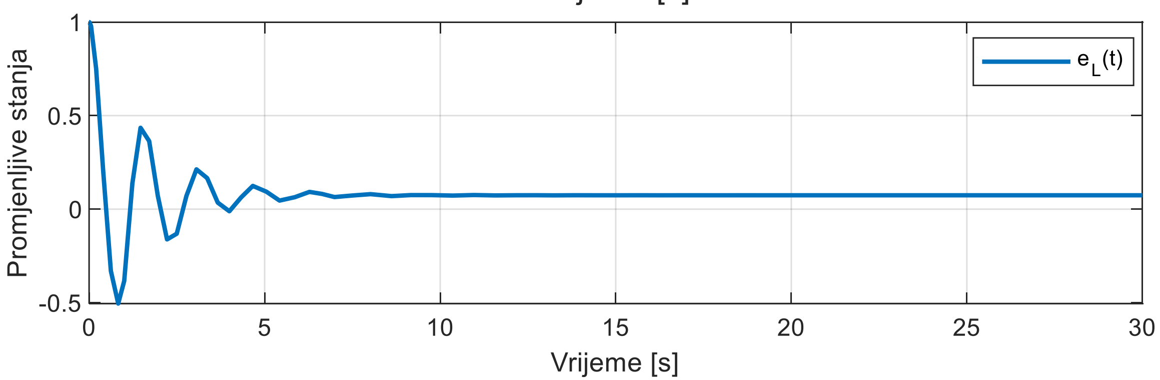


Primjer – opserver stanja

Sa slike se može uočiti da zbog jediničnog step poremaćaja postoji prilično velika greška u estimaciji stanja. Greška je naročito izražena u slučajevima estimacije promjenljivih x_2 i x_3. Na donjoj slici je prikazana greška opservera $e_\mathrm{L}(t)$, koja iznosi oko 0.1. Kako je matrica $\mathbf{C}$=[1 0 0], ta greška predstavlja grešku u estimaciji promjenljive x_1.

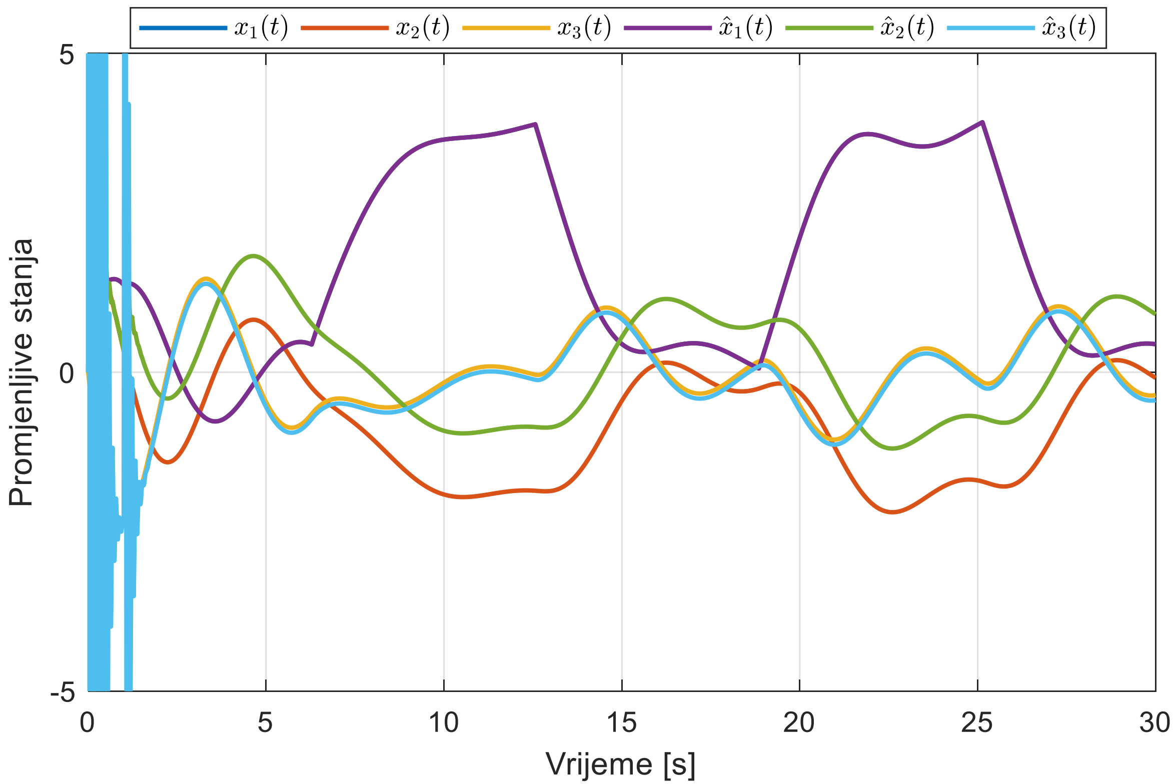
Greška opservera usljed djelovanja poremećaja se može smanjiti udaljavanjem polova u s-ravni, čime se povećava propusni opseg opservera. Međutim, na ovaj način opserver će biti osjetljiviji na mjerni šum.



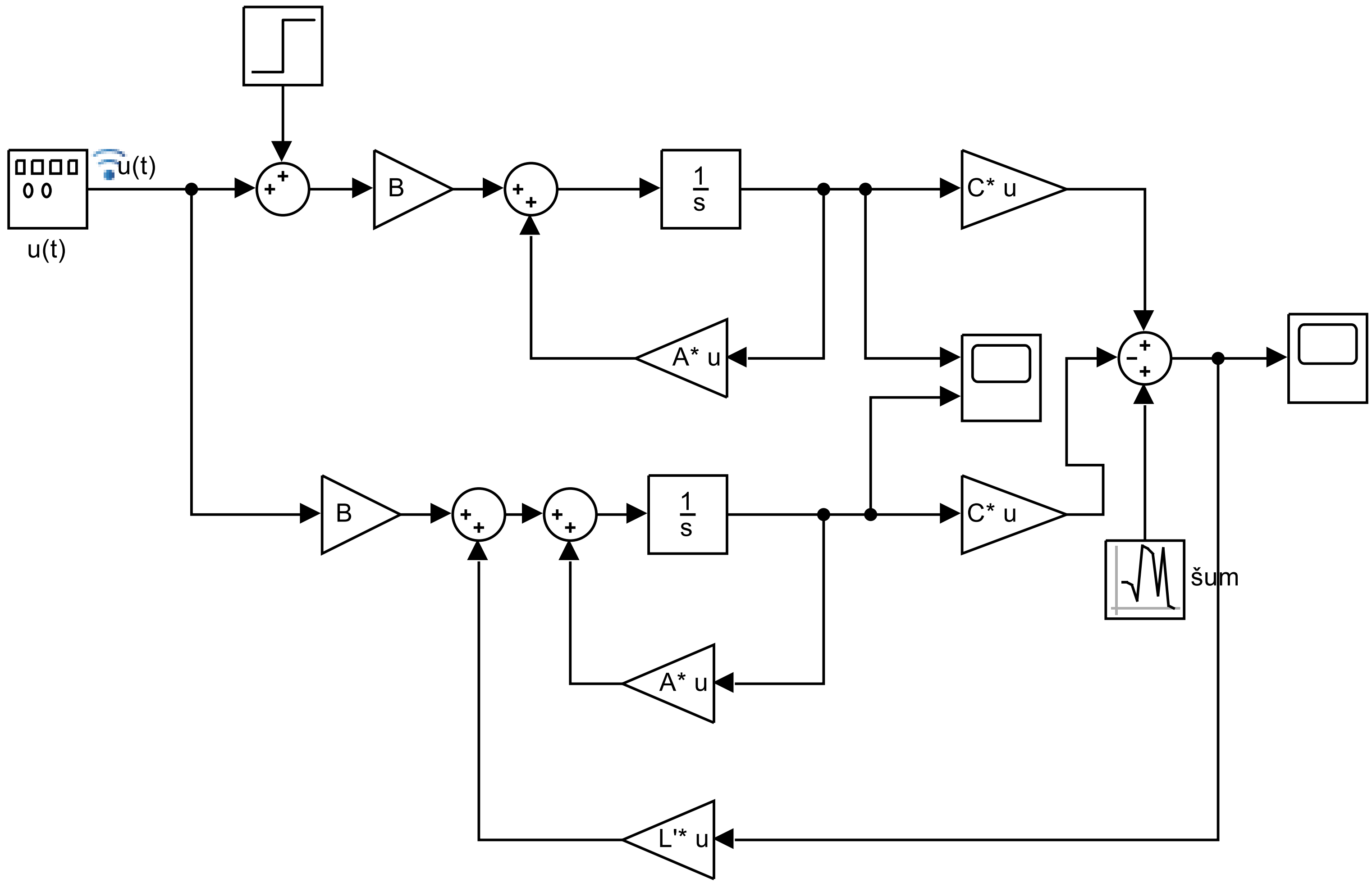


Primjer – opserver stanja

Na slici su prikazane promjenljive stanja sistema i opservera za slučaj kada se usvoje polovi opservera koji su 50 puta dalji od imaginarne ose u odnosu na polove sistema. Međutim, može se uočiti da i dalje nastaje veliko odstupanje prilikom estimacije promjenljive x_2. Ako se doda mjerni šum, vrlo je moguće da se se dobiti gori rezultati nego u pretodnom scenariju. U suštini, moramo naći bolji način da se izborimo sa spoljnim poremećajima.

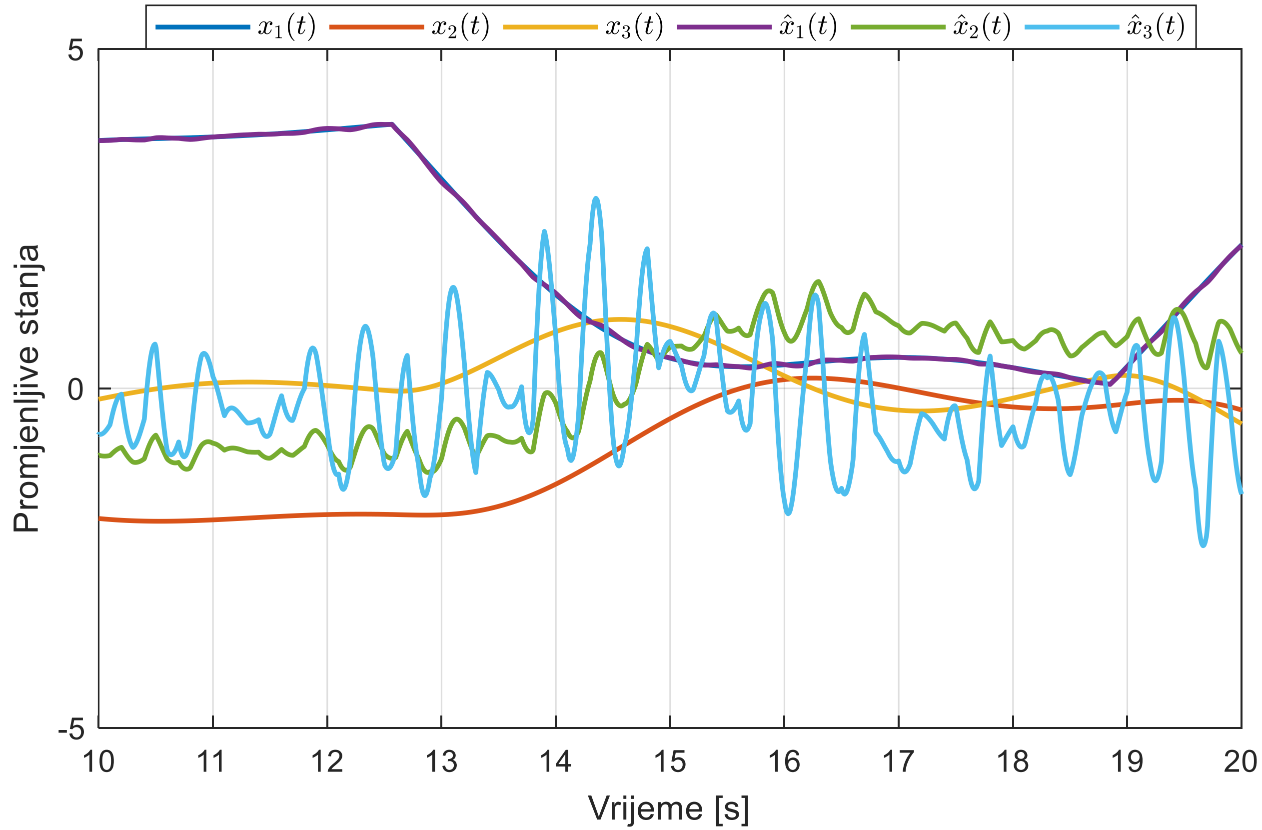


Primjer – opserver stanja



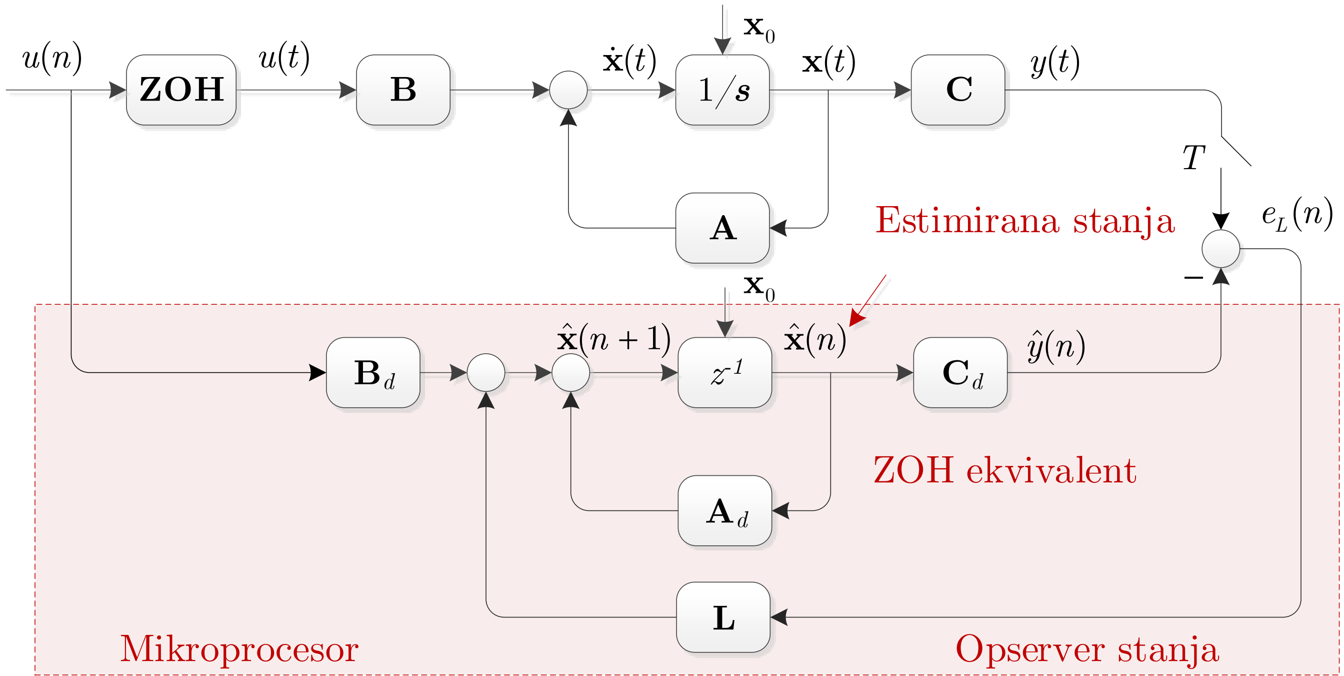
Primjer – opserver stanja

U ovom scenariju je na senzor dodat bijeli Gausov šum, varijanse 0.01. Može se uočiti da prilikom estimacije promjenljivih x_2 i x_3 nastaju velike fluktuacije, koje su posljedica velikog propusnog opsega sistema.



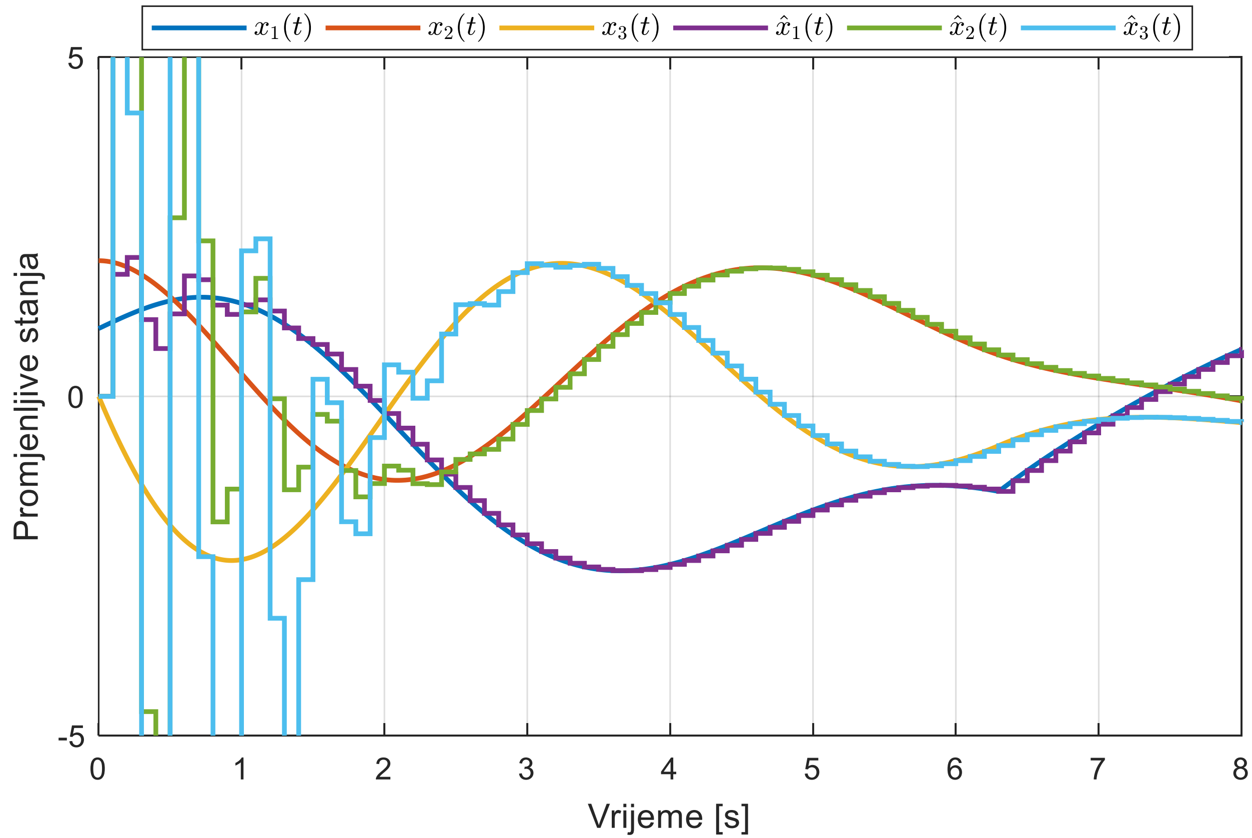
Digitalni opserver stanja

Digitalni opsever stanja se dizajnira na sličan način. Naravno, potrebni su nam odbirci upravljačkog signala $u(t)$ i mjerenog signala $y(t)$ u trenucima odabiranja ($u(n)$ i $y(n)$).



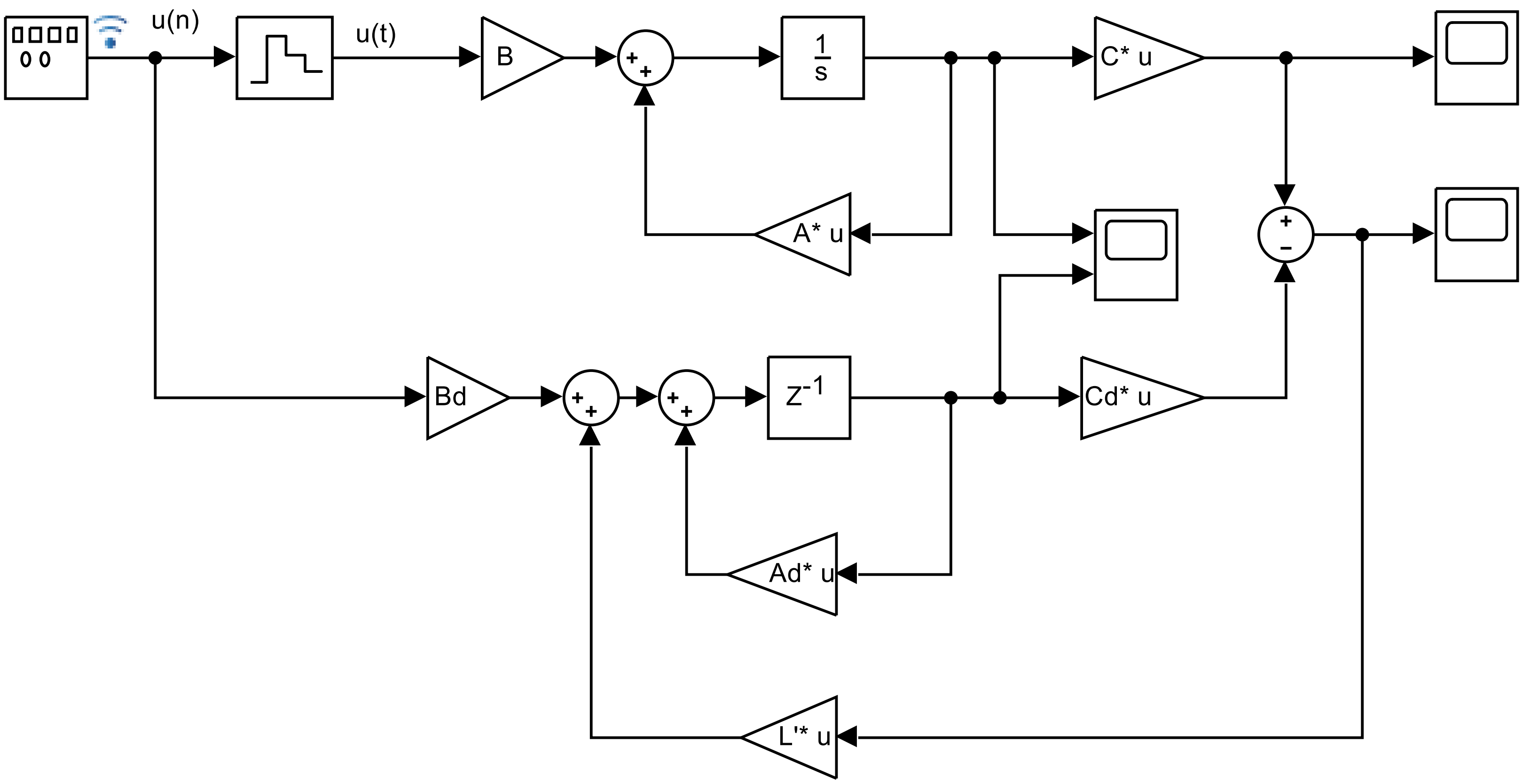
$\mathbf{L}^T$`=acker(Ad', Cd', [željene sopstv. vr.]).`

Primjer - digitalni opserver



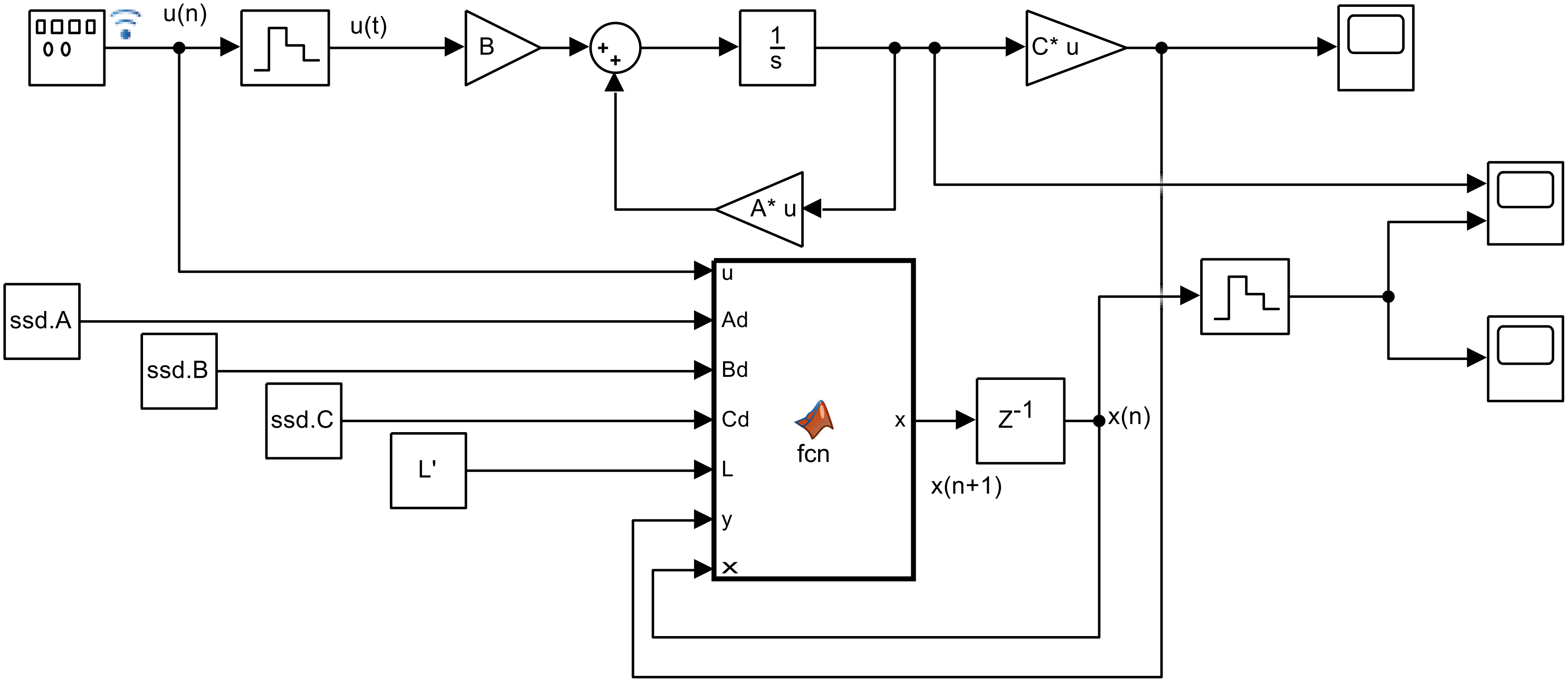
Na slici su prikazana estimirana stanja digitalnog opservera. Pimijetimo da su estimirana stanja jednaka stanjima kontinualnog sistema u trenucima odabiranja.

Primjer - digitalni opserver



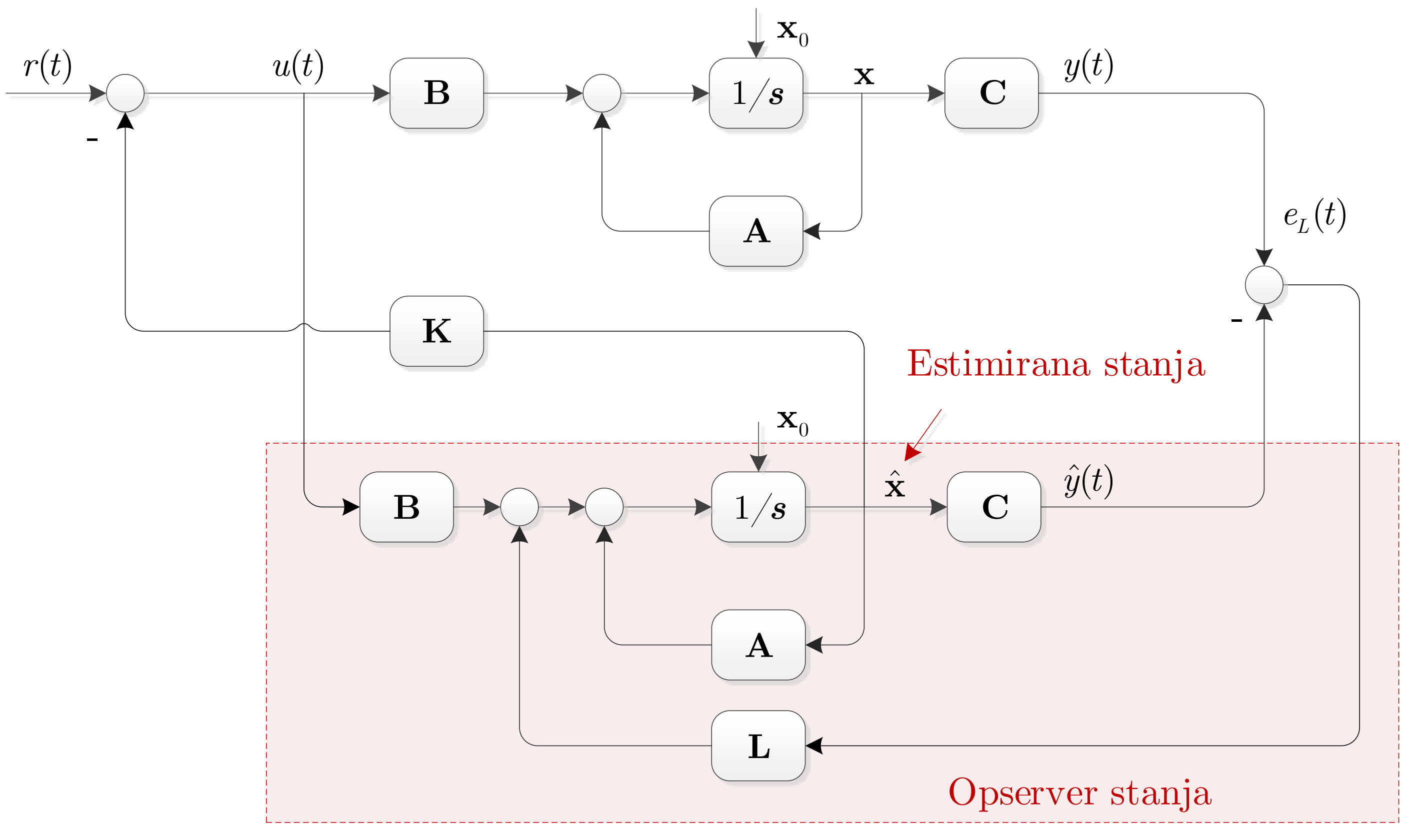
Primjer - digitalni opserver

Ispod je data implementacija pomoću Matlab function bloka.

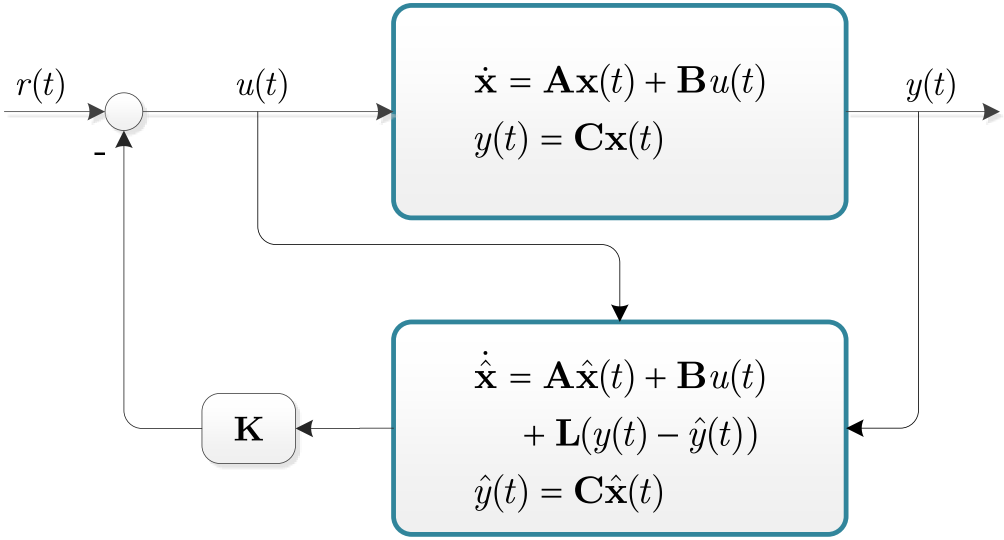



```
function x = fcn(u,Ad,Bd,Cd,L,y,x)
ye=Cd*x; % uncheck u ssd.C "interpret vector parameters as 1D"
x=Ad*x+Bd*u+L*(y-ye)
```

Upravljanje pomoću opservera



Upravljanje pomoću opservera



Model u prostoru stanja kompletnog sistema je:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}r(t)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Upravljanje pomoću opservera

Nakon uvođenja smjene $\widehat{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{x}(t)=\mathbf{e}(t)$, prethodni model se svodi na:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}(t) + \mathbf{B}r(t) \\
\dot{\mathbf{e}}(t) &= \left(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}\right)\mathbf{e}(t) \\
y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)
\end{aligned}$$

odnosno u matričnom obliku:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\text{ - }\mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}-\mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(t) \\
&y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)
\end{aligned}$$

Polovi spregnutog sistema su jednaki:

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{A}\text{ - }\mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}-\mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} = \det\left(\mathbf{A}\text{ - }\mathbf{B}\mathbf{K}\right)\det\left(\mathbf{A}-\mathbf{L}\mathbf{C}\right).$$

Upravljanje pomoću opservera

Iz prethodne jednačine se dalje dobija:

$$\mathrm{eig}\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A - BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A - LC} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} = \mathrm{eig}\left(\mathbf{A - BK}\right) \cup \mathrm{eig}\left(\mathbf{A - LC}\right).$$

Prethodna jednačina je poznata pod nazivom princip seperabilnosti. S obzirom da je matrica $\widetilde{\mathbf{A}}$ trougaona, njene sopstvene vrijednosti su jednake sopstvenim vrijednostima blok matrica koje leže na dijagonali. Ovo znači da sopstvene vrijednosti opservera (vektor $\mathbf{L}$) i sopstvene vrijednosti spregnutog sistema (vektor $\mathbf{K}$) možemo računati odvojeno.

Ukoliko stanja sistema nijesu poznata, moguće će dodati opserver koji će ih estimirati. Novi sistem će pored inicijalno postavljenih polova vektorom $\mathbf{K}$, imati i nove polove, određene vektorom $\mathbf{L}$. Ako polove opservera odaberemo da budu daleko od polova spregnutog sistema, tada će performanse sistema sa opservorom biti slične performansama sistema kod kojeg se koristi samo vektor $\mathbf{K}$.

Margine stabilnosti

Marginama stabilnosti se izražavaju maksimalne dozvoljene perturbacije u parametrima modela sistema, pri kojima spregnuti sistem ostaje stabilan. Dodavanjem opservera povećavamo red sistema i najčešće smanjujemo margine stabilnosti.

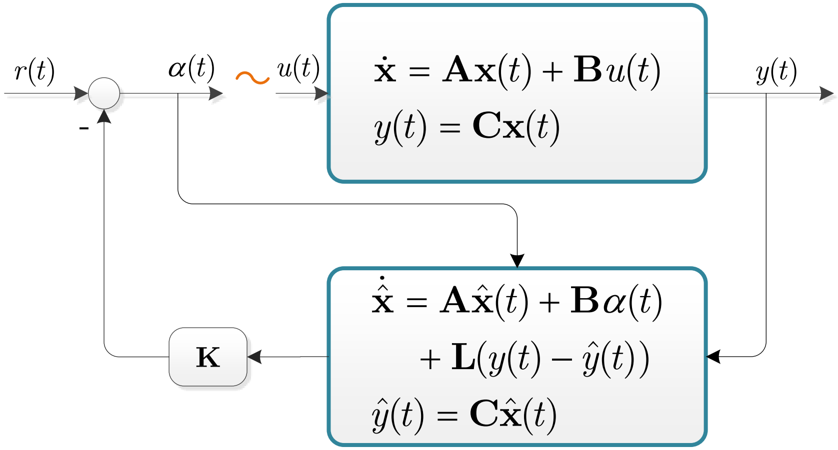
Udaljavanjem polova opservera u s-ravni još više pogoršavamo situaciju, tj. još više smanjujemo margine stabilnosti u odnosu na sistem upravljanja bez opservera.

Da bi margine stabilnosti sistema upravljanja sa opserverom i bez opservera bile približno jednake, u literaturi se usvaja sljedeće pravilo:

- Polove opservera treba odabrati tako da budu jednaki nulama sistema u otvorenoj sprezi
- Ukoliko sistem u otvorenoj sprezi ima nule u desnoj poluravni, tada te nule treba pomnožiti sa -1 i usvojiti ih za polove opservera.
- Ostale polove opservera treba usvojiti tako da budu 2-5 dalji od polova spregnutog sistema (u odnosu na imaginarnu osu).

Margine stabilnosti

Da bi odredili margine stabilnosti potrebno je raskinuti povratnu petlju i odrediti funkciju povratnog prenosa:

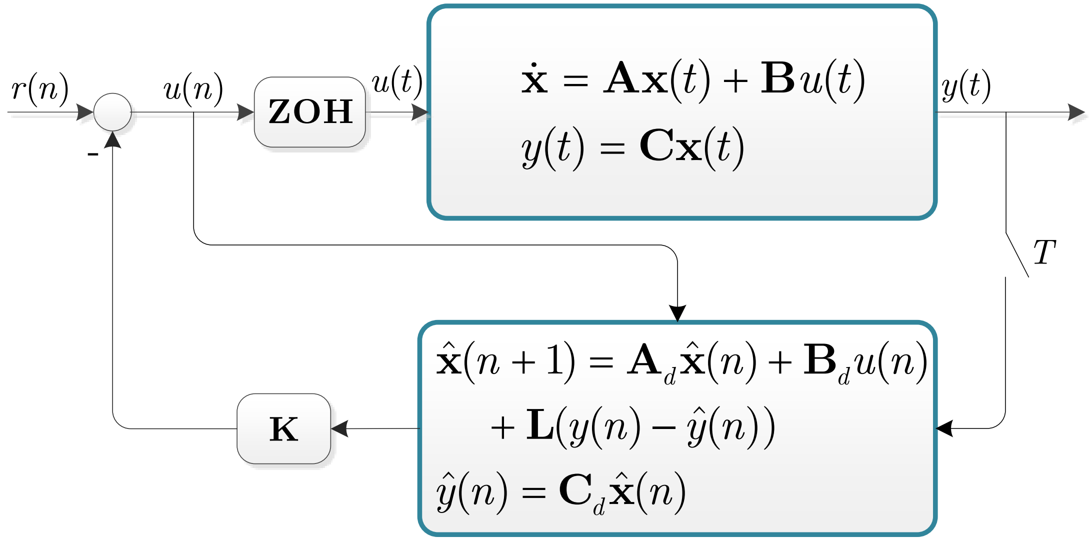


Model u prostoru stanja sistema u otvorenoj sprezi je:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{LC} & \mathbf{A}-\mathbf{BK}-\mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}$$

Digitalna sprega po stanjima sa opserverom



Model u prostoru stanja kompletnog sistema je:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(n+1) \\ \mathbf{e}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d\mathbf{K} & \mathbf{B}_d\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d - \mathbf{L}\mathbf{C}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ \mathbf{e}(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(n)$$

$$y(n) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(n)$$

```
K=acker(Ad, Bd, [željene sopstv. vr.]).
LT=acker(Ad', Cd', [željene sopstv. vr.]).
```

Opserveri redukovanog reda

Posmatrajmo kontinualni LTI sistem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t).$$

Pretpostavićemo da je rang matrice $\mathbf{C}$ jednak p, što znači da se jednačina mjerenja sastoji od p linearno nezavisnih jednačina, odnosno da iz mjerenja možemo dobiti informaciju o p promjenjivih stanja. Naš zadatak je da dizajniramo opserver (n-p)og reda za estimaciju preostalih n-p promjenljivih.

Ne gubeći na opštosti, pretpostavićemo da se jednačina mjerenja može zapisati na sljedeći način:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Ovo je uvijek moguće odraditi, jer ako je rang($\mathbf{C}$)=p, tada uvijek postoji matrica $\mathbf{P}$, takva da je $\mathbf{CP}$=[$\mathbf{I}_p$ $\mathbf{0}$]. Odnosno možemo zapisati:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)}_{\bar{\mathbf{x}}(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t).$$

Povratak na originalni koordinatni sistem

Opserveri redukovanog reda

Kako smo pretpostavili da prvih p stanja direktno mjerimo, uvešćemo sljedeće oznake:

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(t)\\ \mathbf{x}_2(t)\end{bmatrix},\dim\{\mathbf{x}_1(t)\}=p,\dim\{\mathbf{x}_2(t)\}=n-p.$$

Početni model dalje može zapisati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_1(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(t)\\ \mathbf{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix}u(t),\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(0),$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{x}_1(t).$$

Stanja $\mathbf{x}_1(t)$ direktno mjerimo, pa ih nije potrebno estimirati. Preostaje da se estimiraju stanja $\mathbf{x}_2(t)$. Opserver redukovanog reda treba da bude takav da se sastoji od kopije sistema i korektivnog člana čiji zadatak redukcija greške u estimaciji stanja na nulu. Odnosno, iz jednačina stanja možemo zapisati:

$$\hat{\dot{\mathbf{x}}}_2(t)=\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1(t)+\mathbf{A}_{22}\hat{\mathbf{x}}_2(t)+\mathbf{B}_2u(t)+\mathbf{L}_2(\mathbf{y}(t)-\hat{\mathbf{y}}(t)).$$

Opserveri redukovanog reda

Kako izlaz $\mathbf{y}(t)$ u sebi ne sadrži informaciju o $\mathbf{x}_2(t)$, prethodni opserver neće moći da svede na 0 grešku u estimaciji stanja:

$$\mathbf{e}_2(t) = \mathbf{x}_2(t) - \hat{\mathbf{x}}_2(t).$$

Međutim, ako diferenciramo izlaznu jednačinu $\mathbf{y}(t)$, dobićemo:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{B}_1 u(t),$$

što znači da izvod izlazne jednačine nosi informaciju o $\mathbf{x}_2(t)$. Konačno, opserver stanja imaće sljedeću formu:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22}\hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{B}_2 u(t) + \mathbf{L}_2(\dot{\mathbf{y}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t)),\\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}\hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{B}_1 u(t).\end{aligned}$$

Uvodeći smjenu:

$$\dot{\mathbf{e}}_2(t) = \dot{\mathbf{x}}_2(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t),$$

dinamika greške se može zapisati na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{e}}_2(t) = \left(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}_2\mathbf{A}_{12}\right)\mathbf{e}_2(t).$$

Opserveri redukovanog reda

Da bi podesili polove observera redukovanog reda na željene vrijednosti, potrebno je da par $(\mathbf{A}_{22},\ \mathbf{A}_{21})$ bude opservabilan (odnosno da dualni sistem bude kontrolabilan).

Lako se može pokazati da opservabilnost sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{C})$ implicira opservabilnost sistema $(\mathbf{A}_{22},\ \mathbf{A}_{21})$. Što znači, ako je originalni sistem opservabilan, tada je moguće projektovati opserver redukovanog reda.

Preostaje još da se riješi problem nepoznavanja izvoda izlaznog signala u jednačini opservera:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22}\hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{B}_2 u(t) + \mathbf{L}_2(\dot{\mathbf{y}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t)),$$
$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}\hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{B}_1 u(t).$$

Ovaj problem se može riješiti uvođenjem smjene:

$$\hat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{L}_2\mathbf{y} = \hat{\mathbf{z}}_2,$$

nakon čega se opserver može svesti na sljedeću formu:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_2(t) = \mathbf{A}_z\hat{\mathbf{z}}_2(t) + \mathbf{B}_z u(t) + \mathbf{L}_z\mathbf{y}(t).$$

Opserveri redukovanog reda

Naime, nakon sređivanja jednačina opservera se može zapisati na sljedeći način:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) - \mathbf{L}_2\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22}\hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{B}_2u(t) - \mathbf{L}_2(\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}\hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{B}_1u(t))$$
$$= (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}_2\mathbf{A}_{11})\mathbf{x}_1(t) + (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}_2\mathbf{A}_{12})\hat{\mathbf{x}}_2(t) + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_1)u(t)$$
$$= (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}_2\mathbf{A}_{11})\mathbf{y}(t) + (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}_2\mathbf{A}_{12})(\hat{\mathbf{z}}_2(t) + \mathbf{L}_2\mathbf{y}(t)) - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)u(t)$$

Upoređujući prethodnu jednačinu sa jednačnom:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_2(t) = \mathbf{A}_z\hat{\mathbf{z}}_2(t) + \mathbf{B}_z u(t) + \mathbf{L}_z\mathbf{y}(t),$$

dobiju se sljedeći izrazi za matrice $\mathbf{A}_z$, $\mathbf{B}_z$ i $\mathbf{L}_z$:

$$\mathbf{A}_z = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}_2\mathbf{A}_{12},$$
$$\mathbf{B}_z = \mathbf{B}_2 - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_1,$$
$$\mathbf{L}_z = \mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}_2\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_2\mathbf{A}_{12}\mathbf{L}_2.$$

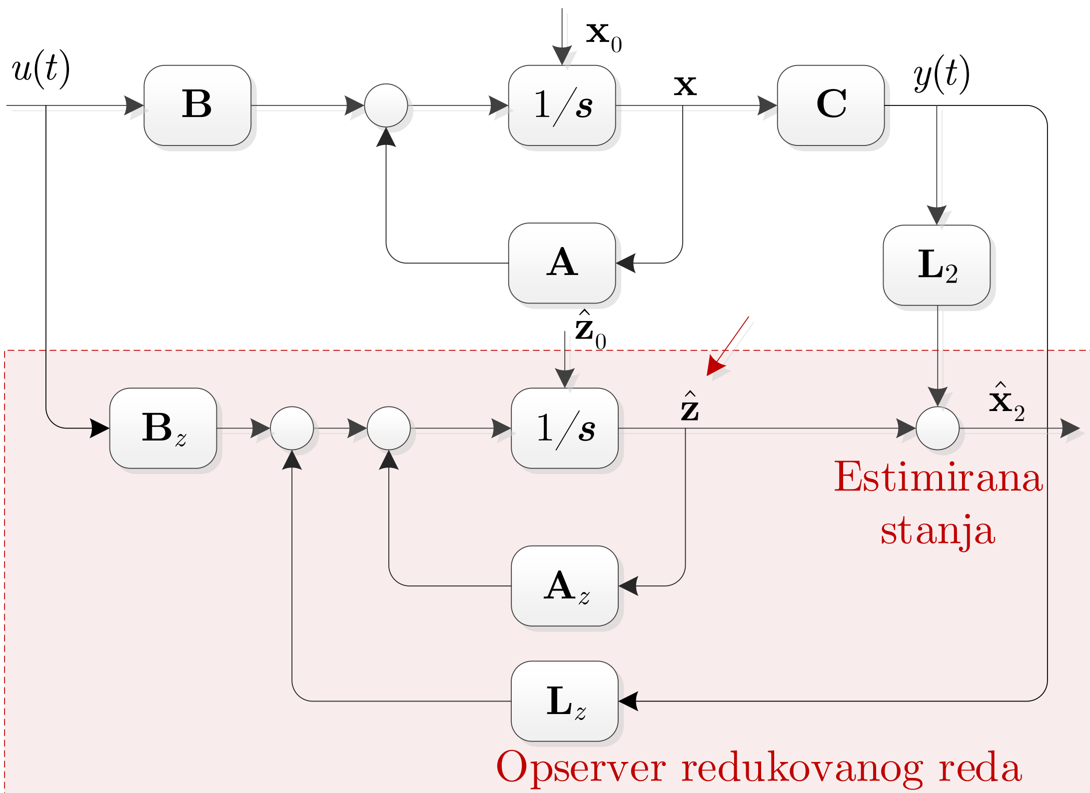
Treba imati u vidu da su estimirana stanja jednaka:

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{z}}_2 + \mathbf{L}_2\mathbf{y}.$$

Opserveri redukovanog reda

Opserveri redukovanog reda su robusniji i jednostavniji za implementaciju. Međutim, ukoliko su mjerenja zašumljena, opserveri punog reda mogu imati bolje performanse.

Blok dijagram opservera redukovanog reda je prikazan na slici ispod.



Primjer – opserver redukovanog reda

Sistem je zadat u prostoru stanja matricama:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Projektovati opserver redukovanog reda. Polovi opservera treba da budu -5 i -5.

Najprije treba izvršiti dekompoziciju matrica **A** i **B**:

$$\mathbf{A}_{11} = 0,\ \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = 1,$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dalje, vektor $\mathbf{L}_2$ je jednak:

$\mathbf{L}^T$`=acker(A22',A12',[-5 -5])'=[9 14].`

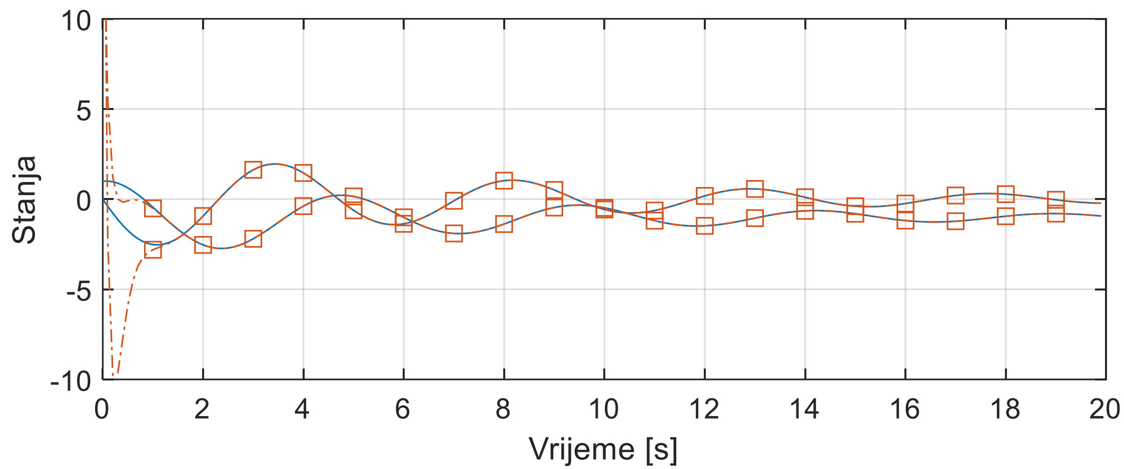
Matrice $\mathbf{A}_z$, $\mathbf{B}_z$ i $\mathbf{L}_z$ su jednake:

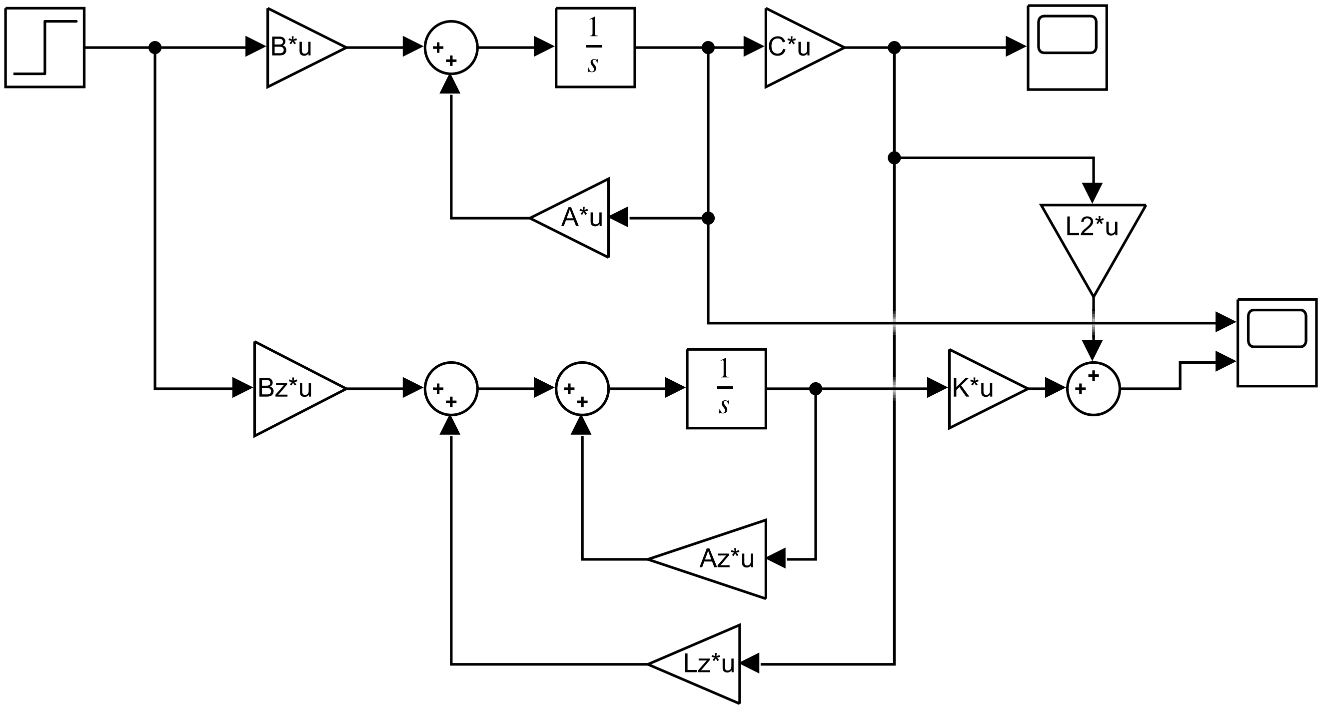
$$\mathbf{A}_z = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}_2\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -16 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_z = \mathbf{B}_2 - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -9 & -14 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{L}_z = \mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}_2\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_2\mathbf{A}_{12}\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} -67 & -159 \end{bmatrix}^T.$$

Primjer – opserver redukovanog reda





Opserveri poremećaja

Pretpostavimo da na objektat kojim se upravlja djeluje poremećaj $d(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\big(u(t) + d(t)\big).$$

Takođe, pretpostavimo da je tačna vrijednost poremećaja nepoznata, ali da je poznato da se on može modelovati kako prirodni odziv nekog sistema čiji su parametri poznati:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p\mathbf{x}_p(t)$$
$$d(t) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}_p(t)$$

Sistem treba da bude na granici stabilnosti, kako njegov odziv na početne uslove ne bi iščezao

Na primjer, ako je poremećaj sinusoidalan tada možemo usvojiti:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{p_1} \\ \dot{x}_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p_1} \\ x_{p_2} \end{bmatrix}$$

$$d(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p_1} \\ x_{p_2} \end{bmatrix}$$

Laplasova transformacija signala $\sin(\omega_0 t)$ je:

$$\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$$

KKF

Opserveri poremećaja

Ukoliko bi poremećaj bio unaprijed poznat, onda je jasno da upravljački signal treba usvojiti po sljedećem zakonu:

$$u(t) = -d(t) + r(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}.$$

Kako je poremećaj obično nepoznat, on se može estimirati pomoću opservera. Najprije treba formirati prošireni model sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\big(u(t) + d(t)\big)\\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{B}\mathbf{C}_p\mathbf{x}_p(t).\end{aligned}$$

Uvodimo nova stanja, kojima opisujemo poremećaj. Ovo ima smisla raditi kada imamo dugotrajne poremećaje

Pošto smo uveli vektor $\mathbf{x}_p(t)$, čitav model treba proširiti:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_p(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{x}_p(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{B}\mathbf{C}_p\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{x}_p(t)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{x}_p(t)\end{bmatrix}.$$

Opserveri poremećaja

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_p(t) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_{DOB}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{DOB}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_p(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{DOB}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{DOB}} u(t) + \mathbf{L}\mathbf{C}_{DOB}\left(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)\right)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{DOB}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_p(t) \end{bmatrix}.$$

Polovi opservera se biraju tako da sopstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}_{\mathrm{DOB}}$-$\mathbf{L}\mathbf{C}_{\mathrm{DOB}}$ imaju željenu vrijednost:

```
LT=acker(Adob’, Cdob', [željene sopstv. vr.]).
```

Estimirana stanja sistema i poremećaja se koriste za upravljanje. Vektor $\mathbf{K}$ se računa tako da spregnuti sistem ima željene vrijednosti:

```
K=acker(A, C, [željene sopstv. vr.]).
```

Konačno, upravljački signal ima sljedeći oblik:

$$u(t) = -\hat{d}(t) + r(t) - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{C}_p\hat{\mathbf{x}}_p(t) + r(t) - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) = r(t) - \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_p(t) \end{bmatrix}.$$

Primjer – opserver poremećaja

Objekat upravljanja je zadat u prostoru stanja:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

Na sistem djeluje sinusoidalni poremećaj $d(t)=\sin(0.5t)$. Projektovati opserver stanja i poremećaja. Zatvoriti spregu po stanjima tako da polovi spregnutog sistema budu jednaki -1.

Poremećaj se modeluje kao odziv sistema drugog reda (na početne uslove):

$$\mathbf{A}_p=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.25 & 0\end{bmatrix},\mathbf{C}_p=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

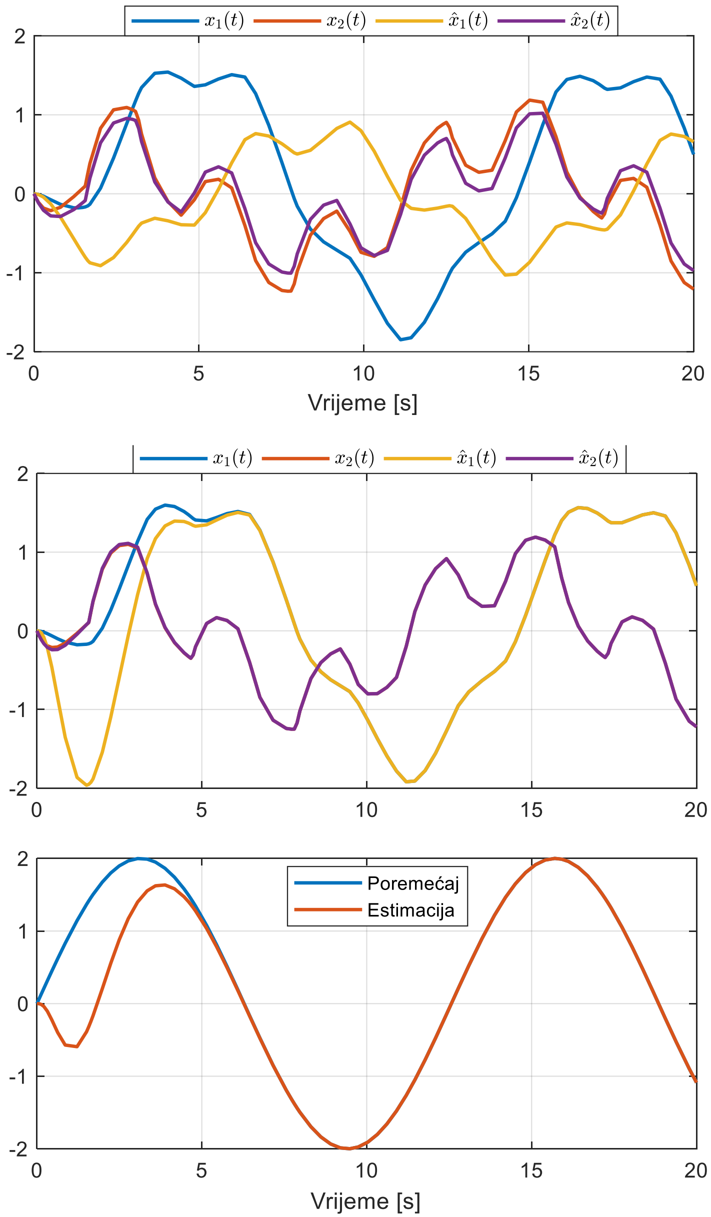
Prošireni model sistema u prostoru stanja je:

$$\mathbf{A}_{DOB}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{BC}_p\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_p\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_{DOB}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix},\mathbf{C}_{DOB}=\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

Polove opservera ćemo u ovom primjeru proizvoljno odabrati tako da budu jednaki -2. Konačno, vrijednost vektora **L** biće:

$$\mathbf{L}^T=\begin{bmatrix}6 & 10.75 & 30 & 10.0625\end{bmatrix}^T.$$

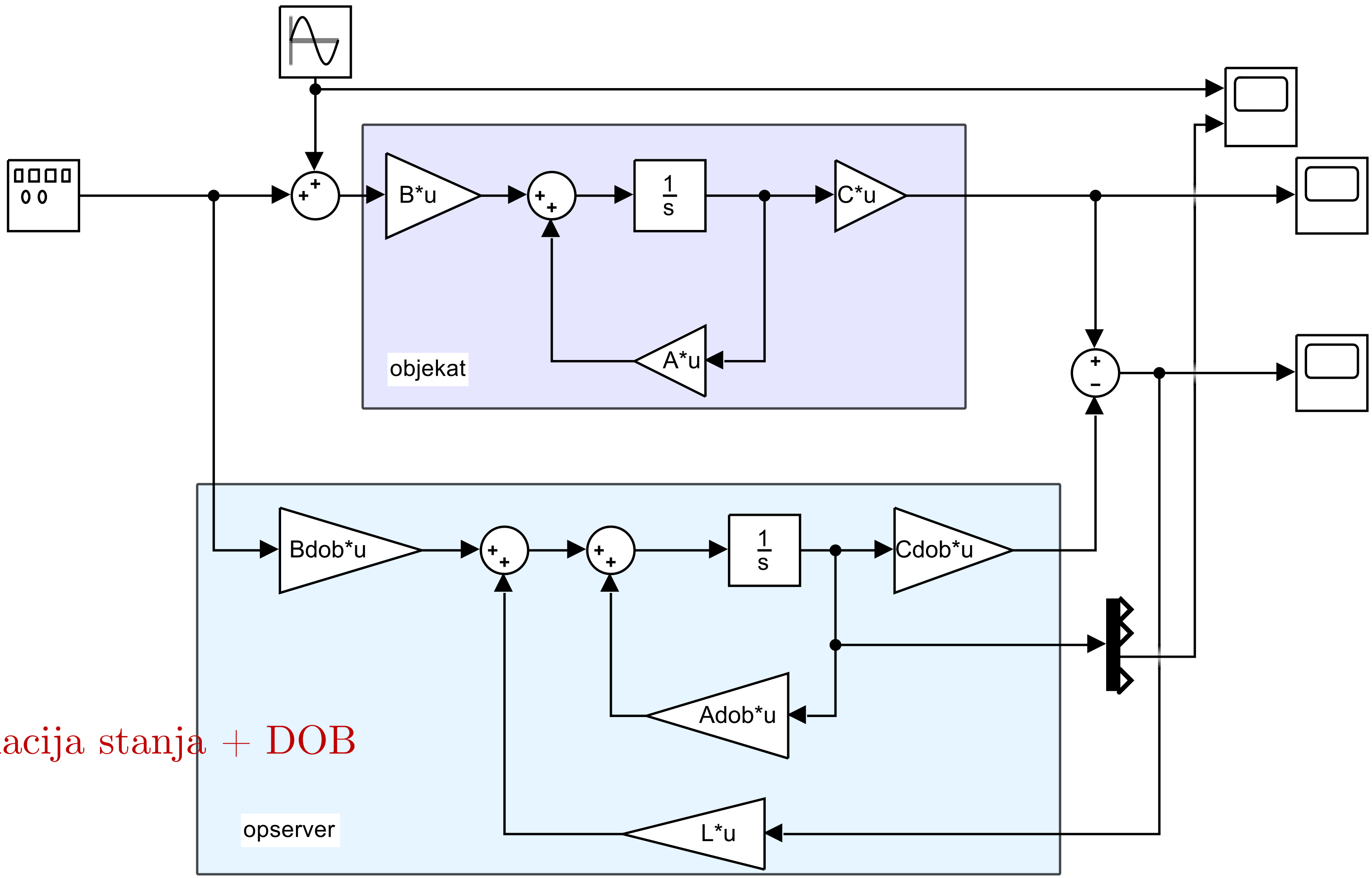
Primjer – opserver poremećaja



Na prvoj slici lijevo su prikazane estimirane i stvarne vrijednosti promjenljivih stanja u slučaju kada nije implementiran opserver poremećaja. Može su uočiti da postoje značajna odstupanja u estimaciji promjenljivih. Na sljedećoj slici su prikazane promjenljive stanja u slučaju kada postoji DOB (disturbance observer). Može se primijetiti da u ovom slučaju estimirana stanja nakon 5s konvergiraju ka stvarnim vrijednostima. Konačno, na zadnjoj slici je prikazan estimirani poremećaj.

```
>> A=[0 1;-1 -2];
>> B=[0;1];
>> C=[1 0];
>> Ap=[0 1;-.5^2 0]
>> Cp=[1 0];
>> Adob=[A B*Cp;zeros(2,2) Ap];
>> Bdob=[B;0;0];
>> Cdob=[C zeros(1,2)];
>> L=acker(Adob',Cdob',[-2 -2 -2 -2])'
```

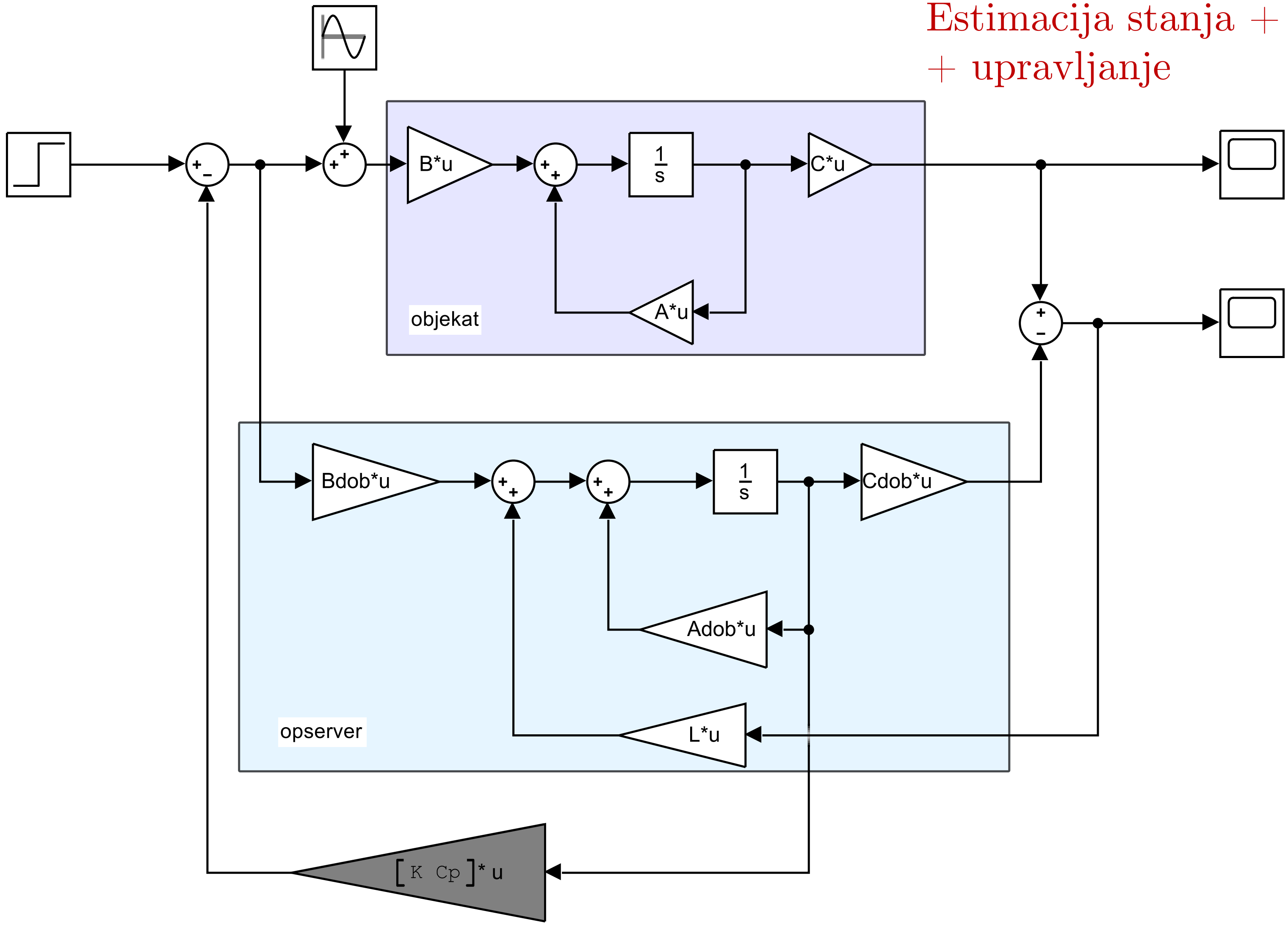
Primjer – opserver poremećaja



Estimacija stanja + DOB

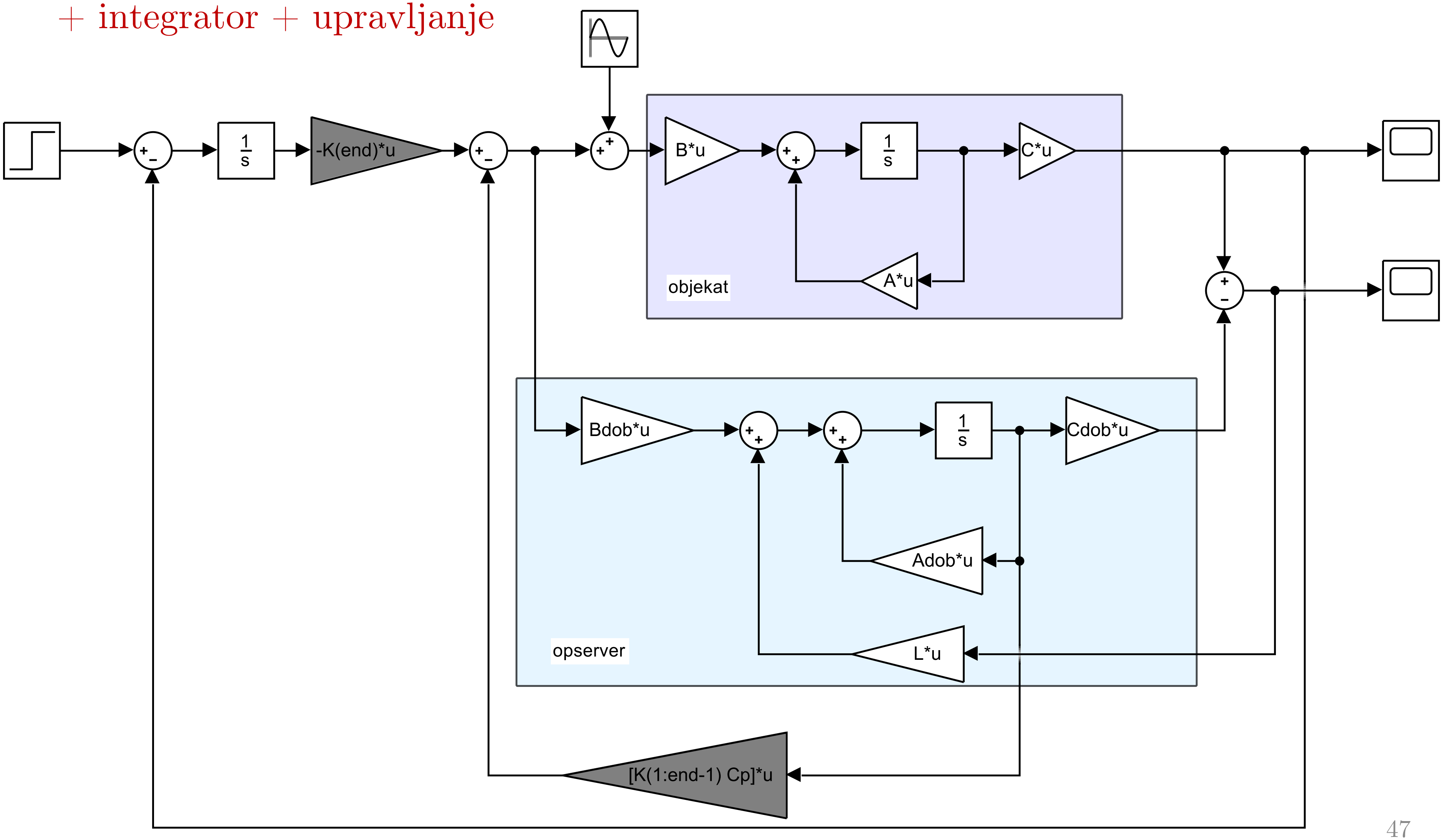
Primjer – opserver poremećaja

Estimacija stanja + DOB + upravljanje



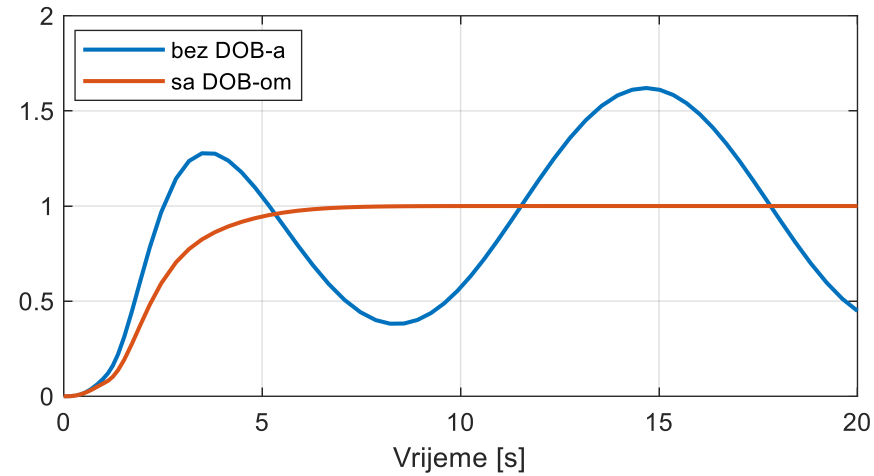
Primjer – opserver poremećaja

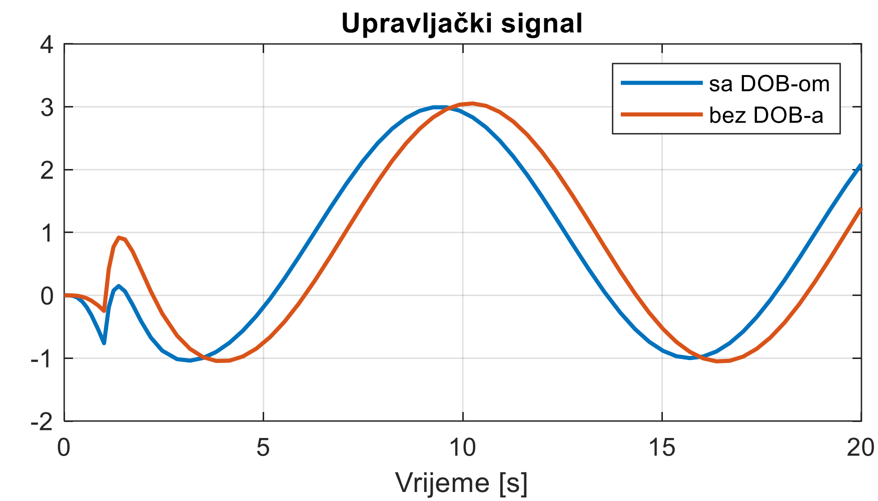
Estimacija stanja + DOB
+ integrator + upravljanje



Primjer – opserver poremećaja

U ovom primjeru su prikazani rezultati simulacija sistema upravljanja spregnutog po stanjima u dva slučaja: sa običnim opserverom i DOB opserverom. Sa prve slike se vidi da u slučaju kada se koristi DOB, izlazni signal u stacionarnom stanju konvergira ka referentnoj vrijednosti. Sa druge strane, kada nema DOB-a, sinusoidalna smetnja u velikoj mjeri utiče na izlaznu veličinu. Napomenimo da je u ovom slučaju sistem proširen i integratorom, kako bi se otklonio bias u grešci, u stacionarnom stanju. Na drugoj slici su prikazani upravljački signali za oba slučaja. Primijetimo da je upravljački signal sinusoidalne prirode i u slučaju kada nema DOB-a. Zašto?






```
K=acker([A zeros(2,1);-C 0],[B;0],[-2 -2 -2])
```

Zasićenje i windup efekat integratora

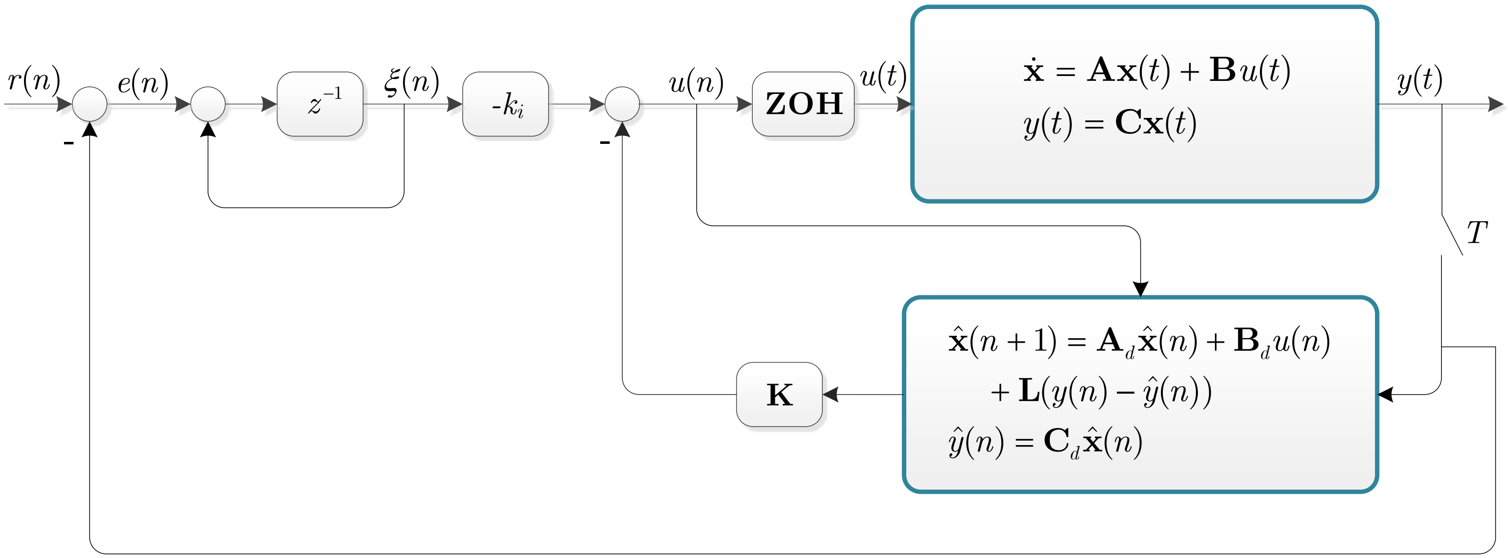
Najprostiji tip nelinearnosti koji se javlja kod sistema automatskog upravljanja je zasićenje. Kod analognih SAU-a aktuatori su komponente koje obično ulaze u zasićenje, što znači da postoji opseg upravljačkog signala za koji aktuator generiše izlaz po linearnom zakonu. Kod digitalnih SAU-a D/A konvertor takođe ulazi u zasićenje, što zavisi od njegovog napajanja. Na primjer, ako se D/A konvertor napaja sa ± 5V, njegov izlaz ne može preći vrijednost ± 5V, bez obzira na vrijednost upravljačkog signala $u(n)$.

Efekat saturacije pogoršava performanse SAU-a, pri čemu je on naročito izražen u slučajevima kada regulator sadrži integrator. U trenutku kada SAU udje u zasićenje, integrator će da nastavi da akumulira (integrali) grešku (windup efekat), iako to ništa neće promijeniti na izlazu DA konvertora. Kada SAU izađe iz zasićenja, biće potrebno neko vrijeme da se on vrati na prvobitnu vrijednost. Kod digitalnih sistema pomenuti problem se jednostavno rješava – gašenjem integratora u slučajevima kada dođe do zasićenja.

Zasićenje i windup efekat integratora

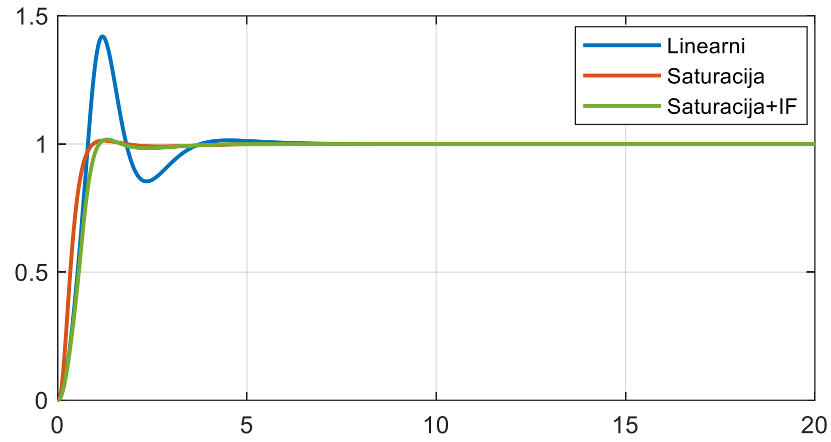
Pretpostavimo da je upravljački signal ograničen vrijednošću S: $u(n)<S$. Tada se upravljački signal može modifikovati pomoću *if* uslova:

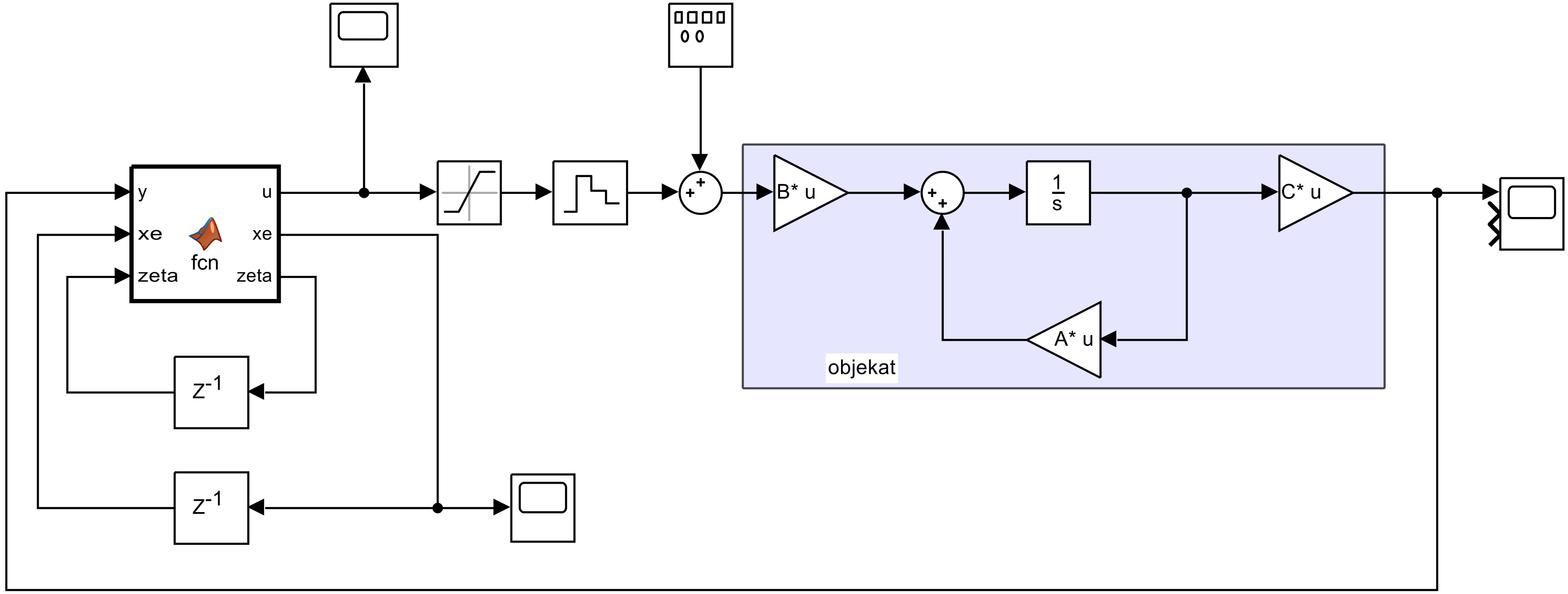
γ = -$k_i\xi(n)$ - $\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(n)$
if $|\gamma| < S$
    $u(n) = \gamma$
    $\xi(n+1) = r(n) - y(n) + \xi(n)$
else
    $u(n) = S\times\mathrm{sign}(\gamma)$
    $\xi(n+1) = \xi(n)$
end



Primjer - saturacija

```
function [u,xe,zeta] = fcn(Bd, Ad, Cd, Atd,
Btd, Ctd, Ld, Kd,y,xe,zeta)
u=-Kd(end)*zeta-[Kd(1:end-1) 0 1]*xe
xe=Atd*xe+Btd*u+Ld*(y-Ctd*xe)
if abs(u)<=5
    zeta=1-y+zeta
else
    zeta=zeta; % mada else nije neophodan
end
```

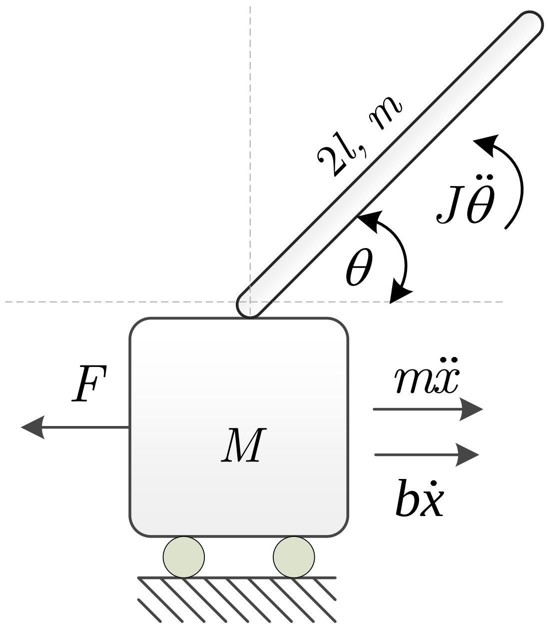




Primjer – inverzno klatno

Linearizovani model inverznog klatna je:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{J+ml^2}{p} & \dfrac{m^2gl^2}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{mlb}{p} & \dfrac{mgl(M+m)}{p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{J+Ml^2}{p} \\ 0 \\ \dfrac{ml}{p} \end{bmatrix} F$$



gdje je $p=J(M+m)+Mml^2$.

Parametri klatna su: masa kola - $M = 0.5$ kg, masa štapa - $m = 0.2$ kg, koeficijent trenja podloge - b=0.1 $Nm/$s, moment inercije štapa - $J = 0.006$ Nkg/m^2, poludužina štapa - $l = 0.3$ m.

Projektovati povratnu spregu po stanjima tako da polovi spregnutog sistema imaju vrijednost [-2 -3 -4 -5]. Smatrati da su nam dostupna samo mjerenja ugaonog pomjeraja klatna, odnosno, implementirati i odgovarajući opserver stanja. Simulirati odziv spregnutog sistema.