OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet u Podgorici
Univerzitet Crne Gore

Tema 5

Slučajni signali i linearni sistemi

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Definišu kontinualni i diskretni slučajni proces, njihovu očekivanu vrijednost, varijansu i autokorelacionu funkciju
- Odrede statističke karakteristike odziva linearnog vremenski-invarijantnog sistema na bijeli šum (srednju vrijednost i kovarijacionu matricu)
- Simuliraju na računaru odziv linearnog sistema na (pseudo)-bijeli šum

Formulacija problema

Posmatrajmo linearni i stacionarni sistem opisan u prostoru stanja na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{M}\mathbf{w}(t) \quad \text{(jednačina stanja)}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad \text{(jednačina mjerenja)}$$

gdje su:

- $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ vektor stanja sistema
- $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ determinističkog ulaznog signala (poznati ulaz: upravljački signal)
- $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^q$ vektor nepoznatog slučajnog signala (šuma) čiji je uticaj na sistem opisan matricom $\mathbf{M}_{n\times q}$ ($\mathbf{w}_x$=$\mathbf{M}\mathbf{w}$ se naziva procesni šum).
- $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^p$ vektor mjerenog signala,
- $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{R}^p$ vektor slučajnog signala (mjerni šum) koji se predstavlja grešku u mjerenjima (smatraćemo da je ovaj vektor istih dimenzija kao i vektor $\mathbf{y}(t)$).

Formulacija problema

Matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ predstavljaju model sistema u prostoru stanja. Kao što je dobro poznato, matrica funkcija prenosa između signala $\mathbf{y}(t)$ i $\mathbf{u}(t)$ je jednaka:

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

dok je odziv sistema na upravljački signal $\mathbf{u}(t)$ na intervalu $t \in [t_0, t]$ i početne uslove $\mathbf{x}(t_0)$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Postavlja se pitanje čemu je jednak odziv sistema na slučajni signal $\mathbf{w}(t)$? Da bi odgovorili na ovo pitanje moramo:

- Definisati slučajni signal sa matematičke tačke gledišta,
- Napraviti neke pretpostavke o stohastičkim osobinama signala koje će olakšati određivanje odziva
- Odrediti stohastičke karakteristike odziva ($\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$)

Karakterizacija slučajnih promjenljivih

Neka je X slučajna promjenljiva definisana na jednodimenzionalnom realnom prostoru $\mathbb{R}$. Funkcija raspodjele $F(x)$ je funkcija koja za svaki realan broj x određuje vjerovatnoću da je slučajna promjenljiva X uzela vrijednost manju ili jednaku od x:

$$F : \mathbb{R} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \;\; / \;\; F(x) = P\left[X \leq x\right].$$

<u>Osobine:</u>

- $\forall \; x_1 < x_2, \; P\left[x_1 < X \leq x_2\right] = F(x_2) - F(x_1)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1; \; \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0;$
- $F(x)$ je monotono rastuća funkcija, a može biti kontinualna ili diskretna u zavisnosti od toga da li je slučajna promjenljiva X kontinualna ili diskretna.

Ako je $F(x)$ diferencijabilna tada se njen izvod po promjenljivoj x naziva *gustina raspodjele* i označava se sa $p(x)$:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \to \quad p(x)dx = P(x \leq X < x + dx).$$

Karakterizacija slučajnih promjenljivih

Za opisivanje slučajne promjenljive X koriste se takozvani momenti promjenljive. Prvi moment se naziva *srednja* ili *očekivana vrijednost* slučajne promjenljive. Drugi centralni moment se naziva *varijansa* i označava se sa $\mathrm{var}_x = \sigma_x^2$, pri čemu je σ_x standardna devijacija.

U nastavku su date definicije momenata:

- Očekivana vrijednost:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x).$$

- k-ti moment:

$$E\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)dx.$$

- k-ti centralni moment:

$$E\left[(X - E[X])^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^k \, p(x)dx.$$

Varijansa se može definisati i na sljedeći način:

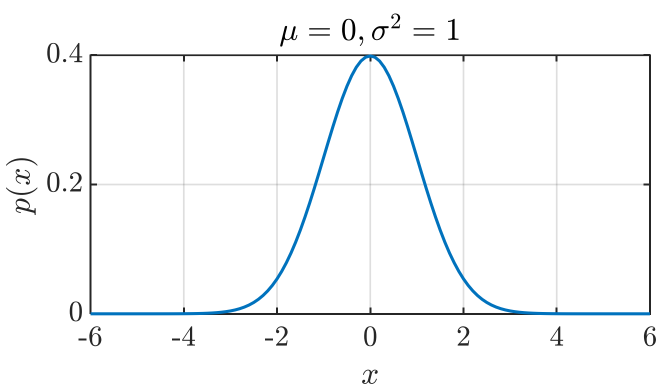
$$\mathrm{var}_X = E\left[X^2\right] - E[X]^2 .$$

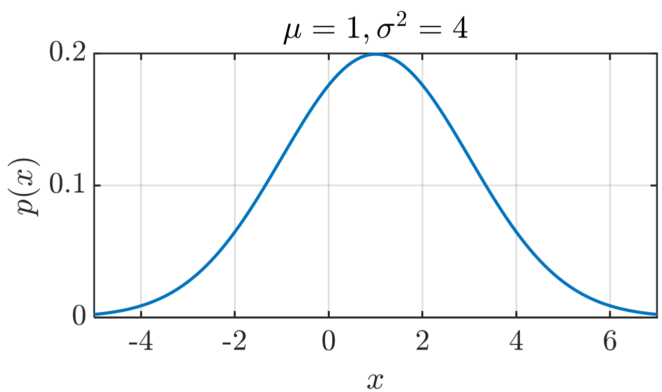
Karakterizacija slučajnih promjenljivih

Da bi potpuno opisali neku slučajnu promjenljivu potrebno je poznavanje svih momenata. Sa praktičnog stanovišta treći i viši momenti se ne koriste, jer se ne mogu jednostavno izvesti ili izračunati.

Često je od interesa posmatrati **normalnu** (**Gausovu**) varijablu, koja se u potpunosti može opisati prvim i drugim momentom:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; E[x] = \mu, \; E\left[(x-\mu)^2\right] = \sigma^2.$$





Kod Gausove raspodjele, vjerovatnoća da slučajna promjenljiva X-μ bude u opsegu [-2σ, 2σ] iznosi 95%.

Diskretna slučajna promjenljiva

Ako se slučajna promjenljiva definisana na skupu od N različitih diskretnih vrijednosti x_i, i=1, 2, ..., N, tada gustina raspodjele više nije potrebna za njeno opisivanje, već možemo direktno da zapišemo vjerovatnoću da je promjenljiva X uzela vrijednost x_i: $P(X=x_i)$.

Očekivana vrijednost i varijansa diskretne slučajne promjenljive se definišu na sljedeći način:

$$E[X] = \sum x_i P(X = x_i),$$

$$\mathrm{var}_X = E\left[(X - E[X])^2\right] = \sum (x_i - E[X])^2 P(X = x_i).$$

Primjer:

Neka je X slučajna promjenljiva koja opisuje ishod bacanja kocke. Vjerovatnoća da dobijemo x_i iznosi:

$$P(X = x_i) = 1/6.$$

Lako se može pokazati da su srednja vrijednost i varijansa promjenljive X jednake:

$$E[X] = 3.5,\ \mathrm{var}_X = 2.91.$$

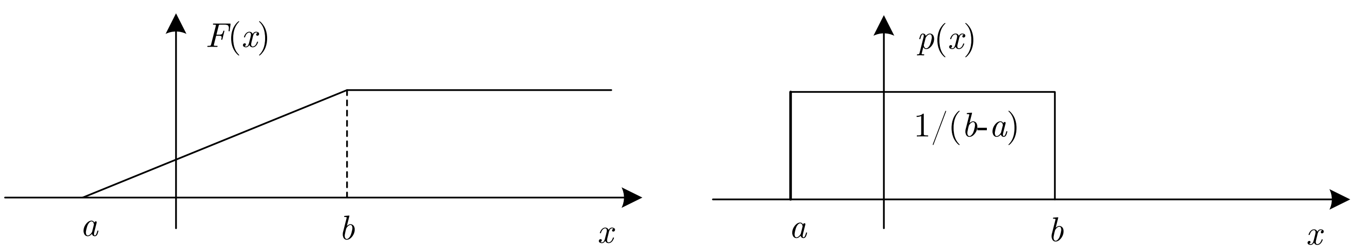
Primjer – unfiromna raspodjela

Kod uniformne raspodjele, gustina raspodjele promjenljive X je konstantna između a i b i iznosi $1/(b\text{-}a)$, pri čemu je $a<b$. Odnosno: $p(x) = 1\,/\,(b-a), a < x \leq b$.

Funkcija raspodjele je jednaka:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \\ 1, x > b \end{cases}.$$

Funkcija raspodjele i gustina raspodjele su prikazani na slici ispod.



Srednja vrijednost i varijansa su jednake:

$$E[X] = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}.$$

$$\mathrm{var}_X = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right] = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Višedimenzionalna slučajna promjenljiva

Neka je $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_q]$ vektor od q slučajnih promjenjivih definisan na $\mathbb{R}^q$. Funkcija raspodjele vektorske slučajne promjenljive se definiše na sljedeći način:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_1) = P\left[X_1 < x_1 \text{ i } X_2 < x_2 \text{ i} \ldots \text{ i } X_q < x_q\right],$$

dok je gustina raspodjele:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_1) = \frac{\partial F(x_1, x_2, \ldots, x_q)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_q}.$$

Definicija momenata

- Očekivana vrijednost varijable $\mathbf{X}$ se definiše na sljedeći način:

$$E[\mathbf{X}] = \left[E[X_1], \ldots, E\left[X_q\right]\right]^T.$$

- Kovarijaciona matrica Cov_X je jednaka:

$$\mathrm{Cov}_X = E\left[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T\right],$$

gdje je element ove matrice na poziciji (i, j) jednak:

$$\mathrm{Cov}_X(i, j) = \int_{\mathbb{R}^2} (x_i - E[X_i])(x_j - E[X_j])dF(x_i, x_j)$$

Višedimenzionalna slučajna promjenljiva

Gausova raspodjela

Gustina raspodjele Gausovog slučajnog vektora $\mathbf{X}$ srednje vrijednosti μ i kovarijacione matrice Δ se definiše na sljedeći način:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{q/2}\sqrt{\det \Delta}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Delta (\mathbf{x}-\mu)}.$$

Ovaj vektor se može dobiti i iz normalnog Gausovog vektora $\mathbf{N}$ (μ=0, Δ=$\mathbf{I}$) na sljedeći način:

$$\mathbf{X} = \mu + \mathbf{NG},\ \ \mathbf{GG}^T = \Delta.$$

Nezavisnost:

Dvije slučajne promjenljive X_1 i X_2 su statistički nezavisne ako i samo ako važi:

$$F(X_1, X_2) = F(X_1)F(X_2).$$

Iz gornjeg uslova proizilazi sljedeća osobina:

$$E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2].$$

Primjer – vektorska slučajna promjenljiva

Posmatrajmo dvije nezavisne slučajne promjenljive X_1 i X_2 sa uniformnom gustinom raspodjele na intervalu [-1, 1]. Neka je promjenljiva Y definisana na sljedeći način $Y=(X_1+X_2)/2$. Izračunati $E[Y]$, var_Y i kovarijacionu matricu $\mathrm{Cov}_{X_1,Y}$ vektora $[X_1 \;\; Y]^{\mathrm{T}}$.

Kako se radi o uniformnoj raspodjeli, na osnovu primjera 1, za b=1 i a= -1, slijedi:

$$E[X_1] = \frac{b+a}{2} = 0,\;\; E[X_2] = 0,\;\; \mathrm{var}_{X_1} = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3},\;\; \mathrm{var}_{X_2} = \frac{1}{3}.$$

Dalje, promjenljiva $Y=(X_1+X_2)/2$ se može zapisati u vektorskom obliku:

$$Y = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \rightarrow E[Y] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Varijansa promjenljive Y je jednaka:

$$\mathrm{var}_Y = E\left[YY^T\right] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} E\left[\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[X_1X_1] & E[X_1X_2] \\ E[X_2X_1] & E[X_2X_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}.$$

Primjer – vektorska slučajna promjenljiva

Kovarijaciona matrica $\mathrm{Cov}_{X_1,Y}$ vektora $[X_1 \;\; Y]^{\mathrm{T}}$ je po definiciji:

$$Cov_{X_1,Y} = E\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & Y \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} E[X_1X_1] & E[X_1Y_1] \\ E[Y_1X_1] & E[Y_1Y_1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Elementi prethodne matrice su jednaki:

$$Cov_{X_1,Y}(1,1) = E[X_1X_1] = \mathrm{var}_{X_1} = \frac{1}{3} \quad Cov_{X_1,Y}(2,1) = Cov_{X_1,Y}(1,2) = E[X_1 \cdot (0.5X_1 + 0.5X_2)]$$

$$Cov_{X_1,Y}(2,2) = E[YY] = \mathrm{var}_Y = \frac{1}{6} \qquad = 0.5E[X_1X_1] + 0.5[X_1X_2] = 0.5\,\mathrm{var}_{X_1} = \frac{1}{6}$$

Napomena: Moguće je odrediti i funkciju raspodjele promjenljive Y:

$$F(y) = P(Y < y) = P\left(\frac{X_1 + X_2}{2} < y\right) = P(X_1 < 2y - X_2) = \int_{Dx_2} P(X_1 < 2y - X_2)p(x_2)dx_2.$$

Nakon određivanja ovog integrala određuje se gustina raspodjele $p(y)$:

$$p(y) = \frac{dF(y)}{dy},$$

a na osnovu nje se dalje može odrediti očekivana vrijednost i varijansa promjenljive Y.

Slučajni procesi

Za zadatu slučajnu promjenljivu X, slučajni signal $x(t)$ predstavlja vremenski promjenljivu funkciju čija vrijednost u trenutku t korespondira nekoj vrijednosti (odbirku) promjenljive X.

Momenti slučajnog signala:

Za zadati slučajni signal $w(t)$ prvi moment (srednja vrijednost) i drugi moment (autokorelaciona funkcija) se definišu na sljedeći način:

$$m(t) = E\left[w(t)\right],$$

$$r(t_1, t_2) = E\left[w(t_1)w(t_2)\right].$$

Autokorelaciona funkcija se može se posmatrati kao generalizacija drugog momenta, jer je $r(t,t)=\mathrm{E}[w(t)^2]$. Ona predstavlja mjeru sličnosti slučajnog signala u dva različita vremenska trenutka.

Drugi centralni moment (varijansa) se definiše na sljedeći način:

$$\sigma^2_{w(t)}(t) = E\left[\left(w(t) - m(t)\right)^2\right].$$

Slučajni procesi

Ako je $\mathbf{w}(t)$ vektorska funkcija od q komponenti, tada je:

$$\mathbf{m}(t) = E\big[\mathbf{w}(t)\big].$$

Za opisivanje vektorskih slučajnih signala se koristi autokorelaciona matrica:

$$\mathbf{R}(t_1, t_2) = E\Big[\mathbf{w}(t_1)\mathbf{w}(t_2)^T\Big].$$

Dijagonalni elementi ove matrice predstavlju autokorelacione funkcije svake pojedinačne komponente signala, dok vandijagonalni elementi predstavljaju kros-korelacione funkcije između odgovarajućih komponenti vektorskog signala:

$$\mathbf{R}(t_1, t_1)_{i,j} = E\Big[w_i(t_1)w_j(t_2)\Big].$$

Sa druge strane, kovarijaciona matrica u trenutku t se definiše na sljedeći način:

$$\mathbf{P}(t) = E\Big[\big(\mathbf{X}(t) - \mathbf{m}(t)\big)\big(\mathbf{X}(t) - \mathbf{m}(t)\big)^T\Big].$$

Slučajni procesi

Stacionarnost:

Slučajni signal je stacionaran ukoliko njegove statističke osobine ne zavise od trenutaka vremena, već samo od relativnih razlika u vremenu (stacionarnost u širem smislu). Srednja vrijednost stacionarnih signala je konstantna ($\mathbf{m}(t)= \mathbf{m}$), dok autokorelaciona matrica zavisi smo od razlike trenutaka t_2 i t_1: $\mathbf{R}(t_2, t_1)=\mathbf{R}(t_2 - t_1)=\mathbf{R}(\tau)$.

Bijeli šum:

Bijelim šumom se naziva slučajni signal čija je autokorelaciona funkcija proporcionalna Dirakovom impulsu (varijansa je beskonačna), odnosno u slučaju vektorskog signala, autokorelaciona matrica stacionarnog bijelog šuma je jednaka:

$$\mathbf{R}(\tau) = E\left[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t+\tau)^T\right] = \mathbf{W}\delta(\tau).$$

Spektralna gustina snage bijelog šuma se definiše kao Furijeova transformacija autokorelacione funkcije i ona iznosi:

$$\mathbf{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(\tau)e^{-jw\tau}d\tau = \mathbf{W}.$$

Slučajni procesi

Diskretni slučajni signal $x(n)$ predstavlja sekvencu slučajnih varijabli.

Za diskretni slučajni signal važe sljedeće definicije:

Očekivana vrijednost: $\mathbf{m}(n)=E[\mathbf{x}(n)]$

Autokorelacona matrica: $\mathbf{R}(n_1,n_2)=E[\mathbf{w}(n_1)\mathbf{w}(n_2)^T]$

Kovarijaciona matrica: $\mathbf{P}(n) = E\left[(\mathbf{X}(n)-\mathbf{m}(n))(\mathbf{X}(n)-\mathbf{m}(n))^T\right]$

Stacionarnost: $\mathbf{m}(n)= \mathbf{m}$, $\mathbf{R}(n_1,n_2)= \mathbf{R}(n_2 - n_1) =\mathbf{R}(k)$

Bijeli šum: predstavlja signal kome su odbirci generišu pomoću Gausove raspodjele na takav način da su svi odbirci međusobno nezavisni. Za diskretni bijeli šum važi:

$$\mathbf{R}(n_1,n_2) = E\left[\mathbf{w}(n_1)\mathbf{w}(n_2)^T\right] = \mathbf{W}(n_1)\delta(n_2-n_1)$$

Ako je bijeli šum stacionaran, onda je:

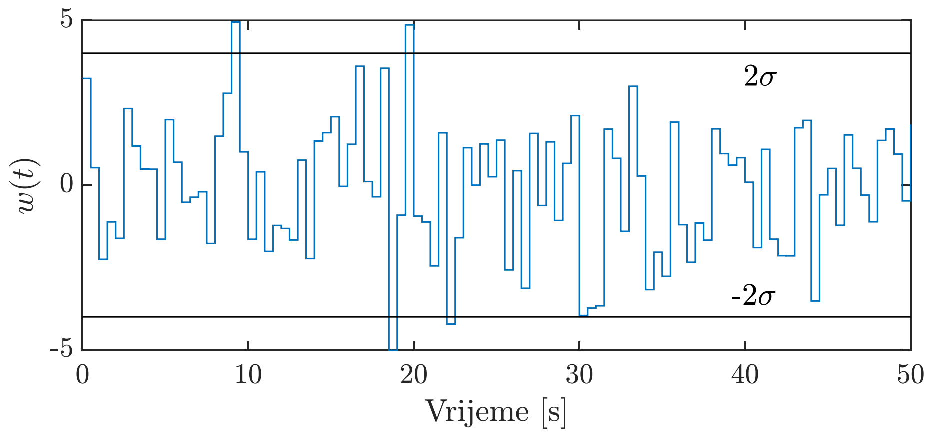
$$\mathbf{R}(k) = \mathbf{W}\delta(k)$$

Spektralna gustina snage stacionarnog diskretnog bijelog šuma je konstantna i iznosi $\mathbf{W}$.

Primjer – pseudo-bijeli šum

Slučajni signal $w(t)$ se generiše na sljedeći način: $w(t) = x_i \; \forall t \in [idt, \, (i+1)dt]$, gdje je x_i odbirak Gausove slučajne promjenljive X, srednje vrijednosti 0 i varijanse σ^2. Svi odbirci (uzorci) x_i promjenljive X su nezavisni jedni od drugih. Odrediti srednju vrijednost i varijansu signala $w(t)$.

Primjer realizacije signala $w(t)$ za σ=2 je prikazan na slici ispod.



Srednja vrijednost signala $w(t)$ je: $m(t)$=$E[w(t)]$=0.

Autokorelaciona funkcija signala $w(t)$ je jednaka

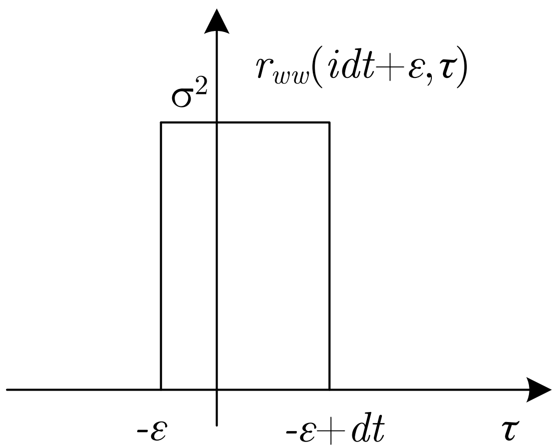
$$r_{ww}(t,\tau) = E\left[w(t)w(t+\tau)^T \right] = \sigma^2,$$

ukoliko se se t i τ nalaze u okviru istog vremenskog intervala dt. U suprotnom ona je jednaka 0, jer su odbirci $w(t)$ i $w(t+\tau)$ nezavisni i centrirani.

Primjer – pseudo-bijeli šum

Autokorelaciona funkcija $r_{ww}(t,\tau)$ zavisi i od t i τ, što znači da signal $w(t)$ nije stacionaran.

Na primjer, za $t{=}idt{+}\varepsilon$ ($\forall i$, $\forall\varepsilon$ $[0,\ dt]$) autokorelaciona funkcija je skicirana na slici ispod.



Sa praktične tačke gledišta na računaru nije moguće realizovati bijeli šum čija je spektralna gustina snage **W** (beskonačna varijansa). Aproksimacija bijelog šuma se naziva pseudo-bijeli šum i on se realizuje upravo na način opisan u ovom primjeru. U toku svakog intervala $[idt,\ (i+1)dt]$ treba generisati Gausovu slučajna promjenljivu varijanse σ^2/dt. Ova aproksimacija odgovara bloku „Band-limited white noise“ u Simulink-u.

Prenos slučajnih signala kroz linearne sisteme

Ako pretpostavimo da je linearni sistem pobuđen bijelim Gausovim šumom, tada će stanje sistema $\mathbf{x}(t)$ i njegov izlaz $\mathbf{y}(t)$ takođe biti Gausove promjenljive, koje se mogu potpuno okarakterisati prvim i drugim momentom.

Teorema: Neka je linearni sistem zadat sa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{M}\mathbf{w}(t),$$

gdje je $\mathbf{w}(t)$ vektor centriranog bijelog Gausovog šuma spektralne gustine snage $\mathbf{Q}$. Ako su $\mathbf{m}(t_0)$ i $\mathbf{P}(t_0)$ srednja vrijednost i kovarijaciona matrica početnog stanja $\mathbf{x}(t_0)$, tada je stanje $\mathbf{x}(t)$ Gausov slučajni signal čija je:

- srednja vrijednost

$$\mathbf{m}(t) = E\left[\mathbf{x}(t)\right] = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{m}(t_0),$$

- kovarijaciona matrica $\mathbf{P}(t)=E[(\mathbf{x}(t)-\mathbf{m}(t))(\mathbf{x}(t)-\mathbf{m}(t))^{\mathrm{T}}]$ se dobija kao rješenje diferencijalne jednačine:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{M}^T.$$

Prenos slučajnih signala kroz linearne sisteme

Ako je sistem stabilan, tada će kovarijaciona matrica $\mathbf{P}(t)$ konvergirati ka konstantnoj vrijednosti, odnosno možemo zapisati $\mathbf{P}(\infty)=\mathbf{P}$. Matricu $\mathbf{P}$ možemo odrediti rješavanjem Ljapunove jednačine, koja se dobija uvštavanjam uslova $\dot{\mathbf{P}}=\mathbf{0}$ u diferencijalnu jednačinu kovarijacione matrice:

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PA}^T + \mathbf{MQM}^T = \mathbf{0}.$$

Napomena:

Ako posmatramo izlaznu jednačinu bez šuma:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t)$$

tada će kovarijaciona matrica izlaznog signala biti jednaka:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}(t)} = \mathbf{CP}(t)\mathbf{C}^T.$$

Ako je izlaz zašumljen - $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(\mathrm{t}) + \mathbf{v}(t)$, tada njegova kovarijaciona matrica ima beskonačnu vrijednost.

Dokaz prve osobine Teoreme je dat u nastavku, dok je dokaz druge osobine izostavljen.

Dokaz prve osobine Teoreme:

Odziv sistema na bilo koji signal $\mathbf{w}(t)$ je:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{M}\mathbf{w}(\tau)d\tau.$$

Srednja vrijednost signala $\mathbf{x}(t)$ je:

$$\mathbf{m}(t) = E\left[\mathbf{x}(t)\right] = E\left[e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{M}\mathbf{w}(\tau)d\tau\right].$$

$$= e^{\mathbf{A}(t-t_0)}E\left[\mathbf{x}(t_0)\right] + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{M}E\left[\mathbf{w}(\tau)\right]d\tau = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}E\left[\mathbf{x}(t_0)\right].$$

Kako je $\mathbf{w}(t)$ centrirani slučajni signal (srednje vrijednosti $\mathbf{0}$), iz prethodne jednačine slijedi:

$$\mathbf{m}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}E\left[\mathbf{x}(t_0)\right],$$

što je i trebalo dokazati.

Prenos slučajnih signala kroz linearne sisteme

Posmatrajamo sada diskretni linearni sistem koji je pobuđen diskretnim bijelim šumom $\mathbf{w}_d(n)$ čija je autokorelacija $\mathbf{Q}_d\,\delta(k)$.

Teorema: Neka je linearni sistem zadat sa:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(n) + \mathbf{M}_d\mathbf{w}(n),$$

gdje je $\mathbf{w}_d(n)$ vektor centriranog bijelog Gausovog šuma varijanse $\mathbf{Q}_d$. Ako su $\mathbf{m}(n_0)$ i $\mathbf{P}(n_0)$ srednja vrijednost i kovarijaciona matrica početnog stanja $\mathbf{x}(n_0)$, tada je stanje $\mathbf{x}(n)$ Gausov slučajni signal čija je:

- srednja vrijednost

$$\mathbf{m}(n) = E\left[\mathbf{x}(n)\right] = \mathbf{A}_d^{(n-n_0)}\mathbf{m}(n_0),$$

- kovarijaciona matrica $\mathbf{P}(n)=E[(\mathbf{x}(n)\text{-}\mathbf{m}(n))(\mathbf{x}(n)\text{-}\mathbf{m}(n))^T]$ se dobija kao rješenje diferencne jednačine:

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{P}(n)\mathbf{A}_d^T + \mathbf{M}_d\mathbf{Q}_d\mathbf{M}_d^T.$$

U stacionarnom stanju važi jednakost (diskretna Ljapunova jednačina):

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_d\mathbf{P}\mathbf{A}_d^T + \mathbf{M}_d\mathbf{Q}_d\mathbf{M}_d^T.$$

Primjer 1 – odziv sistema na bijeli šum

Sistem je zadat u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -50 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 10^2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$

gdje je $w(t)$ bijeli Gausov šum varijanse $\delta(t)$.

U Simulinku simulirati i prikazati odziv sistema na pseudo-bijeli šum. Odrediti kovarijansu izlaznog signala. Razmotriti dvije periode odabiranja: T=0.001s i T=0.01s.

Kovarijaciona matrica stanja u staciononarnom stanju se dobija rješavanjem Ljapunove jednačine:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -50 \end{bmatrix} \mathbf{P} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -50 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}.$$

Rješenje gornje jednačine je:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

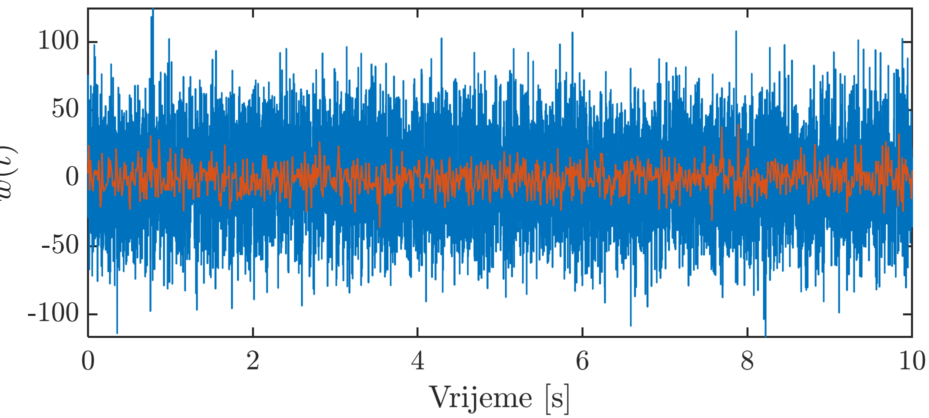
Primjer 1 – odziv sistema na bijeli šum

Ljapunova jednačina se u Matlab-u rješava pomoću komande `lyap(A,M*M')`, a moguće je i ručno riješiti pretvaranjam u vektorski oblik pomoću Kronekerovog operatora.

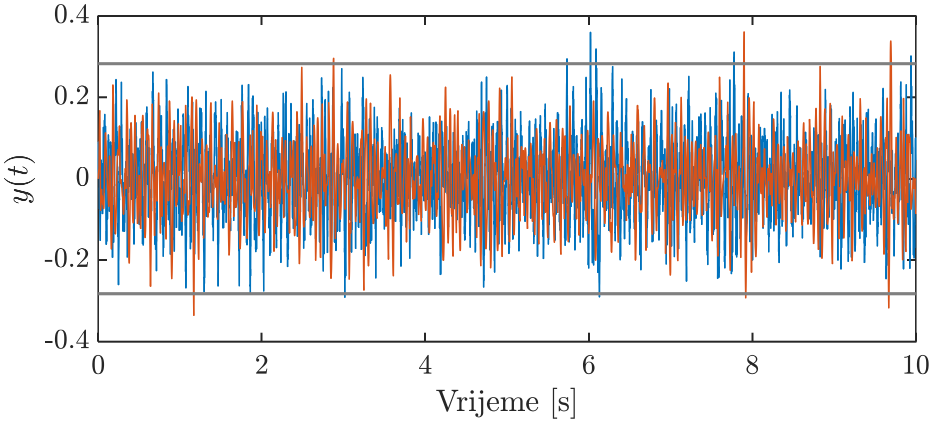
Varijansa izlaznog signala je:

$$\mathrm{var}_y = \begin{bmatrix} 10^2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{P} \begin{bmatrix} 10^2 & -1 \end{bmatrix}^T = 0.02,$$

dok je standardna devijacija σ=0.1414.

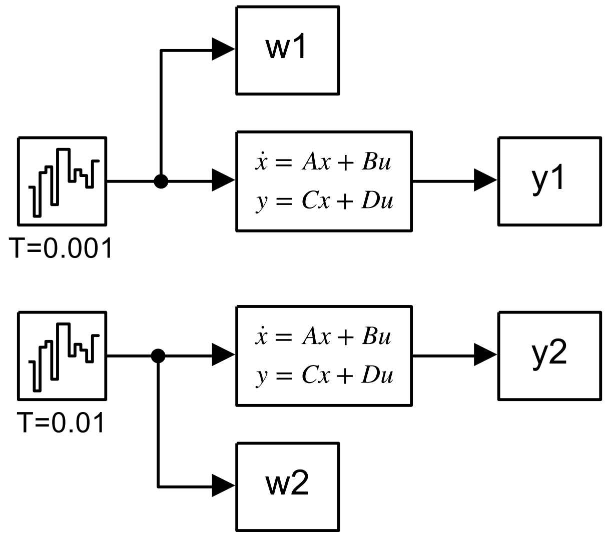


Na prvoj slici je prikazan pseudo-bijeli šum za T=0.001 i T=0.01. U prvom slučaju varijansa šuma iznosi $1/T$=1000, dok je u drugom slučaju njena vrijednost 100. Jasno, ako T teži nuli, tada će varijansa šuma težiti ka beskonačnosti.



Na drugoj slici je prikazan odziv diskretizovanog sistema na zadate šumove. Može se uočiti da je u oba slučaja varijansa filtriranog šuma približno jednaka 0.02.

Primjer 1 – odziv sistema na bijeli šum




```
A=[0 1;-1e4 -50]; M=[0;1];C=[1e1 1];
sim('pr1.slx'), close all
plot(w1.time,w1.signals.values), hold on
plot(w2.time,w2.signals.values)
figure
plot(y1.time,y1.signals.values), hold on
plot(y2.time,y2.signals.values)
```

Studenti mogu da pogledaju i ovaj kod u kojem je simuliran odziv sistema u m-fajlu. Međutim, za potpuno razumijevanje je potrebno preći i naredne lekcije.