Komutacioni sistemi
(vježbe)

Slavica Tomović

Prof.dr Igor Radusinović

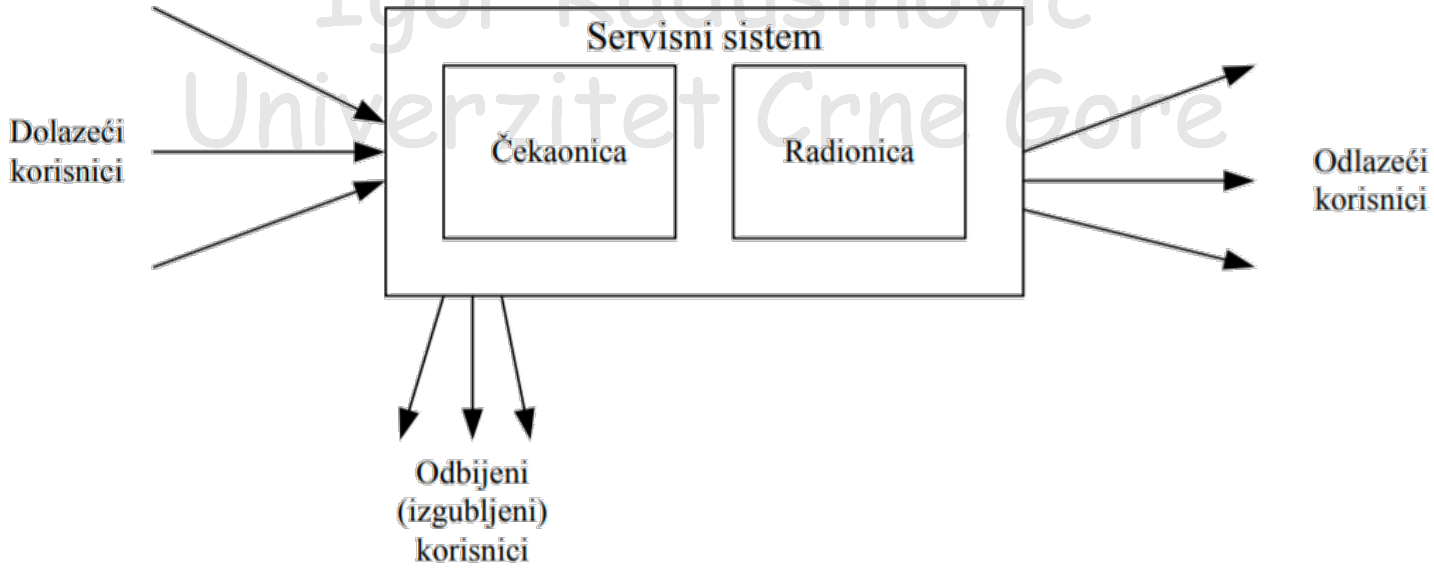
Igor Radusinović

igorr@ucg.ac.me

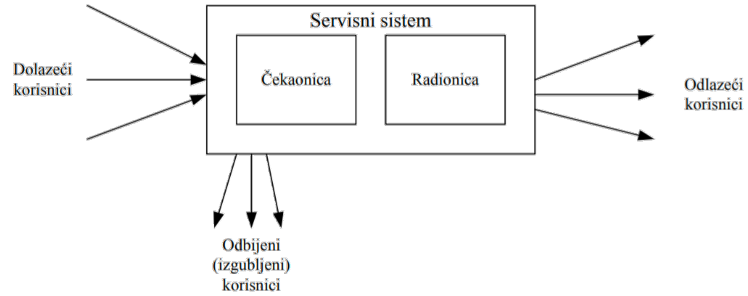
Univerzitet Crne Gore

Teorija servisnih sistema

- Široko se primjenjuje u oblasti telekomunikacija.
- Zasniva se na predstavljanju jednog telekomunikacionog sistema ili njegovog dijela kao servisnog sistema čija je uloga da obradi odgovarajuće poslove koje korisnici zahtjevaju od njega.

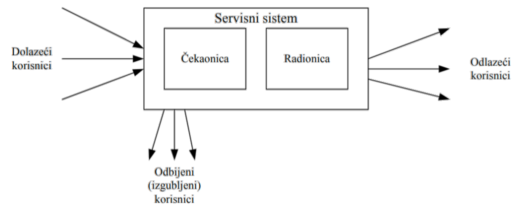


Elementi servisnih sistema



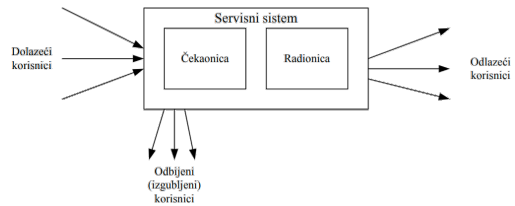
- Dolazeći korisnici
  - Predstavljaju ulaz u servisni sistem
  - Dolaze u servisni sistem sa ciljem da im servisni sistem pruži odgovarajuću uslugu
    - Npr. telefonski pretplatnici u telefonskim mrežama koji zahtijevaju uslugu telefonskog razgovora od telefonske mreže, paketi koji dolaze u komunikacioni čvor i zahtjevaju da ih taj komunikacioni čvor proslijedi do korisnika ili nekog drugog komunikacionog čvora,...
  - Korisnici se karakterišu količinom posla koju nose
    - npr. telefonski razgovor može biti kraći ili duži i time su resursi telefonske mreže kraće ili duže zauzeti; što je duži paket koji pristiže u komunikacioni čvor biće potrebno veće vrijeme da se on proslijedi dalje do sledećeg komunikacionog čvora ili korisnika
  - Definiše i proces dolazaka u servisni sistem koji predstavlja raspodjelu dolazaka korisnika u servisni sistem
    - Najčešće se koristi Poasonov proces dolazaka korisnika

Elementi servisnih sistema



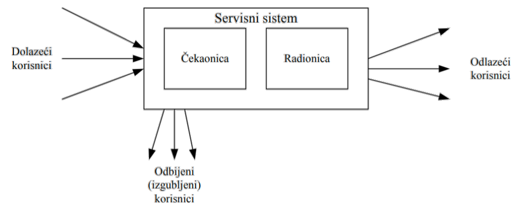
- **Odbijeni korisnici**
  - Korisnici koji su odbijeni od strane servisnog sistema i kojima usluga nije pružena
  - Najčešći razlog odbijanja je zauzeće svih resursa servisnog sistema, ali postoje i drugi, kao npr. niži prioritet od nekih prioritetnijih korisnika, što podrazumijeva odbijanja posluživanja korisnika nižeg prioriteta u slučaju kada je servisni sistem preopterećen i sl.
  - Odbijeni korisnici moraju ili ponovo pokušati (ponovo kao dolazeći korisnici) da dobiju uslugu od servisnog sistema ili odustati od tražene usluge
    - Na primjer, ako telefonski poziv bude odbijen uslijed zauzeća svih resursa telefonske centrale, može se ili pokušati ponovo u nadi da su se resursi u međuvremenu oslobodili ili odustati od željenog poziva.

Elementi servisnih sistema



- Odlazeći korisnici
  - Korisnici koji su posluženi od strane servisnog sistema i napuštaju ga oslobađajući pri tome resurse servisnog sistema koje su zauzimali.
- Čekaonica
  - Dio servisnog sistema u kojem korisnici prihvaćeni od strane servisnog sistema čekaju da budu posluženi
  - Čekaonica nije obavezan element servisnog sistema tj . može i da izostane, a ako postoji u praksi je konačnog kapaciteta iako se u teoriji koriste i modeli koji razmatraju čekaonicu beskonačnog kapaciteta.
  - Kapacitet čekaonice po definiciji predstavlja maksimalan mogući broj korisnika u čekaonici.

Elementi servisnih sistema



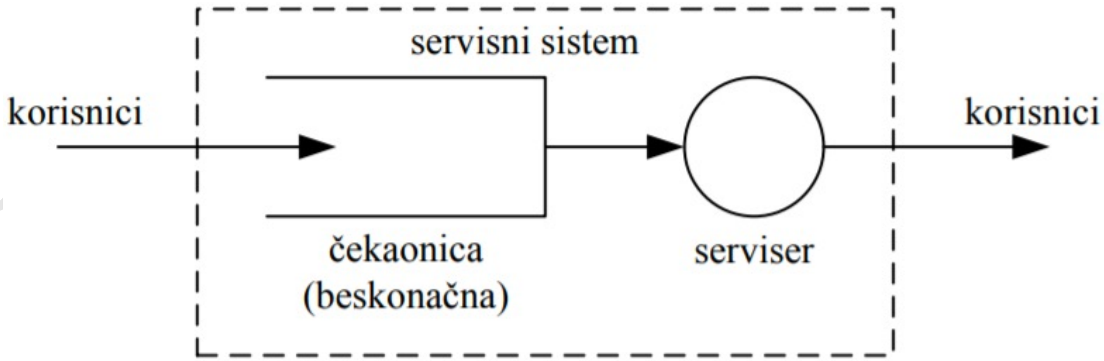
- Radionica
  - Sadrži 1 ili više servisera koji obrađuju poslove dolazećih korisnika
  - Kapacitet radionice je broj servisera u radionici.
  - Ukupan zbir kapaciteta čekaonice i radionice daje kapacitet servisnog sistema i predstavlja maksimalni broj korisnika koje servisni sistem može da prihvati.
  - Za servisere se uglavnom smatra da su podjednakih kvaliteta i da rade bez pauze tj . kad god je neki serviser slobodan, a ima posla koji treba da se odradi on ga odmah preuzima na obradu
    - Međutim, postoje i modeli čiji serviseri se povremeno „odmaraju“
  - U okviru radionice se definiše i pojam disciplina posluživanja koja definiše redoslijed kojim će se korisnici, koji čekaju u čekaonici posluživati.
    - Primjeri discipline posluživanja su:
      - LIFO (*Last In First Out*) poslužuje se korisnik koji je poslednji došao u servisni sistem,
      - FIFO (*First In First Out*) poslužuje se korisnik koji je prvi došao u servisni sistem, sa prioritetom poslužuje se korisnik najvišeg prioriteta , itd .
  - Takođe se definiše i proces obrade korisnika koja predstavlja raspodjelu vremena obrade korisnika

Kendalova notacija

- Kendall je 1951. godine uveo A/B/m/k/l/Z sistem označavanja servisnih sistema
  - A - proces toka dolazaka korisnika (vrijednost M označava Markovljev proces dolazaka)
  - B - proces obrade (vremena posluživanja) korisnika (vrijednost M označava proces po eksponencijalnoj raspodjeli)
  - m - broj servisera u radionici
  - k - ukupan kapacitet servisnog sistema
  - l - broj korisnika koji dolaze u servisni sistem
    - Odgovara ukupnom broju potencijalnih korisnika servisnog sistema, npr. broj telefonskih pretplatnika jedne telefonske centrale.
  - Z - disciplina čekanja u čekaonici
  - Ukoliko je k ili l beskonačno onda se ove oznake izostavljaju u Kendalovoj notaciji, a takođe se i Z izostavlja ukoliko je disciplina posluživanja FIFO.

Primjeri Kendalove notacije

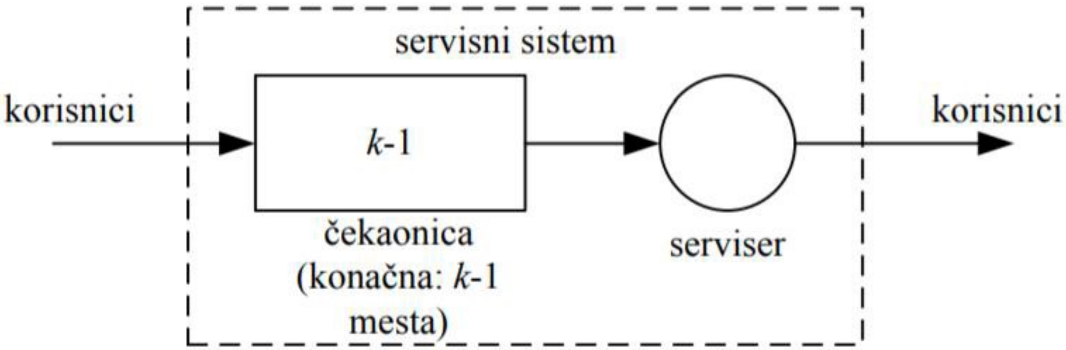
- Sistem M/M/1 je model servisnog sistema kod kojeg je tok dolazaka Poasonov, obrada korisnika ima eksponencijalnu raspodjelu, postoji jedan serviser i čekaonica je beskonačnog kapaciteta



M/M/1 sistem

Primjeri Kendalove notacije

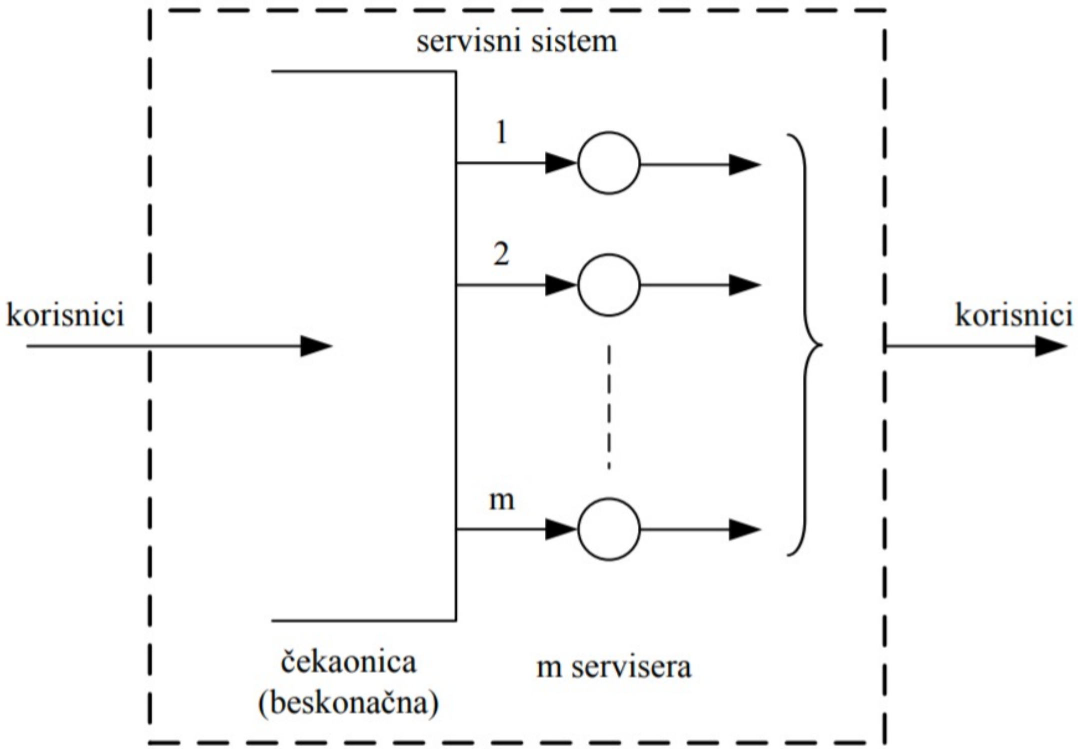
- Sistem M/M/1/k se od sistema M/M/1 razlikuje po tome što je čekaonica konačna i kapaciteta k-1.



M/M/1/k sistem

Primjeri Kendalove notacije

- Sistem M/M/m se od sistema M/M/1 razlikuje po tome što postoji m servisera

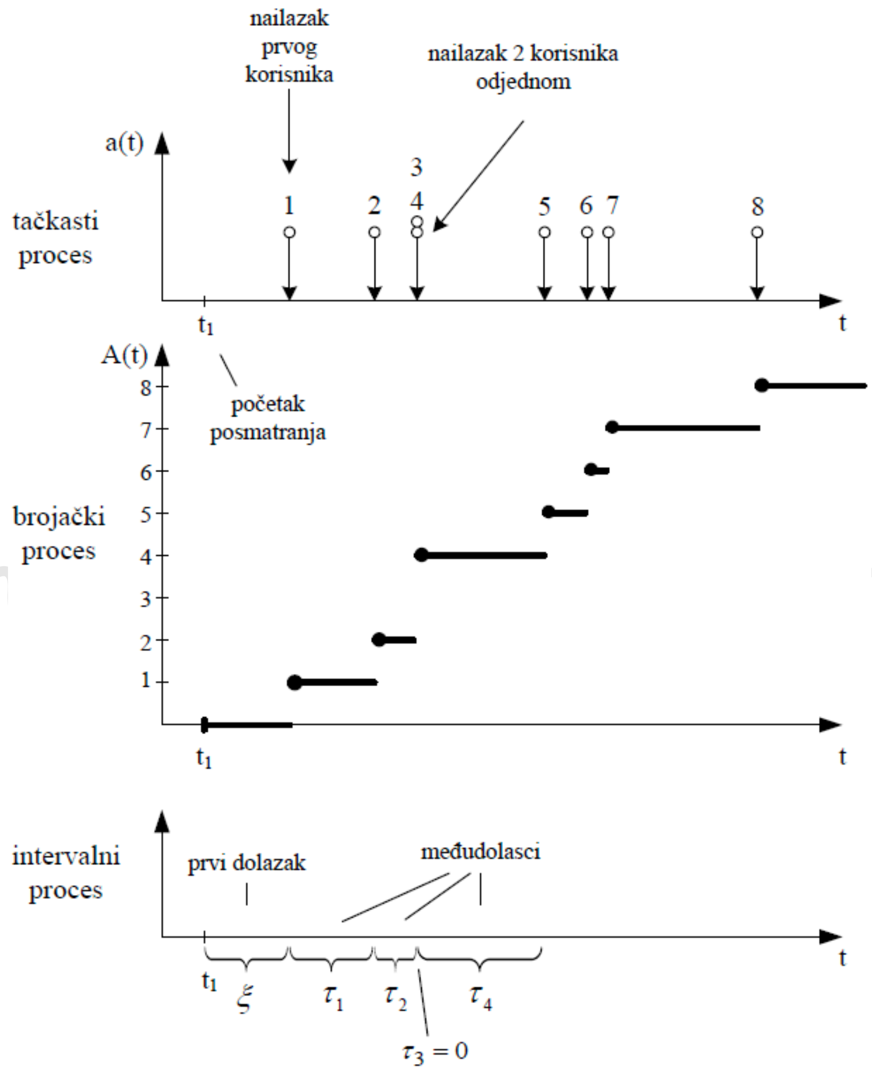


M/M/m sistem

Proces dolazaka korisnika u servisni sistem

- Proces dolazaka korisnika se može opisati vremenskom raspodjelom dolazaka korisnika u servisni sistem
- Postoje tri aspekta posmatranja tokova dolazaka
  - Tačkasti proces
    - posmatraju se vremenski trenuci dolazaka korisnika u servisni sistem
  - Brojački proces
    - posmatra se broj korisnika koji je ušao u servisni sistem tokom vremena
  - Intervalni proces
    - posmatraju se vremena prvog dolaska i međudolazaka korisnika u servisni sistem
- Tačkasti i brojački proces su diskretni procesi, pa se opisuju diskretnom slučajnim promjenljivim tj. vjerovatnoćama diskretnih događaja, a intervalni proces je kontinualan proces pa se opisuje kontinulanim slučajnim promjenljivima određene gustine vjerovatnoće

Proces dolazaka korisnika u servisni sistem



Poasonov dolazni proces

- Poasonov proces dolazaka se može posmatrati diskretno kao brojački ili tačkasti proces
- Moguća su samo dva događaja u jednom trenutku, korisnik došao ili korisnik nije došao
- Vjerovatnoća da je u jednom trenutku došlo više od jednog korisnika je beskonačno mala veličina.
- Za Poasonov proces se definiše vjerovatnoća P_n(t) (vjerovatnoća da je u intervalu t došlo n korisnika) sa

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

- Nepreklapajući intervali posmatranja nezavisni su jedan od drugog

Osobine Poasonovog dolaznog procesa

- Definicija: $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0,1,2 \ldots$
- Zbir svih vjerovatnoća je 1: $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$
- Srednja vrijednost:

$$m_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t) = \lambda t \Rightarrow \lambda = \frac{m_a(t)}{t}$$

  - Parametar λ označava protok dolazaka korisnika tj. prosječan broj korisnika u jedinici vremena.
- Varijansa:

$$\sigma_A^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - m_A)^2 P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) - m_A{}^2 = \lambda t$$

  - Parametar indeks disperzije se definiše kao količnik varijanse i srednje vrijednosti slučajnog procesa.
  - Na osnovu indeksa disperzije se slučajni procesi klasifikuju u tri grupe: gladak slučajan proces (indeks disperzije manji od 1), normalan slučajan proces (indeks disperzije je jednak 1) i hrapav slučajan proces (indeks disperzije veći od 1).
  - Kod Poasonovog procesa je indeks disperzije jednak 1, što znači da on spada u grupu normalnih slučajnih procesa.
  - Poasonov proces je dobar za opisivanje dolazaka korisnika u telefonskim mrežama, međutim, u paketskim mrežama procesi dolazaka su hrapavi (saobraćaj ima bursty prirodu) pa Poasonov proces tada ne predstavlja dobru aproksimaciju.

Osobine Poasonovog dolaznog procesa

- Generišuća funkcija P(z):

$$P(z) = E\left\{z^{A(t)}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n(t) = e^{-\lambda t(1-z)}$$

- 'Gubitak memorije':
  - Neka se posatraju proizvoljna tri trenutka vremena t_1, t_2 i t_3, $t_3 > t_2 > t_1$. Neka je do trenutka t_i stiglo n_i korisnika tj. $A(t_i) = n_i$, i=1,2,3 . Uslovna vjerovatnoća je:

$$P\{A(t_3) = n_3 \mid A(t_2) = n_2, A(t_1) = n_1\} = P\{n_3 \mid n_2, n_1\} =$$

$$= \frac{P\{n_1, n_2, n_3\}}{P\{n_1, n_2\}} = \frac{P\{n_1\} P\{n_2 - n_1\} P\{n_3 - n_2\}}{P\{n_1\} P\{n_2 - n_1\}} = P\{n_3 - n_2\}$$

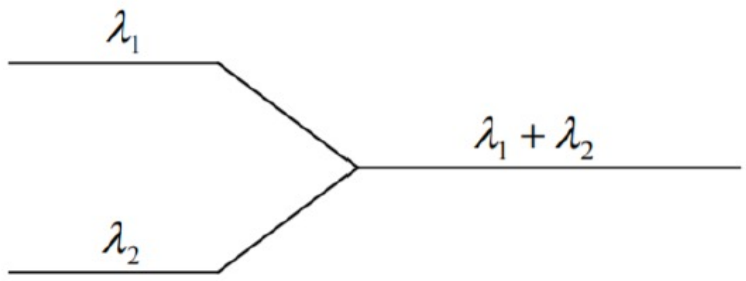
  - U izvođenju je iskorišćena osobina nezavisnosti između nepreklapajućih intervala. Iz konačnog rezultata se vidi da tražena uslovna vjerovatnoća zavisi samo od n_2, ali ne i od n_1, tj. ranije predistorije. Ova osobina se još naziva i Markovljevo svojstvo pa se otuda Poasonov tok naziva i Markovljev proces dolazaka.

Osobine Poasonovog dolaznog procesa

- Uniformnost uslovnog događaja:
  - Neka je u servisni sistem došao 1 korisnik u intervalu $(0, t)$. Vjerovatnoća da se to desilo u intervalu (t_A, t_B), $t_A < t_B < t$.

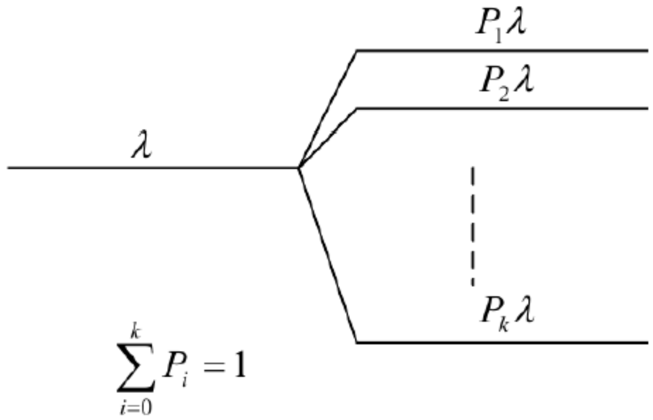
$$P\{n_B - n_A \mid n = 1\} = \frac{t_B - t_A}{t}$$

  - Svi intervali iste dužine unutar intervala $(0, t)$ su podjednako vjerovatni. Bitna je
  - samo veličina intervala, a ne i njegova pozicija.
- Združivanje dva nezavisna Poasonova procesa:
  - Ako se združe dva međusobno nezavisna Poasonova toka sa parametrima λ_1 i λ_2 kao rezultat dobija se opet Poasonov tok sa parametrom $\lambda_1 + \lambda_2$.



Osobine Poasonovog dolaznog procesa

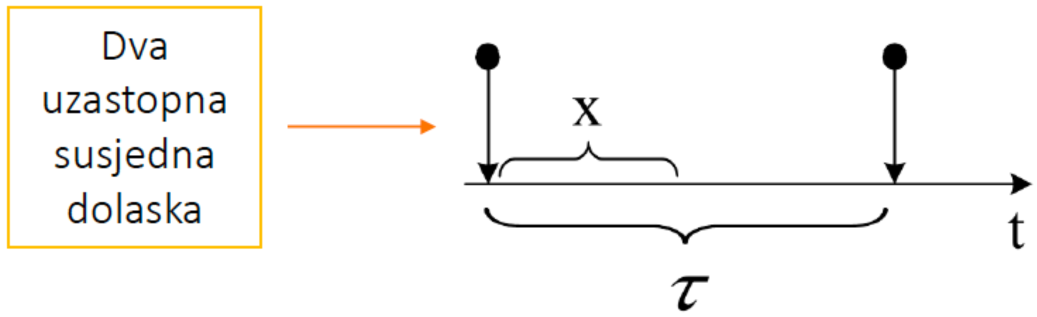
- Razdruživanje Poasonovog toka
  - Neka je dat Poasonov tok parametra parametra λ. Neka se korisnici iz tog toka dijele na k tokova pri čemu je vjerovatnoća da korisnik iz dolaznog toka završi u i tom toku P_i, i neka je $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$. Tada je svaki od k tokova, dobijenih razdvajanjem od glavnog toka, Poasonov tok sa parametrom $\lambda_i = \lambda P_i$, i=1..k.
  - U bilo kom drugom načinu razdvajanja glavnog toka dobijeni tokovi neće više biti Poasonovi.



Osobine Poasonovog dolaznog procesa

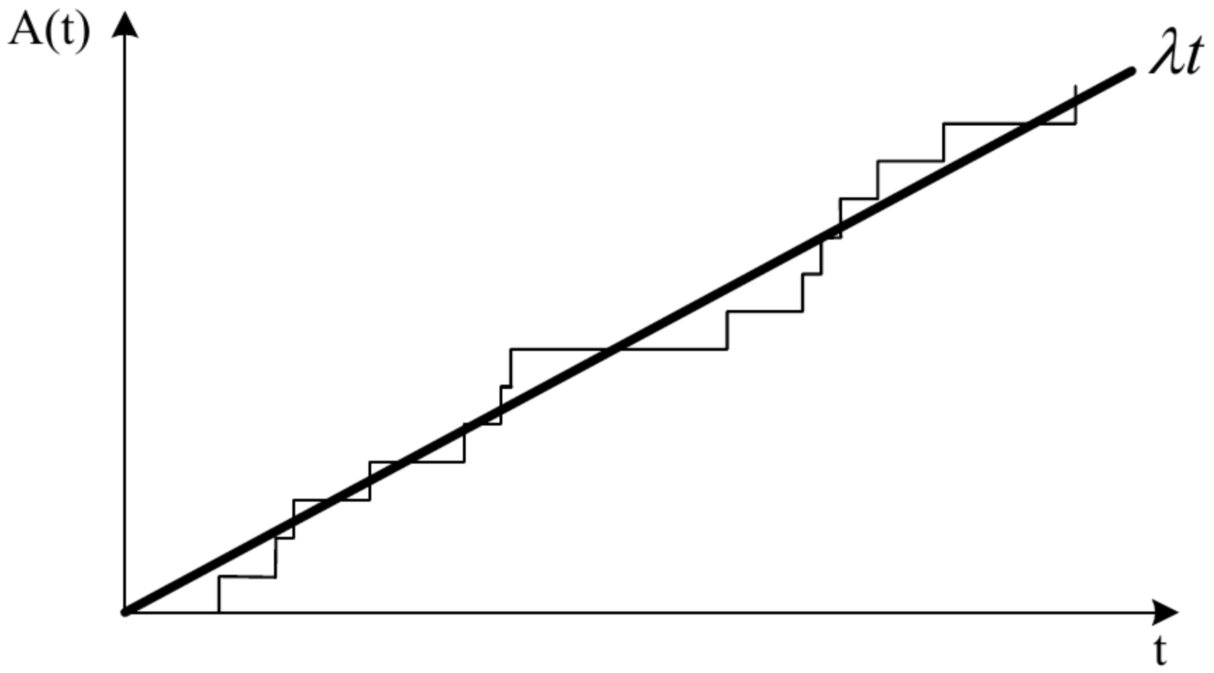
- Vjerovatnoća prvog dolaska i vjerovatnoća međudolazaka
  - Slučajna promjenjiva koja označava trenutak dolaska prvog korisnika se obilježava sa ξ , a slučajna promjenjiva koja označava vrijeme između dva uzastopna dolaska korisnika se obeležava sa τ . Pošto su ovo kontinualne veličine, onda se koristi gustina raspodjele za obije slučajne promjenjive. U slučaju Poasonovog toka dolazaka gustine raspodjele za obije slučajne promjenjive $f_\xi(t)$ i $f_\tau(t)$ su identične eksponencijalne raspodjele

$$f_\xi(t) = f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$



Osobine Poasonovog dolaznog procesa

- Stacionarnost
  - Brojački proces A(t) je stacionaran ako važi $\lim_{n\to\infty} \frac{A(t)}{t} = const$. Poasonov proces ispunjava ovaj uslov jer je $\lim_{n\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \lambda$.



Procesi obrade korisnika

- Kada korisnici stignu u sistem, ako budu prihvaćeni onda oni eventualno čekaju u čekaonici pa pređu u radionicu ili odmah uđu u radionicu gde ih obrađuje serviser .
- Svaki korisnik sa sobom nosi svoj posao koji servisni sistem treba da obradi
  - Obradu vrše serviseri radionice
- Vrijeme koje korisnik provede u radionici je vrijeme obrade korisnika i ono se smatra slučajnom veličinom u teoriji servisnih sistema .
- Pošto u opštem slučaju korisnici nose različite količine posla sa sobom onda se i vrijeme koje korisnik provede u radionici dok se posao ne završi razlikuje od korisnika do korisnika .

Procesi obrade korisnika

- Svaki serviser se karakteriše kapacitetom servisera koji u stvari predstavlja koliko posla serviser može da obavi u jedninici vremena .
- Vrijeme obrade po korisniku se u jedinicama može definisati na sledeći način

Vrijeme obrade po korisniku= količina posla koju nosi korisnik/ kapacitet servisera

količina posla koju nosi korisnik= jedinica posla/ korisnik

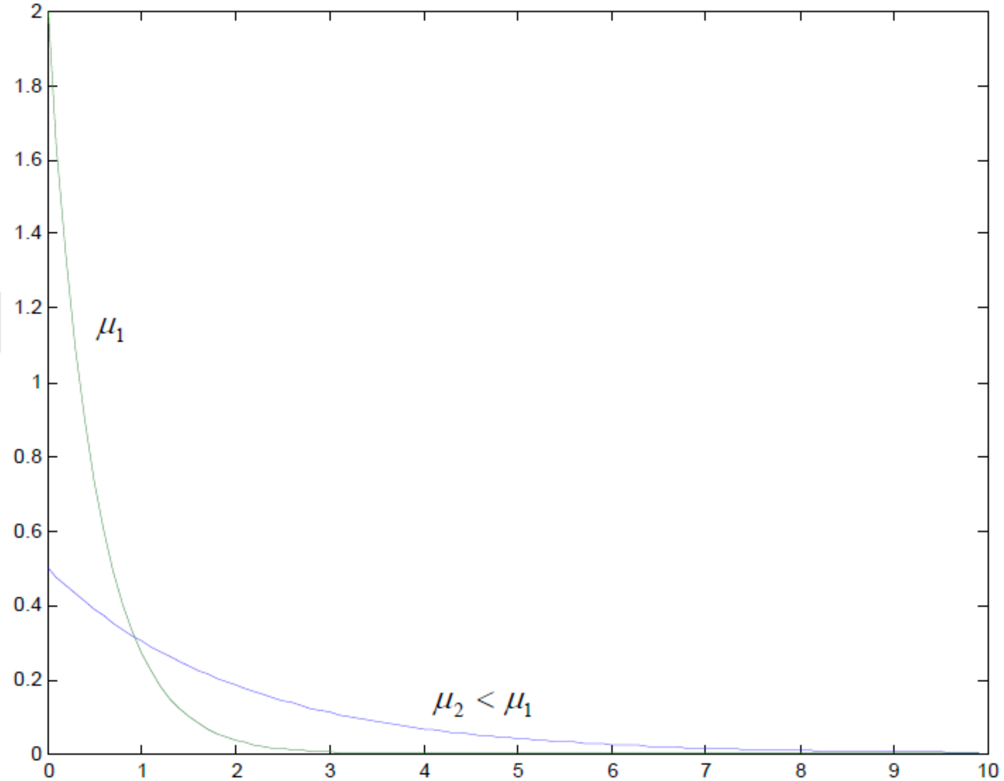
Kapacitet servisera= jedinic aposla/ jedinica vremena

Vrijeme obrade po korisniku= jedinica vremena/ korisnik

- Vrijeme obrade korisnika je vrijeme od trenutka kad je korisnik ušao u radionicu do trenutka kad je korisnik izašao iz radionice i smatra se kontinualnom pozitivnom slučajnom veličinom koja se obilježava sa ξ .

Eksponencijalna raspodjela vremena obrade korisnika

- U ovom slučaju ξ ima eksponencijalnu gustinu raspodjele i ovaj slučaj se u Kendalovom sistemu označavanja označava sa M
- Funkcija gustine eksponencijalne raspodjele $f_\xi(x)=\mu e^{-\mu x}$, $x \geq 0$.



Osobine eksponencijalne raspodjele

- Površina ispod funkcije gustine raspodjele je jednaka 1:

$$\int_0^{\infty} f_{\xi}(x)dx = 1$$

- Prosječno vrijeme obrade korisnika (srednja vrijednost):

$$\bar{\xi} = m_{\xi} = E(\xi) = \int_0^{\infty} x f_{\xi}(x)dx = \frac{1}{\mu}$$

- Varijansa

$$\sigma_{\xi}^2 = \overline{(\xi - \bar{\xi})^2} = \int_0^{\infty} (x - \bar{\xi})^2 f_{\xi}(x)dx = \frac{1}{\mu^2}$$

- Generišuća funkcija (Laplasova)

$$\Phi_{\xi}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_{\xi}(x)dx = \frac{\mu}{s+\mu}$$

Osobine eksponencijalne raspodjele

- Odsustvo memorije

$$P\{\xi > t + x \mid \xi > t\} = \frac{P\{\xi > t + x, \xi > t\}}{P\{\xi > t\}} =$$

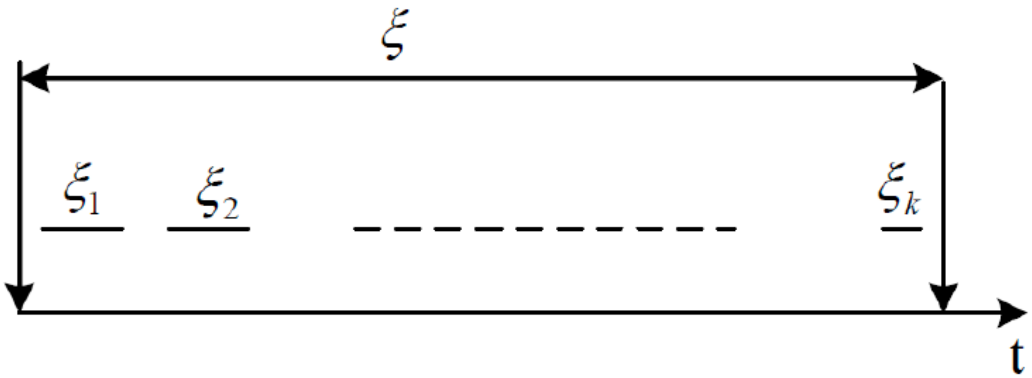
$$= \frac{\int_{x+t}^{\infty} \mu e^{-\mu u} du}{\int_{t}^{\infty} \mu e^{-\mu u} du} = \frac{e^{-\mu(x+t)}}{e^{-\mu t}} = e^{-\mu x}$$

  - Rezultat ne zavisi od t pa se odatle može zaključiti da eksponencijalna raspodela ima Markovljevo svojstvo tj . svojstvo odsustva memorije
- Veza sa Poasonovom raspodjelom
  - Pošto su vremena obrade korisnika međusobno nezavisna i sve obrade imaju eksponencijalnu raspodjelu sa istim parametrom μ onda izlasci iz radionice tj . servisnog sistema (završeci obrade) odgovaraju Poasonovom toku sa parametrom λ=μ.

Erlangova raspodjela

- Izvodi se iz eksponencijalne raspodjele
- Kendalova oznaka za ovaj slučaj je E_k, gdje k označava Erlangovu raspodjelu k tog reda .
  - Ova raspodjela podrazumijeva da korisnik ide na obradu kod prvog servisera, a kad kod njega završi ide kod drugog i tako sve do k-tog servisera, pri čemu svih k servisera ima istu eksponencijalnu raspodjelu sa istim parametrom μ.

$$f_{\xi_i} = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots k$$



Erlangova raspodjela

- Slučajna promenjiva ξ koja odgovara ukupnom vremenu obrade je jednaka zbiru pojedinačnih vremena obrade, tj. Slučajnih promjenjivih ξ_i(i=1,2,...k) koje njima odgovaraju

$$\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k$$

- Pošto su ξ_i međusobno nezavisne onda je Laplasova funkcija Erlagove raspodjele Φ_s jednaka proizvodu Laplasovih funkcija pojedinačnih eksponencijalnih raspodjela $\Phi_{\xi i}(s)$:

$$\Phi_\xi(s) = [\Phi_{\xi_i}(s)]^k = \left[\frac{\mu}{s+\mu}\right]^k$$

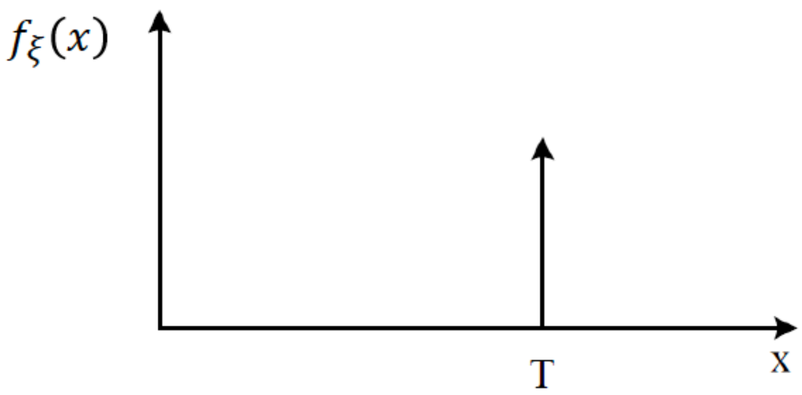
- Inverznom transformacijom dobija se izraz za gustinu raspodjele

$$f_\xi(x) = \mu\frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu x},\ x \geq 0$$

Deterministička raspodjela

- Kendalova oznaka za ovu raspodjelu je D. Ova raspodjela podrazumijeva da svi korisnici imaju istu količinu posla tj. vrijeme obrade svakog korisnika je isto (ξ = T = const., gde je T fiksno vrijeme obrade korisnika).
- Gustina determinističke raspodjele je Dirakov impuls u x = T :

$$f_\xi(x) = \delta(x - T)$$



Generalna raspodjela

- Kendal ova oznaka za ovu raspodjelu je G.
- Podrazumijeva da za gustinu raspodjele ima bilo koju funkciju f(x) koja zadovoljava sledeće uslove.

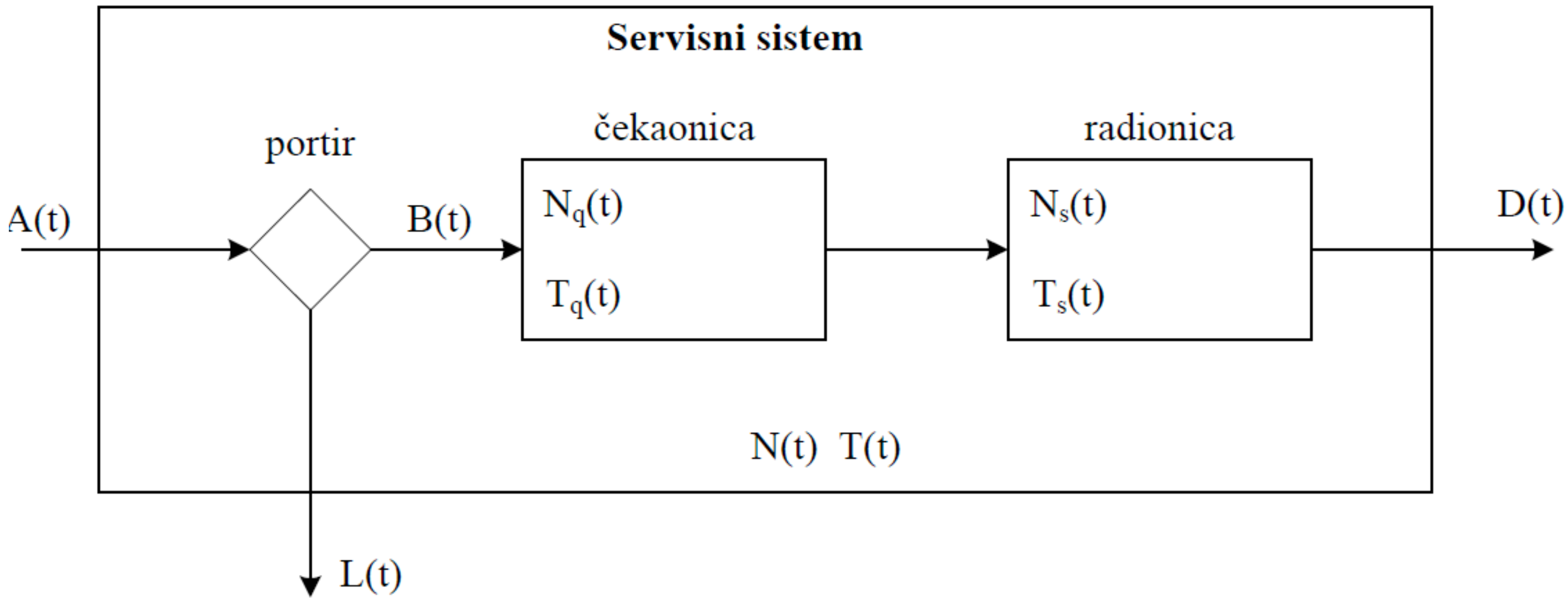
$$f_{\xi}\left(x\right) = f(x),\ x \geq 0$$

$$f(x) = 0,\ \ x < 0$$

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- Pri tome, pretpostavlja se da su za svaku funkciju f(x) poznati srednja vrijednost i varijansa.

Procesi koji opisuju stanje sistema



- $N(t)$ - Broj korisnika u servisnom sistemu u trenutku t
- $Nq(t)$ - Broj korisnika u čekaonici u trenutku t
- $Ns(t)$ - Broj korisnika u radionici u trenutku t
- T(t) - Vrijeme zadržavanja korisnika u sistemu
- $Tq(t)$ - Vrijeme čekanja korisnika u čekaonici
- $T_s(t)$ - Vrijeme obrade servisiranja korisnika
- A(t) - Tok dolazaka korisnika u servisni sistem
- B(t) - Tok korisnika koji su primljeni na obradu
- L(t) - Tok korisnika koji su odbijeni (izgubljeni)
- D(t) - Tok odlazaka korisnika iz servisnog sistema

Procesi koji opisuju stanje sistema

- Važe sledeće relacije
  - $N(t) = N_q(t) + N_s(t)$
  - $T(t) = T_q(t) + T_s(t)$
- Pretpostavlja se da je tok dolazaka $A(t)$ stacionaran proces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \lambda = const$$

- Pretpostavlja se i da servisni sistem ima moć da obradi sve korisnike koje primi na obradu, što znači da se pretpostavlja i da su tokovi $L(t)$ i $D(t)$ takođe stacionarni

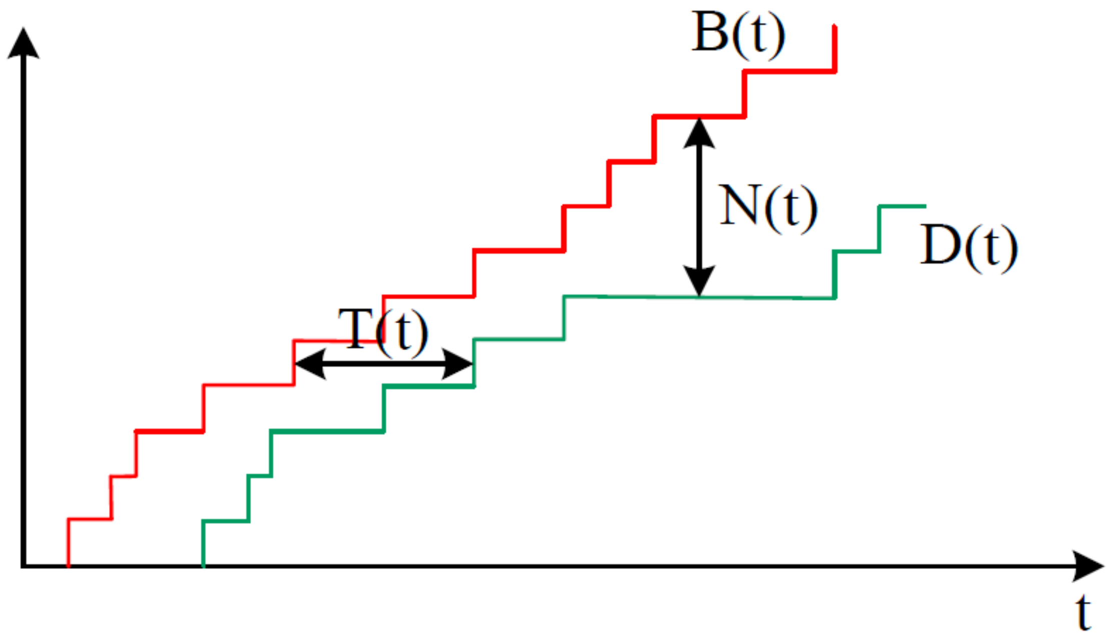
$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(t)}{t} = \gamma = const$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(t)}{t} = \lambda - \gamma = P_L\lambda$$

- λ predstavlja srednju dolaznu brzinu korisnika u servisni sistem, γ propusnot sistema, P_L vjerovatnoću gubitaka korisnika .

Procesi koji opisuju stanje sistema

- $N(t)$ je broj korisnika u sistemu u trenutku t i to je slučajna veličina koja se naziva stanje sistema
- $N(t) = B(t) - D(t)$
- T(t) je vrijeme zadržavanja prihvaćenih korisnika u servisnom sistemu
- Obično su od interesa srednje vrijednosti T i N, kao i ekvivalentnih slučajnih veličina koje se odnose na čekaonicu i radionicu N_q, N_s, T_q, T_s



Procesi koji opisuju stanje sistema

- Vjerovatnoća da se servisni sistem nalazi u stanju n (u sistemu se nalazi n korisnika) se označava sa $p_n(t)$:

$$P\{N(t)=n\}=p_n(t),\ n=0,1,2,\ldots,k$$

- Smatra se da je ispunjen uslov stacionarnosti tj. da je:

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t)=p_n$$

- Iz uslova konzervacije protoka (protok na ulazu u sistem je jednak zbiru tokova izgubljenih korisnika i toka obrađenih korisnika) slijedi relacija:

$$A(t)=D(t)+L(t)$$
$$\Rightarrow \lambda=\gamma+P_L\lambda$$

- Servisni sistem je stabilan ako je vjerovatnoća da se sistem nalazi u praznom stanju različita od nule ($p_0 \neq 0$) i da je vjerovatnoća da u sistemu ima beskonačno mnogo korisnika jednaka ($p_\infty \to 0$).

Litlova teorema

- Litlova teorema kaže da za stabilan sistem važi relacija: $N = \gamma T$.
- Slična relacija se može primijeniti i na djelove servisnog sisterma: radionicu i čekaonicu.

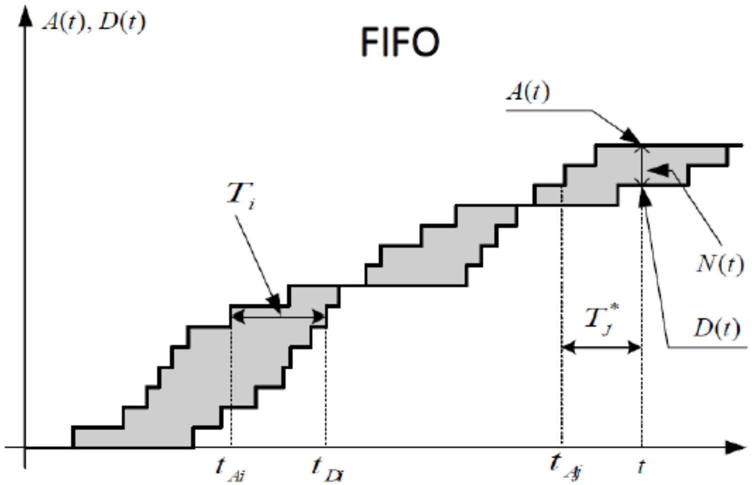
$$S(t) = \sum_{i=1}^{D(t)} T_i + \sum_{i=D(t)+1}^{A(t)} T_i^* = \int_0^t N(u)du$$

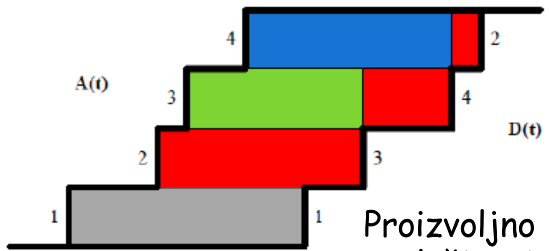
$$N = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(u)du = \lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t}$$

$$T = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{t=1}^{D(t)} T_i$$

$$N = \lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t} \left[\lim_{t\to\infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{i=1}^{D(t)} T_i + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{i=D(t)+1}^{A(t)} T_i^* \right]$$

Ako je sistem stabilan: $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{i=D(t)+1}^{A(t)} T_i^* = 0$





Proizvoljno posluživanje

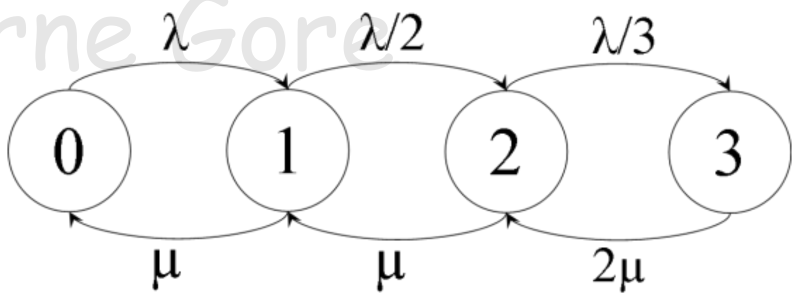
Markovljev lanac

- Specijalni slučaj stohastičkog procesa koji uzima samo diskretne vrijednosti, pri čemu stanje u trenutku t_{n+1} zavisi samo od stanja u neposrednom prethodnom trenutku t_n
- Lanac se razvija u vremenu tranzicijama između stanja .
- Razvoj stohastičkog procesa se opisuje vrijednostima stanja u posmatranom trenutku , a ne vremenom provedenim u tom stanju .
- U slučaju da imamo da su trenuci tranzicija diskretni, radi se diskretnom lancu.
- Markovljev lanac rađanja i umiranja
  - U nekom određenom trenutku vremena (t →0) može se desiti neki od moguća 3 događaja:
    - Iz sistema je otišao jedan korisnik
    - U sistem je ušao jedan korisnik
    - Niti je ušao korisnik u sistem, niti je izašao iz njega

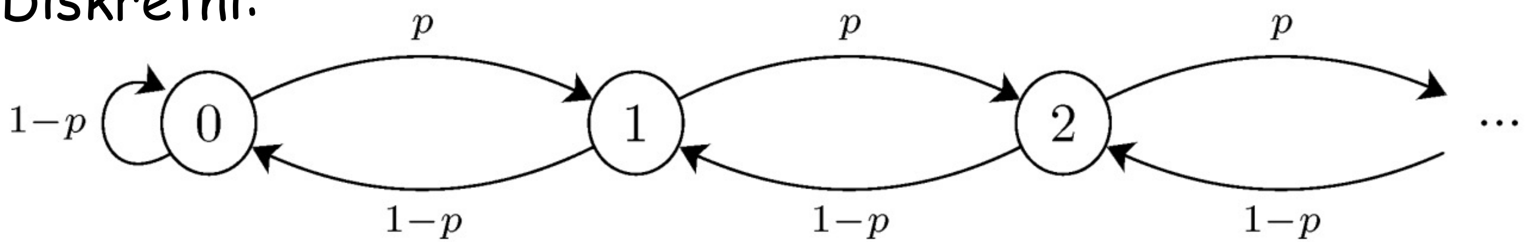
Markovljev lanac

- Opisuje se dijagramima stanja koji se sastoje od stanja (kružići) i dozvoljenih tranzicija između njih (linije sa strelicama)
- Kod lanaca kontinualnih u vremenu tranzicija se može javiti u bilo kom trenutku i opisane su parametrom eksponencijalne raspodjele
- Kod lanaca diskretnih u vremenu tranzicija se može javiti u tačno definisanim trenucima i opisani su vjerovatnoćama tranzicija koje zavise od geometrijske raspodjele vremena zadržavanja u posmatranom stanju
  - U ovom slučaju stanja mogu imati tranzicuju u same sebe .
  - Suma svih vjerovatnoća napuštanja stanja mora biti jednaka 1.

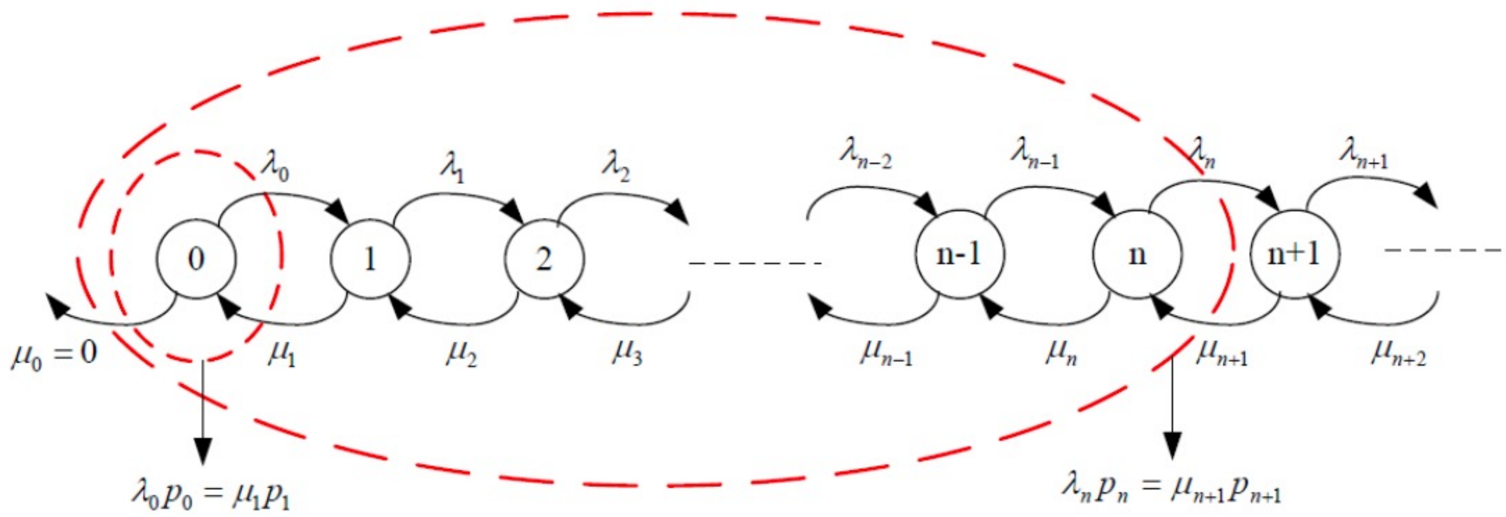
Kontinualni:



Diskretni:



Određivanje vjerovatnoće stanja



$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

$$\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$$

$$\vdots$$

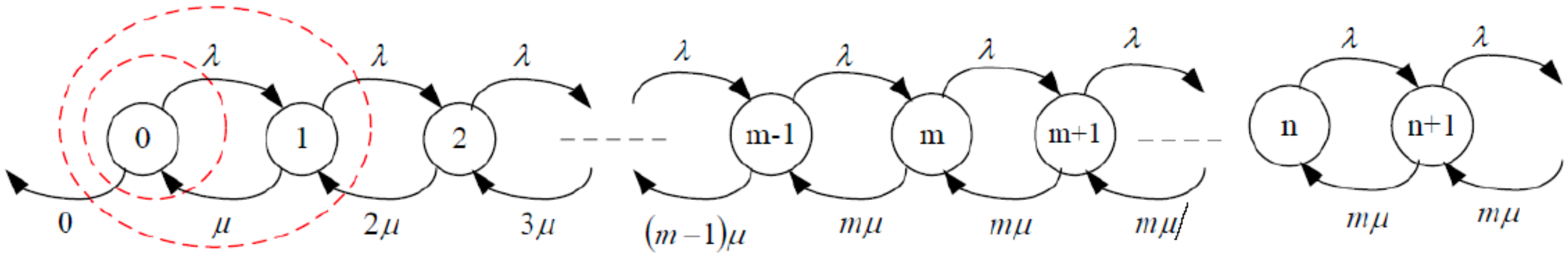
$$\lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n \Rightarrow p_n == \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_2 \mu_1} p_0$$

S obzirom da važi: $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

Dobija se:

$$\boxed{p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}}$$

M/M/m sistem



$$\mu p_1 = \lambda p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$2\mu p_2 = \lambda p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0$$

$$3\mu p_3 = \lambda p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\lambda^3}{3!\,\mu^3} p_0$$

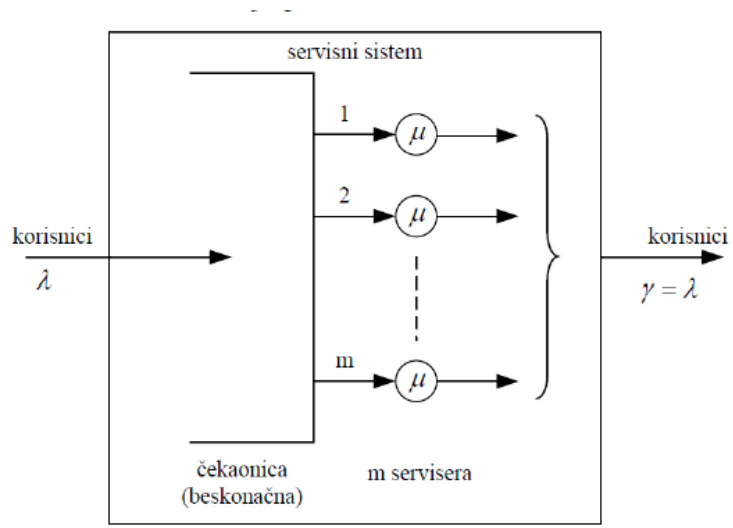
$$\vdots$$

$$m\mu p_m = \lambda p_{m-1} \Rightarrow p_m = \frac{\lambda^m}{m!\,\mu^m} p_0$$

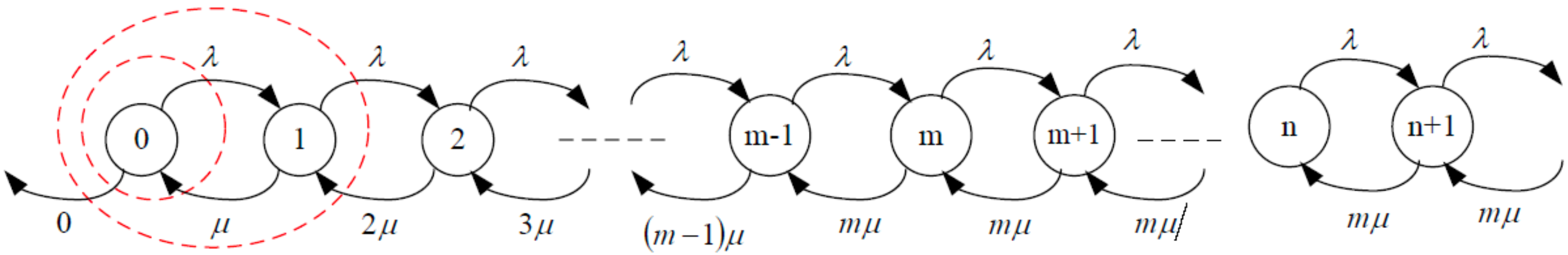
$$m\mu p_{m+1} = \lambda p_m \Rightarrow p_{m+1} = \frac{\lambda^{m+1}}{m \cdot m!\,\mu^{m+1}} p_0$$

$$\vdots$$

$$m\mu p_n = \lambda p_{n-1} \Rightarrow p_n = \frac{\lambda^n}{m^{n-m} m!\,\mu^n} p_0$$



M/M/m sistem



$$p_n = \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0 = \frac{A^n}{n!} p_0, \quad 1 \le n < m$$

$$p_n = \frac{m^m \rho^n}{m!} p_0 = \frac{A^n}{m^{n-m} m!} p_0, \quad n \ge m$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$ Iskorišćenje servisera

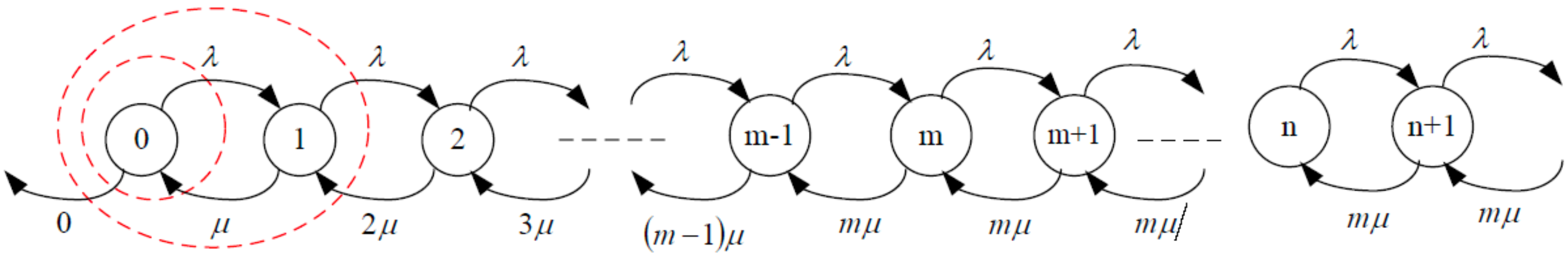
$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$ Ponuđeno opterećenje

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} p_0 + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^n p_0 = 1$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1}{1-\rho}}$$

Da bi sistem bio stabilan mora biti ispunjen uslov da je iskorišćenje servisera manje od 1 (serviser mora povremeno biti nezauzet tj. Sistem mora povremeno bitip razan).

M/M/m sistem



Vjerovatnoća čekanja P_Q je vjerovatnoća da korisnik po ulasku u servisni system mora da čeka tj. u tom momentu su svi serviseri zauzeti:

$$P_Q = \sum_{n=m}^{\infty} p_n = \frac{m^m}{m!}\frac{\rho^m}{1-\rho} p_o$$

$$\Rightarrow P_Q = \frac{\dfrac{A^m}{m!(1-\rho)}}{\sum\limits_{n=0}^{m-1}\dfrac{A^n}{n!}+\dfrac{A^m}{m!(1-\rho)}} = E_2(m,A),$$

Erlangova C formula!

M/M/m sistem

- Srednje vrijeme servisiranja T_S je srednje vrijeme eksponencijalne raspodjele jer je servisiranje kod M/M/m sistema po eksponencijalnoj raspodjeli:

$$T_S = \frac{1}{\mu}$$

- Na osnovu Litlove teoreme imamo da je srednji broj korisnika u radionici:

$$N_S = \lambda T_S = \frac{\lambda}{\mu} = A$$

- Srednji broj korisnika u čekaonici N_Q je:

$$N_Q = \sum_{n=m}^{\infty}(n-m)p_n = \sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\frac{m^m\rho^n}{m!}p_0 = \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\rho^{n-m} =$$

$$= \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\sum_{n=0}^{\infty}n\rho^n = \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\rho\sum_{n=0}^{\infty}n\rho^{n-1} = \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dn}\left(\rho^n\right) =$$

$$= \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\rho\frac{d}{dn}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n = \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\rho\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$\Rightarrow N_Q = \frac{\rho}{1-\rho}P_Q$$

M/M/m sistem

- Na osnovu Litlove teoreme je srednje vreme čekanja korisnika T_Q:

$$T_Q = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{P_Q}{\lambda}$$

- Srednji broj korisnika u sistemu N je jednak zbiru srednjeg broja korisnika u radionici N_S i čekaonici N_Q:

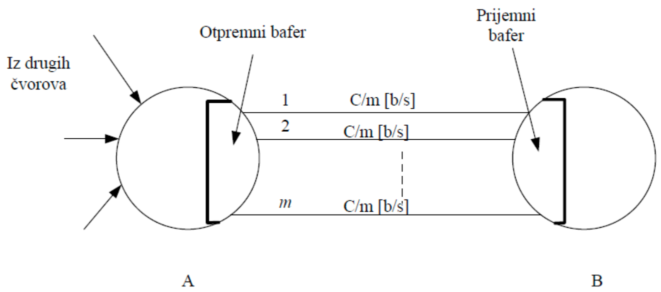
$$N = N_Q + N_S = A + \frac{\rho}{1-\rho}P_q$$

- Srednje vrijeme zadržavanja korisnika u sistemu T je jednako zbiru srednjeg vremena čekanja T_Q i srednjeg vremena servisiranja korisnika T_S:

$$T = T_Q + T_S = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{P_Q}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

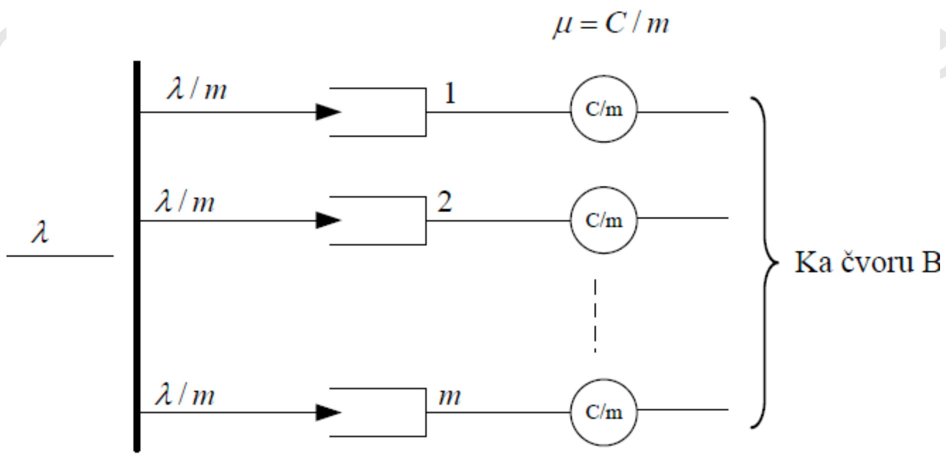
M/M/m primjeri primjene

- Jedan od primjera primjene je analiza prenosa jedinica podataka preko linka između dva komunikaciona čvora, pri čemu se pretpostavlja da su baferi dovoljno veliki da ne može da dođe do gubitaka .
- Pri tome, takođe se pretpostavlja da jedinice podataka pristižu kao Paosonov tok, a dužina jedinice podataka je u stvari količina posla koja treba da se obradi i pretpostavlja se da dužina jedinice podataka ima eksponencijalnu raspodjelu .
- Ukupan kapacitet linkova između dva posmatrana komunikaciona čvora je C[b/s], broj linkova je m, pri čemu su svi istih kapaciteta. Tada se za analizu ovog sistema u zavisnosti od multipleksiranja jedinica podataka koristi jedno od sledeća dva modelovanja posmatranog sistema
  - Sistematsko multipleksiranje - Model se sastoji od m M/M/1 sistema
  - Statističko multipleksiranje - Model se sastoji od jednog M/M/m sistema



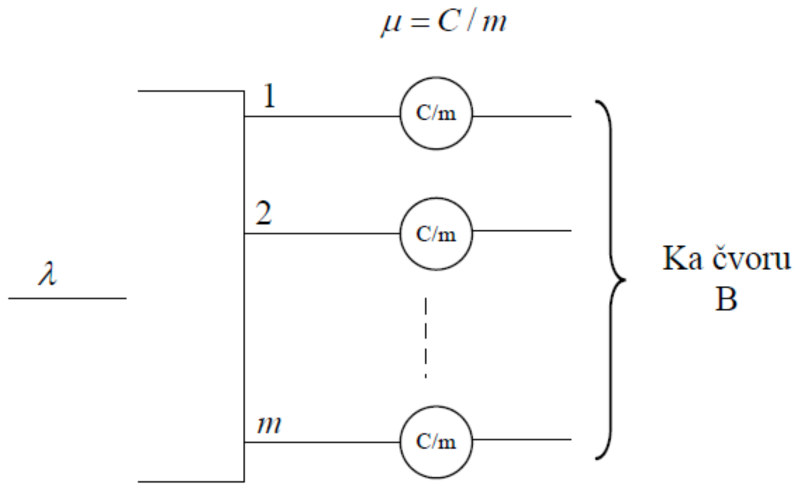
M/M/m primjeri primjene

- Za slučaj sistematskog multipleksiranja svaki link ima svoj bafer u koji se smještaju korisnici tj. jedinice podataka.
- Jedinice podataka koje treba da se proslij ede prema komunikacionom čvoru B se prosleđuju na neki od m linkova sa podjednakom vjerovatnoćom koja iznosi 1/m
- Protok podataka na svakom linku je Λ/m , gde je Λ protok podataka ka komunikacionom čvoru B.
- Moć servisera tj . linka je C/m . Tako da ovde postoji m M/M/1 s istema.



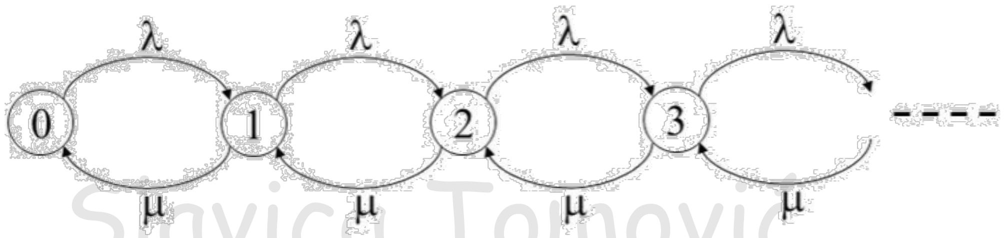
M/M/m primjeri primjene

- Kod statističkog multipleksiranja imamo jedan zajednički red čekanja za svih mvlinkova, tako da čim jedan link postane slobodan jedinica podataka se prosleđujevka njemu
- Ovdje je protok podataka u sistem λ, a moć servisera je i dalje C/m .
- Slučaj statističkog multipleksiranja povoljniji je sa stanovišta srednjeg zadržavanjavu sistemu iz prostog razloga što se kod njega nikad ne može desiti da postojivkorisnik koji čeka, a da pri tome postoji slobodan link.
- Takođe se pokazuje da je bolje imati jedan link kapaciteta C, nego m linkova čiji ćevukupni kapacitet biti takođe C, sa stanovišta srednjeg vremena zadržavanjavkorisnika u sistemu što će biti pokazano nešto kasnije u okviru ove sekcije.



M/M/1 sistem

- U praksi se veoma često koristi za modelovanje telekomunikacionih sistema ili njihovih delova



$$p_n = \rho^n p_0, \quad n \geq 1$$

$$\rho = A = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_0 = 1 - \rho$$

$$P_Q = 1 - p_0 = \rho$$

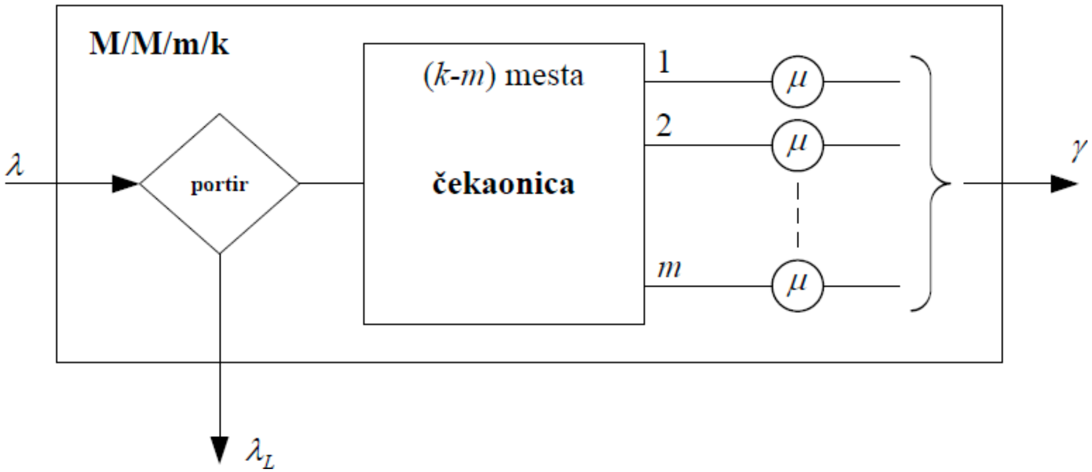
$$T_S = \frac{1}{\mu}; N_S = A$$

$$T_Q = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\mu}; N_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

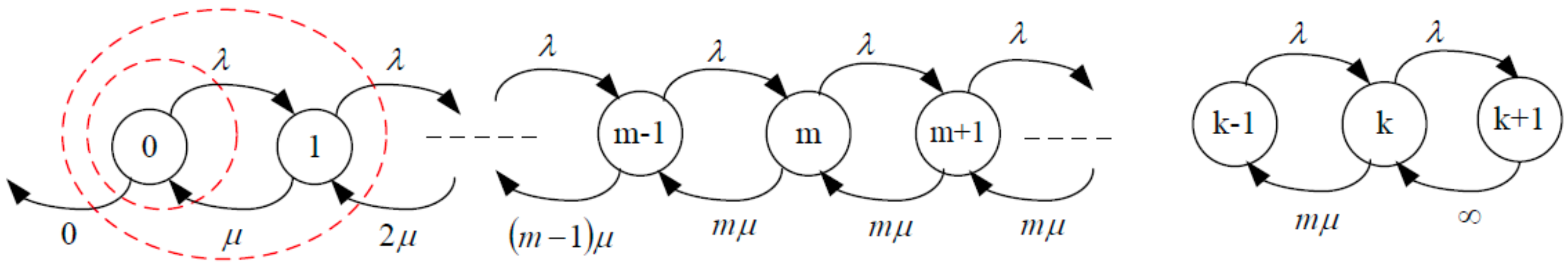
$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}; N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

M/M/m/k sistemi

- Poasonov tok dolazaka u sistem sa parametrom λ
- E ksponencijalna raspodjela vremena obrade korisnika sa parametrom μ
- m servisera
- Konačna čekaonica sa k-m mjesta
- FIFO disciplina posluživanja
- Sistemi konačnog kapaciteta su po prirodi stabilni jer kod njih ne može doći do nagomilavanja beskonačnog broja korisnika, već je to regulisano kroz mehanizam odbijanja korisnika



M/M/m/k sistemi



$$\mu p_1 = \lambda p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$2\mu p_2 = \lambda p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0$$

$$3\mu p_3 = \lambda p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\lambda^3}{3!\,\mu^3} p_0$$

$$\vdots$$

$$m\mu p_m = \lambda p_{m-1} \Rightarrow p_m = \frac{\lambda^m}{m!\,\mu^m} p_0$$

$$m\mu p_{m+1} = \lambda p_m \Rightarrow p_{m+1} = \frac{\lambda^{m+1}}{m \cdot m!\,\mu^{m+1}} p_0$$

$$\vdots$$

$$m\mu p_k = \lambda p_{k-1} \Rightarrow p_k = \frac{\lambda^k}{m^{k-m} m!\,\mu^k} p_0$$

$$\infty p_{k+1} = \lambda p_k \Rightarrow p_{k+1} = 0$$

$$p_n = \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0 = \frac{A^n}{n!} p_0, \quad 1 \le n < m$$

$$p_n = \frac{m^m \rho^n}{m!} p_0 = \frac{A^n}{m^{n-m} m!} p_0, \quad m \le n \le k$$

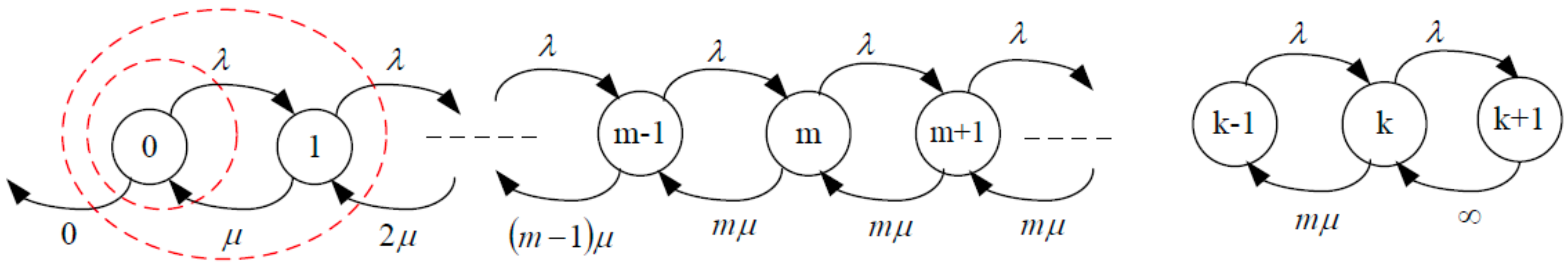
$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\sum_{n=0}^{k} p_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} p_0 + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{k} \rho^n p_0 = 1$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{k} \rho^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1-\rho^k}{1-\rho}}$$

M/M/m/k sistemi



- Vjerovatnoća blokade P_B je vjerovatnoća da se sistem nalazi u stanju k sistem je pun) i po definiciji je P_B

$$P_B = p_k = \frac{m^m \rho^k}{m!} p_0 = \frac{m^m \rho^k}{m!} \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1-\rho^k}{1-\rho}}$$

- Ponuđeni saobraćaj je saobraćaj koji korisnici nude servisnom sistemu, ali pošto je ovo sistem sa gubicima sav saobraćaj koji je ponuđen se ne ostvaruje, već samo dio. Ostvareni saobraćaj i definiše se kao

$$A_S = \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}(1-P_L) = A(1-P_L)$$

M/M/m/m sistemi

- Erlangov model
- Bez čekaonice
- Erlangov model je naročito korišćen u okviru klasične telefonije za
- modelovanje telefonskog saobraćaja
- Formula za vjerovatnoće stanja $p_n$sistema M/M/m/m se još naziva i Erlangova raspodjela prvog reda: $E_1(n,m,A)$, n=0, 1,...m.

$$p_n = \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0 = \frac{A^n}{n!} p_0, \quad 1 \le n \le m \qquad p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} \frac{A^n}{n!}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$

Vjerovatnoća blokiranja Erlangova B formula)

$$P_B = p_m = \frac{\frac{A^m}{m!}}{\sum_{n=0}^{m} \frac{A^n}{n!}}$$

M/M/m/m sistemi

- Protok korisnika na izlazu iz sistema

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n p_n = \sum_{n=0}^{m} n\mu p_n = \mu \sum_{n=0}^{m} np_n = \mu N_S$$

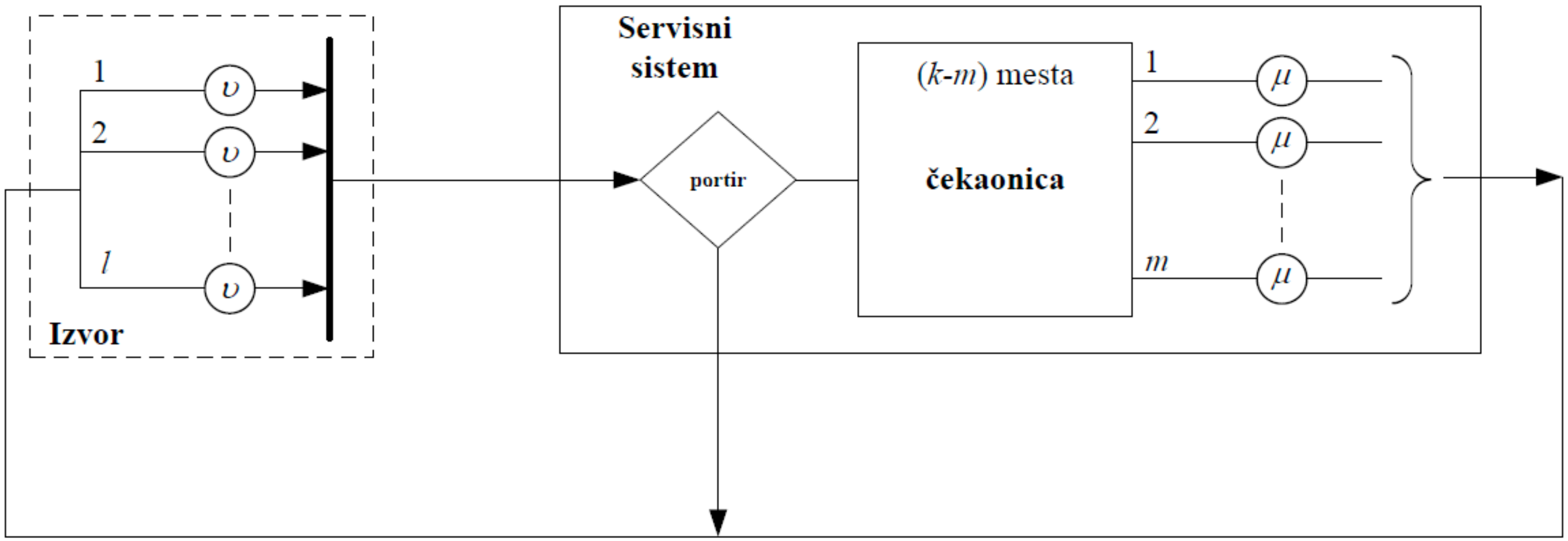
- N_S srednji broj korisnika u radionici srednji broj angažovanih servisera
- Ostvareni saobraćaj

$$A_S = \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\mu N_S}{\mu} = N_S$$

- Srednje vrijeme servisiranja $T_S$je 1/ μ jer je obrada korisnika po eksponencijalnoj raspodjeli sa parametrom μ
- Pošto sistem nema čekaonicu onda je srednji broj korisnika u čekaonici nula ,
- a isto važi i za srednje vrijeme čekanja korisnika

M/M/m/k/l sistemi

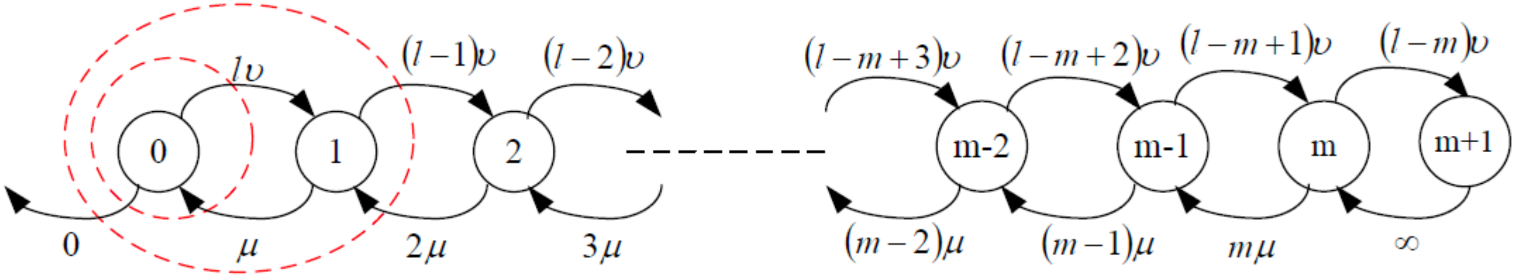
- Poasanov tok dolazaka u sistem sa parametrom λ , esponencijalna raspodjela vremena obrade korisnika sa parametrom μ
- m servisera
- Konačna čekaonica sa k -mjesta
- FIFO disciplina posluživanja
- Jedina razlika u odnosu na M/M/m/k
  - Br oj potencijalnih korisnika konačan i iznosi l .



M/M/m/k/l sistemi

- Po ovom modelu vrijeme zadržavanja korisnika u izvoru je slučajna promjenjiva
- koja ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom υ.
- U zavisnosti od odnosa između parametara m, k i l , postoje sledeći slučajevi
  - 1 ≤ l ≤ m , u ovom slučaju u sistemu nema odbijenih korisnika i nema čekanja na servis
  - m < l ≤ k , u ovom sistemu nema odbijenih korisnika , ali se može desiti da korisnici moraju da čekaju
  - l > k , u ovom sistemu može doći do odbijanja korisnika
- Specijalan slučaj M/M/m/m/l je Engsetov model (pretpostavljeno je da je l ≥ m
- Ukoliko je l >> m onda se ovaj sistem može aproksimirati Erlangovim modelom M/M/m/m.

Engsetova raspodjela



$$\mu p_1 = l\upsilon p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{l\upsilon}{\mu} p_0 = \binom{l}{1} r p_0$$

$$2\mu p_2 = (l-1)\upsilon p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{(l-1)\upsilon}{2\mu} p_1 = \frac{l(l-1)\upsilon^2}{2\mu^2} p_0 = \binom{l}{2} r^2 p_0$$

$$3\mu p_3 = (l-2)\upsilon p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{(l-2)\upsilon}{3\mu} p_2 = \frac{l(l-1)(l-2)\upsilon^3}{3!\,\mu^3} p_0 = \binom{l}{3} r^3 p_0$$

$$\vdots$$

$$m\mu p_m = (l-m+1)\upsilon p_{m-1} \Rightarrow p_m = \frac{l(l-1)\cdots(l-m+1)\upsilon^m}{m!\,\mu^m} p_0 = \binom{l}{m} r^m p_0$$

$$\infty p_{m+1} = (l-m)\upsilon p_m \Rightarrow p_{m+1} = 0$$

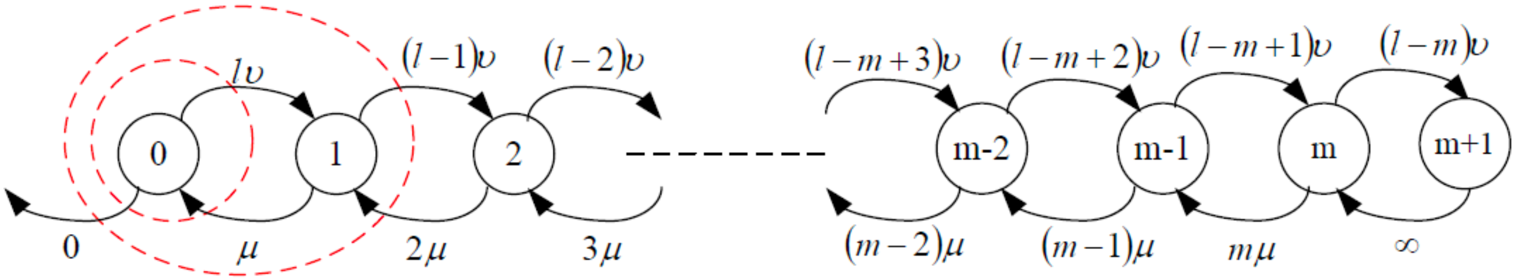
$$r = \frac{\upsilon}{\mu}$$

$$p_n = \binom{l}{n} r^n p_0, \quad n = 0,1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{n=0}^{m} p_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{m} \binom{l}{n} r^n p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} \binom{l}{n} r^n}$$

$$p_n = \frac{\binom{l}{n} r^n}{\sum_{i=0}^{m} \binom{l}{i} r^i}, \quad n = 0,1,2,\ldots,m$$

Engsetova raspodjela



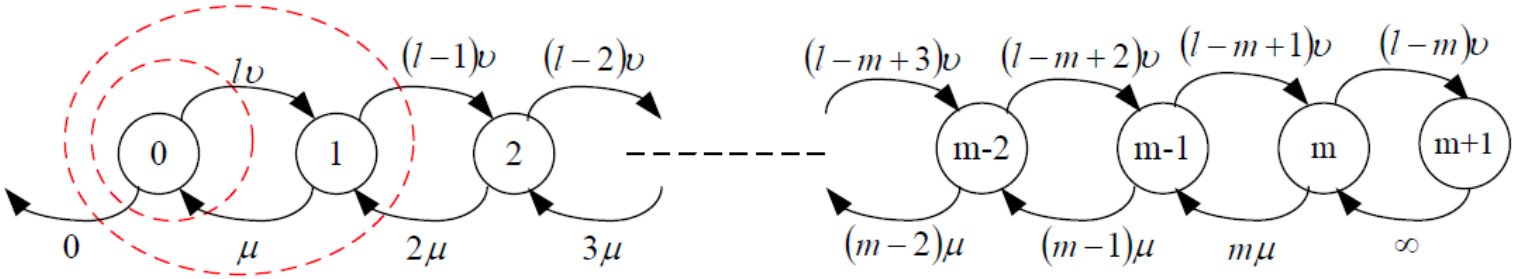
- Vjerovatnoće stanja sistema koja zatekne korisnik po ulasku u sistem

$$q_n = \frac{\lambda_n p_n}{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i} = \frac{(l-n)\upsilon \dfrac{\binom{l}{n} r^n}{\sum_{j=0}^{m} \binom{l}{j} r^j}}{\sum_{i=0}^{m} (l-i)\upsilon \dfrac{\binom{l}{i} r^i}{\sum_{j=0}^{m} \binom{l}{j} r^j}} = \frac{\binom{l-1}{n} r^n}{\sum_{i=0}^{m} \binom{l-1}{i} r^i} = p_n(l-1)$$

$$\lambda_n = (l-n)\upsilon$$

- U ovom sistemu osobina PASTA ne važi

Engsetova raspodjela



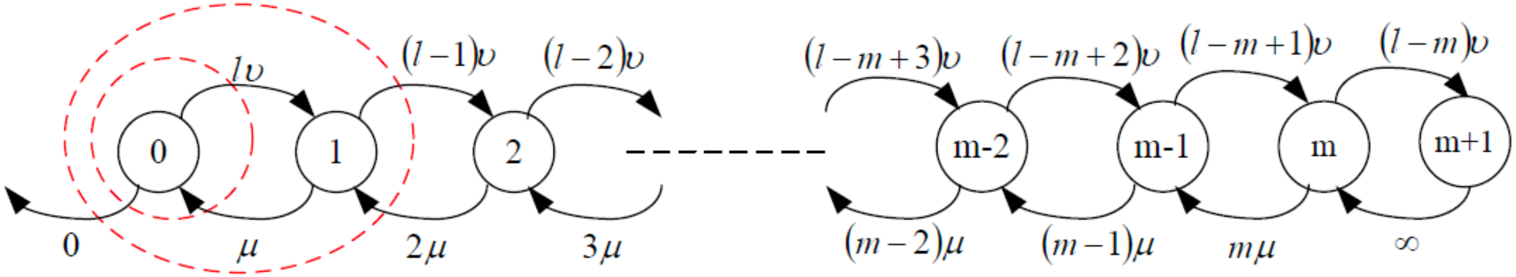
- Intenzitet ponuđenog saobraćaja A

$$A = \frac{E\{\lambda_n\}}{\mu} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i}{\mu} = r \cdot \frac{\sum_{i=0}^{m} \binom{l-1}{i} r^i}{\sum_{j=0}^{m} \binom{l}{j} r^j}$$

- Intenzitet ostvarenog saobraćaja

$$A_S = N_S = E\{i\} = \sum_{i=0}^{m} i p_i = \sum_{i=0}^{m} i p_0 \binom{l}{i} r^i = \frac{l}{\sum_{j=0}^{m} \binom{l}{j} r^j} \sum_{i=1}^{m} \binom{l-1}{i-1} r^i$$

Engsetova raspodjela



- Vjerovatnoća blokiranja

$$P_B = p_m = \frac{\binom{l}{m} r^m}{\sum_{i=0}^{m} \binom{l}{i} r^i}$$

- Vjerovatnoća gubitka

$$P_L = q_m = \frac{\binom{l-1}{m} r^m}{\sum_{i=0}^{m} \binom{l-1}{i} r^i} = \frac{A - A_S}{A}$$