Vježbe 5
Komutacioni sistemi

Primjer 1

Na ulaz E1 multipleksera dolazi prosječno 2000 paketa u sekundi saglasno Poasonovoj raspodjeli. Ako je srednja veličina paketa 1000 bita koliko iznosi srednji broj paketa u multiplekseru i srednje kašnjenje u prenosu paketa koje multiplekser unosi?

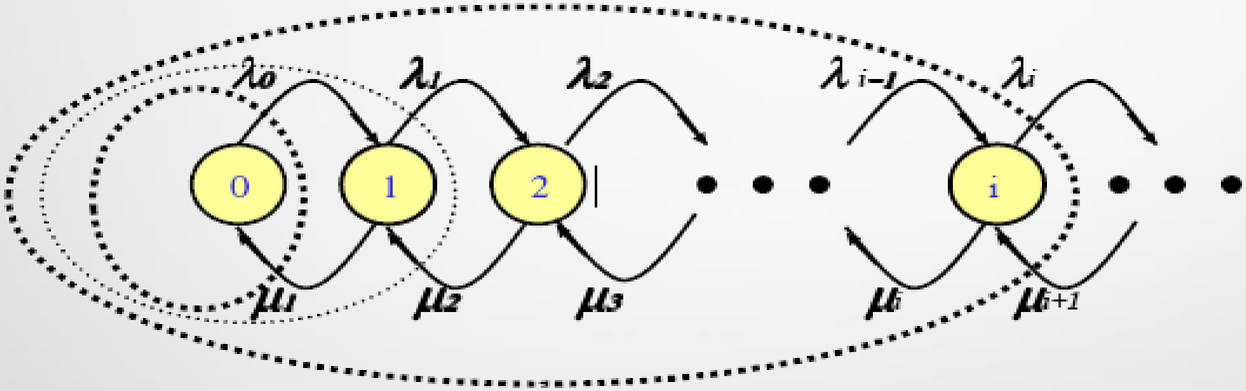
Primjer 1

U pitanju je M/M/1 red čekanja.

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- Jedan server
- Beskonačna širina liste čekanja
- Beskonačan broj izvora saobraćaja

Primjer 1

U opštem slučaju dijagram stanja za proces rađanja i umiranja je



Iz balansnih jednačina za svaki presjek:

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

Primjer 1

$$\lambda_1 P_1 = \mu_2 P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$\ldots$

$$\lambda_{i-1} P_{i-1} = \mu_i P_i \Rightarrow P_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_{i-1} = P_0 \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}, \forall i \geq 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i}{P_0} = 1 \Rightarrow P_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\right) = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}}$$

Primjer 1

$$\lambda_i = \lambda,$$

$$\mu_i = \mu,$$

pa slijedi:

$$P_i = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i = P_0 \rho^i$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i} = 1 - \rho$$

$$P_i = (1 - \rho) \rho^i, \qquad i \geq 0$$

Primjer 1

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^i z^i = \frac{1-\rho}{1-z\rho}$$

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\rho)\rho^i z^i = \frac{dP(z)}{dz}\bigg|_{z=1} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(1-\rho)\rho^i = \mu(1-P_0)$$

Primjer 1

$$\lambda = 2000\, paketa / s,$$

$$\mu = 2.048 Mb / s = 2048\, paketa / s$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.9765$$

pa slijedi:

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} = 41.55$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{48} s$$

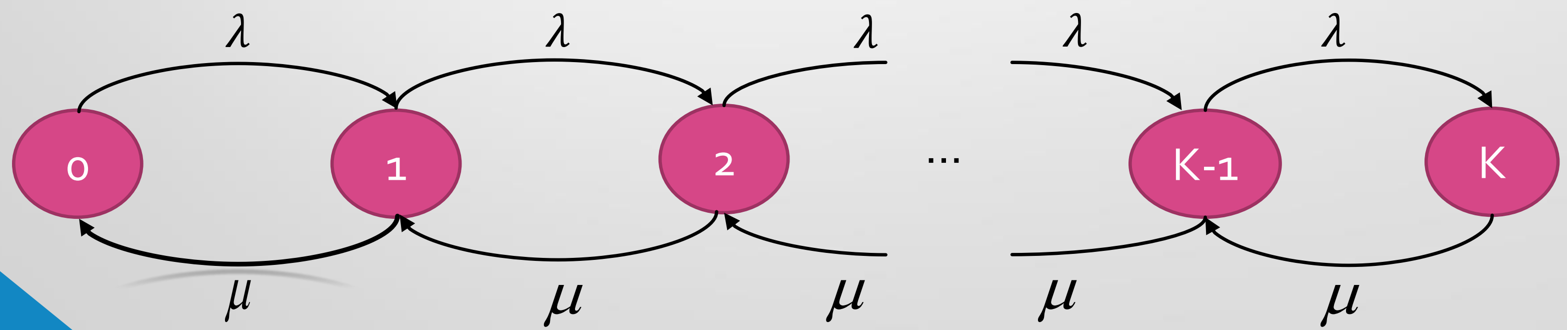
Primjer 2

Primijeniti model M/M/1/K na multiplekser govornih poruka. Poruke veličine 1000b se prenose preko E1 linije kapaciteta 2.048Mb/s. Dok čekaju prenos poruke se smještaju u bafer kapaciteta 10^6 bita. Izračunati vjerovatnoću gubitka poruka u funkciji brzine dolaska poziva.

Primjer 2

Za M/M/1/K red čekanja

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- Jedan server
- K-1 mjesta u redu čekanja
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



Primjer 2

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

Iz balansnih jednačina za svaki presjek:

$$P_i = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i = P_0 \rho^i$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{K} \rho^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K} \rho^i} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$$

Primjer 2

$$P_B \equiv P_K = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^K$$

$$\mu = 2048\, p/s, K = 10^3 + 1, \rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

Vjerovatnoća blokiranja je:

$$P_b = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^K = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K$$

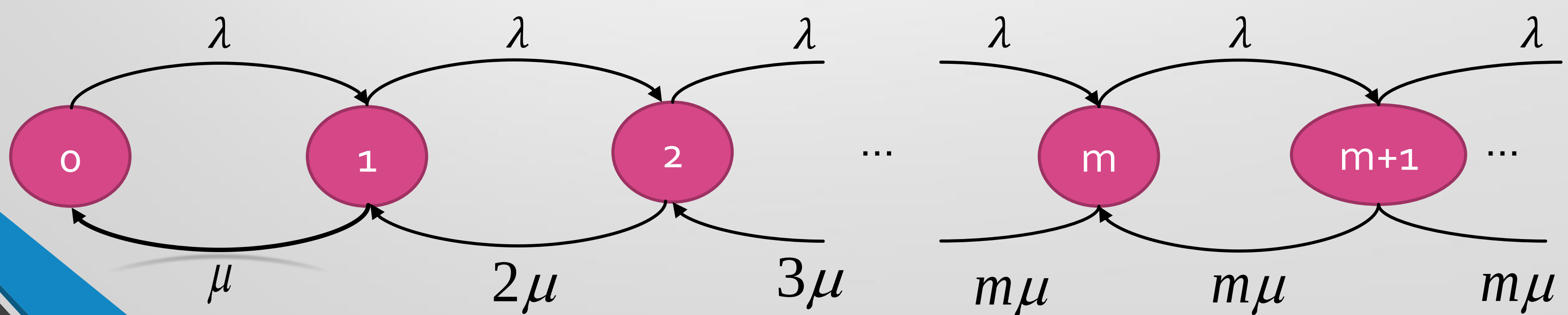
Primjer 3

Pretpostavimo da je na raspolaganju linija koja omogućava brzinu prenosa od 40kb/s. Ova linija se može koristiti na dva načina: kao vremenski multipleks od četiri 10kb/s kanala ili linija od 40kb/s bez multipleksa. Pretpostavimo da poruke dolaze Poasonovom brzinom i da imaju eksponencijalnu raspodjelu. Prvi slučaj se može aproksimirati sistemom M/M/4, a drugi M/M/1. Za srednju dolaznu brzinu od 30 Kb/s odrediti srednje kašnjenje.

Primjer 3

Za M/M/m red čekanja

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- *m* servera
- Beskonačan broj mjesta u redu čekanja
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



Primjer 3

$$\lambda P_o = \mu P_1 \;\Rightarrow\; P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_o = A P_o$$

$$\lambda P_1 = 2\mu P_2 \;\Rightarrow\; P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{A^2}{2} P_o$$

$$\ldots$$

$$\lambda P_{m-1} = m\mu P_m \;\Rightarrow\; P_m = \frac{\lambda}{m\mu} P_{m-1} = \frac{A^m}{m!} P_o$$

$$\lambda P_m = m\mu P_{m+1} \;\Rightarrow\; P_{m+1} = \frac{\lambda}{m\mu} P_m = \frac{A^{m+1}}{m \cdot m!} P_o$$

$$\ldots$$

$$P_o = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \sum_{i=m}^{\infty} \frac{A^i}{m!m^{i-m}}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{mA^m}{m!(m-A)}}$$

Primjer 3

$$m = 4$$

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = 3$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4 \cdot 3^4}{4!(4-3)}} = 0.037$$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k = P_0 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(zA)^k}{k!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(zA)^k}{m! m^{k-m}} \right)$$

$$P(z) = 0.037 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(zA)^k}{k!} + \frac{m(zA)^m}{m!(m - zA)} \right)$$

Primjer 3

$$P(z)=\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(zA)^k}{k!}+\frac{m(zA)^m}{m!(m-zA)}\right)0.037$$

$$\frac{d}{dz}P(z)=\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A^k}{k!}kz^{k-1}+\frac{A^m}{(m-1)!}\left(\frac{mz^{m-1}}{(m-zA)}+\frac{z^mA}{(m-zA)^2}\right)\right)0.037$$

$$N=\frac{d}{dz}P(z=1)=\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A^k}{k!}k+\frac{A^m}{(m-1)!}\left(\frac{m}{(m-A)}+\frac{A}{(m-A)^2}\right)\right)0.037$$

$$N=\frac{d}{dz}P(z=1)=\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A^k}{k!}k+\frac{A^m}{(m-1)!}\frac{m^2-mA+A}{(m-A)^2}\right)0.037$$

Primjer 3

$$T=\frac{N}{\lambda},\ \mu=10Kb/s,\ \lambda=30Kb/s, A=3, m=4$$

$$T=\frac{\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A^K}{k!}k+\frac{A^m}{(m-1)!}\frac{m^2-mA+A}{(m-A)^2}\right)0.037}{\lambda}$$

$$T=\frac{0.037}{30\cdot10^3}\left(3+\frac{3^2}{2!}2+\frac{3^3}{3!}3+\frac{3^4}{(4-1)!}\frac{4^2-4\cdot3+3}{(4-3)^2}\right)$$

$$T=\frac{0.037}{30\cdot10^3}57=0.07ms$$

Primjer 3

Za M/M/1 red čekanja:

$$\mu = 40Kb/s,\ \lambda = 30Kb/s,$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{10 \cdot 10^3} = 0.1ms$$

Primjer 4

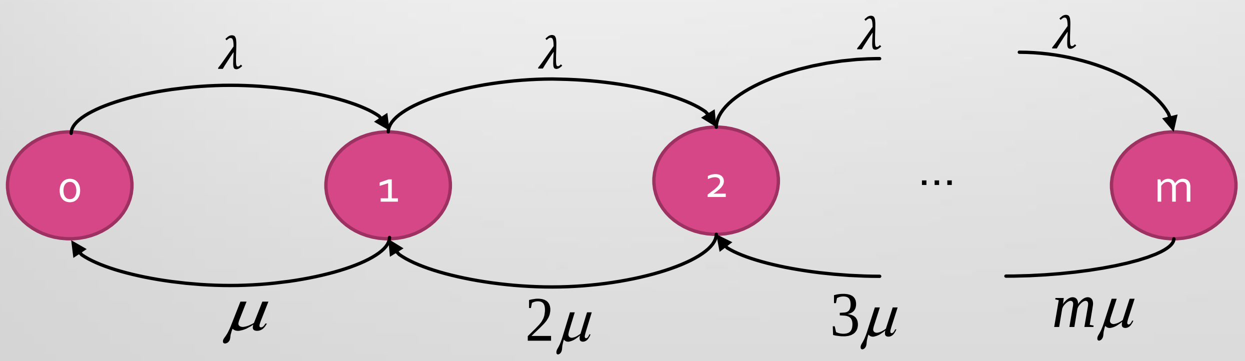
Poruke konstantne veličine od 1000 bita stižu na multiplekser koji ima 16 izlaza, od kojih svaki funkcioniše brzinom 50kb/s. Pretpostaviti da poruke dolaze prosječnom brzinom od 1440000 poruka tokom ČNO. Nema prostora za baferovanje, tako da ako se poruka odmah ne posluži biva izgubljena. Izračunati vjerovatnoću blokiranja.

.

Primjer 4

Za M/M/m/o red čekanja

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- m servera
- Nema prostora za baferovanje
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



Primjer 4

$$P_i = \frac{A^i}{i!} P_o$$

$$P_o = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \frac{A^i}{i!}}$$

$$P_B = P_m = \frac{A^m}{m! \sum_{i=0}^{m} \frac{A^i}{i!}}$$

Primjer 4

$$L = 1000b$$

$$S = 16$$

$$\mu = 50Kb/s$$

$$\lambda = 1440000\,poruka/h = 400Kb/s$$

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = 8$$

$$P_b = P_s = \frac{A^m}{m!\sum_{i=0}^{m}\frac{A^i}{i!}} = \frac{8^{16}}{16!\sum_{i=0}^{16}\frac{8^i}{i!}} = \frac{13.45}{\sum_{i=0}^{16}\frac{8^i}{i!}} = 0.0045 = 0.45\%$$

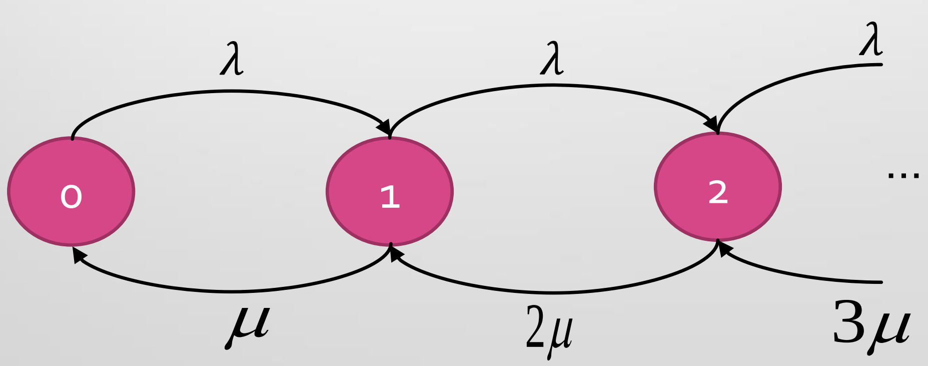
Primjer 5

Poruke konstantne veličine stižu na multiplekser koji ima *N* izlaza, od kojih svaki funkcioniše brzinom 50kb/s. Koliko iznosi srednje kasnjenje? Može se smatrati da je *N* veoma veliko.

Primjer 5

Za $M/M/\infty$ red čekanja

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- Beskonačan broj servera
- Beskonačno mjesta u baferu
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



Primjer 5

$$P_i = \frac{A^i}{i!} P_o$$

$$P_o = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}}$$

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i A^i}{i!} e^{-A} = e^{-A} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(zA)^i}{i!} = e^{-A} e^{zA} = e^{A(z-1)}$$

Primjer 5

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{A^i}{i!} e^{-A} = \frac{dP(z)}{dz} |_{z=1} = Ae^{A(z-1)} |_{z=1} = A$$

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

$$T = 1/50Kb/s = 0.02ms$$