

Uvodne napomene

U telekomunikacionim sistemima se može govoriti o dvije grupe signala:

- Deterministički – vrijednosti u vremenu su opisane preciznim analitičkim izrazom. Primjeri su signali sinusnog oblika i povorke pravougaonih impulsa. Sam deterministički signal ne nosi poruku već samo informaciju o načinu na koji se mijenja. Deterministički signali se mogu podjeliti na periodične (ponavljaju se nakon određenog vremena odnosno periode ponavljanja) i aperiodične.
- Slučajni – nije moguće definisati odgovarajući izraz kojim bi se opisao njihov vremenski tok, odnosno vrijednosti ne mogu biti poznate prije nego se signal generiše. Svi telekomunikacioni signali koji nose informaciju su slučajni signali. Na primjer, oblik i amplituda govornog signala su slučajne veličine.

Kako se deterministički signali mogu definisati matematičkim izrazima, onda se koriste kao pomoći signali za prenos korisnih slučajnih signala.

Signali u telekomunikacionim sistemima se mogu posmatrati u dva oblika – vremenskom i frekvencijskom (svaki signal koji se može opisati funkcijom koja zavisi od vremena se može predstaviti i u funkciji frekvencije). Kako za utvrđivanje vjerodostojnosti prenesenog signala treba da poznajemo njegove karakteristike, vrlo često se dešava da vremenski oblik signala ne pomaže puno pri preciznom određivanju izobličenja pri prenosu, te se pokazalo da je tu analizu jednostavnije odraditi u domenu učestanosti (frekvencijskom domenu).

Osnovna uloga harmonijske analize jeste da se vremenska funkcija koja opisuje signal predstavi u domenu učestanosti pomoći pogodno odabranih parametara, kako bi se omogućilo matematičko praćenje prenosa signala u telekomunikacionom sistemu. Harmonijska analiza se zasniva na teoriji Furijeovih redova (primjena kod periodičnih signala) i Furijeove transformacije (primjena kod aperiodičnih signala).

Sabiranjem dovoljnog broja sinusoida određene amplitude i učestanosti može se formirati bilo koji periodični signal. Broj komponenti (harmonika) kojima se opisuje složeni signal može biti konačan ili beskonačan, pri čemu, za signale sa beskonačnim brojem harmonika uzimanjem većeg broja tačnije prikazuje složeni signal.

Periodična funkcija $f(t)$ sa periodom ponavljanja T se prema tome može predstaviti u kompleksnom i trigonometrijskom obliku, što je predstavljeno respektivno:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2|F_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (1),$$

gdje je F_n kompleksni spektar signala $f(t)$ i može se predstaviti kao

$$F_n = |F_n| e^{j\theta_n} \quad (2),$$

gdje su $|F_n|$ i θ_n , moduo i faza, respektivno, odnosno amplitudski i fazni spektar, respektivno, dok je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ osnovna kružna učestanost.

Kompleksni spektar F_n se određuje kao:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3)$$

Zadaci

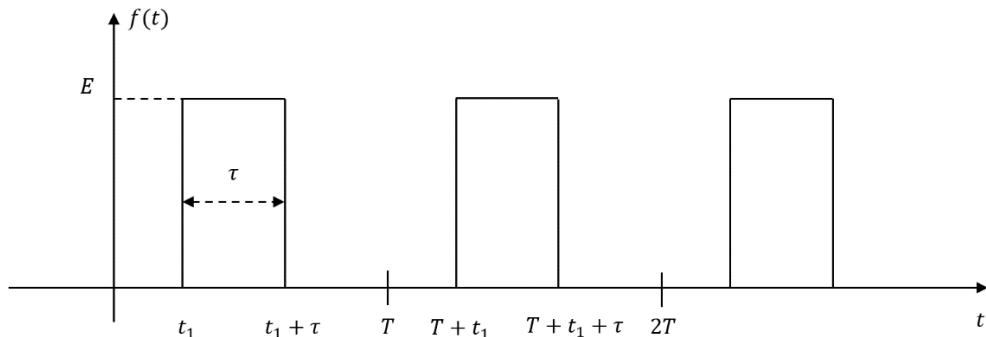
- Pronaći amplitudski i fazni spektar periodičnog signala $f(t)$ prikazanog na slici 1.1, koji je u intervalu jedne periode T definisan na sledeći način:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_1 \\ E, & t_1 < t < t_1 + \tau \\ 0, & t_1 + \tau < t < T \end{cases}$$

Grafički predstaviti amplitudski i fazni spektar ovog signala za slučaj da je $\tau = \frac{T}{4}$, a trenutak početka impulsa $t_1 = 0$.

Rješenje:

Signal $f(t)$ je periodičan i grafički se može predstaviti kao:



Slika 1.1

Na osnovu (3), kompleksni spektar signala ćemo odrediti na sledeći način:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-t_1}^{t_1+\tau} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{E}{T} \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{t_1}^{t_1+\tau} = \\ &= \frac{E}{-jn\omega_0 T} (e^{-jn\omega_0(t_1+\tau)} - e^{-jn\omega_0 t_1}) = \\ &= \frac{E}{jn\omega_0 T} e^{-jn\omega_0 t_1} (1 - e^{-jn\omega_0 \tau}) \quad (4) \end{aligned}$$

Kako važi da je:

$$\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin x,$$

(4) možemo dalje pisati kao:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{E}{jn\omega_0 T} e^{-jn\omega_0 t_1} \left(\frac{e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}}{e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}} - e^{-jn\omega_0 (\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2})} \right) = \frac{E}{jn\omega_0 T} e^{-jn\omega_0 (t_1 + \tau)} \left(e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right) = \\ &= \frac{2E}{n\omega_0 T} e^{-jn\omega_0 (t_1 + \tau)} \frac{e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}}{2j} = \frac{2E}{n\omega_0 T} e^{-jn\omega_0 (t_1 + \tau)} \sin \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right) = \\ &= \frac{2E}{n\omega_0 T} \sin \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right) e^{-jn\omega_0 (t_1 + \tau)} = \frac{E\tau}{T} \frac{\sin \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right)}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega_0 (t_1 + \tau)} \end{aligned} \quad (5)$$

Komentar: napisaćemo izraz u obliku $\frac{\sin x}{x}$ jer će nam to kasnije biti jednostavnije za grafičko predstavljanje.

Na osnovu (2) i (5) možemo zaključiti da se amplitudski i fazni spektar mogu predstaviti kao:

$$|F_n| = \frac{E\tau}{T} \left| \frac{\sin \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right)}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right| \quad (6)$$

$$\theta_n = -n\omega_0(t_1 + \tau) \quad (7),$$

respektivno, gdje je $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\dots$

Izrazu za fazni spektar θ_n potrebno je dodati $\Delta\theta_n$ tamo gdje funkcija mijenja znak, tj.

$$\Delta\theta_n = \begin{cases} 0, & \frac{\sin \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right)}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} > 0 \\ \pm\pi, & \frac{\sin \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right)}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} < 0 \end{cases}$$

Prema tome, izraz za fazni spektar je:

$$\theta_n = -n\omega_0(t_1 + \tau) + \Delta\theta_n \quad (8).$$

Grafičko predstavljanje amplitudskog i faznog spektra

Kompleksni spektri periodičnih signala su uvijek diskretni (linijski), a samo predstavljanje se može odraditi i za pozitivne i negativne učestanosti ili samo za pozitivne učestanosti, pri čemu u tom slučaju važi da je amplituda odgovarajućeg harmonika 2 puta veća. Za dvostrani amplitudski spektar (predstavljanje amplituda za pozitivne i negativne učestanosti) važi da je spektar simetrično paran u odnosu na ordinatu i da konfigurišu samo nenegativne vrijednosti amplituda, dok je fazni spektar simetrično neparan u odnosu na ordinatu.

Amplitudski (i fazni) spektar u ovom slučaju je moguće nacrtati na dva načina. Prvi način podrazumijeva računanje amplituda (faza) pojedinačnih harmonika i njihovo grafičko predstavljanje, dok se za drugi način prvo crta anvelopa koja se dobija uvođenjem kontinualne promjenljive, a zatim se crtaju i amplitude pojedinačnih harmonika. Uvezši u obzir da je za povorku pravougaonih impulsa spektar beskonačan i da bi čak i za skiciranje spektra trebalo izračunati veći broj harmonika, za sagledavanje oblika spektra biće prikazano crtanje pomoću envelope (u nastavku će svakako biti predstavljene brojne vrijednosti nekoliko prvih harmonika). Ovdje dodatno treba napomenuti da amplituda za $n=0$ ne predstavlja harmonik već je u pitanju srednja vrijednost (detaljnije u zadatku 2).

$$|F_{n=0}| = \frac{E\tau}{T} \left| \frac{\sin(0 * \omega_0 \frac{\tau}{2})}{0 * \omega_0 \frac{\tau}{2}} \right| = \frac{E}{T} \frac{T}{4} * 1 = \frac{E}{4} = 0.25 E$$

$$|F_{n=1}| = \frac{E\tau}{T} \left| \frac{\sin(1 * \omega_0 \frac{\tau}{2})}{1 * \omega_0 \frac{\tau}{2}} \right| = \frac{E}{4} \left| \frac{\sin(1 * \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2 * 4})}{1 * \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2 * 4}} \right| = \frac{E}{4} \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}} \right| \approx 0.225 E$$

$$|F_{n=2}| \approx 0.159 E$$

$$|F_{n=3}| \approx 0.075 E$$

$$|F_{n=4}| = 0$$

$$|F_{n=5}| \approx 0.045 E$$

Ukoliko diskretnu promjenljivu $n\omega_0$ iz izraza (6) zamijenimo sa kontinualnom promjenljivom ω , dobijamo anvelopu amplitudskog spektra:

$$\alpha(\omega) = \frac{E\tau}{T} \left| \frac{\sin(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}} \right|$$

Maksimalna vrijednost anvelope je na učestanosti $\omega = 0$ i iznosi $F_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha(\omega) = 0.25 E$.

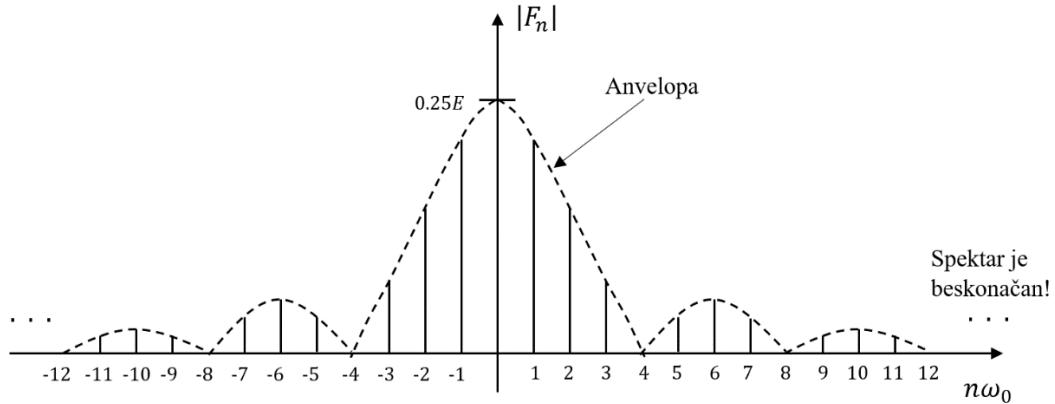
Kako je funkcija zapisana u obliku $\frac{\sin x}{x}$, jasno je da će anvelopa imati presjeke sa apcisom kada je $\sin x = 0$, što je za svako $x = k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Prema tome, $\alpha(\omega) = 0$ za $\omega \frac{\tau}{2} = k\pi$, odnosno za $\omega = \frac{2k\pi}{\tau}$.

Dodatno, potrebno je odrediti i gdje se nalazi ω_0 u odnosu na $\frac{2\pi}{\tau}$, odnosno na prvi presjek anvelope sa apcisom:

$$\omega_{k=1} = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{T} = 4 \frac{2\pi}{4} = 4\omega_0$$

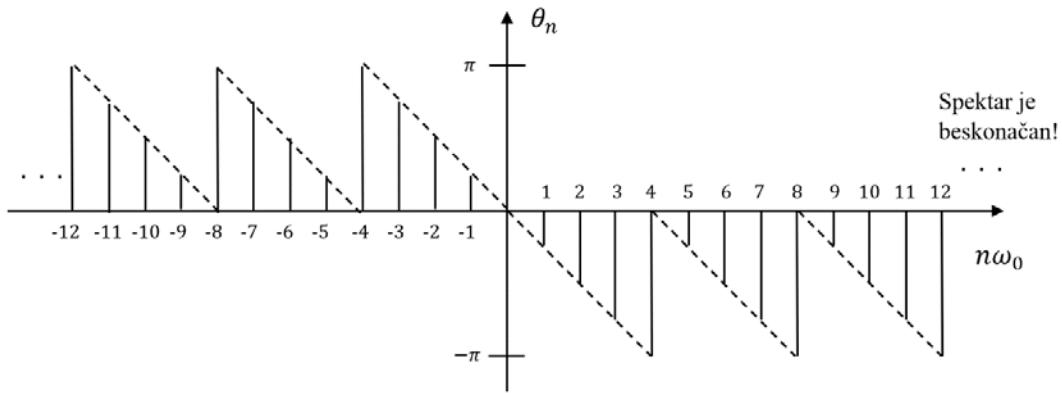
Ovo znači da će vrijednost svakog četvrtog harmonika biti jednaka 0, ali i da u okviru jedne "latice" anvelope imamo po 4 harmonika (pri čemu je amplituda četvrtog jednaka 0) na ekvidistantnim rastojanjima od ω_0 .

Amplitudski spektar je prikazan na slici 1.2.



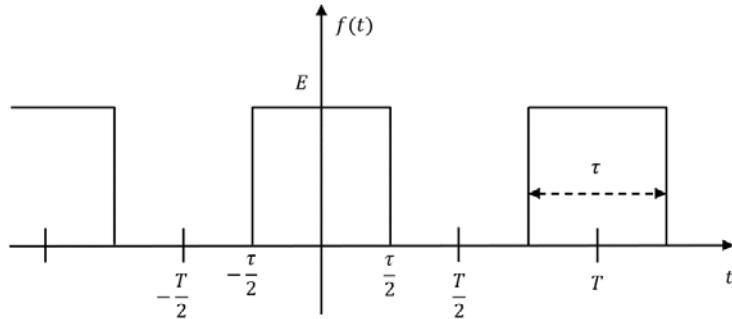
Slika 1.2

U skladu sa (8), grafički prikaz faznog spektra je na slici 1.3. Slično kao kod amplitudskop spektra, moguće je preći na kontinualnu promjenljivu kao pomoćnu funkciju prilikom crtanja spektra.

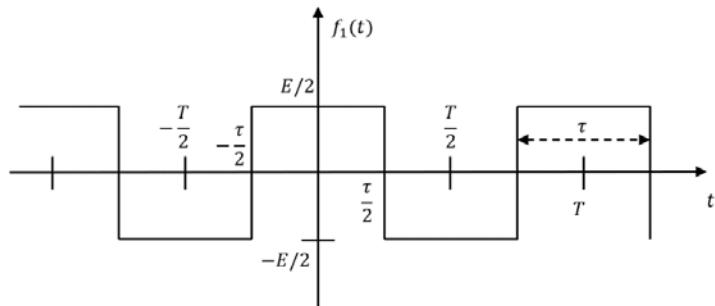


Slika 1.3

2. Pronaći amplitudski i fazni spektar periodičnog signala $f(t)$ prikazanog na slici 2.1, a zatim odrediti amplitudski i fazni spektra signala $f_1(t)$ prikazanog na slici 2.2.



Slika 2.1



Slika 2.2

Rješenje:Kompleksni spektar F_n signala $f(t)$ ćemo naći na sledeći način:

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{E}{T} \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\
 &= \frac{E}{-jn\omega_0 T} \left(e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right) = \dots = \frac{E\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0 \frac{\tau}{2})}{(n\omega_0 \frac{\tau}{2})} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Ako uvrstimo $\tau = \frac{T}{2}$ (što se može zaključiti sa slike 2.1) i $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, amplitudski spektar signala $f(t)$ se može zapisati kao:

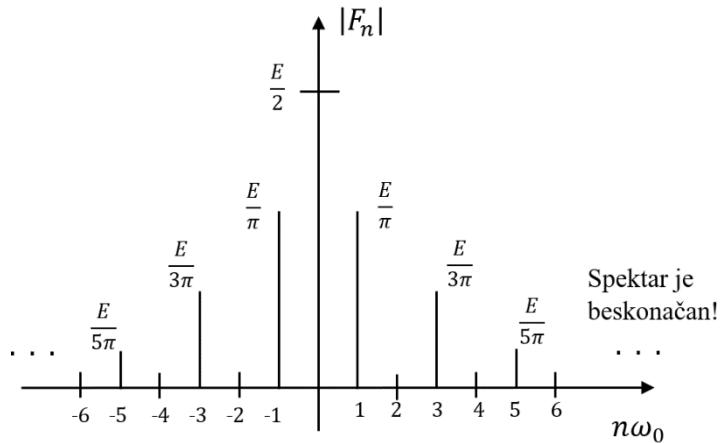
$$|F_n| = \frac{E}{2} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} \right| \quad (10)$$

Kako je $\left| \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right| = 1$ za $n = \pm 1, \pm 3, \dots$ a $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ za $n = \pm 2, \pm 4, \dots$, jasno je da će amplitudski spektar imati presjeke sa apcisom (odnosno da će vrijednost amplitude biti jednaka nuli) za $n = \pm 2, \pm 4, \dots$, tj. za svaki drugi harmonik.

Izraz za amplitudski spektar možemo napisati i u obliku:

$$|F_n| = \begin{cases} \frac{E}{2}, & n = 0 \\ \frac{E}{|n|\pi}, & n = \pm 1, \pm 3, \dots \\ 0, & n = \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases}$$

Amplitudski spektar signala $f(t)$ prikazan je na slici 2.3, pri čemu nije skicirana anvelopa jer je signal pogodno bilo predstaviti u obliku koji je dat izrazom iznad, ali po potrebi bi anvelopa bila skicirana na isti način kako je to odrađeno u prvom zadatku.



Slika 2.3

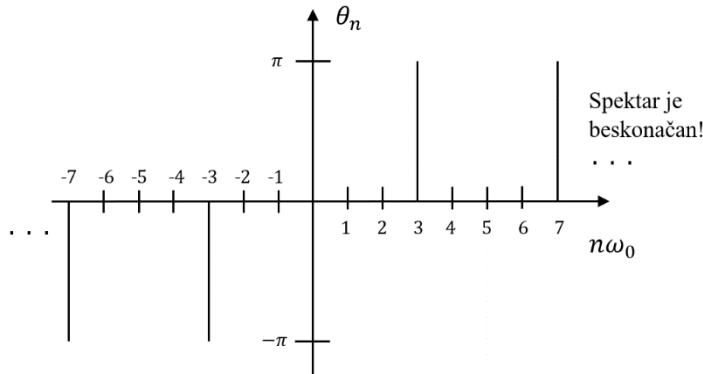
Kada je u pitanju fazni spektar, iz izraza (9) vidimo da "nema" argumenta kompleksnog spektra, tj. tačnije, on ima zapis $e^{j\theta}$. Slično kao u prvom zadatku, i ovdje je potrebno dodati $\Delta\theta_n$ tamo gdje funkcija mijenja znak, te će fazni spektar u krajnjem biti jednak:

$$\theta_n = 0 + \Delta\theta_n,$$

gdje je $\Delta\theta_n$ definisano isto kao i u prvom zadatku, odnosno:

$$\Delta\theta_n = \begin{cases} 0, & \frac{\sin(n\omega_0 \frac{\tau}{2})}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} > 0 \\ \pm\pi, & \frac{\sin(n\omega_0 \frac{\tau}{2})}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} < 0 \end{cases}$$

U skladu sa tim, fazni spektar signala $f(t)$ grafički je predstavljen na slici 2.4.



Slika 2.4

U drugom dijelu zadatka je potrebno odrediti amplitudski i fazni spektar signala $f_1(t)$ prikazanog na slici 2.2. Poređenjem signala signala $f(t)$ i $f_1(t)$, možemo zaključiti da je signal $f_1(t)$ samo pomjeren za $-\frac{E}{2}$ po ordinati u odnosu na signal $f(t)$, odnosno da se on može zapisati u obliku:

$$f_1(t) = f(t) - \frac{E}{2} \quad (11)$$

Bitno je da uočimo na šta utiče ovo pomjeranje. Ukoliko ovaj periodični signal zapišemo u trigonometrijskom obliku u skladu sa teorijom Furijeovih redova, dobijamo:

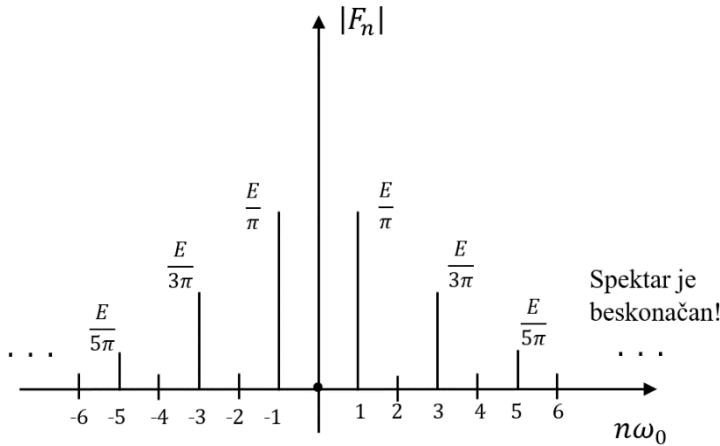
$$f_1(t) = \left(F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2|F_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \right) - \frac{E}{2},$$

odnosno, uočavamo da će ovo pomjeranje uticati samo na F_0 , odnosno kako je $F_0 = \frac{E}{2}$, kada se dodatno oduzme $\frac{E}{2}$ dobićemo vrijednost amplitude 0. U prvom zadatku je već navedeno da ova komponenta nije harmonik, već da je u pitanju srednja vrijednost ili jednosmjerna komponenta ovog signala. Sa slike 2.2 se jasno vidi da je srednja vrijednost signala $f_1(t)$ jednaka nuli, ali se ona za periodičan signal $g(t)$ u opštem slučaju računa prema formuli:

$$F_{sr} = F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \quad (12)$$

Izraz za amplitudski spektar signala $f_1(t)$ je dat ispod, a amplitudski spektar je grafički prikazan na slici 2.4.

$$|F_n| = \begin{cases} \frac{E}{|n|\pi}, & n = \pm 1, \pm 3, \dots \\ 0, & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases}$$

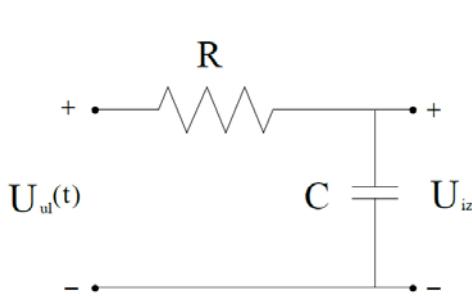


Slika 2.5

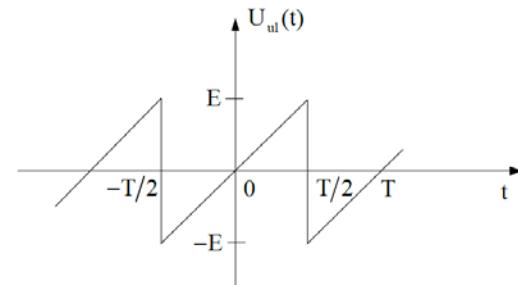
Kada je u pitanju fazni spektar, na osnovu izraza (8) dobijenog u prvom zadatku, vidimo da on zavisi od trenutka početka impulsa i trajanja impulsa. Kako se signal $f_1(t)$ u ovom zadatku nije pomjerao po apcisi odnosno nije se mijenjao početak impulsa, a nije se mijenjalo ni trajanje impulsa, možemo zaključiti da će fazni spektri signala $f(t)$ i $f_1(t)$ iz ovog zadatka biti isti.

Zaključak: Pomjeranje signala po ordinati (y osi) utiče samo na amplitudski spektar u odnosu na "nepomjereni" signal, dok pomjeranje signala po apcisi (x osi) utiče samo na fazni spektar.

3. Na ulaz kola prikazanog na slici 3.1 dovodi se signal prikazan na slici 3.2.
 - a) Pronaći amplitudski i spektar snage ulaznog signala.
 - b) Ako je $\frac{1}{RC} = \omega_0$, gdje je ω_0 osnovna kružna učestanost ulaznog signala, odrediti amplitudski i spektar snage izlaznog signala.
 - c) Kako treba odrediti elemente kola R i C, pa da snaga trećeg harmonika izlaznog signala ne prelazi 1% srednje snage ulaznog signala?



Slika 3.1



Slika 3.2

Rješenje:

- a) Amplitudski spektar i spektar snage ulaznog signala

Funkciju $U_{ul}(t)$ možemo zapisati u obliku $U_{ul}(t) = f(t) = \frac{2E}{T}t$ na intervalu od $-\frac{T}{2}$ do $\frac{T}{2}$. Tada ćemo amplitudski spektar naći na sledeći način:

$$U_{uln} = F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2E}{T} t e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (13)$$

Ako se primjeni smjena $(\int u dv = uv - \int v du)$, gdje je $u = t \rightarrow du = dt$; $dv = e^{-jn\omega_0 t} dt \rightarrow v = \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t}$, izraz (13) postaje:

$$F_n = \frac{2E}{T^2} \left(\frac{t}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} dt \right) \quad (14)$$

Rješavanjem izraza (14) dobija se:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{2E}{T^2} \left[\frac{j}{n\omega_0} \frac{T}{2} \left(e^{-jn\omega_0 \frac{T}{2}} + e^{jn\omega_0 \frac{T}{2}} \right) + \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \left(e^{-jn\omega_0 \frac{T}{2}} - e^{jn\omega_0 \frac{T}{2}} \right) \right] \\ &= \frac{2E}{T^2} \left[\frac{j}{n\omega_0} \frac{T}{2} (e^{-jn\pi} + e^{jn\pi}) + \frac{1}{n^2 \omega_0^2} (e^{-jn\pi} - e^{jn\pi}) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Kako važi da je $e^{\pm jn\pi} = (-1)^n$ i da je $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ izraz (15) postaje:

$$F_n = \frac{E}{n\pi} (-1)^n e^{j\frac{\pi}{2}}$$

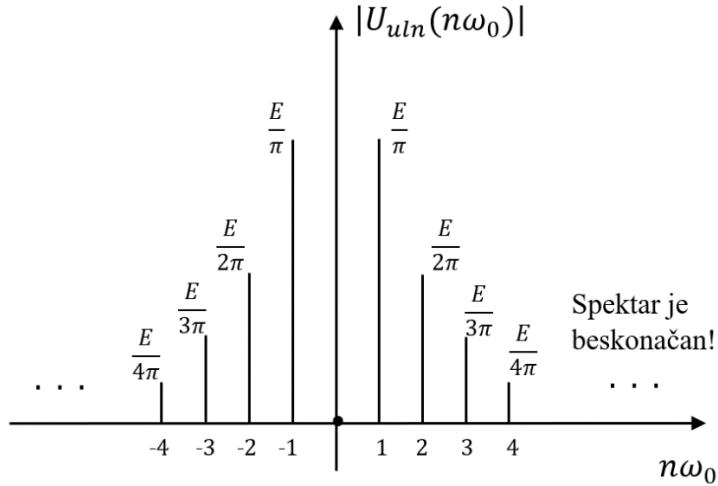
Amplitudski spektar je na osnovu toga:

$$|U_{uln}| = |F_n| = \left| \frac{E}{n\pi} \right| \quad (16)$$

Srednju vrijednost za amplitudski spektar ne možemo pročitati iz dobijene formule, ali kada se primjeni izraz (12), dobija se da je srednja vrijednost jednaka 0, odnosno:

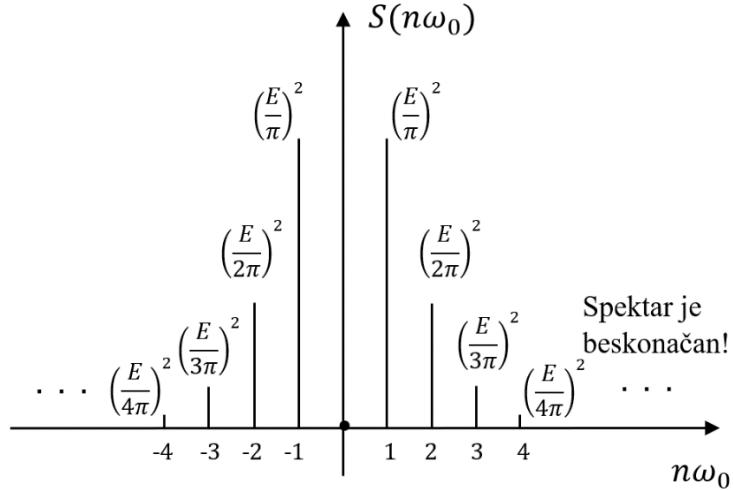
$$F_{sr} = F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2E}{T} t dt = 0 \quad (17)$$

Na osnovu (16) i (17), amplitudski spektar signala $U_{ul}(t)$ je prikazan na slici 3.3.



Slika 3.3

Osim amplitudskog, potrebno je naći i spektar snage (osim ako u zadatku nije drugačije naglašeno, misli se na dvostrani spektar). Na predavanjima je pokazano da je $|F_n|^2$ snaga n-tog harmonika na jedničnom otporniku i da se veličina $S_{11}(n\omega_0) = |F_n|^2$ naziva spektrom snage signala $f(t)$, te je prema tome traženi (dvostrani) spektar snage prikazan na slici 3.4.



Slika 3.4

- b) Ako je $\frac{1}{RC} = \omega_0$, gdje je ω_0 osnovna kružna učestanost ulaznog signala, odrediti amplitudski i spektar snage izlaznog signala.

Kako važi da je $|U_{izn}| = |H(j\omega)| |U_{uln}|$, gdje je $H(j\omega)$ prenosna funkcija (naponski djelitelj) koju možemo napisati u obliku:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Odnosno za diskretnu promjenljivu $n\omega_0$ imamo da je:

$$|H(jn\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (n\omega_0 RC)^2}}$$

Prema tome:

$$|U_{izn}| = |U_{uln}| |H(jn\omega_0)| = \frac{|U_{uln}|}{\sqrt{1 + n^2}} = \frac{\left|\frac{E}{n\pi}\right|}{\sqrt{1 + n^2}}$$

Odnosno:

$$|U_{izn}| = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{\left|\frac{E}{n\pi}\right|}{\sqrt{1 + n^2}}, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Na osnovu ovoga potrebno je nacrtati amplitudski i spektar snage!

- c) Kako treba odrediti elemente kola R i C, pa da snaga trećeg harmonika izlaznog signala ne prelazi 1% srednje snage ulaznog signala?

Treba odrediti R i C tako da važi: $P_{iz}(3\omega_0) \leq 0.01P_{ulsr}$ (18).

Srednja snaga ulaznog signala se može odrediti na sledeći način:

$$P_{ulsr} = \frac{1}{T} \int_0^T [U_{ul}(t)]^2 dt = \dots = \frac{E^2}{3} \quad (19)$$

Snaga trećeg harmonika izlaznog signala je:

$$P_{iz}(3\omega_0) = 2|U_{iz}|^2 = \frac{2E^2}{3^2\pi^2} \frac{1}{1 + (3\omega_0 RC)^2} \quad (20)$$

Kada se (19) i (20) uvrste u (18) i to se riješi dobija se:

$$RC \geq \frac{1}{3\omega_0} \sqrt{\frac{2}{0.3\pi^2} - 1}$$