

VRSTE AM SIGNALA I PRINCIPI IZGRADNJE MODULATORA

Produktom modulacijom se uvijek dobija amplitudski modulisani signal čiji se spektar sastoji iz nižeg i višeg bočnog opsega. Svaki od ovih bočnih opsega sadrži prenošenu poruku, pa je za prenos poruke potrebno i dovoljno prenijeti sve komponente iz samo jednog bočnog opsega. Međutim, postoje opravdani razlozi zašto se koriste modulacioni postupci za generisanje AM-2BO signala:

- čak i kada bi imali idealan produktni modulator koji na svom izlazu daje samo dva bočna opsega, postavlja se problem selekcije jednog od njih (pitanje filtra koji može uspješno da izdvoji jedan bočni opseg)
- ako je riječ o modulacionim postupcima koji pored ova dva bočna opsega daju i druge, nekorisne produkte, problem filtriranja željene komponente postaje još ozbiljniji
- veliki uticaj ima i pitanje demodulacije koja treba da predstavlja proces inverzan modulaciji. Pošto se modulacijom vrši transliranje spektra signala za učestanost nosioca ω_0 , demodulacijom se vrši translacija spektra modulisanog signala za $-\omega_0$. Za to je na prijemu potreban pomoćni signal identičan nosiocu, koji KAM signal obezbjeđuje.

Navedeni primjeri sadrže kontradiktorne argumente za izbor rješenja:

- prenos dva bočna opsega zahtijeva dva puta širi opseg učestanosti za prenos iste poruke;
- prenos jednog od njih dozvoljava bolje iskorišćenje raspoloživog opsega učestanosti, ali su potrebni posebni filtri i komplikovaniji uređaji;
- ako se prenosi i nosilac, demodulacija je lakša, ali se troši predajna snaga za prenos ove komponente i svi pojačavači moraju biti predviđeni za veću snagu.

Bira se ono rješenje koje u datim okolnostima predstavlja tehničko-ekonomski kompromis.

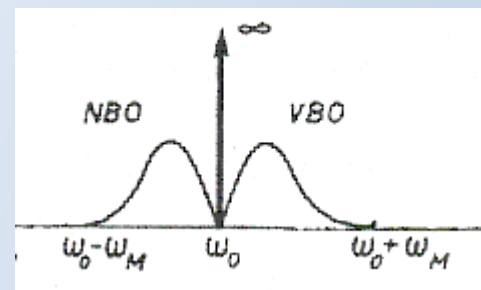
AM SIGNALI SA DVA BOČNA OPSEGA – AM-2BO

AM-2BO signal se može dobiti pomoću sklopova sa nelinearnom karakteristikom, pomoću prekidačkih sklopova i kola sa varijacijom parametara. Međutim, u tim slučajevima je problem izdvajanje dva bočna opsega koja se nalaze u okolini učestanosti nosioca od ostalih produkata modulacije, a naročito eliminisanje nosioca.

Balansni modulatori omogućavaju dobijanje AM-2BO signala koji ne sadrži nosilac.

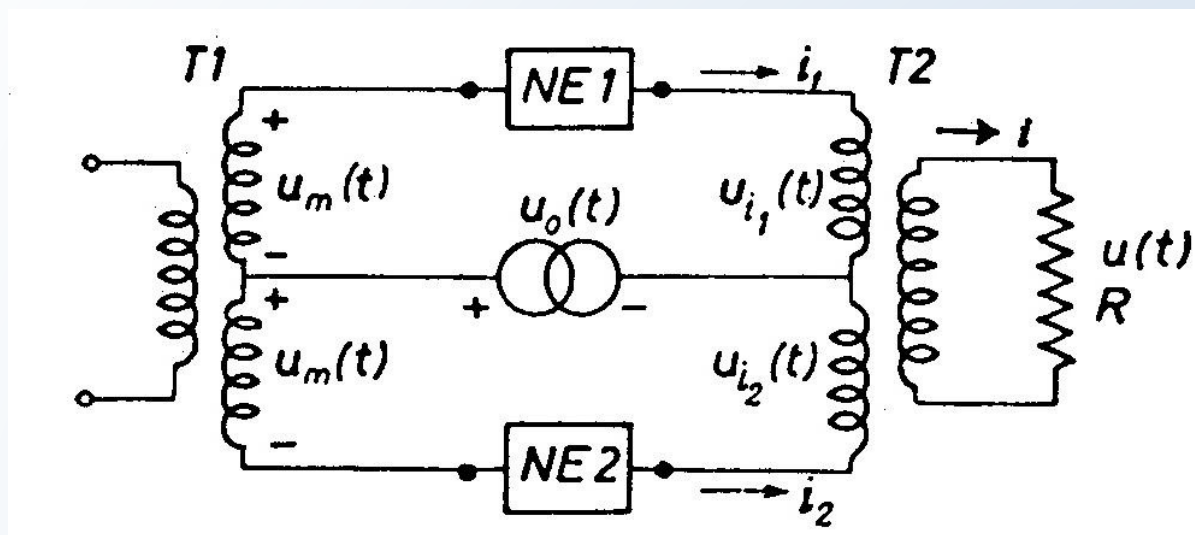
Dva tipa modulatora:

1. balansni nelinearni modulator
2. balansni prekidački modulator



1. BALANSNI NELINEARNI MODULATOR

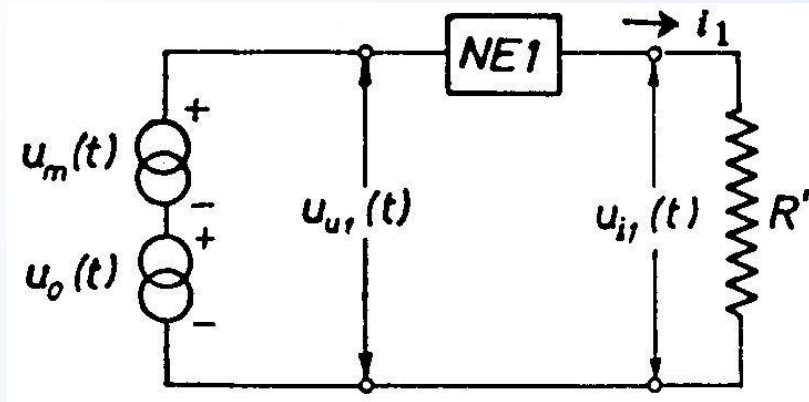
Ovaj modulator se realizuje pomoću dva nelinearna elementa označena sa NE1 i NE2, kao na slici. Pretpostavimo da je ova karakteristika kvadratna, jer članovi višeg reda od 2 ne doprinose dobijanju korisne komponente.



Slika: Šema nelinearnog balansnog modulatora

Transformatori T1 i T2 su takvi da ako je T1 odnosa 1:n, onda je T2 n:1. Na primarne krajeve transformatora T1 se vezuje izvor modulišućeg signala tako da je na svakoj polovini sekundara napon $u_m(t)$. Nelinearni elementi NE1 i NE2 moraju da imaju potpuno **identične** karakteristike.

a) Analiza gornje polovine šeme:
Njoj ekvivalentna šema je na slici.



Slika: Ekvivalentna šema gornjoj polovini šeme nelinearnog balansnog modulatora
 R' je otpornost ekvivalentnog otpornika.
Zavisnost izlaznog napona od ulaznog je:

$$u_{i1}(t) = a_0 + a_1 u_{u1}(t) + a_2 u_{u1}^2(t)$$

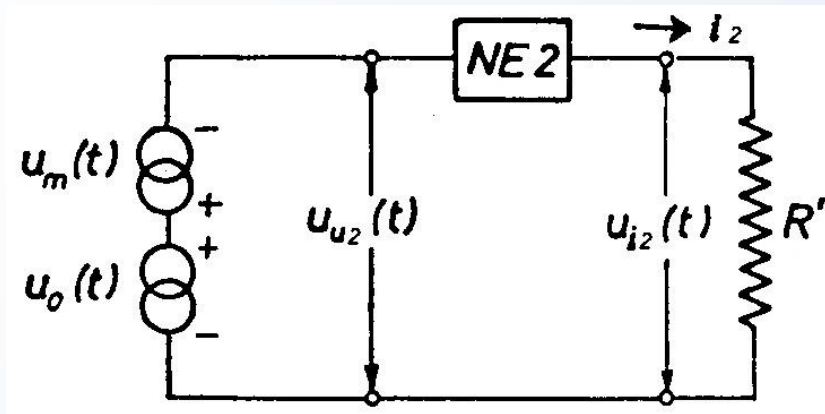
Kako je ulazni signal:

$$u_{u1}(t) = u_0(t) + u_m(t)$$

to će izlazni napon na krajevima ekvivalentnog otpornika R' biti:

$$u_{i1}(t) = a_0 + a_1 [u_0(t) + u_m(t)] + a_2 [u_0(t) + u_m(t)]^2$$

b) Slično je za donju polovinu šeme.



Slika: Ekvivalentna šema donjoj polovini šeme nelinearnog balansnog modulatora

U ovom slučaju ulazni napon će biti:

$$u_{u2}(t) = u_o(t) - u_m(t)$$

pa je napon na krajevima otpornika R' :

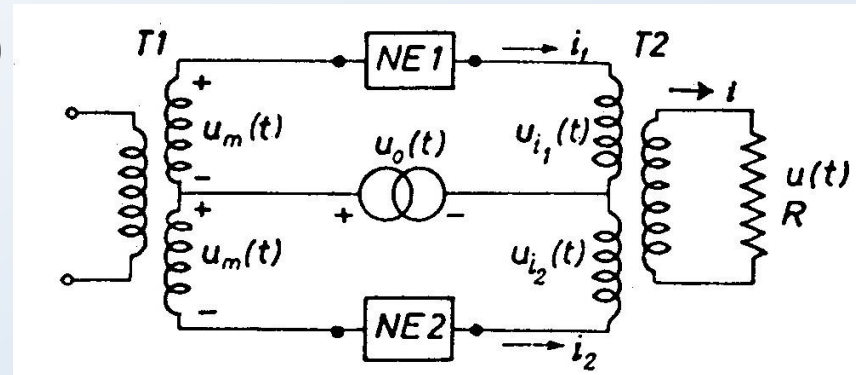
$$u_{i2}(t) = a_0 + a_1[u_o(t) - u_m(t)] + a_2[u_o(t) - u_m(t)]^2$$

Pretpostavljajući da je izlazni transformator T2 idealan, struja i u kolu sekundara biće proporcionalna razlici struja i_1-i_2 , odnosno napona $u_{i1}-u_{i2}$.

$$u_{i1}(t)-u_{i2}(t)=2a_1u_m(t)+4a_2u_m(t)u_0(t)$$

Napon $u_i(t)$ na krajevima potrošača R je:

$$u(t)=2ka_1u_m(t)+4ka_2U_0u_m(t)\cos\omega_0t$$



Na izlazu iz modulatora dobio se modulišući signal i drugi član koji predstavlja modulisani signal tipa AM-2BO, nosioca nema. Zahvaljujući simetriji gornje i donje polovine šeme i identičnosti karakteristika nelinearnih elemenata NE1 i NE2, fluksevi koji potiču od napona nosioca su u protivfazi, pa se poništavaju. Korisni produkt modulacije izdvaja se filtrom propusnikom opsega učestanosti. Da bi to bilo moguće, potrebno je da je maksimalna učestanost u spektru modulišućeg signala $u_m(t)$ i učestanost nosioca zadovoljavaju uslov:

$$\omega_0 - \omega_M \geq \omega_M, \text{ tj. } \omega_0 \geq 2\omega_M$$

2. BALANSNI PREKIDAČKI MODULATOR

Sastoji se od prekidačkih elemenata u izbalansiranim električnim šemama tako da se dobija signal sa dva bočna opsega bez nosioca.

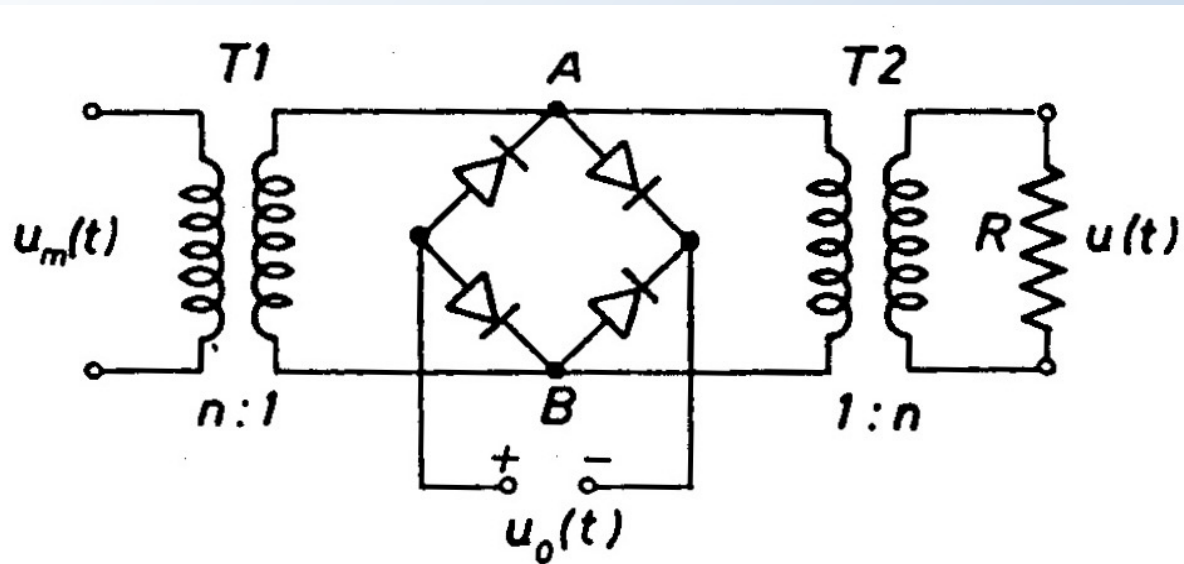
Postoji nekoliko različitih šema koje se realizuju preko transformatora i prekidačkih elemenata:

- balansni prekidački modulator paralelnog tipa
- balansni prekidački modulator rednog tipa
- kružni modulator

BALANSNI PREKIDAČKI MODULATOR PARALELNOG TIP

Pretpostavke:

- transformatori su komplementarni
- kao prekidački elementi koriste se poluprovodničke diode
- diode su međusobno identične i idealne (otpornost u propusnom smjeru je 0, u nepropusnom beskonačna)
- kao u slučaju prekidačkih sklopova $|u_m(t)|_{\max} \ll U_0$ (smatramo da približno važi da nosilac otvara i zatvara diode)

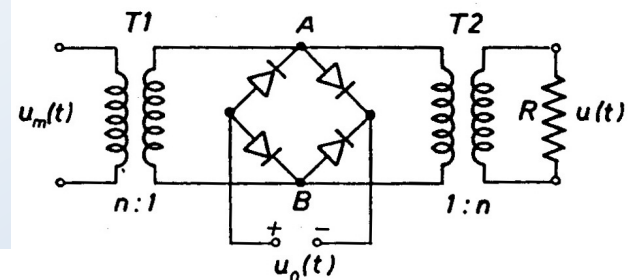


Slika: Balansni prekidački modulator paralelnog tipa

U pozitivnim poluperiodama nosioca, napon na krajevima primara izlaznog transformatora je nula, a u negativnim poluperiodama proporcionalan naponu $u_m(t)$. Izlazni napon je oblika:

$$u(t) = u_m(t)[1 - C(1,0)]$$

$C(1,0)$ je prekidačka funkcija. Sada je izlazni signal:



$$u(t) = u_m(t) \left(\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n\omega_0 t \right) = \frac{1}{2} u_m(t) - \frac{2}{\pi} u_m(t) \cos \omega_0 t +$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{2}{\pi} u_m(t) \cos 3\omega_0 t - \frac{1}{5} \frac{2}{\pi} u_m(t) \cos 5\omega_0 t + \dots +$$

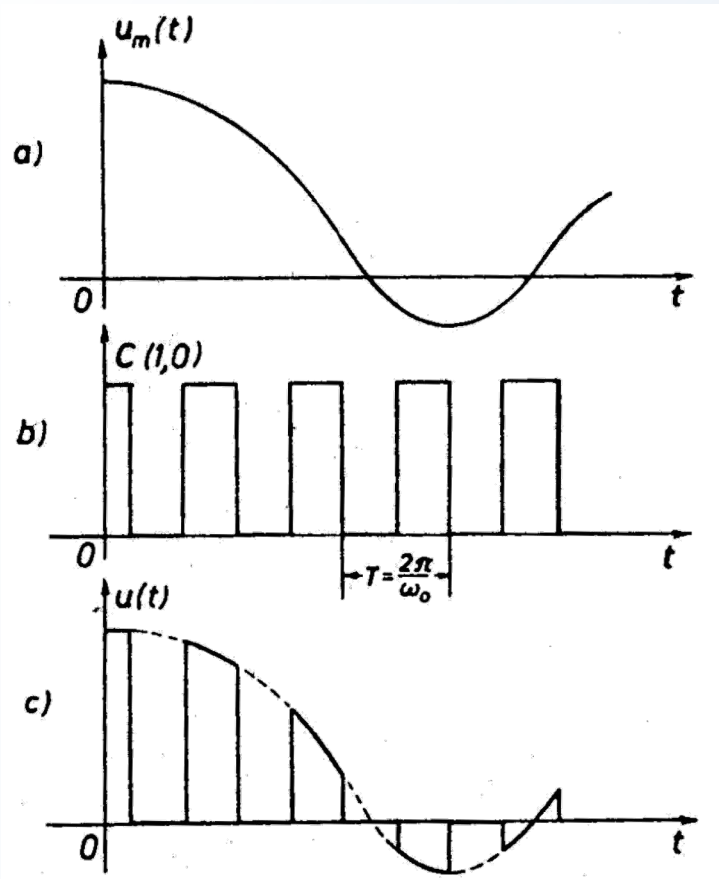
Prvi član izraza je modulišući signal, drugi član predstavlja amplitudski modulirani signal tipa AM-2BO. Na izlazu iz modulatora se ne pojavljuju ni nosilac, ni njegovi harmonici. Da bi se korisni član mogao izdvojiti filtrom, mora da bude zadovoljen uslov:

$$\omega_0 - \omega_M \geq \omega_M, \text{ tj. } \omega_0 \geq 2\omega_M$$

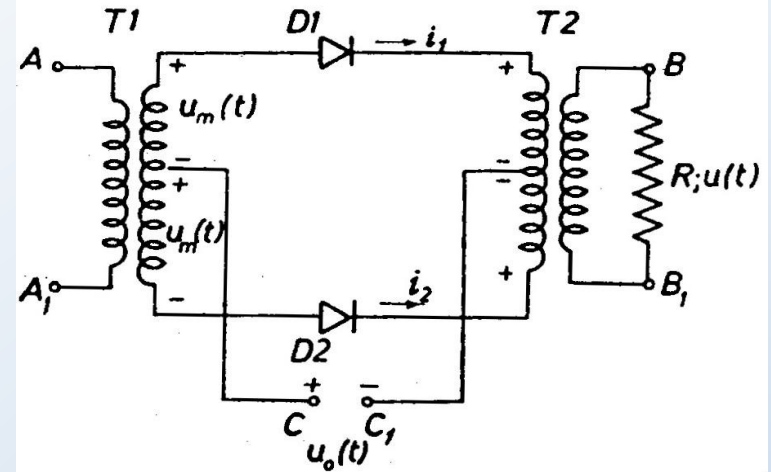
BALANSNI PREKIDAČKI MODULATOR REDNOG TIP

Pretpostavke:

- transformatori su komplementarni
- diode su identične i idealne
- $U_0 \gg |u_m(t)|_{\max}$



Slika: a) Modulišući signal, b) prekidačka funkcija, c) modulirani signal



Slika: Balansni prekidački modulator rednog tipa

Kad diode provode, kolo u kome je napon $u_m(t) + u_m(t) = 2u_m(t)$ biće zatvoreno i napon na otporniku R , u tom intervalu vremena, zavisice samo od $u_m(t)$ i biće mu direktno srazmjeran. Kad diode ne provode, napon $u(t)$ biće jednak nuli, jer je kolo prekinuto.

$$u(t) \propto u_m(t) C(1,0)$$

Korisni član se izdvaja filtrom, uz uslov:

$$\omega_0 - \omega_M \geq \omega_M, \text{ tj. } \omega_0 \geq 2\omega_M$$

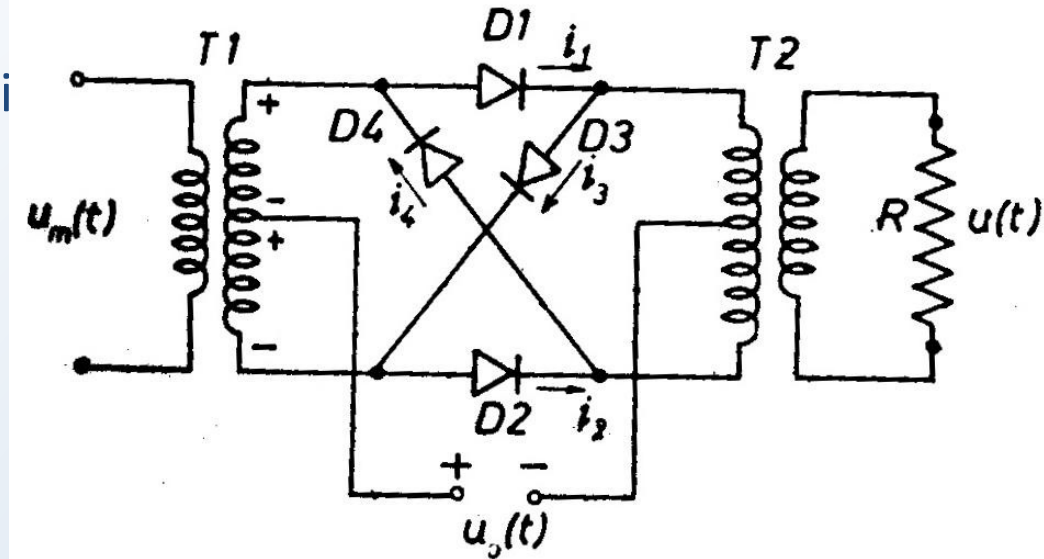
KRUŽNI (PRSTENASTI, RING) MODULATOR

Pretpostavke:

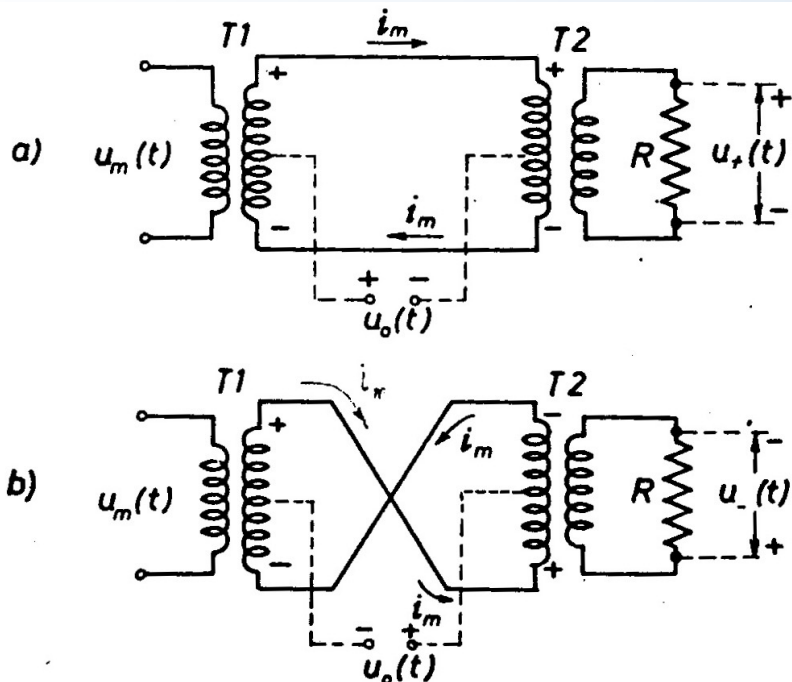
- transformatori su komplementarni
- diode su identične i idealne
- $U_0 \gg |u_m(t)|_{\max}$
- šema je u odnosu na generator nosioca $u_0(t)$ električki simetrična

Postoje dva režima rada dioda:

1. Za $u_0(t) > 0$ provode D1 i D2
2. Za $u_0(t) < 0$ provode D3 i D4



Slika: Kružni modulator



Slika: Šeme ekvivalentne šemi kružnog modulatora

a) Slučaj kad provode diode D1 i D2, a D3 i D4 ne;

b) slučaj kad provode diode D3 i D4, a D1 i D2 ne.

Za pozitivnu poluperiodu, izlazni napon je:

a za negativnu:

$$u_+(t) \propto u_m(t) C(1,0)$$

$$u_-(t) \propto u_m(t) C(0,1)$$

Konačno, superpozicijom ova dva linearna stanja napon na izlazu će biti:

$$u(t) = u_+(t) - u_-(t) \propto u_m(t) [C(1,0) - C(0,1)]$$

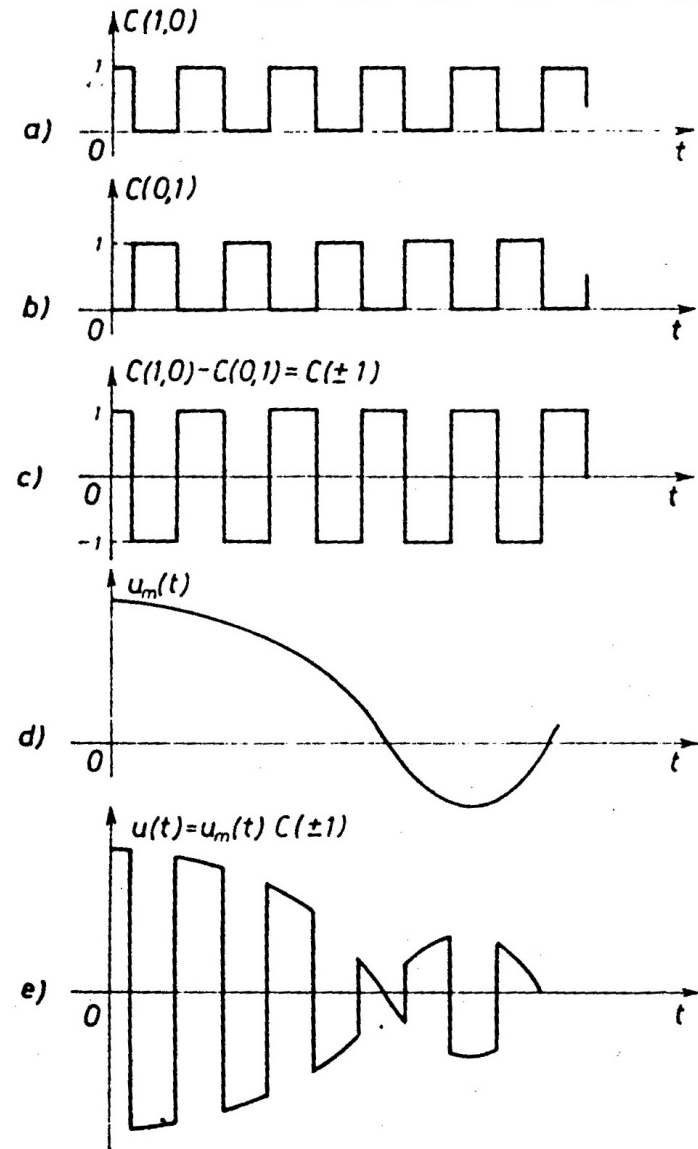
$$u(t) \propto u_m(t) C(1,-1)$$

$$C(1,-1) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n\omega_0 t$$

$$u(t) \propto u_m(t) C(\pm 1) = u_m(t) 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n\omega_0 t$$

Pošto se u konačnom izrazu ne javlja i modulišući signal, to se korisni član može izdvojiti filtrom, uz uslov:

$$\omega_0 - \omega_M \geq 0, \text{ tj. } \omega_0 \geq \omega_M$$



Slika: Talasni oblici signala:

a) Funkcija $C(1,0)$; b) funkcija $C(0,1)$; c) funkcija $C(1,-1)$; d) modulišući signal; e) modulisani signal

KONVENCIONALNI AM SIGNAL (KAM)

Signali koji u sebi sadrže dva bočna opsega i nosilac. KAM signal može da se predstavi izrazom:

$$u(t) = [U_0 + k_U u_m(t)] \cos \omega_0 t$$

Izraz u uglastoj zagradi može se shvatiti kao **amplituda** prostoperiodične funkcije $\cos \omega_0 t$. Ona se sastoji od konstante U_0 i člana $k_U u_m(t)$ koji je direktno srazmjeran modulišućem signalu.

KAM signal može da se dobije na tri načina:

- modulator se realizuje pomoću nelinearnog sklopa kvadratne karakteristike na čiji ulaz se dovodi suma modulišućeg signala i nosioca
- pomoću poluprovodničkih dioda na čiji ulaz se dovodi suma modulišućeg signala i nosioca
- parametarskom modulacijom

$$u_{KAM}(t) = U_0 \cos \omega_0 t + k_U u_m(t) \cos \omega_0 t = [U_0 + k_U u_m(t)] \cos \omega_0 t$$

Modulišići signal se može napisati i u normalizovanoj formi:

$$u_m(t) = U_m m(t)$$

$$U_m = |u_m(t)|_{\max}$$

$$m(t) \leq 1$$

Pa se KAM signal može zapisati:

$$u_{KAM}(t) = U_0 \left[1 + \frac{k_U U_m}{U_0} m(t) \right] \cos \omega_0 t$$

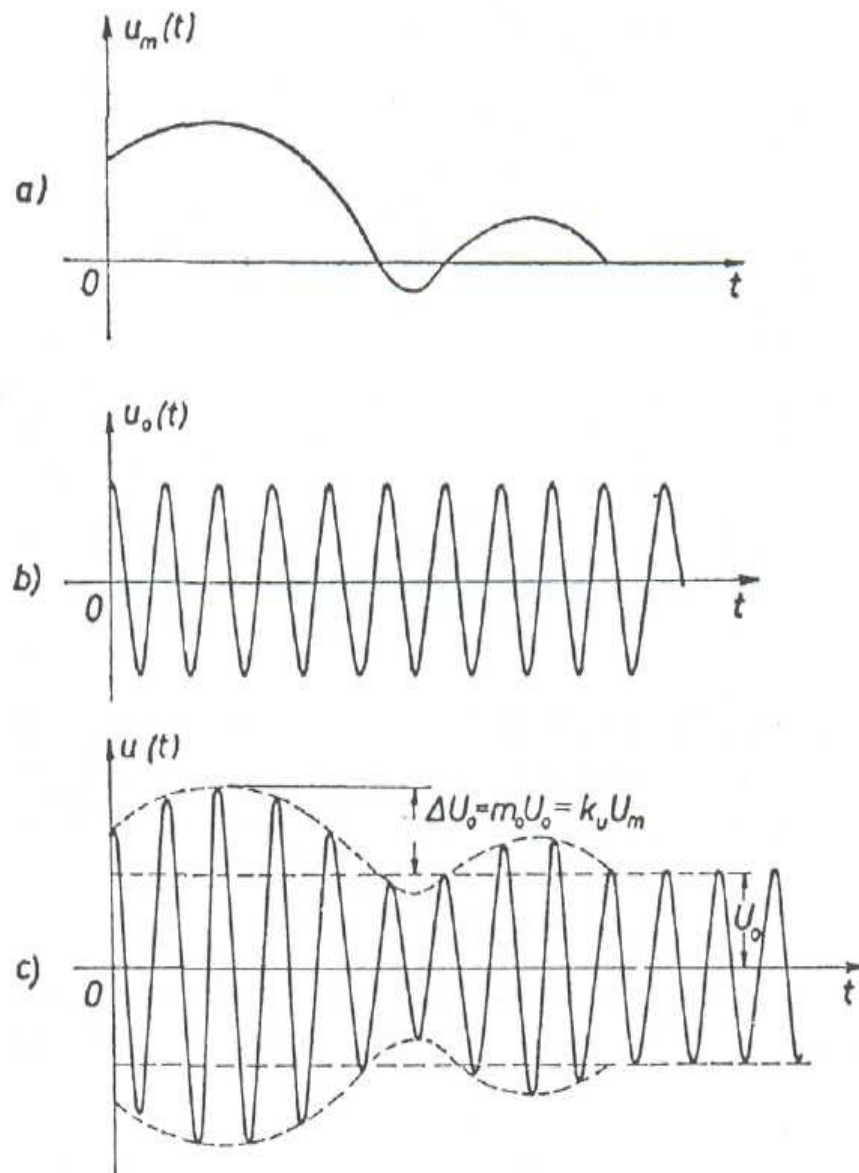
$$k_U U_m = \Delta U_0$$

$$\frac{k_U U_m}{U_0} = \frac{\Delta U_0}{U_0} = m_0$$

tako da je:

$$u_{KAM}(t) = U_0 \left[1 + \frac{\Delta U_0}{U_0} m(t) \right] \cos \omega_0 t = U_0 [1 + m_0 m(t)] \cos \omega_0 t$$

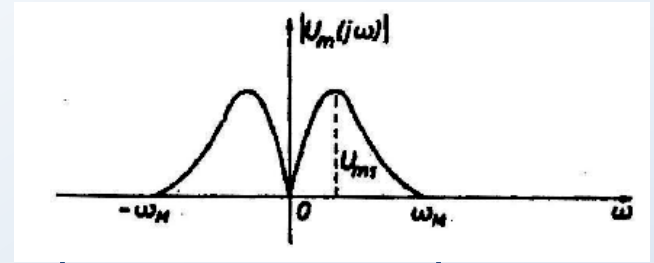
- $u_m(t)$ je modulišući signal
- nosilac je oblika $u_o(t) = U_o \cos \omega_o t$
- $u(t)$ je talasni oblik za KAM signal
- ΔU_o je maksimalna promjena amplitude modulisanog signala koja je k_u puta veća od maksimalne vrijednosti modulišućeg signala
- m_o izražava maksimalnu relativnu promjenu amplitude modulisanog signala i naziva se **stepen (indeks) modulacije** (m_o se izražava i u procentima).



Slika: Talasni oblici: a) modulišući signal; b) nosilac; c) amplitudski modulirani signal KAM tipa

Spektar KAM signala:

1. $u_m(t)$ je aperiodičan signal
2. $u_m(t)$ je periodičan signal.



1. $u_m(t)$ je aperiodičan signal čija je jednosmjerna komponenta nula, a spektar je ograničen učestanošću ω_m . Zadovoljen je i uslov:

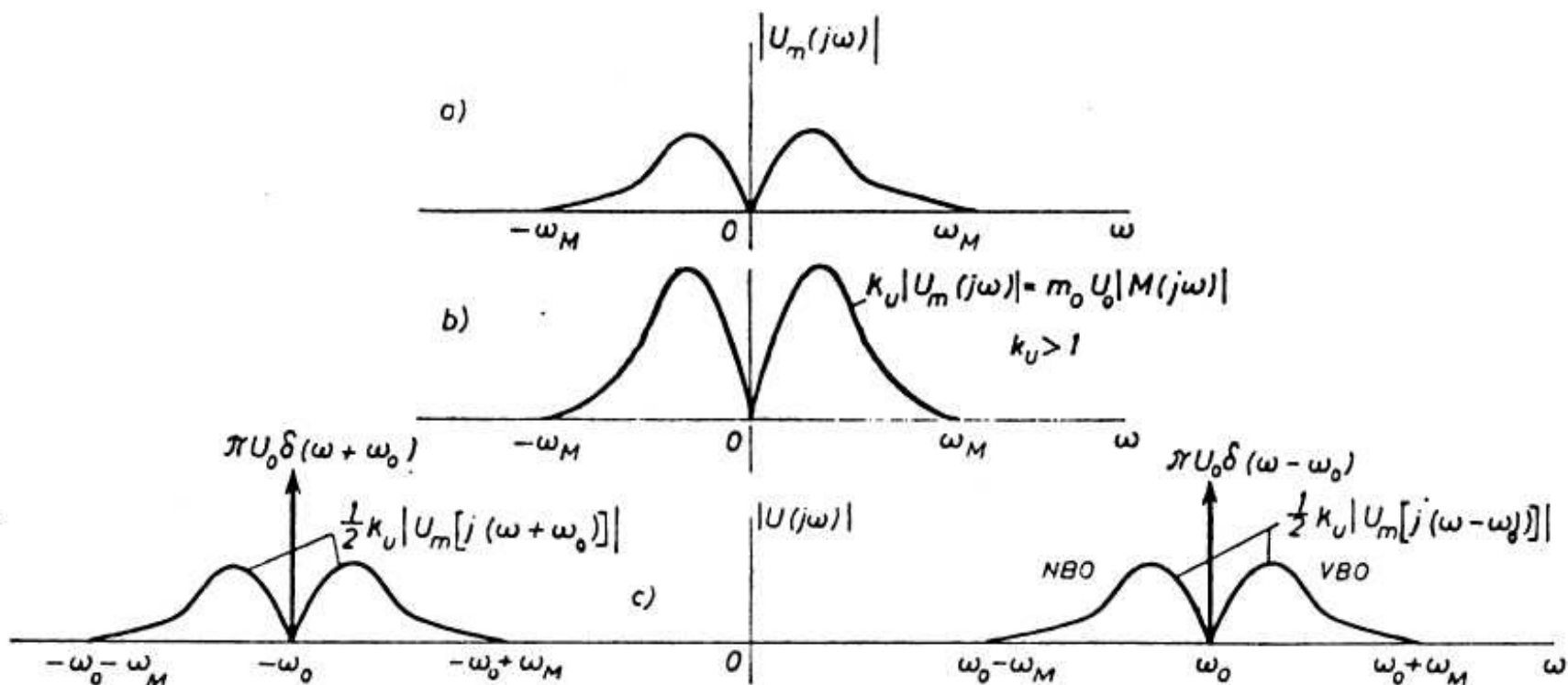
$$U_0 + k_U u_m(t) \geq 0, \text{ tj. } 1 + m_0 m(t) \geq 0$$

Spektar modulisanog signala $u_{KAM}(t)$ dobiće se Fourierovom transformacijom izraza koji predstavlja KAM signal, pa je:

$$U(j\omega) = \pi U_0 \delta(\omega - \omega_0) + \pi U_0 \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} k_U U_m [j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} k_U U_m [j(\omega + \omega_0)]$$

Spektar KAM signala sastoji se od sinusoidalne komponente učestanosti ω_0 i nižeg i višeg bočnog opsega koji su smješteni simetrično u odnosu na $\omega = \omega_0$. Oblik krive spektralnih gustina svakog od bočnih opsega identičan je obliku krive spektralne gustine amplituda modulišućeg signala.

- ✓ U svakom od bočnih opsega sadržana je prenošena poruka.
- ✓ Za prenos poruka modulisanim signalom tipa KAM potreban je opseg učestanosti dvostruko veći od širine spektra modulišućeg signala f_M .



Slika: Spektralna gustina amplituda: a) modulišućeg signala, b) modulišućeg signala pomnožena sa k_U , c) KAM signala

2. Modulišući signal je periodičan, a amplitudski spektar je ograničen učestanošću ω_M . Funkcija $u_m(t)$, koja opisuje ovakav signal, moći će da se predstavi u obliku Fourierovog reda:

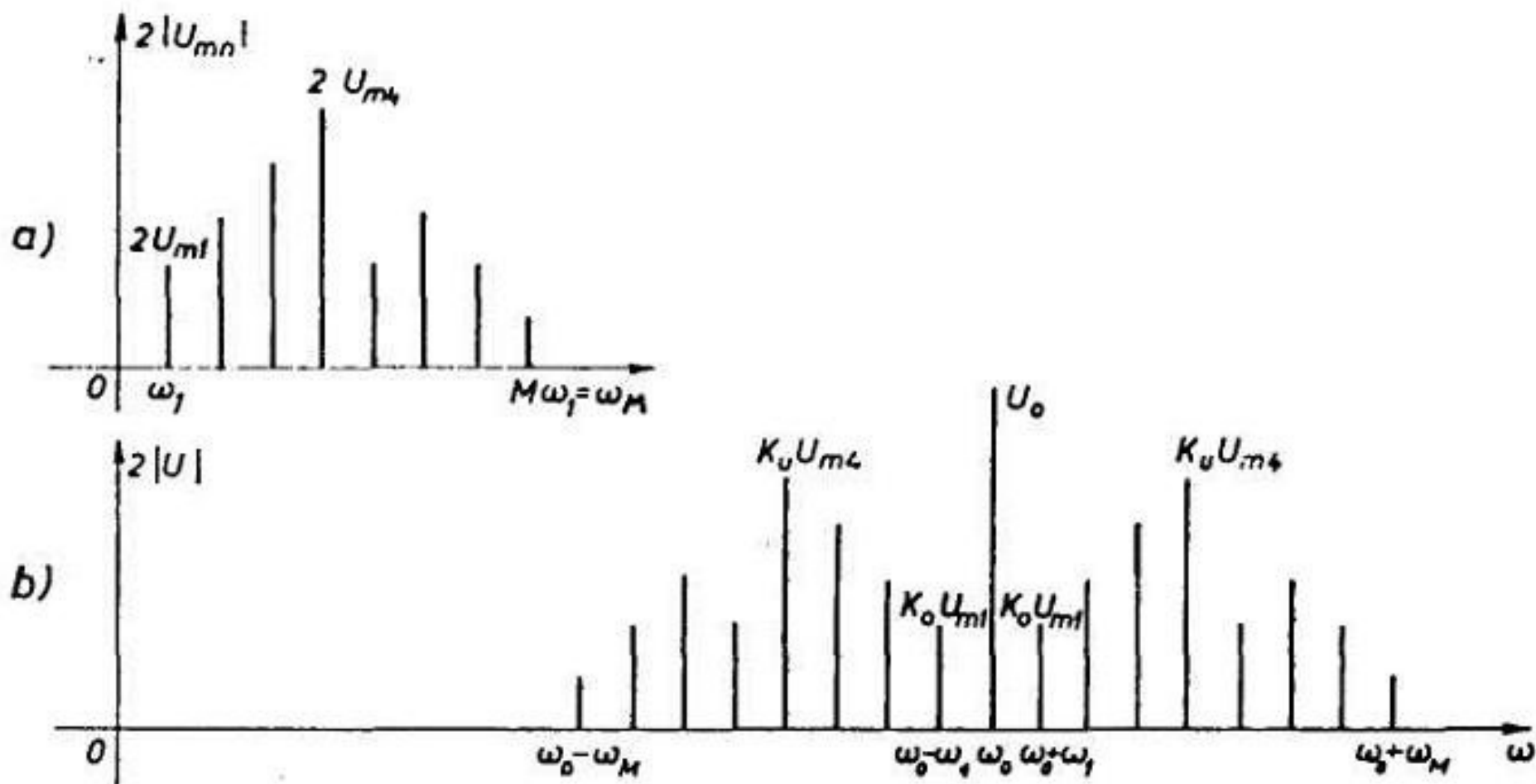
$$u_m(t) = \sum_{n=-M}^M U_{mn} e^{jn\omega_1 t} = 2 \sum_{n=1}^M |U_{mn}| \cos(n\omega_1 t + \theta_n)$$

$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T_1$, T_1 je perioda periodične funkcije.

Pošto smo pretpostavili da je spektar funkcije $u_m(t)$ ograničen učestanošću ω_M , to mora biti $\omega_M = M \omega_1$, M predstavlja rang najvišeg harmonika u spektru. Sada je:

$$\begin{aligned} u_{KAM}(t) &= \left[U_0 + k_U 2 \sum_{n=1}^M |U_{mn}| \cos(n\omega_1 t + \theta_n) \right] \cos \omega_0 t = \\ &= U_0 \cos \omega_0 t + k_U \sum_{n=1}^M |U_{mn}| \cos[(\omega_0 - n\omega_1)t - \theta_n] + k_U \sum_{n=1}^M |U_{mn}| \cos[(\omega_0 + n\omega_1)t + \theta_n] \end{aligned}$$

Na osnovu ovog izraza se lako određuje amplitudski spektar.



Slika: Amplitudski spektar: a) modulišućeg signala; b) modulisanog signala KAM tipa

Pošto je modulišući signal periodičan, njegov spektar je **diskretan**. Amplitudski spektar modulisanog signala takođe je diskretan:

- Svakoj komponenti modulišućeg signala odgovaraju dvije komponente modulisanog signala (dva bočna opsega).
- Amplituda svake komponente iznosi $1/2$ amplitude odgovarajuće komponente modulišućeg signala pomnožene koeficijentom k_U .
- Svaki od bočnih opsega u sebi sadrži kompletnu poruku.
- U spektru se javlja i nosilac, koji **ne nosi nikakvu poruku**.
- Opseg učestanosti potreban za prenos modulisanog signala tipa KAM je dva puta veći od najveće učestanosti u spektru modulišućeg signala.

Postavlja se pitanje: kakvog smisla ima koristiti ovu vrstu modulisanog signala za prenos poruka, kad je jasno da se prenosom nosioca ne prenosi nikakva informacija?

Odgovor na ovo pitanje će uslijediti nakon objašnjenja o demodulaciji ove vrste AM signala (prenos nosioca je opravdan radi vrlo jednostavne demodulacije modulisanog KAM signala).

Energetski bilans KAM signala:

Pretpostavimo da je modulišući signal oblika $u_m(t) = U_m \cos \omega_m t$. Tada je odgovarajući KAM signal oblika:

$$\begin{aligned} u_{KAM}(t) &= U_0 [1 + m_0 m(t)] \cos \omega_0 t = U_0 [1 + m_0 \cos \omega_m t] \cos \omega_0 t = \\ &= U_0 \cos \omega_0 t + \frac{U_0 m_0}{2} \cos(\omega_0 + \omega_m)t + \frac{U_0 m_0}{2} \cos(\omega_0 - \omega_m)t \end{aligned}$$

Srednja snaga na otporniku otpornosti R je:

$$P = \frac{U_0^2}{2R} \left[1 + \left(\frac{m_0}{2} \right)^2 + \left(\frac{m_0}{2} \right)^2 \right] = \frac{U_0^2}{2R} \left(1 + \frac{m_0^2}{2} \right) = P_0 \left(1 + \frac{m_0^2}{2} \right)$$

Sa $P_0 = U_0^2 / 2R$ označena je snaga nosioca.

Srednja snaga u jednom bočnom opsegu u kom je sadržana prenošena poruka je:

$$P_{1BO} = \frac{1}{2R} \left(\frac{m_0 U_0}{2} \right)^2 = \frac{m_0^2}{4} P_0$$

Stoga je stepen iskorišćenja:

$$\eta = \frac{P_{1BO}}{P} = \frac{1}{2} \frac{m_0^2}{2 + m_0^2}$$

Stepen iskorišćenja je najveći onda kada je indeks modulacije $m_0=1$, i on iznosi $1/6$. Znači, $5/6$ snage predajnika emituje se samo da bi demodulacija, odnosno prijemnik bili jednostavniji.

Za ispravnu demodulaciju KAM signala mora biti zadovoljen uslov da je:

$$\omega_0 \geq \omega_M$$

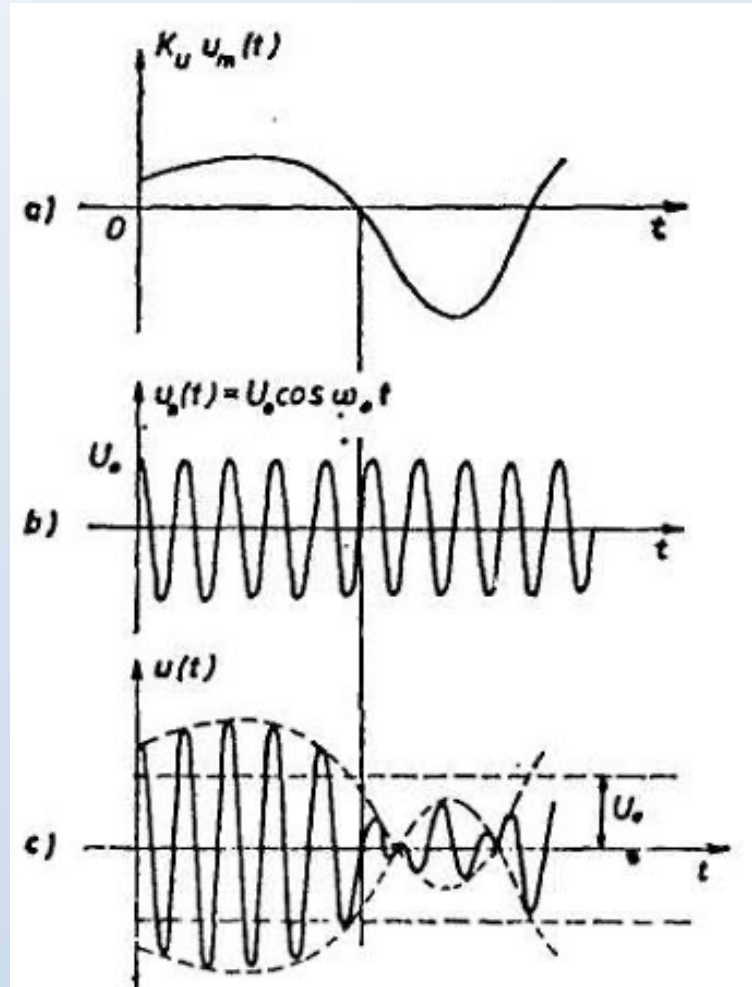
Postoji još jedan uslov:

$$U_0 + k_u u_m(t) \geq 0$$

U slučaju da nije ispunjen, talasni oblik modulisanog signala je kao na slici. Anvelopa modulisanog signala više nije srazmjerna modulišućem signalu. Za takav modulisani signal se kaže da je **premodulisan**.

KAM modulatori:

1. Pomoću nelinearnog sklopa, a KAM signal se izdvaja pomoću filtra koji propušta opseg učestanosti od $\omega_0 - \omega_M$ do $\omega_0 + \omega_M$.
2. Pomoću linearnog prekidača
3. Pomoću parametarske modulacije



Slika: a) modulišući signal, b) nosilac, c) premodulisani KAM signal

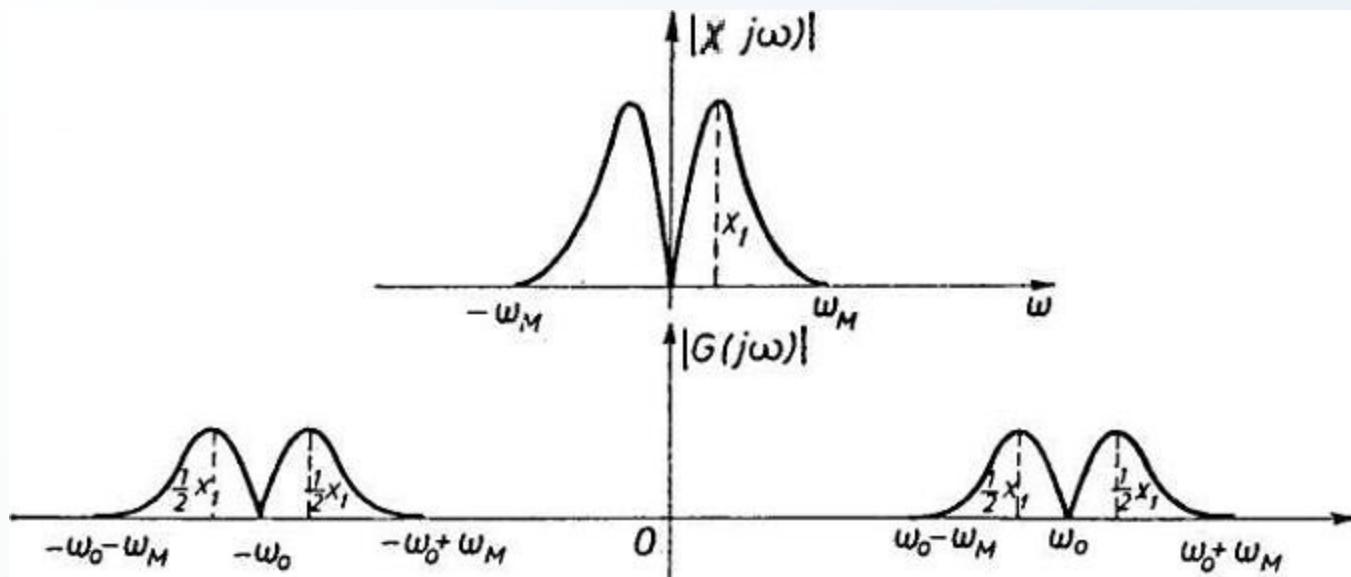
AM SIGNALI SA JEDNIM BOČNIM OPSEGOM AM-1BO

AM-2BO signali u svakom od dva dobijena bočna opsega sadrže prenošenu poruku, a nosilac ne nosi poruku. Dakle, jasno je da se prenos poruke može realizovati i samo jednim bočnim opsegom. Prednosti:

- Sistem za prenos može da ima propusni opseg dva puta uži od opsega koji zahtijeva AM-2BO i KAM signal
- Snaga izlaznog stepena predajnika se ne troši na pojačanje nosioca i drugog bočnog opsega.

Pretpostavimo da imamo vremensku funkciju $x(t)$ čija je *Fourier*-ova transformacija $X(j\omega)$. Neka je spektar odgovarajućeg signala ograničen učestanošću ω_M . Posmatrajmo sada jednu drugu funkciju definisanu na sledeći način:

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(j\omega) = \frac{1}{2} X[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} X[j(\omega + \omega_0)]$$



Slika: Spektralne gustine amplituda funkcije $x(t)$ i funkcije $g(t)=x(t)\cos\omega_0 t$

Pretpostavimo sada da signal $x(t)$ pobuđuje neki linearan četvoropol koji u svaku njegovu spektralnu komponentu unosi konstantan fazni pomeraj od $-\pi/2$, a pri tome intenzitet komponente ostaje nepromijenjen. Funkcija prenosa takvog sklopa je:

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\chi(\omega)} = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j & \text{za } \omega > 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} = j & \text{za } \omega < 0 \end{cases}$$

$$H(j\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega$$

Ako na ulaz ovakvog sklopa dovedemo signal $x(t)$, na njegovom izlazu će se dobiti izlazni signal $x_q(t)$, čija je Fourier-ova transformacija:

$$X_q(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = -jX(j\omega)\operatorname{sgn} \omega$$

Posmatrajmo sada drugi signal oblika:

$$g_q(t) = x_q(t)\sin\omega_0 t$$

Njegov spektar je:

$$\mathcal{F}[g_q(t)] = G_q(j\omega) = \frac{1}{2j}X_q[j(\omega - \omega_0)] - \frac{1}{2j}X_q[j(\omega + \omega_0)]$$

Odnosno:

$$G_q(j\omega) = -\frac{1}{2}X[j(\omega - \omega_0)]\operatorname{sgn}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}X[j(\omega + \omega_0)]\operatorname{sgn}(\omega + \omega_0)$$

Obrazuje li se sada razlika signala $g(t)$ i $g_q(t)$, dobija se signal:

$$u(t) = \frac{1}{2}g(t) - \frac{1}{2}g_q(t) = \frac{1}{2}x(t)\cos\omega_0 t - \frac{1}{2}x_q(t)\sin\omega_0 t$$

Spektar signala $u(t)$ biće:

$$\mathcal{F}[u(t)] = U(j\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[g(t)] - \frac{1}{2}\mathcal{F}[g_q(t)] = \frac{1}{2}G(j\omega) - \frac{1}{2}G_q(j\omega)$$

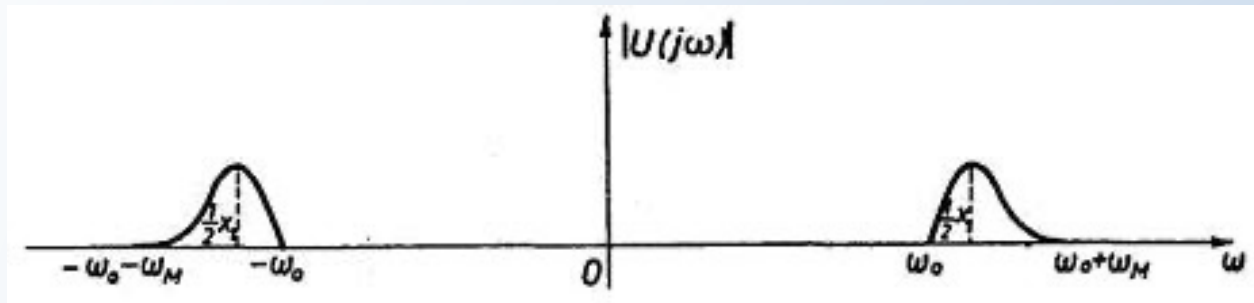
$$U(j\omega) = \frac{1}{4} X[j(\omega - \omega_0)] [1 + \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{4} X[j(\omega + \omega_0)] [1 - \operatorname{sgn}(\omega + \omega_0)]$$

Kako je:

$$\operatorname{sgn}(\omega - \omega_0) = \begin{cases} 1 & \text{za } \omega > \omega_0 \\ -1 & \text{za } \omega < \omega_0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(\omega + \omega_0) = \begin{cases} 1 & \text{za } \omega > -\omega_0 \\ -1 & \text{za } \omega < -\omega_0 \end{cases}$$

to $U(j\omega)$ predstavlja spektar signala koji ima samo viši bočni opseg.



Slika: Spektralna gustina amplituda signala koji ima samo viši bočni opseg

Signal $u(t)$ je vremenski oblik signala čiji spektar sadrži samo viši bočni opseg, tj. signal tipa AM-1BO.

$$u(t) = \frac{1}{2} x(t) \cos \omega_0 t - \frac{1}{2} x_q(t) \sin \omega_0 t$$

Potrebno je odrediti analitičku vezu između $x(t)$ i $x_q(t)$:

Ako je $x_q(t)$ odziv linearnog četvoropola na pobudu $x(t)$, onda će taj odziv biti jednak konvoluciji pobudne funkcije $x(t)$ i odziva $h(t)$ tog istog sistema na pobudu u vidu delta funkcije.

$$x_q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Ako se uzme u obzir funkcija prenosa onako kako je definisana, dobija se:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{j\omega t} d\omega - \frac{j}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \frac{j}{2\pi} \left(- \int_{-\infty}^0 e^{-j\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega \right)$$

$$h(t) = \frac{j}{2\pi} \cdot \frac{2}{jt} = \frac{1}{\pi t}$$

Konačno se dobija da je:

$$x_q(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

$x_q(t)$ predstavlja **Hilbertovu transformaciju** funkcije $x(t)$. Ona se označava:

$$\hat{x}(t) \equiv x_q(t)$$

Znači, analitički izraz koji jednoznačno u vremenskom domenu predstavlja amplitudski modulirani signal kojim se prenosi poruka opisana funkcijom $x(t)$ i čiji spektar ima samo viši bočni opseg, je:

$$u(t) = \frac{1}{2} x(t) \cos \omega_0 t - \frac{1}{2} \hat{x}(t) \sin \omega_0 t$$

Slično, izraz koji predstavlja niži bočni opseg je:

$$u(t) = \frac{1}{2} x(t) \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \hat{x}(t) \sin \omega_0 t$$

Modulišući signal možemo predstaviti i u obliku:

$$x(t) = 2 \alpha(t) \cos \varphi(t)$$

$$\hat{x}(t) = 2 \alpha(t) \sin \varphi(t)$$

AM-1BO sada može da se opiše na sledeći način:

$$u(t) = \alpha(t) \cos [\omega_0 t \mp \varphi(t)]$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

$$\varphi(t) = \tan^{-1} \frac{\hat{x}(t)}{x(t)}$$

✓ Zaključak:

- anvelopa $\alpha(t)$ nije proporcionalna modulišućem signalu $x(t)$
- AM-1BO je istovremeno modulisan i po amplitudi i po fazi, tj. riječ je o hibridnoj amplitudsko-faznoj modulaciji