

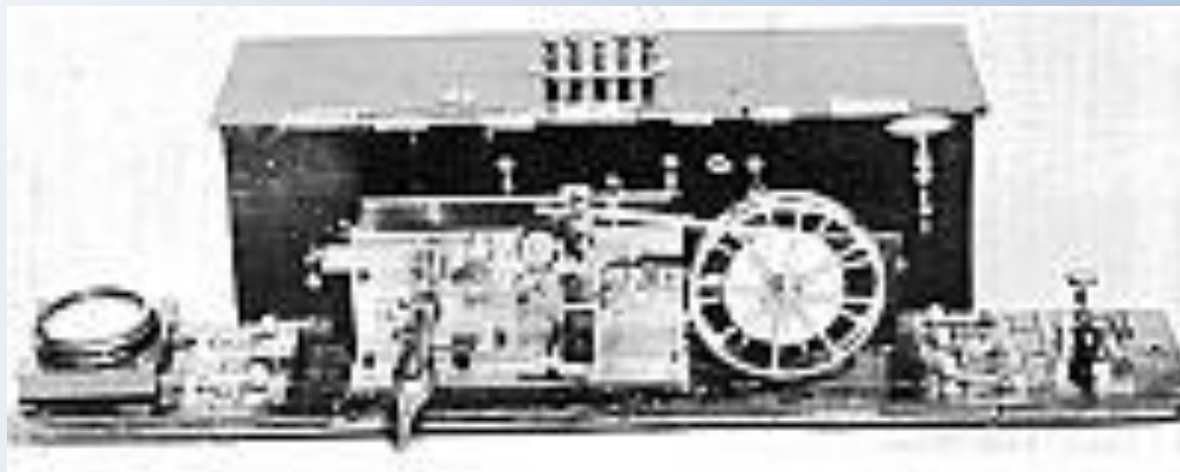
# **OSNOVI TELEKOMUNIKACIJA**

**Prof.dr Milica Pejanović-Djurišić**  
**Jelena Crnogorac, MSc**

# UVOD

- Telekomunikacije (elektronske komunikacije) predstavljaju naučno-stručnu oblast koja se bavi prenosom poruka električnim putem. Električni ekvivalent poruke je električni signal (signal) čijim prenosom od izvora poruke do destinacije se ostvaruje telekomunikacioni prenos.
- Poruke koje treba prenijeti sa jednog mjesta (njihovog izvora) do drugog (mjesta prijema, destinacije) mogu da budu u različitim formama: pisani tekst, govor, muzika, nepokretna i pokretna slika, podaci,...
- Potreba za komuniciranjem među ljudima postoji oduvijek, pri čemu su se koristili razni načini kako bi se ostvarila komunikacija, odnosno prenijele poruke: glasnici, golubovi pismoše, paljenje vatre i dimni signali, heliograf u Grčkoj, sistemi megafonskog prenosa u Egiptu...

Dvadeset četvrti maj 1844. god. može se smatrati danom početka elektronskih komunikacija. Tog dana Morse je ostvario prvi **telegrafski prenos** između Vašingtona i Baltimora. Već 1851. godine 50 preduzeća u SAD eksploatisalo je Morseov patent. Iste godine položen je prvi podmorski telegrafski kabl između Francuske i Engleske, a 1866. god. ostvareno je povezivanje dvije obale Atlantskog okeana podmorskim kablom.



*Morseov telegraf*

Savršeniji vid prenosa poruka predstavlja **telefonija** čijim se začetnikom smatra Graham Bell (1876. god.). Zvučna energija govora se pretvara u električni signal koji se prenosi do drugog aparata u kome se vrši konverzija električne energije u zvučni signal. Godine 1892. izgrađena je prva automatska telefonska centrala.

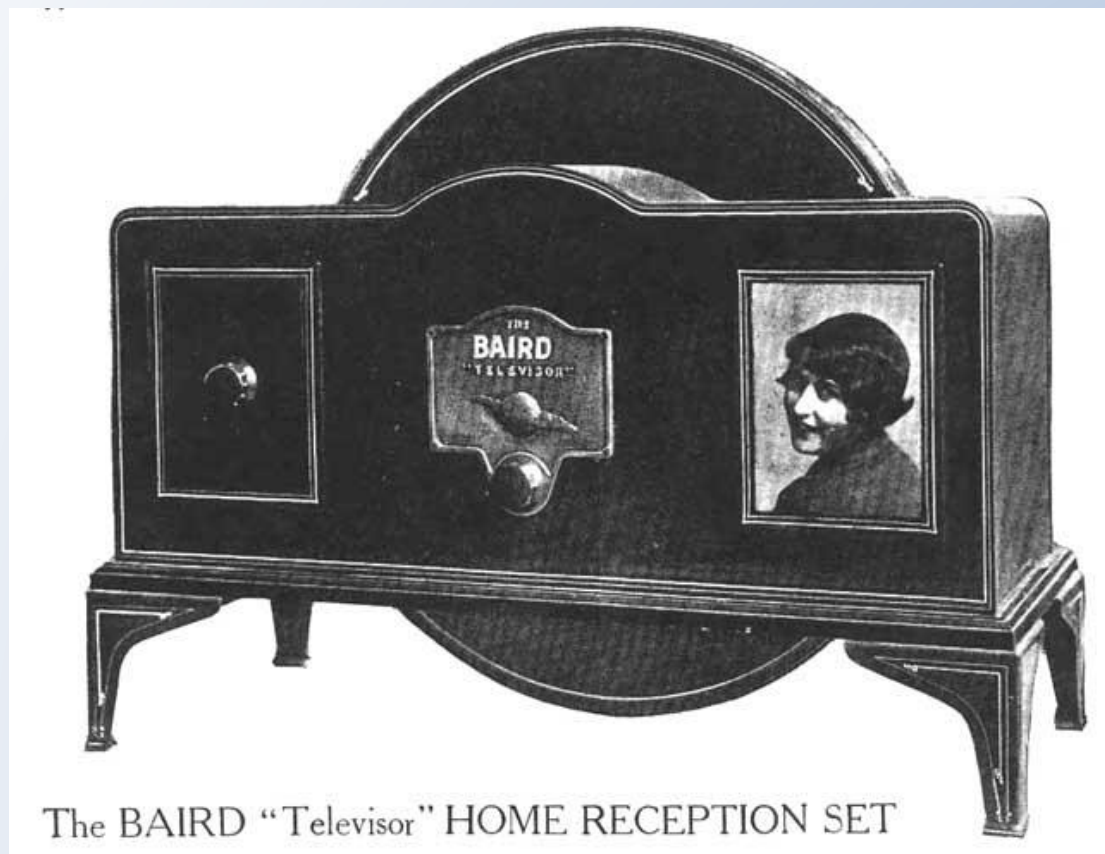


*Modeli prvih telefona*

- Neophodnost da se izvor poruke i destinacija povežu fizičkom linijom veze predstavljala je ograničenje u stvaranju globalnog sistema komunikacija. Radovi I. Henryja (1797-1878), J. C. Maxwella (1831-1879) i H. Hertza (1857-1894) sa kraja 19.vijeka predstavljaju naučnu osnovu na kojoj su razvijene **radio-komunikacije**. Ruski fizičar A. S. Popov (1859-1906) je 1896. izveo demonstraciju radio-veze šaljući telegram sadržine "Heinrich Hertz" napisan Morseovom azbukom. Ipak, G. Marconi je prvi prijavio patent za **bežičnu telegrafiju** 1897. godine, ostvarivši bežičnu vezu na rastojanju od 1000 metara. Tako su počeli prvi koraci u radio-komunikacijama. 1904. godine je ostvarena prva radio-telegrafska veza na trasi Volujica (Bar)-Italija. Sedmog januara 1927. godine ostvarena je prva radio-veza u javnom telefonskom saobraćaju između Njujorka i Londona. Od tada se radio-komunikacije javljaju u dva vida:
- komunikacije od tačke do tačke: povezuju se dva odredjena korespondenta.
- tzv. "masovne komunikacije": sa jednog mjesta poruka se prenosi velikom broju korisnika.



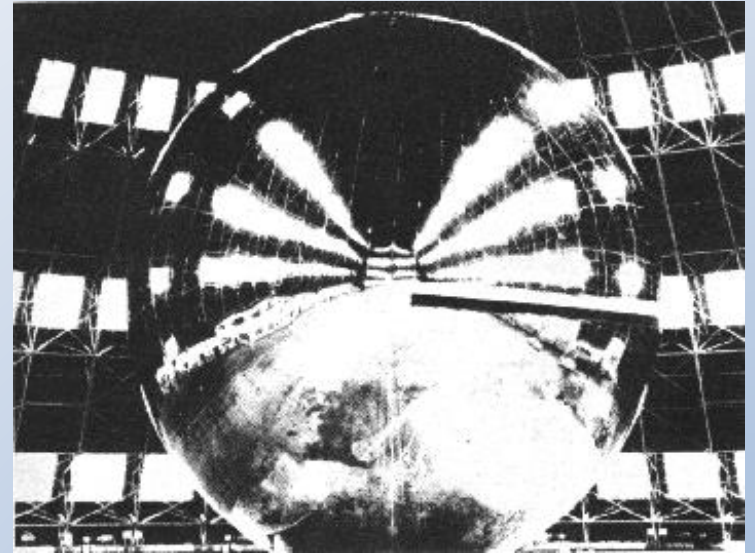
- Daljim razvojem nauke i tehnike javlja se potreba za prenosom poruka ne samo u vidu pisane riječi i govora, već i u obliku slika, pokretnih slika, a kasnije, razvojem računara, i poruka sa/od mašina (uključujući i poruke između mašina).
- 1927. god. je ostvaren prvi prenos **televizijskog signala** između Njujorka i Vašingtona.



The BAIRD "Televisor" HOME RECEPTION SET

1956. godine postavljen ***prvi telefonski podmorski kabl*** između SAD i Engleske kojim se moglo prenijeti istovremeno 36 govornih komunikacija.

- U avgustu 1960. bio je lansiran prvi telekomunikacioni, ***pasivni satelit*** "Echo 1", a oktobra iste godine prvi ***aktivni satelit*** "Courier IB". 1965. god. ostvaren je prvi eksperimentalni televizijski prenos slike u boji preko satelita, a nešto kasnije iste godine u komercijalne svrhe mogao je da se ostvari prenos 240 telefonskih razgovora ili dva TV programa preko satelita.
- Lansiranjem telekomunikacionih satelita otvara se nova era u oblasti telekomunikacija, posebno kad su u pitanju LEO i GEO sateliti, pa sve do Starlink satelita.



- Druga polovina 20. vijeka donosi intenzivan razvoj ***mobilnih radio komunikacija i optičkih komunikacija***. Prvi pokušaji na tom polju su bili radiofoni (voki-toki), zatim dispečerski sistemi, radio-pejdžing sistemi, mobilni radio-telefonski sistemi koji obezbjeđuju sve što i fiksni telefonski sistemi.

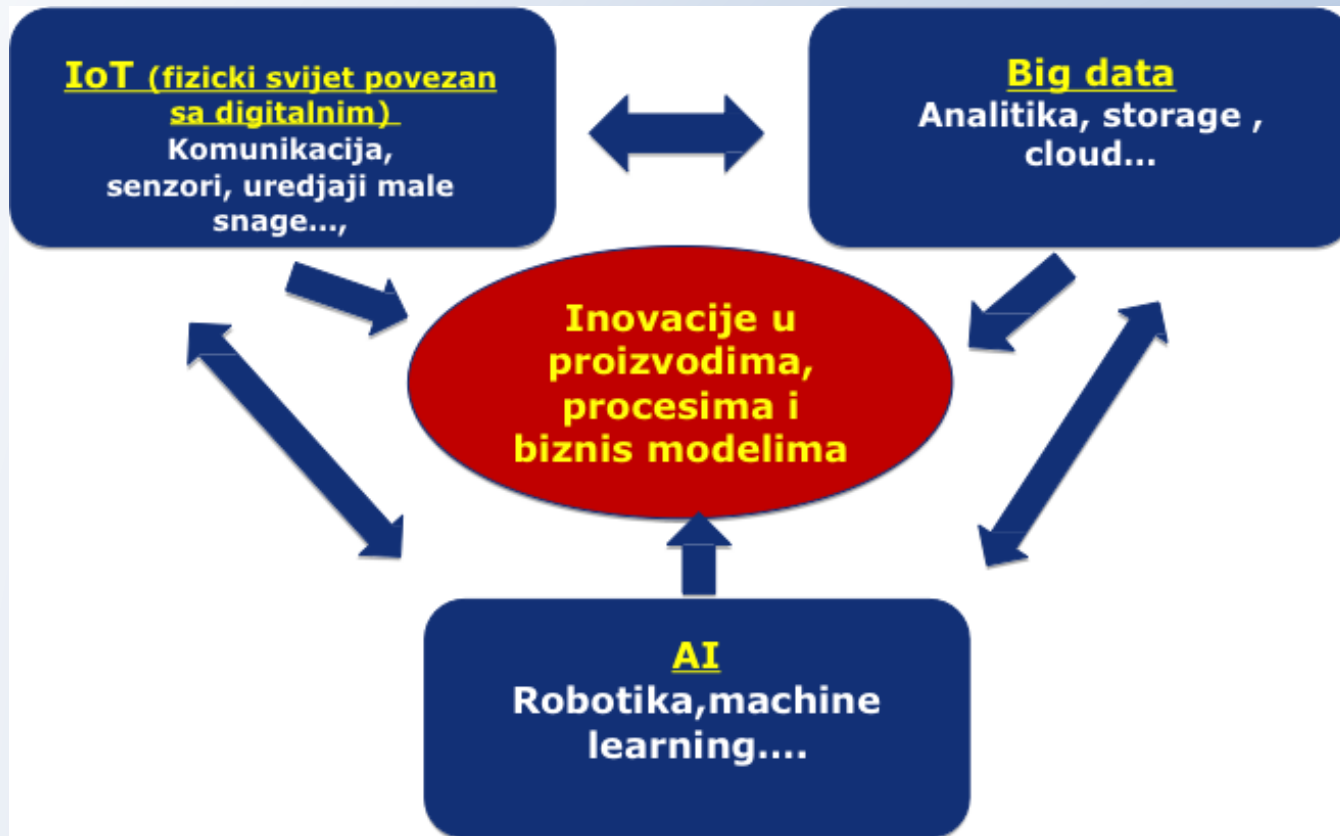


- U tom periodu se dešava i suštinska promjena paradigme prenosa signala na daljinu električnim putem. Počinje **DIGITALIZACIJA**: telekomunikacioni sistemi istorijski nastali u analognoj formi sve više se zamjenjuju digitalnim telekomunikacionim sistemima.



Upravo je digitalizacija telekomunikacionih sistema, koja je počela krajem XX vijeka i ubrzana u XXI vijeku, dovela do **digitalne transformacije ukupnog društva** koja se danas prihvata od strane sve većeg broja subjekata i organizacija.

Digitalnu transformaciju karakteriše fuzija naprednih tehnologija i integracija fizičkih i digitalnih sistema, dominantnost inovativnih poslovnih modela i novih procesa i stvaranje pametnih proizvoda i usluga.



Informaciono-komunikacione tehnologije (ICT) sve intenzivnije transformišu život ljudi širom svijeta, pružajući mnoge mogućnosti u različitim sektorima kao što su zdravstvo, obrazovanje, poljoprivreda, finansije, javno upravljanje....

Networked society je društvo u kojem su svi pojedinci u prilici da koriste društvene mreže, da imaju pristup medijskim i zabavnim sadržajima, da efikasno i produktivno obavljaju svoj posao ili da vode svoje poslovanje, da brzo, lako i pouzdano pristupe javnim servisima.

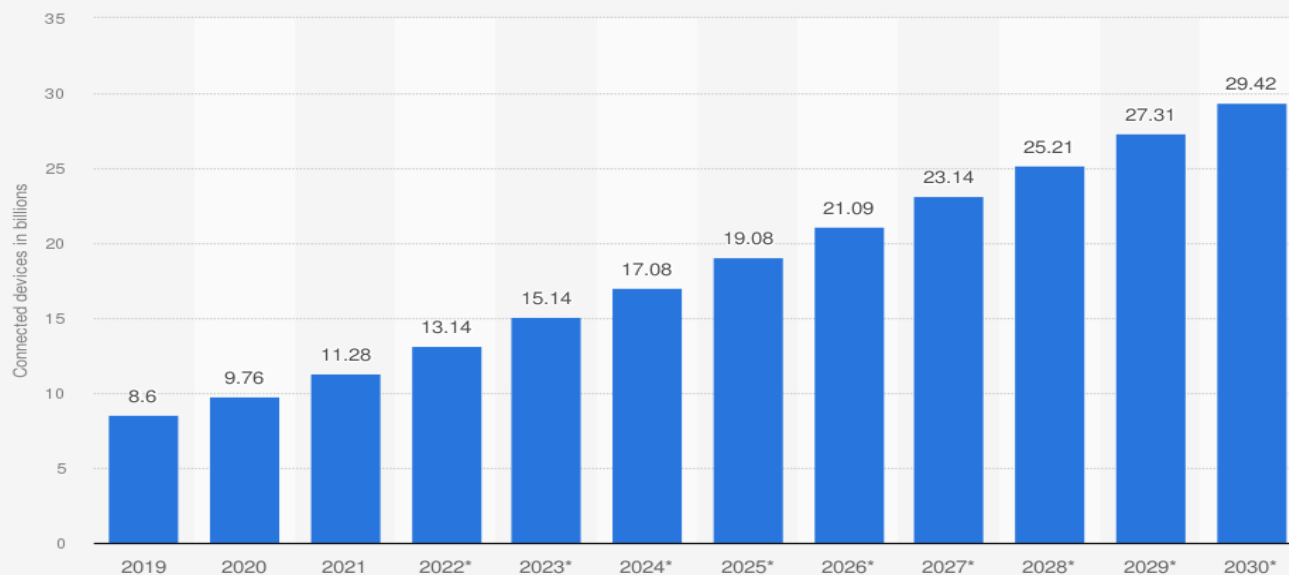
|                                              | 2010           | 2015           | 2016           | 2024 (≈)      |
|----------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| Populacija                                   | 7,1 milijarda  | 7,3 milijarde  | 7,5 milijarde  | 8,2 milijardi |
| Mobilni celularni sistemi (br korisnika)     | 5,3 milijarde  | 7,2 milijarde  | 7,5 milijardi  | 7,5 milijardi |
| Mobilni širokopojasni sistemi (br korisnika) | 2,02 milijarde | 3,3 milijarde  | 3,86 milijarde | 7,2 milijardi |
| Individualni korisnici Interneta             | 1,99 milijarde | 3,15 milijarde | 3,39 milijarde | 5.5 milijarde |
| Fiksni širokopojasni sistemi (br korisnika)  | 526 miliona    | 842 miliona    | 917 miliona    | 1.5 milijarde |

Naredne decenije će karakterisati milijarde pametnih uređaja, triloni eura u privrednom rastu i uštedi troškova, kao i zettabytes podataka generisanih od strane senzora i drugih uređaja.

Tako povezani uređaji (sa ograničenim mogućnostima u pogledu računarske snage, memorije i trajanja baterija) su formirali novu vrstu Interneta:

## Internet of Things (IoT)

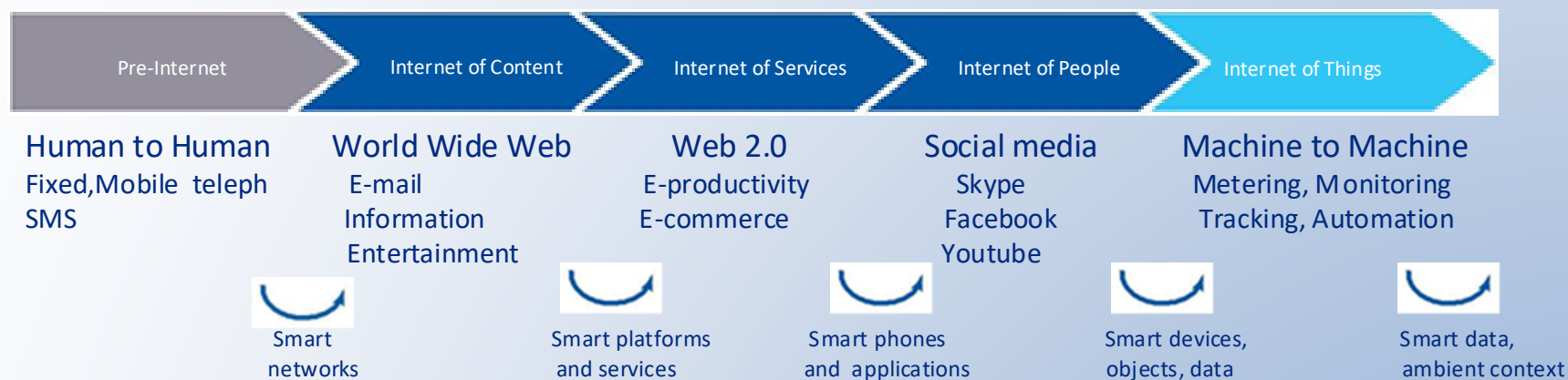
**Number of Internet of Things (IoT) connected devices worldwide from 2019 to 2021, with forecasts from 2022 to 2030 (in billions)**



Source  
Transforma Insights  
© Statista 2022

Additional Information:  
Worldwide; 2019 to 2022

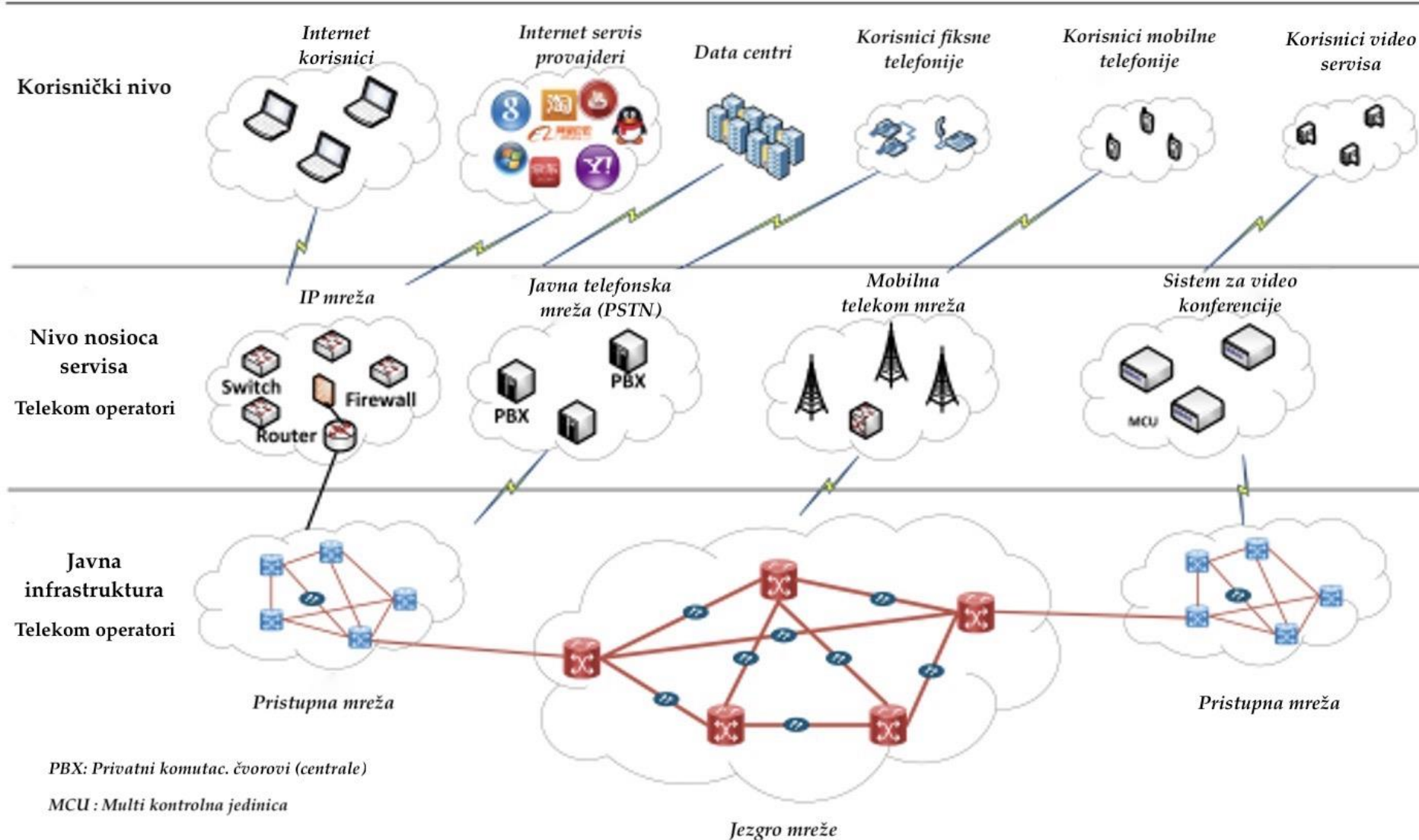
Tokom proteklih decenija, Internet je evoluirao iz statičkog spremišta međusobno povezanih hipertekstualnih dokumenata ka dinamičnom univerzumu umreženih ljudi, mašina i aplikacija.



Trenutno se može govoriti o narednom stepenu evolucije u načinu na koji se koristi Internet.

Takva evolucija je omogućena prije svega konvergencijom sledećih tehnoloških oblasti: Big Data, Internet of Things, Blokchain, Machine Learning (ML) i Artificial Intelligence (AI), i koja će dovesti do suštinskog zaokreta i transformisati postojeće društvene, političke i ekonomske norme, kreirajući prilike i izazove: **za svakog pojedinca, na svakom mjestu i u svakom trenutku.**

# Koncept tradicionalnih telekomunikacionih mreža



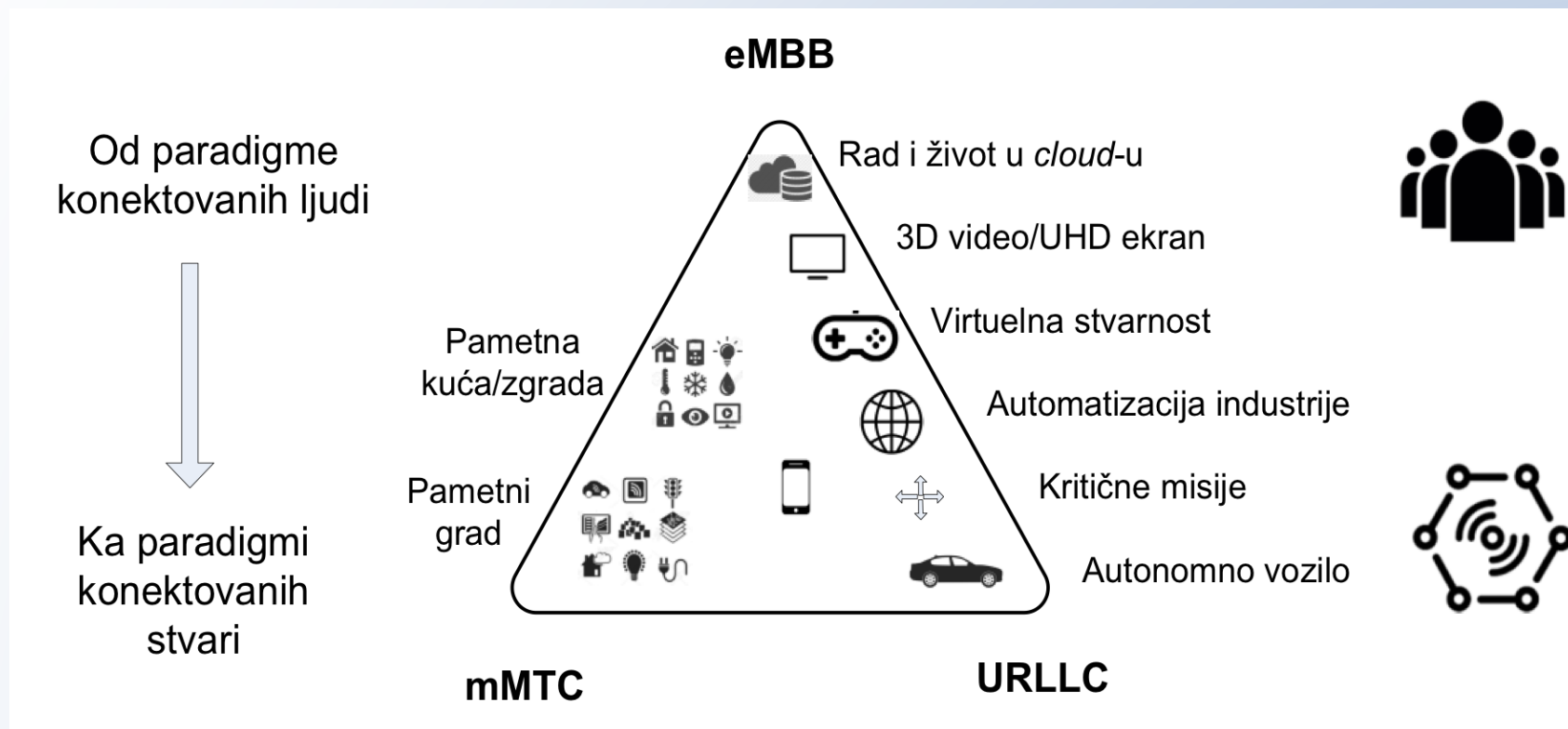


- Javna infrastruktura je generalno osnova telekomunikacionih sistema i obezbjeđuje fizičke prenosne puteve za sve vrste telekomunikacionih mreža, kao što su mreže (private ili javne) za prenos govora, podataka, slike itd. Obično je grade operatori ili državne institucije za sve pružaoce telekomunikacionih servisa. Savremena javna infrastruktura je u najvećoj mjeri bazirana na korišćenju optičkih komunikacionih tehnologija velike brzine.
- Nivo nosioca servisa se odnosi na podršku za sve vrste usluga kao što su komunikacija podataka, govorna komunikacija, video komunikacija itd. Pri tome, računarske mreže zasnovane na Internet protokolu (IP), tradicionalne telefonske mreže, mobilne mreže i specijalni video konferencijski sistemi su međusobno povezani na potpuno heterogeni način.
- Korisnički nivo se sastoji od individualnih i poslovnih korisnika. Individualni korisnici su krajnji korisnici određenog servisa, tipa interneta, telefona, mobilnih telefona, video uređaja, senzora.... Poslovni korisnici su poslovni subjekti i npr. provajderi Internet sadržaja.

Osnovni problem povezan sa tradicionalnom arhitekturom se odnosi na ograničenja evolucije komunikacione infrastrukture čime se dovodi u pitanje mogućnost uvođenja novih smart servisa, kao i postizanja potrebnog kapaciteta povezivanja.

# Aktuelni telekomunikacioni ambijent

Moderni telekomunikacioni sistemi se razvijaju na principima pune konvergencije fiksnih i bežičnih mreža, uz punu implementaciju Internet infrastrukture koja je omogućila prelaz sa H2H (Human to Human) paradigme konektovanih ljudi na M2M (Machine To Machine) paradigmu konektovanih stvari i objekata.

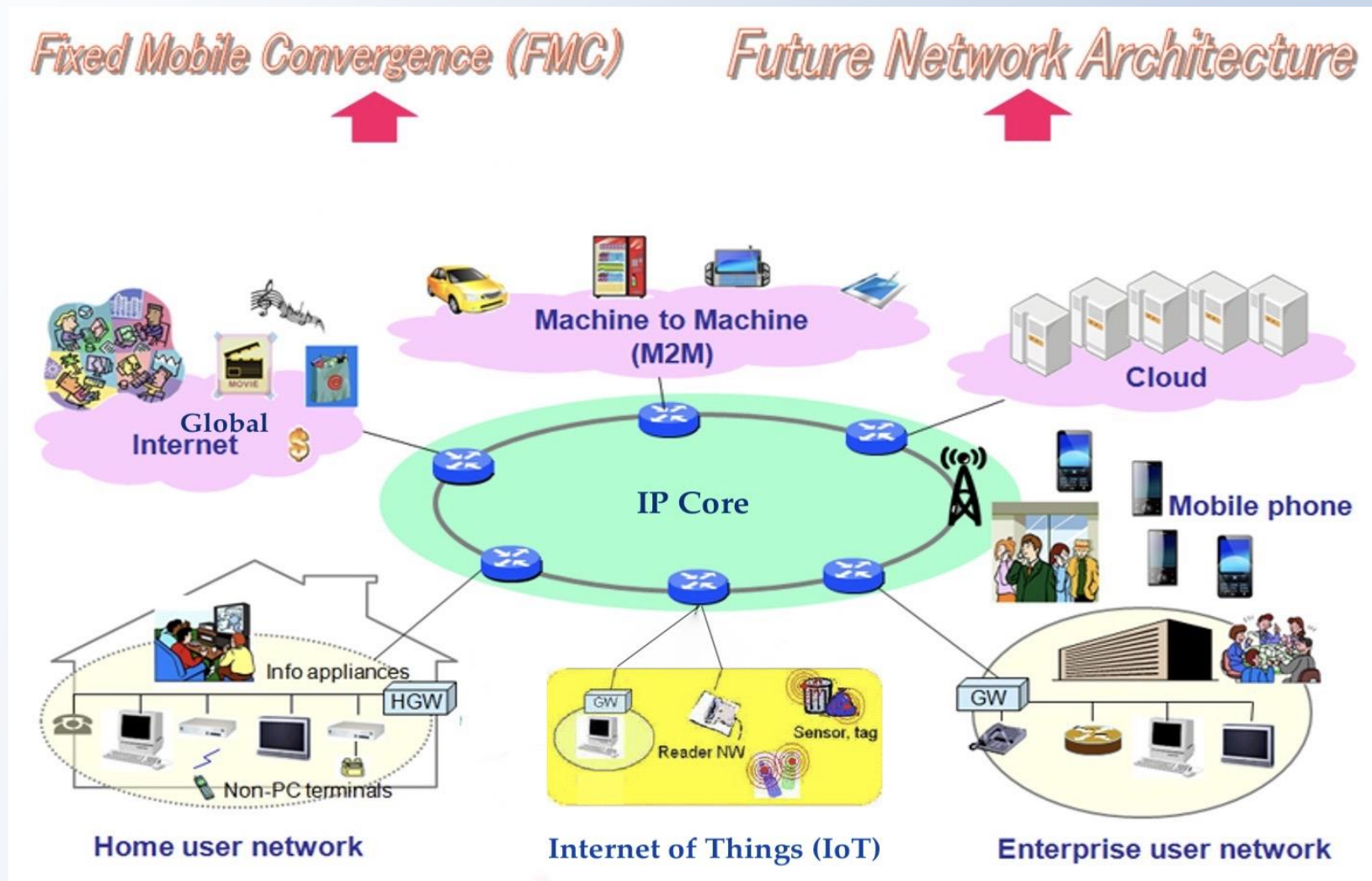


*(eMBB-napredni mobilni širokopojasni sistemi; mMTC-sistemi za masovnu komunikaciju izmedju uređaja (mašina); URLLC-sistemi sa ultra malim kašnjenjem)*

## Savremene komunikacije:

- Fiksne
- Bežične: globalno mobilne; ograničeno mobilne

Konvergencija mreža i servisa podrazumijeva ostvarivanje komunikacije bilo gdje, bilo kad i sa bilo kim, nezavisno od vrste korisničkog terminala.

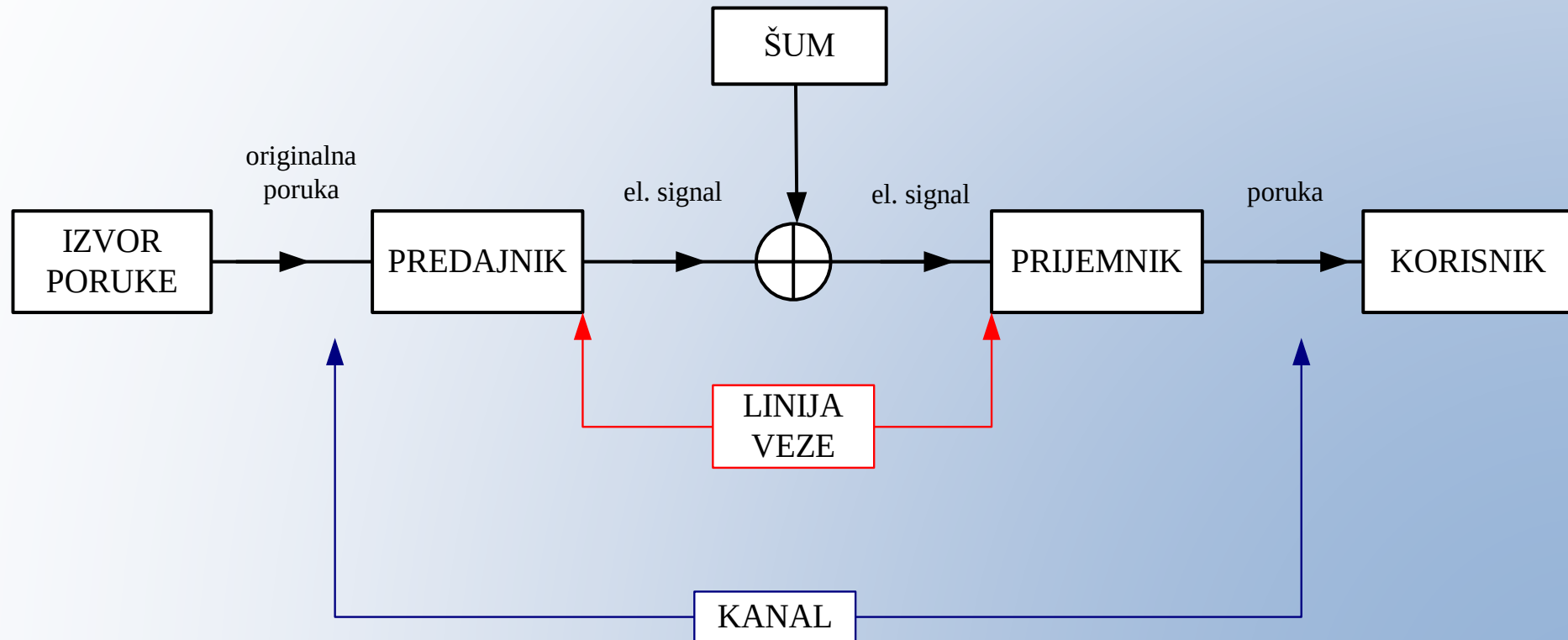


# SADRŽAJ

1. Uvod. Opšti model telekomunikacionog sistema
2. Priroda poruka i signala. Harmonijska analiza periodičnih signala
3. Analiza aperiodičnih signala i slučajnih signala
4. Prenos signala kroz linearne sisteme. Izobličenja signala
5. Prenosni putevi. Specifičnosti telekomunikacionih sistema u zavisnosti od tipa medijuma za prenos
6. Vrste prenosa signala. Pojam modulacije. Amplitudske modulacije i demodulacije
7. Multipleksiranje i tehnike višestrukog pristupa
8. Ugaona modulacija. Spektar UM signala
9. UM modulatori. Demodulacija UM signala
10. Slučajni šum. Karakteristike uskopojasnog šuma
11. Uticaj šuma na prenos amplitudski modulisanih signala
12. Uticaj šuma na prenos ugaono modulisanih signala

# MODEL KOMUNIKACIONOG SISTEMA (MREŽE)

Svaka telekomunikaciona mreža (sistem) može generalno da se predstavi različitim modelima. Jedan od uobičajenih modela za predstavljanje telekomunikacionih sistema je **Shannon**-ov model.

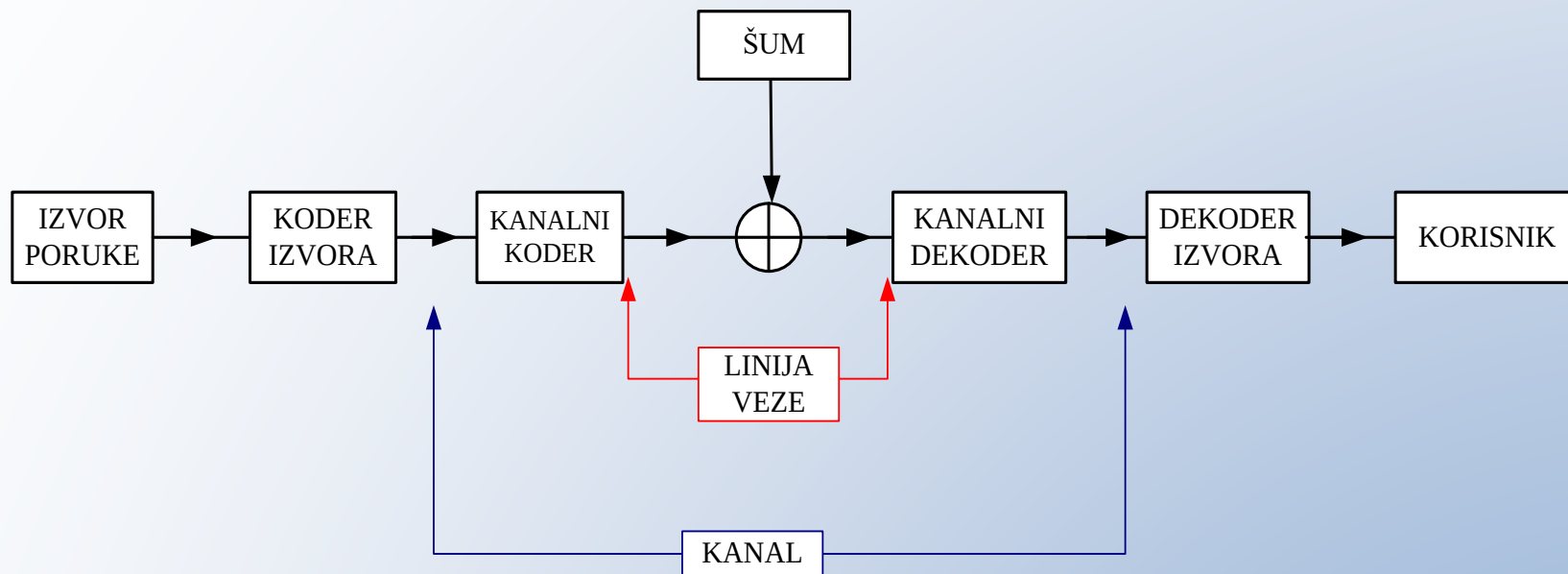




## Elementi Shannon-ovog modela:

1. **Izvor poruke** - bilo kakav objekat, operator, ... koji generiše poruke (zvuk, slika, podaci) koje treba prenijeti korisniku
2. **Predajnik** - dio telekomunikacionog sistema u kome se vrši konverzija poruke u njen električni ekvivalent koji se naziva električni signal
3. **Linija veze** (prenosni put, transmisioni medijum) - sredina kroz koju se signal prenosi od predajnika do prijemnika
4. **Šum** - smetnje slučajnog karaktera koje se mogu superponirati sa signalom duž linije veze, i na taj način uticati na oblik signala koji dolazi do prijemnika
5. **Prijemnik** - uređaj koji obavlja operaciju inverznu predajniku: transformiše primljeni signal u poruku
6. **Korisnik** - osoba, mašina ili objekat kome je poruka namijenjena

Nakon Shannon-a, koji je dao opšti model telekomunikacionih sistema, predloženi su i drugi, nešto detaljniji modeli:



- 1.Koder izvora** – sastavni dio predajnika koji treba da pretvori poruku u odgovarajući kod (niz simbola iz konačnog skupa različitih simbola)
- 2.Kanalni koder** – pretvara koderom izvora kodirnu poruku u signal
- 3.Kanalni dekoder** – primljeni signal pretvara u kodiranu poruku
- 4.Dekoder izvora** – poruku predstavljenu odgovarajućim kodom prevodi u odgovarajući oblik pogodan za korisnika

# PRIRODA PORUKA I KARAKTERISTIKE PRENOŠENIH SIGNALA

Osnovni zadatak telekomunikacionog sistema je da se poruka u vidu signala prenese na udaljeno mjesto, a da pri tome primljeni signal što je moguće više odgovara poslatom signalu. Stoga je neophodno detaljno proučiti i analizirati sve osobine signala kojima se prenose poruke između korisnika.

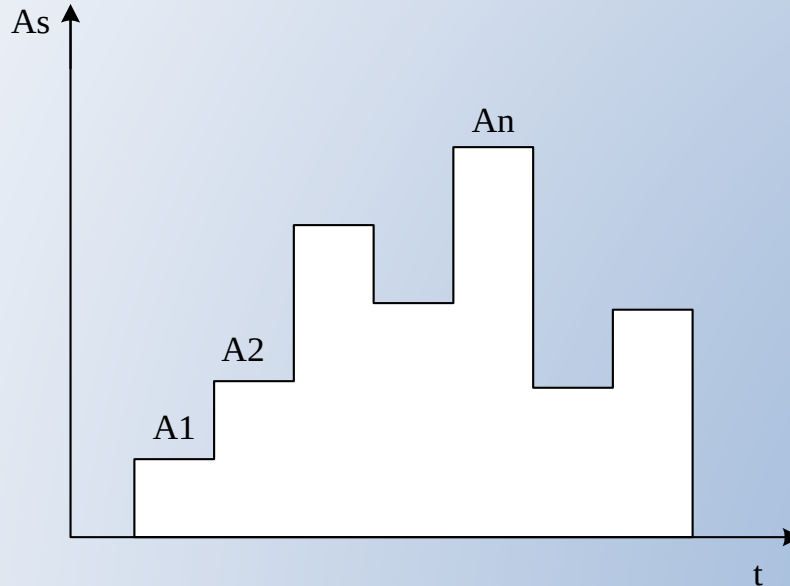
## ■ PRIRODA PORUKA

Sve poruke koje šalje neki izvor poruka možemo svrstati u dvije grupe:

1. Diskretne poruke
2. Kontinualne poruke

## Diskretne poruke

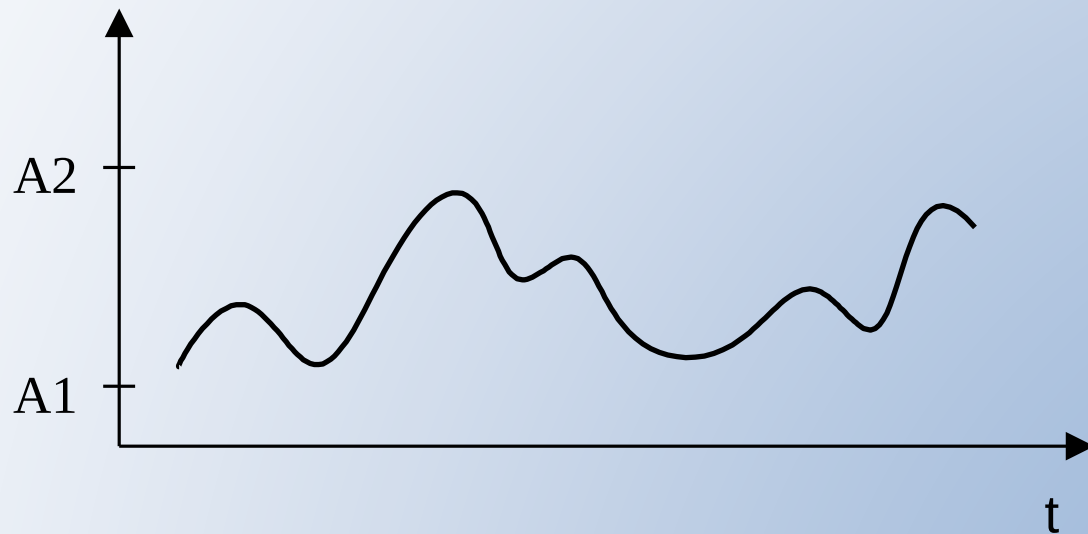
Poruke koje se pojavljuju kao nizovi odvojenih elemenata koji imaju konačan broj različitih vrijednosti. Ti elementi nazivaju se *simbolima* i pripadaju jednom konačnom skupu zvanom *alfabet*. Primjer ovakvih poruka su poruke koje se prenose u telegrafiji i računarskim komunikacijama.



*Signal koji odgovara diskretnoj poruci*

## Kontinualne poruke

Opisuju se vremenskim funkcijama koje mogu imati sve moguće vrijednosti, koje se nalaze izmedju odredjenih granica. Takve su npr. poruke koje se prenose u telefonskim sistemima ranijih generacija (analogni).



*Signal koji odgovara kontinualnoj poruci*



# Tipovi signala

U zavisnosti od vrste poruka koju predstavljaju, može se govoriti o dva tipa signala:

- ANALOGNI SIGNALI
- DIGITALNI SIGNALI

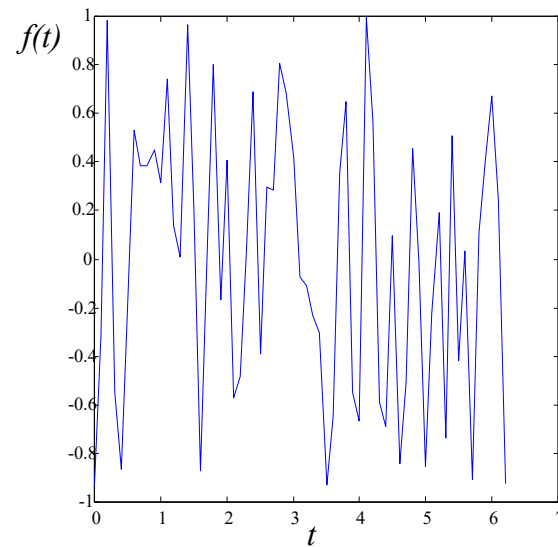
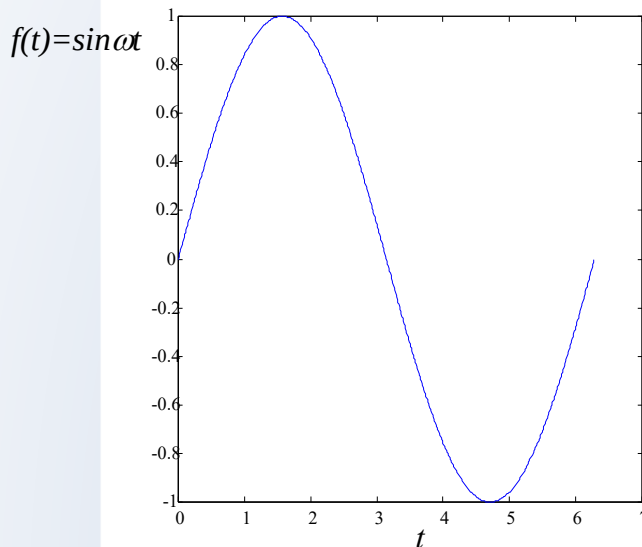
Saglasno tome, i telekomunikacioni sistemi se klasifikuju u dvije grupe:

- ANALOGNI TELEKOMUNIKACIONI SISTEMI
- DIGITALNI TELEKOMUNIKACIONI SISTEMI

# PRIRODA SIGNALA

Generalno se može govoriti o dvije grupe signala koji se pojavljuju u komunikacionim sistemima:

- determinističkim, čije su vrijednosti u vremenu opisane preciznim analitičkim izrazom;
- slučajnim, za koje nije moguće definisati odgovarajući analitički izraz kojim bi se unaprijed opisao njihov vremenski tok.



# ANALIZA DETERMINISTIČKIH SIGNALA

Deterministički signali se mogu podijeliti u dvije grupe:

1. **Periodični**

2. **Aperiodični**

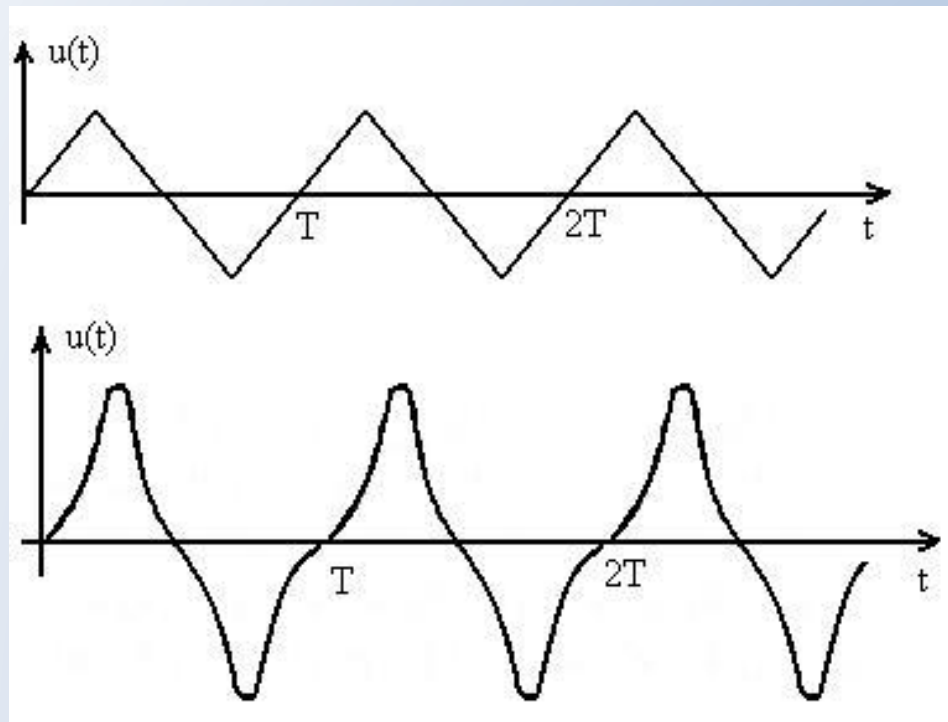
U ispitivanju osobina determinističkih signala koristi se harmonijska analiza. Harmonijska analiza ima za cilj da prikaže signal u domenu učestanosti, a zasniva se na teoriji Fourier-ovih redova i Fourier-ove transformacije. Za periodične signale se primjenjuje analiza pomoću ***Fourier-ovih redova***, a za aperiodične ***Fourier-ova transformacija***.

# HARMONIJSKA ANALIZA PERIODIČNIH SIGNALA

Periodičan je svaki signal koji zadovoljava uslov:

$$f(t) = f(t+T)$$

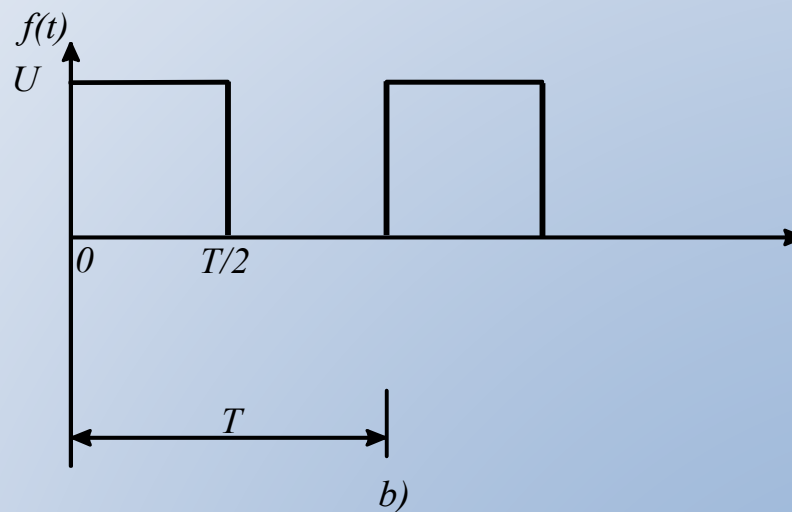
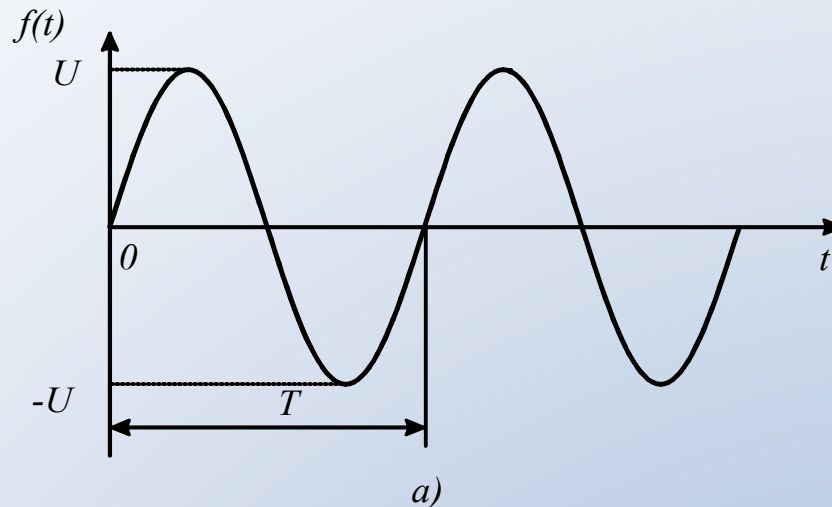
gdje je  $T$  perioda signala  $f(t)$ .



*Primjeri periodičnih signala:*

*a) sinusni signal;*

*b) povorka pravougaonih impulsa.*



Harmonijska analiza omogućava analizu signala u domenu učestanosti i to uvođenjem pojma kompleksnog spektra signala, koji se definiše korišćenjem teorije Fourier-ovih redova.

Da bi se periodična funkcija razvila u Fourier-ov red mora biti zadovoljen Dirichlet-ov uslov:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty$$

Fourier-ov red tada može imati jedan od sledećih oblika:

1. 
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$T = 2\pi/\omega_0$  je *perioda*,  $\omega_0 = 2\pi f_0$  *osnovna kružna učestanost*,  $a_n$  i  $b_n$  *Fourierovi koeficijenti*.



2.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n),$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

3.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t},$$

Kako je:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \quad \sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

To je:

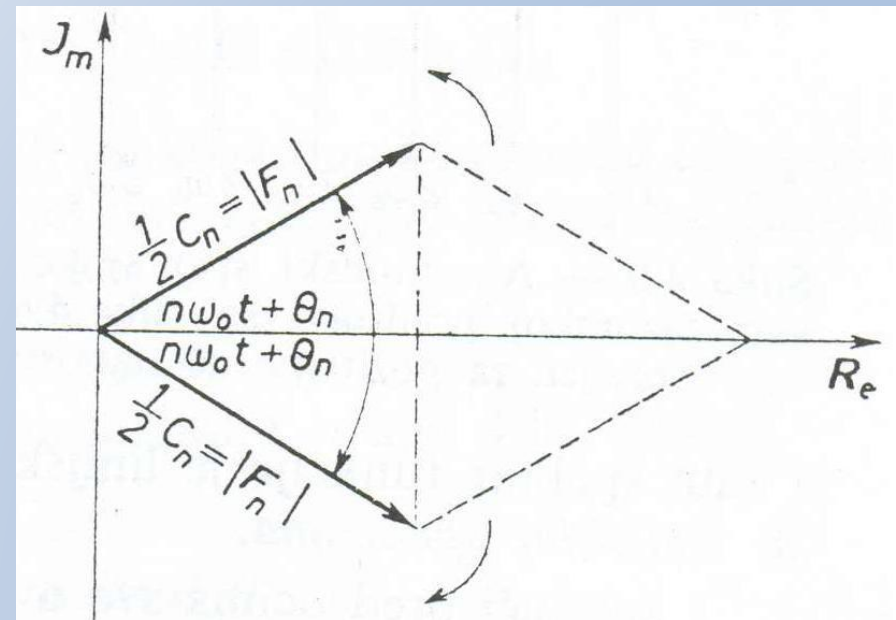
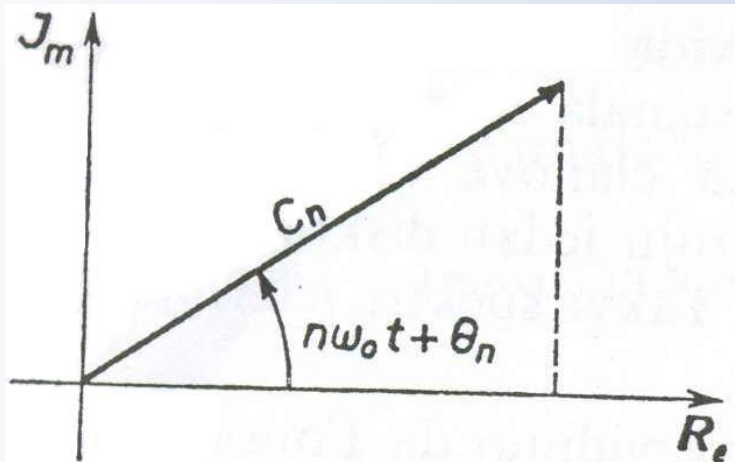
$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = |F_n|e^{j\theta_n} \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Veza izmedju amplituda harmonika  $C_n$  i modula kompleksne veličine  $F_n$  data je izrazom:

$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} C_n$$

Fourier-ova transformacija  $F_n$  naziva se **kompleksnim spektrom** signala koga u vremenskom domenu predstavlja funkcija  $f(t)$ . Moduo  $F_n$  se naziva **amplitudski**, a njen argument  $\theta_n$  **fazni spektar** signala  $f(t)$ .

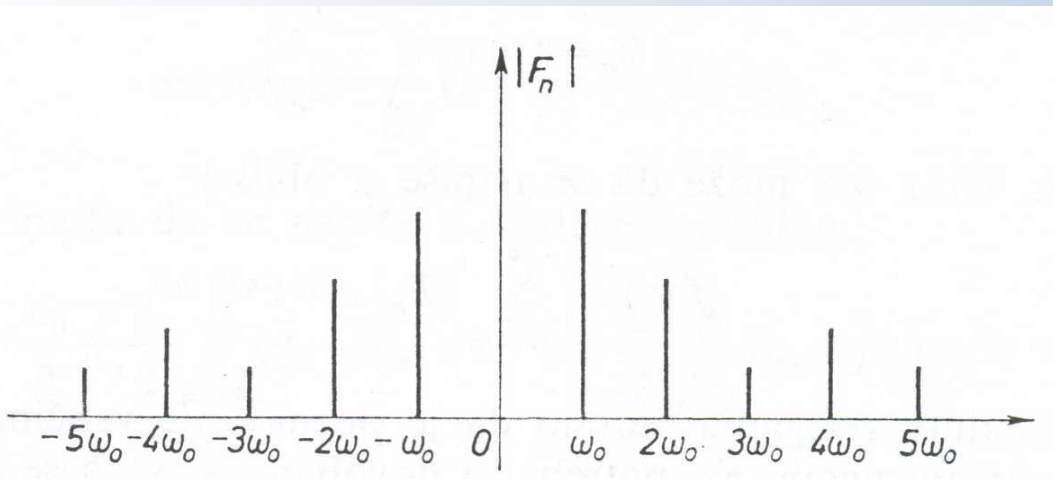
- Fazorska predstava:



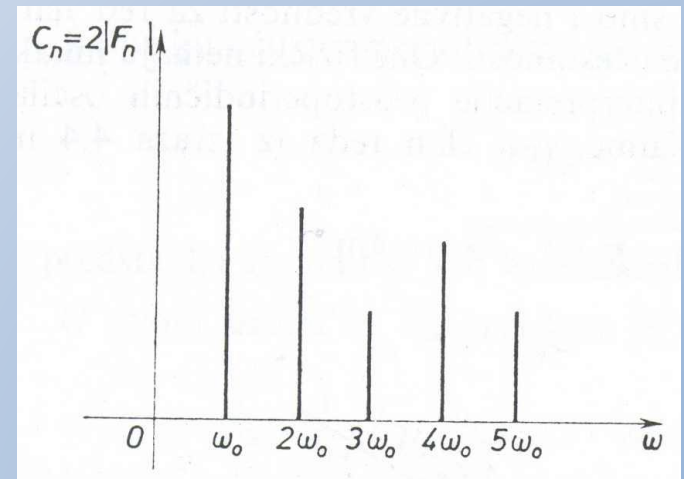
Uobičajeno je da se vrši grafičko prikazivanje signala u domenu učestanosti, i to posebno amplitudskog i faznog spektra. Postoje dva načina:

1. i za pozitivne i negativne učestanosti
2. samo za pozitivne učestanosti, s tim što je amplituda odgovarajućeg harmonika 2 puta veća.

Kompleksni spektri periodičnih signala su uvijek diskretni, pa se nazivaju **diskretnim** ili **linijskim** spektrima.



*Dvostrani amplitudski spektar*

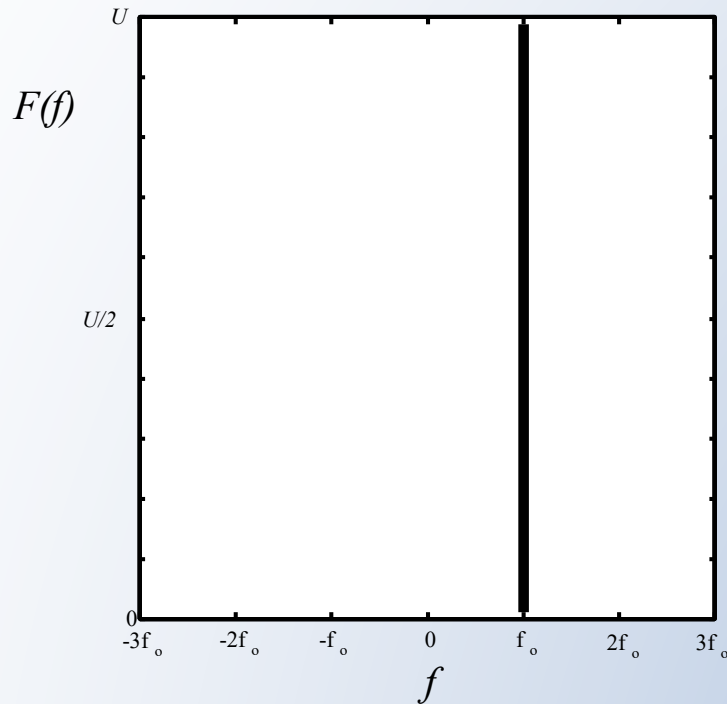


*Jednostrani amplitudski spektar*

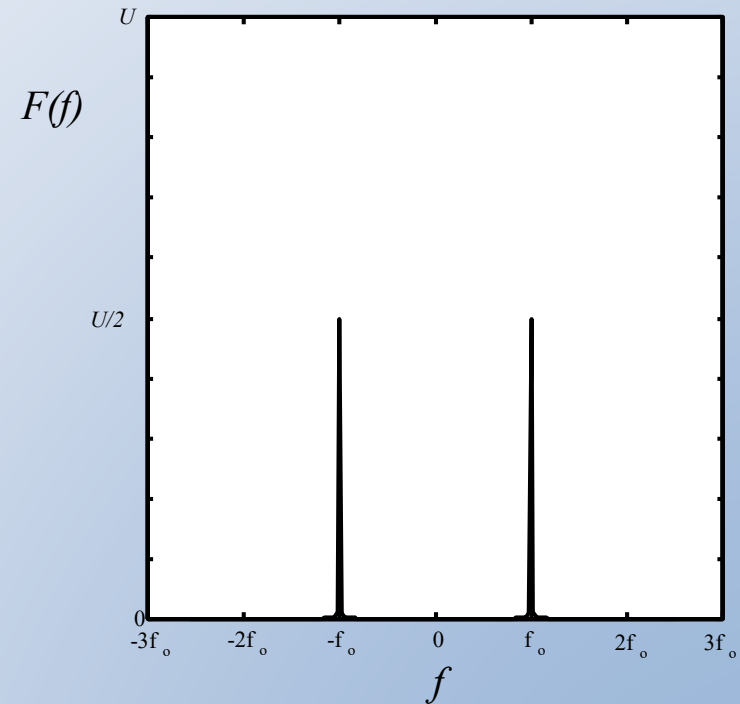
$f(t)$  - opisuje signal u domenu vremena  
 $F_n$  - opisuje signal u domenu učestanosti

$$f(t) \longleftrightarrow F_n$$

## Fourierov transformacioni par



*Jednostrani amplitudski spektar  
prostoperiodičnog signala*



*Dvostrani amplitudski spektar  
prostoperiodičnog signala*

Bitna karakteristična veličina periodičnog signala  $f(t)$  je njegova **efektivna vrijednost**:

$$\begin{aligned}
 [\text{Ef.vrijedn ost } f(t)] &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt} \\
 [\text{Ef.vrijedn ost } f(t)]^2 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right) dt = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \\
 [\text{Ef.vrijedn ost } f(t)]^2 &= \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}
 \end{aligned}$$

Poslednja relacija je poznata kao **Parsevalova teorema** za periodične signale:

- Kvadrat efektivne vrijednosti brojno je jednak snazi koju taj signal razvija na otporniku od jednog oma.
- Ukupna srednja snaga složenog signala jednaka je sumi snaga svih njegovih harmonika.

# KORELACIJA PERIODIČNIH SIGNALA

U opštoj harmonijskoj analizi periodičnih signala poseban značaj ima pojam **korelacije** koja povezuje dva periodična signala.

Neka su signali opisani funkcijama  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  koje imaju istu periodu  $T=2\pi/\omega_0$ .

Fourier-ove transformacije ovih funkcija su:

$$F_{n1} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$F_{n2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Njihova korelacija se definiše na sledeći način:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t + \tau) dt, \quad -\infty < \tau < \infty$$

$\tau$  predstavlja kontinualni pomjeraj u vremenu u intervalu od  $-\infty$  do  $\infty$ , pri čemu  $\tau$  ne zavisi od  $t$ .



Traženje korelacije dva signala podrazumijeva tri koraka:

1. Pomjeranje jedne od funkcija u vremenu za  $\tau$
2. Množenje te pomjerene funkcije drugom funkcijom iste periode
3. Izračunavanje srednje vrijednosti tog proizvoda u toku jedne periode

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t + \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n2} e^{jn\omega_0(t+\tau)} \right) dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n2} e^{jn\omega_0\tau} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n1}^* F_{n2} e^{jn\omega_0\tau} \end{aligned}$$

Funkcija  $R_{12}(\tau)$  je periodična funkcija po  $\tau$ , sa periodom  $T=2\pi/\omega_0$  i njen kompleksni spektar je proizvod  $F_{n1}^* F_{n2}$ . Stoga važi:

$$F_{n1}^* F_{n2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

$R_{12}(\tau)$  i  $F_{n1}^* F_{n2}$  obrazuju Fourier-ov transformacioni par. Ovaj stav se naziva **teoremom o korelaciji** periodičnih funkcija. Uvedena funkcija  $R_{12}(\tau)$  se naziva **korelaciona funkcija (unakrsna korelacija)**.

Posmatrajmo specijalan slučaj korelacije dva identična signala  $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$ .

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t+\tau) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* F_n e^{jn\omega_0\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 e^{jn\omega_0\tau}$$

Ovako definisana korelaciona funkcija se naziva **autokorelaciona funkcija**.  
Njena vrijednost za  $\tau=0$  je:

$$R_{11}(0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

Ovo je analitički izraz za Parsevalovu teoremu.

Kako je  $|F_n|^2$  snaga  $n$ -tog harmonika na jediničnom otporniku, veličina

$$S_{11}(n\omega_0) = |F_n|^2$$

se naziva **spektar snage** signala  $f(t)$ .

Shodno navedenim izrazima, dobija se:

$$R_{11}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{11}(n\omega_0) e^{jn\omega_0\tau}$$

Odnosno:

$$S_{11}(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{11}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

Autokorelaciona funkcija  $R_{11}(\tau)$  i spektar snage  $S_{11}(n\omega_0)$  funkcije  $f(t)$  čine Fourier-ov transformacioni par.

Ovaj stav se naziva ***teorema o autokorelaciji periodičnih funkcija***.

Neke osobine autokorelacione funkcije  $R_{11}(\tau)$ :

- Iz izraza za spektar snage  $S_{11}(n\omega_0)$  vidi se da on ne zavisi od početnog faznog stava pojedinih harmonika. Pošto je  $S_{11}(n\omega_0)$  istovremeno i kompleksni spektar autokorelacione funkcije  $R_{11}(\tau)$ , to znači da ***sve periodične funkcije koje imaju iste amplitude harmonika, a međusobno se razlikuju po početnim faznim stavovima, imaju istu autokorelacionu funkciju.***

-  $R_{11}(\tau)$  je ***periodična funkcija*** čija je perioda jednaka periodi funkcije  $f(t)$ , tj.  $T=2\pi/\omega_0$ .

-  $R_{11}(\tau)$  je ***parna funkcija***, što se lako dokazuje:

$$R_{11}(-\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t-\tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}-\tau} f(x) f(x+\tau) dx = R_{11}(\tau)$$

Funkcija  $R_{12}(\tau)$  nazvana je korelacionom funkcijom, a nekada se, da bi se istaklo da je riječ o dvije periodične funkcije istih perioda, za razliku od autokorelacione funkcije, ona naziva i ***unakrsnom (kroskorelacionom)*** funkcijom. Njen kompleksni spektar:

$$S_{12}(n\omega_0) = F_{n1}^* F_{n2}$$

se naziva spektrom ***unakrsne snage***.

Neke osobine kroskorelacione funkcije  $R_{12}(\tau)$ :

- Za kroskorelacionu funkciju bitan je redosled indeksa, tj. važi:

$$R_{12}(-\tau) = R_{21}(\tau)$$

kao i:

$$S_{21}(n\omega_0) = F_{n2}^* F_{n1} = S_{12}^*(n\omega_0)$$

- U opštem slučaju  $S_{12}(n\omega_0)$  je kompleksna veličina za razliku od  $S_{11}(n\omega_0)$  koja je uvijek realna veličina.

## KONVOLUCIJA PERIODIČNIH SIGNALA

Ako imamo dva periodična signala  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  iste periode  $T=2\pi/\omega_0$ , tada integral:

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(\tau - t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n1} F_{n2} e^{jn\omega_0\tau}$$

predstavlja funkciju **konvolucije** signala  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$ . Lako se pokazuje da važi:

$$F_{n1} F_{n2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rho_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

***Teorema o konvoluciji periodičnih funkcija:***

Konvolucija  $\rho_{12}(\tau)$  funkcija  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  i proizvod njihovih kompleksnih spektara  $F_{n1} F_{n2}$  obrazuju Fourier-ov transformacioni par.



Slično korelaciji i kod konvolucije imamo tri operacije:

1. Pomjeranje funkcije  $f_2(t)$  u vremenu za  $\tau$  i njeno preslikavanje simetrično u odnosu na ordinatnu osu
2. Množenje tako dobijene funkcije sa periodičnom funkcijom  $f_1(t)$
3. Izračunavanje srednje vrijednosti tog proizvoda u toku jedne periode

Osobine konvolucije:

- Konvolucija periodičnih funkcija je periodična funkcija čija je perioda jednaka periodi signala  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$ , a njen kompleksni spektar je jednak proizvodu  $F_{n1}F_{n2}$ .

- Važi relacija:

$$\rho_{12}(\tau) = \rho_{21}(\tau)$$