

# UGAONA MODULACIJA

- Ugaona modulacija spada u nelinearne postupke modulacije
- Dobijeni modulirani signal je kontinualan
- Kao i u slučaju amplitudske modulacije, nosilac ima sinusoidalni talasni oblik
- Osnovni parametri nosioca su amplituda i ugao
- U postupku **amplitudske** modulacije **amplituda** nosioca je modifikovana u zavisnosti od modulišućeg signala, a ugao ostaje nepromijenjen.
- U postupku ugaone modulacije amplituda nosioca ostaje nepromijenjena, a njegov ugao se modifikuje modulišućim signalom i postaje karakterističan parametar u kome je sadržana prenošena poruka.

Nosilac:

$$u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

AM                      FM                      PM

Ako fazu učinimo direktno zavisnom od modulišućeg signala:

$$\varphi = \varphi(t) = \gamma [u_m(t)]$$

Opšti izraz za ugaono modulisan signal glasi:

$$u(t) = U_0 \cos \Phi(t) = U_0 \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] = U_0 \cos \{\omega_0 t + \gamma [u_m(t)]\}$$

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + \gamma [u_m(t)] = \Phi_0 + \gamma [u_m(t)] = \Phi_i$$

naziva se **trenutna faza**.

Veličina:

$$\varphi(t) = \gamma [u_m(t)] = \delta \Phi_i$$

koja predstavlja odstupanje trenutne faze  $\Phi_i$  od vrijednosti  $\Phi_0 = \omega_0 t$  zove se **trenutna devijacija faze**.

Izvod trenutne faze  $\Phi_i = \Phi(t)$  po vremenu:

$$\omega_i = \frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

naziva se **trenutna kružna učestanost** ugaono modulisanog signala.

Odstupanje trenutne kružne učestanosti  $\omega_i$  od kružne učestanosti nosioca  $\omega_0$ :

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_i - \omega_0 = \delta\omega_i$$

**trenutna devijacija kružne učestanosti** ugaono modulisanog signala.

*Trenutna učestanost* ugaono modulisanog signala je:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \omega_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Odstupanje trenutne učestanosti  $f_i$  od učestanosti nosioca  $f_0$ :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f_i - f_0 = \delta f_i$$

naziva se ***trenutna devijacija učestanosti***.

Preko navedenih veličina možemo da definišemo da li je riječ o faznoj ili frekvencijskoj modulaciji:

1. Ako je trenutna devijacija faze proporcionalna modulišućem signalu, riječ je o ***faznoj modulaciji*** ( $\Phi M$ ,  $P M$ ).
2. Ako je trenutna devijacija učestanost proporcionalna modulišućem signalu, riječ je o ***frekvencijskoj modulaciji*** ( $F M$ ).

# FAZNA I FREKVENCIJSKA MODULACIJA

1. Fazno modulirani signal je onaj čija je trenutna devijacija faze proporcionalna modulišućem signalu.

$$\delta \Phi_i = \varphi(t) = k_\varphi u_m(t), \quad k_\varphi = \text{const.}$$

Modulišući signal  $u_m(t)$  je:

$$u_m(t) = U_m m(t)$$

$$U_m = |u_m(t)|_{\max}$$

Vremensku promjenu modulišućeg signala  $u_m(t)$  karakteriše normalizovana funkcija  $m(t)$  koja zadovoljava uslov da je  $|m(t)| < 1$ ,  $|m(t)|_{\max} = 1$ . Stoga je:

$$|\delta \Phi_i|_{\max} = |\varphi(t)|_{\max} = k_\varphi |u_m(t)|_{\max} = k_\varphi |U_m m(t)|_{\max} = k_\varphi U_m = \Delta \Phi_0$$

Veličina  $\Delta \Phi_0$  naziva se **maksimalna devijacija faze** ili **devijacija faze**.

$$\Phi_i = \Phi(t) = \omega_0 t + k_\varphi u_m(t) = \omega_0 t + \Delta \Phi_0 m(t)$$

Konačno, izraz za fazno modulisan signal glasi:

$$u(t) = U_0 \cos \Phi(t) = U_0 \cos [\omega_0 t + k_\varphi u_m(t)] = U_0 \cos [\omega_0 t + \Delta \Phi_0 m(t)]$$

2. Frekvencijski modulisan signal je onaj čija je trenutna devijacija učestanosti proporcionalna modulišućem signalu.

$$\delta f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_f u_m(t); \quad k_f = \text{const.}$$

**Maksimalna devijacija učestanosti**, ili često samo **devijacija učestanosti** biće:

$$|\delta f_i|_{\max} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{\max} = k_f |u_m(t)|_{\max} = k_f |U_m m(t)|_{\max} = k_f U_m = \Delta f_0$$

Ako je riječ o kružnoj učestanosti, trenutna devijacija kružne učestanosti je:

$$\delta\omega_i = \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_\omega u_m(t); \quad k_\omega = 2\pi k_f = \text{const.}$$

Veličina

$$|\delta\omega_i|_{\max} = \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{\max} = k_\omega |u_m(t)|_{\max} = k_\omega |U_m m(t)|_{\max} = k_\omega U_m = \Delta\omega_0$$

naziva se **maksimalna devijacija kružne učestanosti** ili **devijacija kružne učestanosti**.

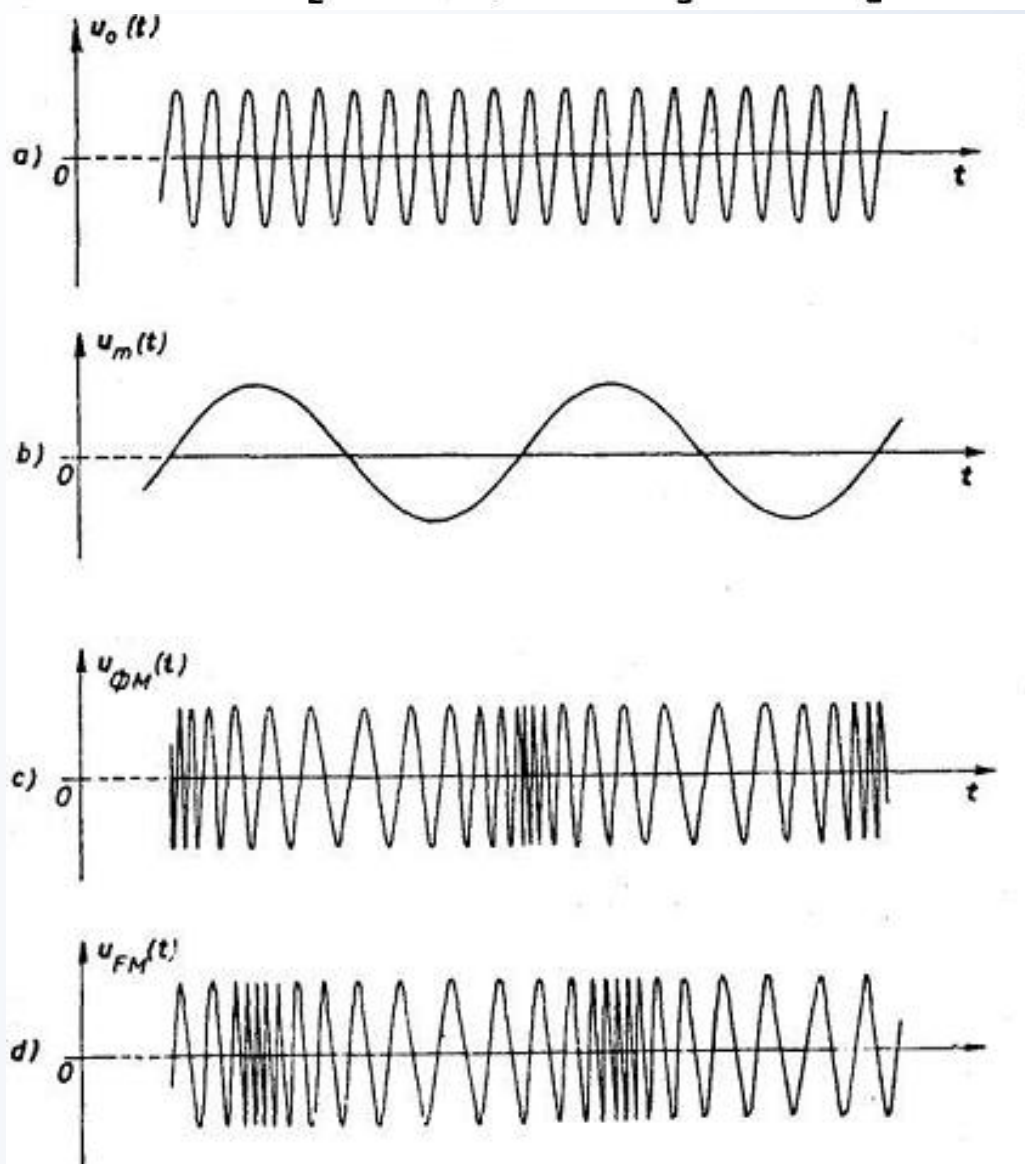
Trenutna kružna učestanost je:

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + k_\omega u_m(t) = \omega_0 + k_\omega U_m m(t) = \omega_0 + \Delta\omega_0 m(t)$$



Sada je izraz za frekvencijski modulisani signal:

$$u(t) = U_0 \cos \left[ \omega_0 t + k_\omega \int u_m(t) dt \right] = U_0 \cos \left[ \omega_0 t + \Delta\omega_0 \int m(t) dt \right]$$



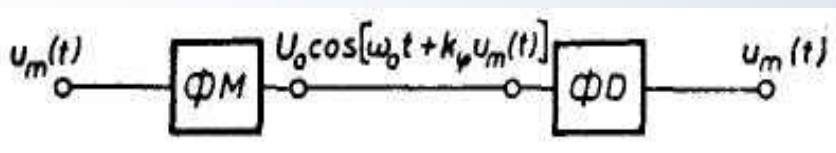
*Slika: a) Nosilac; b) modulišući signal; c) fazno modulisan signal; d) frekvencijski modulisan signal*

# OPŠTA VEZA IZMEĐU FAZNE I FREKVENCIJSKE MODULACIJE

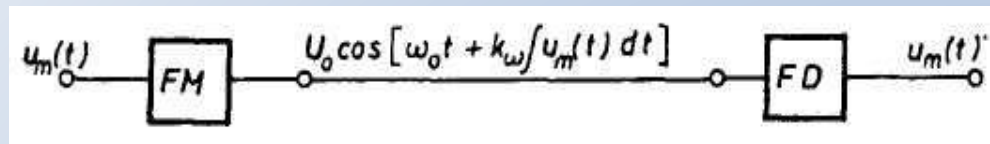
Na slici su prikazane blok-šeme sistema za prenos signala faznom i frekvencijskom modulacijom.

$\Phi M$  - fazni modulator;  $\Phi D$  - fazni demodulator

$FM$  - frekvencijski modulator;  $FD$  - frekvencijski demodulator



*Slika: Blok-šema za prenos signala faznom modulacijom*



*Slika: Blok-šema za prenos signala frekvencijskom modulacijom*

Na izlazu iz faznog modulatora trenutna devijacija faze nosioca direktno je srazmjerna modulišućem signalu, a na izlazu frekvencijskog modulatora trenutna devijacija faze nosioca proporcionalna je integralu modulišućeg signala.

Što se tiče demodulatora, fazni demodulator na svom izlazu mora dati signal direktno srazmjeran trenutnoj devijaciji faze nosioca na njegovom ulazu, dok frekvencijski demodulator daje signal direktno proporcionalan izvodu trenutne devijacije faze nosioca na svom ulazu.

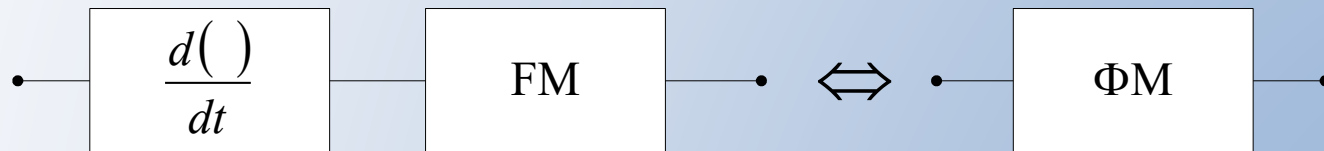
Imajući u vidu odnose između trenutne devijacije faze nosioca i prenošenog signala u modulatoru i demodulatoru, koji karakterišu opštu vezu između fazne i frekvencijske modulacije, moguće je upotrebom posebnih sklopova od faznog modulatora/ demodulatora napraviti frekvencijski i obrnuto.

1.  $\Phi M$  = diferencijator + F M
2.  $\Phi D$  = FD + integrator
3. FM = integrator +  $\Phi M$
4. FD =  $\Phi D$  + diferencijator

1. Ako na ulaz FM modulatora dovedemo signal  $du_m(t)/dt$  izlaz iz modulatora će biti:

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + k_\omega u_m(t)) = u_{\Phi M}(t)$$

tj.  $\Phi M$  modulator će biti kaskadna veza diferencijatora i FM modulatora.

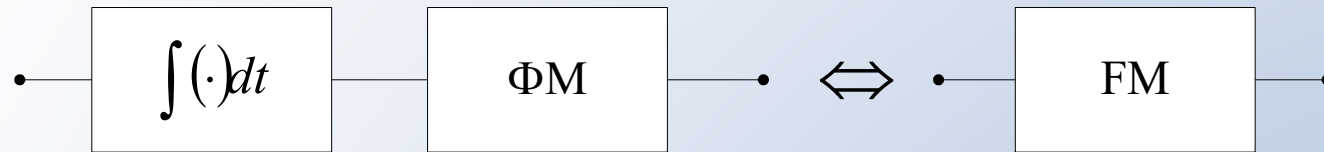


2. Demodulacija je inverzan proces:

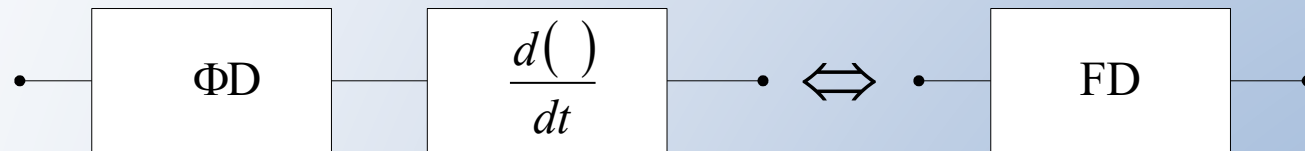




3. Ako signal prije ulaska u  $\Phi M$  modulator prođe kroz kolo za integriranje, na izlazu sistema dobiće se modulisan signal čija je trenutna devijacija faze direktno srazmjerna integralu modulišućeg signala, a to je u stvari frekvencijski modulisani signal.



4. Demodulacija je inverzan proces:



## SPEKTAR UGAONO MODULISANIH SIGNALA

Proces amplitudske modulacije se sastoji u translaciji spektra modulišućeg signala, odnosno, svakoj komponenti iz spektra modulišućeg signala čija je učestanost  $f_m$ , u spektru AM signala odgovaraju dvije komponente simetrično smještene u odnosu na nosilac:  $f_0 + f_m$  i  $f_0 - f_m$ . Proces amplitudske modulacije je **linearan** jer važi zakon superpozicije komponenata. Bitna osobina spektra AM signala je da nema generisanja novih komponenata čije su učestanosti različite od onih koje su nastale opisanom translacijom.

Kod ugaone modulacije to nije slučaj.

- Komponente iz spektra ugaono modulisanog signala vrlo su složeno vezane za komponente modulišućeg signala.
- Spektar UM signala je, čak i u najjednostavnijem slučaju (modulišućí signal je jedna sinusoidalna funkcija), **neograničen**, tj. u procesu ugaone modulacije jedna komponenta generiše beskonačno mnogo komponenti različitih učestanosti.
- Proces ugaone modulacije je u suštini **nelinearan** i zato zakon superpozicije ne važi.

## Spektar UM signala kada je modulišući signal u obliku sinusoidalnog test tona

Pretpostavimo da je modulišući signal dat jednostavnim analitičkim izrazom:

$$u_m(t) = U_m \cos \omega_m t$$

Izraz za fazno i frekvencijski modulisan signal ovakvim modulišućim signalom je:  $u_{\Phi M}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + k_\phi U_m \cos \omega_m t)$

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos\left(\omega_0 t + k_\omega \frac{U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t\right)$$

Odnosno, dovoljno je razmatrati sledeći slučaj:

$$u_{UM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \omega_m t)$$

Veličina  $m$  predstavlja maksimalnu devijaciju faze ugaono modulisanog signala, naziva se **indeks ugaone modulacije**, i za slučaj fazno modulisanog signala iznosi:

$$m = k_\phi U_m$$

a za slučaj frekvencijski modulisanog signala on je:

$$m = \frac{k_\omega U_m}{\omega_m}$$

Izraz za UM signal može da se predstavi u vidu sume prostoperiodičnih komponenti, a za to se koriste određeni identiteti iz teorije Bessel-ovih funkcija. Važi da je:

$$\sin(\alpha + m \sin \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \sin(\alpha + n\beta)$$

$$\cos(\alpha + m \sin \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos(\alpha + n\beta)$$

$$\sin(\alpha + m \cos \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \sin\left(\alpha + n\beta + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha + m \cos \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos\left(\alpha + n\beta + n\frac{\pi}{2}\right)$$

gdje je  $J_n(m)$  Bessel-ova funkcija prve vrste  $n$ -tog reda za argument  $m$ .

Sada je UM signal:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \omega_m t) = U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos\left[(\omega_0 + n\omega_m)t + n\frac{\pi}{2}\right]$$

Ovaj izraz može da se zapiše i u obliku:

$$u(t) = U_0 \left\{ J_0(m) \cos \omega_0 t + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(m) \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

Kako za Bessel-ove funkcije važi:

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$$

$$\cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t - n \frac{\pi}{2} \right] = (-1)^n \cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right]$$

To izraz za UM signal postaje:

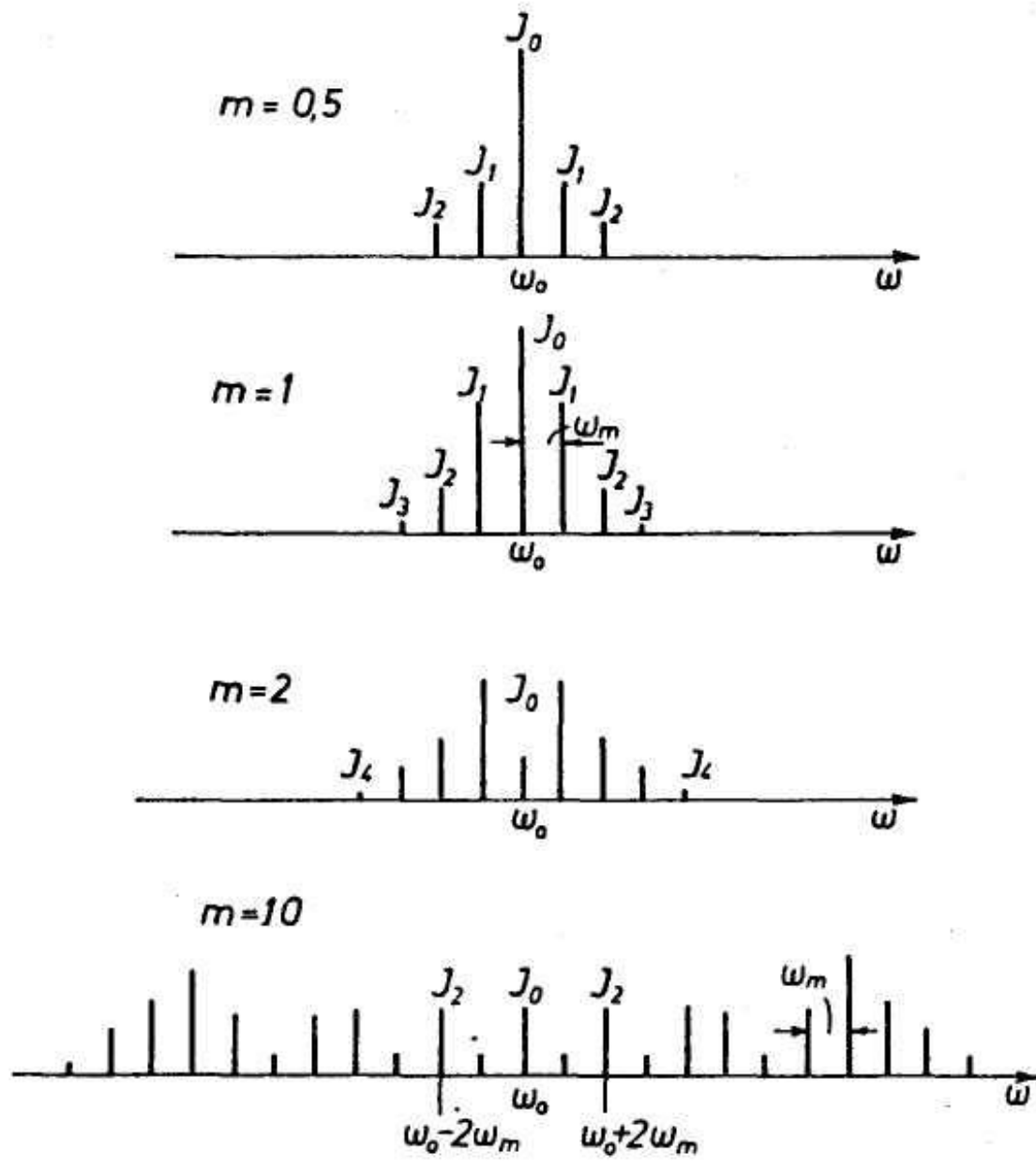
$$u(t) = U_0 J_0(m) \cos \omega_0 t + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \left\{ \cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t + \frac{n \pi}{2} \right] + \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

Za dati indeks modulacije  $m$  i za izabranu vrijednost  $n=1, 2, 3...$ , Bessel-ova funkcija  $J_n(m)$  predstavlja konstantu. U izrazu koji predstavlja ugaono modulisan signal razlikujemo tri dijela:

1. Nosilac čija je amplituda  $U_0 J_0(m)$  a učestanost  $\omega_0$
2. Beskonačno mnogo komponenti oblika  $U_0 J_n(m) \cos(\omega_0 - n \omega_m) t$
3. Beskonačno mnogo komponenti oblika  $U_0 J_n(m) \cos(\omega_0 + n \omega_m) t$

Vidimo da je spektar **neograničen** i **diskretan**, a komponente se nalaze lijevo i desno od nosioca, pri čemu je razmak između dvije susjedne komponente u spektru  $\omega_m$ .





*Slika: Amplitudski spektri ugaono modulisanog signala sinusoidalnim test tonom za razne vrijednosti indeksa modulacije  $m$ .*

## Spektar UM signala kada je modulišući signal u obliku sume dva sinusoidalna test tona

Kada je modulišući signal suma dva sinusoidalna test tona, UM signal je oblika:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m_1 \cos \omega_1 t + m_2 \cos \omega_2 t)$$

$m_1$  i  $m_2$  su indeksi modulacije komponenti čije su učestanosti  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .

Gornji izraz za UM signal može da se zapiše i u obliku:

$$u(t) = U_0 \cos \left[ \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t \right) + \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t \right) \right]$$

$$\begin{aligned} u(t) = & U_0 \cos \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t \right) \cos \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t \right) - \\ & - U_0 \sin \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t \right) \sin \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t \right) \end{aligned}$$

Koristeći izraze za Bessel-ove funkcije, dobija se:

$$u(t) = U_0 \left[ \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \right] \left[ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(m_2) \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) \right] - \\ - U_0 \left[ \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \right] \left[ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(m_2) \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$u(t) = U_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) J_q(m_2) \left[ \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ \left. - \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

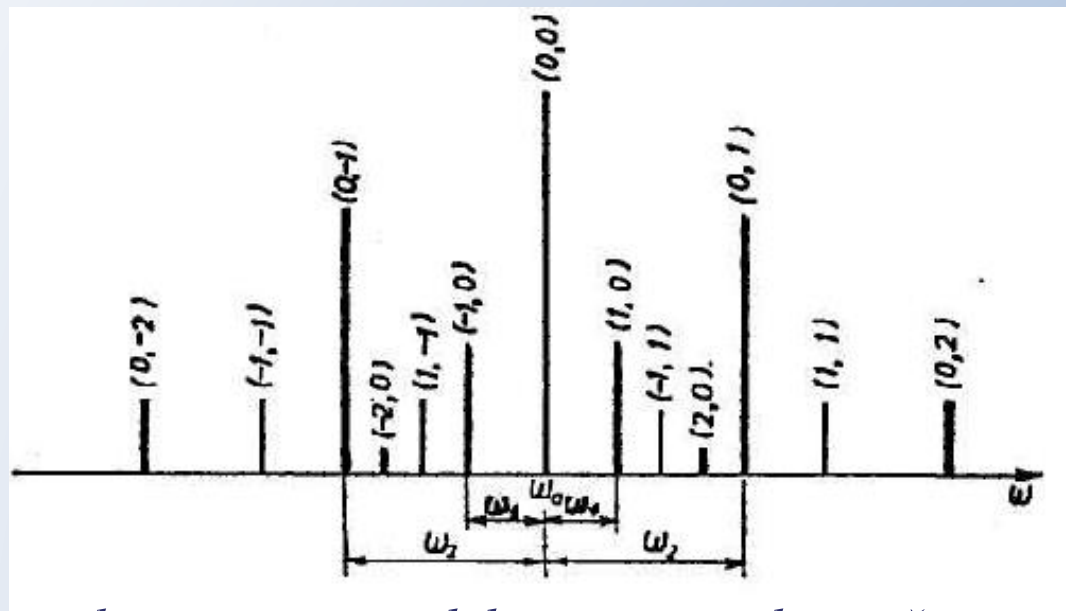
Izraz u srednjoj zagradi predstavlja razvijeni oblik kosinusa sume dva ugla, pa je:

$$u(t) = U_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) J_q(m_2) \cos \left[ (\omega_0 + p \omega_1 + q \omega_2) t + (p + q) \frac{\pi}{2} \right]$$

Spektar ovakvog ugaono modulisanog signala je diskretan.

Sve njegove komponente možemo podijeliti u četiri kategorije:

1.  $p=q=0$ , nosilac
2.  $p=0, q \neq 0$ ; Komponente na učestanostima  $\omega_0 + p\omega_1$  koje bi se dobile kada bi u modulišućem signalu figurisala samo jedna sinusoida,  $m_1 \cos \omega_1 t$
3.  $p \neq 0, q=0$ ; Komponente na učestanostima  $\omega_0 + q\omega_2$  koje bi se dobile kada bi u modulišućem signalu figurisala samo jedna sinusoida,  $m_2 \cos \omega_2 t$
4.  $p \neq 0, q \neq 0$ ; Komponente na učestanostima  $\omega_0 + p\omega_1 + q\omega_2$  koje predstavljaju komponente nastale uslijed međusobnog uticaja dvije sinusoide.



Slika: Amplitudski spektar ugaono modulisanog signala pri čemu je modulišućí signal sastavljen od sume dva sinusoidalna test tona čije su učestanosti  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , a odgovarajućí indeksi modulacije  $m_1=0,5$  i  $m_2=1$

# ANALIZA SPEKTRA UGAONO MODULISANIH SIGNALA

Amplitude pojedinih spektralnih komponenti ugaono modulisanog signala zavise od Bessel-ovih funkcija  $J_n(m)$ .

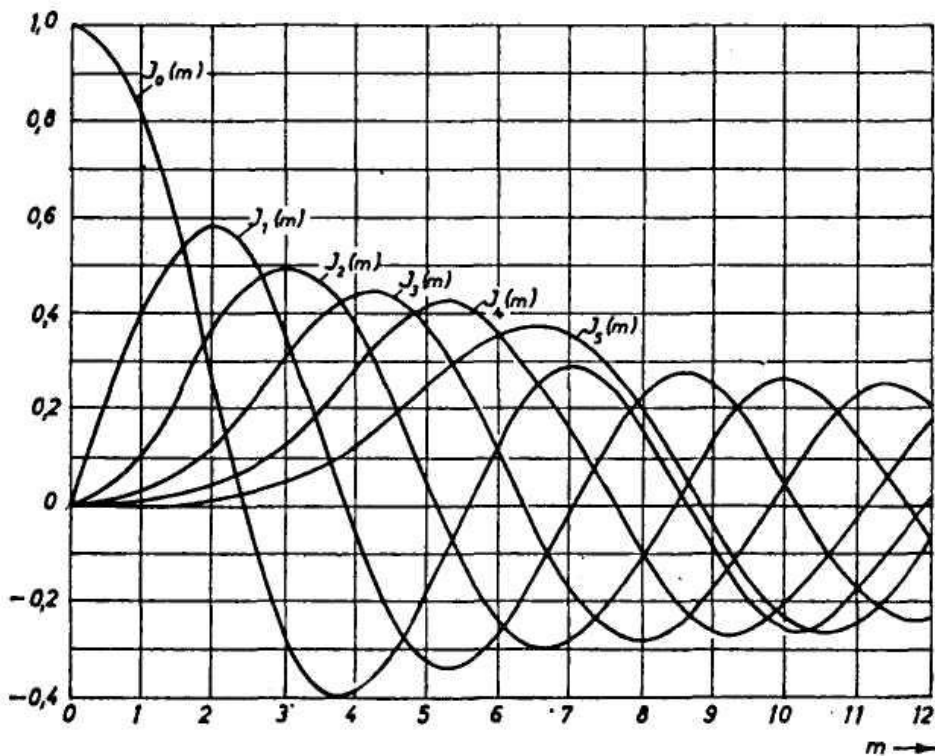
Da bi se odredila struktura amplitudskog spektra UM signala potrebno je analizirati kako zavisi  $J_n(m)$  od indeksa modulacije  $m$  i reda funkcije  $n$  koji određuje red bočnih komponenti.

Za neke vrijednosti  $m$  i  $n$ , Bessel-ove funkcije imaju relativno vrlo malu vrijednost, pa će se one u određenim uslovima moći i zanemariti.

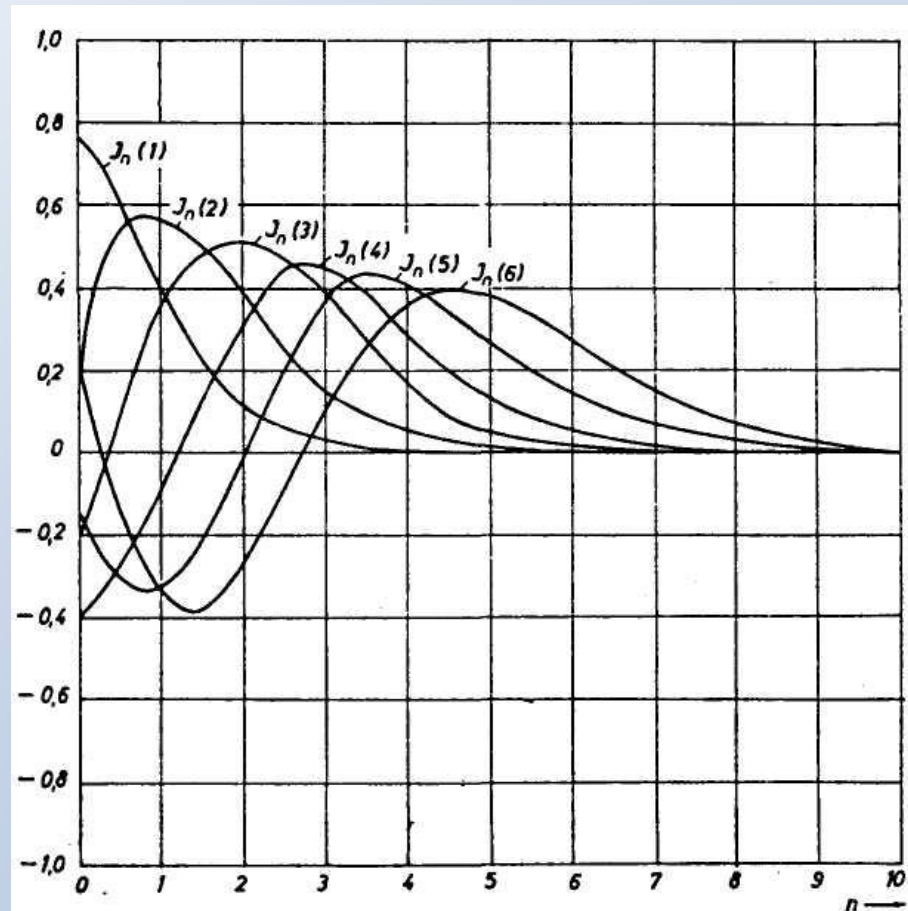
Zanemarivanjem pojedinih komponenti sistem za prenos se može dimensionisati tako da ima ograničen propusni opseg, a da degradacija kvaliteta prenosa bude u dozvoljenim granicama.



# NEKE KARAKTERISTIČNE OSOBINE BESSEL-OVIH FUNKCIJA



Slika: Bessel-ove funkcije  $J_n(m)$ ;  
 $n=\text{const}$ ,  $m=\text{var}$ .



Slika: Bessel-ove funkcije  $J_n(m)$ ;  
 $m=\text{const}$ ,  $n=\text{var}$ .



1. U slučaju da je indeks modulacije  $m=0$ , tada je  $J_0(0)=1$ , a  $J_n(0)=0$ , za  $n>1$ . Tada nema modulacije, već postoji samo nosilac.
2. Što je red funkcije  $n$  veći, to je prvi maksimum više udaljen od koordinatnog početka, a taj prvi maksimum je najveća apsolutna vrijednost funkcije za dati red.
3. Sa porastom indeksa modulacije  $m$  funkcija datog reda  $n$  mijenja se oscilatorno, uzimajući sve manje i manje apsolutne vrijednosti.
4. Kako red funkcije  $n$  u slučaju modulacije sinusoidalnim test tonom označava red bočne komponente, to kriva sa slike za usvojeni indeks modulacije  $m$  pokazuje relativne amplitude bočnih komponenata za cijele vrijednosti  $n$ .
5. Za male vrijednosti indeksa modulacije  $m$  Bessel-ove funkcije se mogu aproksimirati polinomom oblika
$$J_n(m) \cong \frac{m^n}{2^n n!}$$
6. Za velike vrijednosti argumenta  $m$  približno je:
$$J_n(m) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \cos\left(m - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
7.  $J_n(m)$  počinje brzo da opada sa porastom  $n$  kada je ispunjen uslov  $n>m$ .
8. Opšta osobina Bessel-ovih funkcija je da je  $J_{n \geq m+2}(m) < 0.1$

# ŠIRINA OPSEGA UČESTANOSTI POTREBNA ZA PRENOS UGAONO MODULISANIH SIGNALA

Spektar UM signala sadrži neograničeno mnogo komponenti. Njihove amplitude su direktno srazmjerne ili Bessel-ovoj funkciji  $J_n(m)$  (u slučaju kada je modulišući signal sinusoidalni ton), ili proizvodu Bessel-ovih funkcija različitih redova i argumenata (u slučaju kada je modulišući signal suma sinusoidalnih tonova).

Sa porastom reda  $n$ , vrijednosti funkcije  $J_n(m)$  za  $n > m$  počinju naglo da opadaju, tj. javlja se čitav niz komponenti zanemarljivo malih amplituda koje se ne prenose. Zadatak je odrediti koje komponente možemo odbaciti a da ne dođe do značajnije degradacije kvaliteta prenošenog signala.

## ***Kriterijum o značajnim bočnim komponentama***

Značajnim bočnim komponentama se smatraju sve one spektralne komponente koje nose više od p% snage nemodulisanog nosioca. Najčešće se uzima da je ovaj procenat  $p=1\%$ .

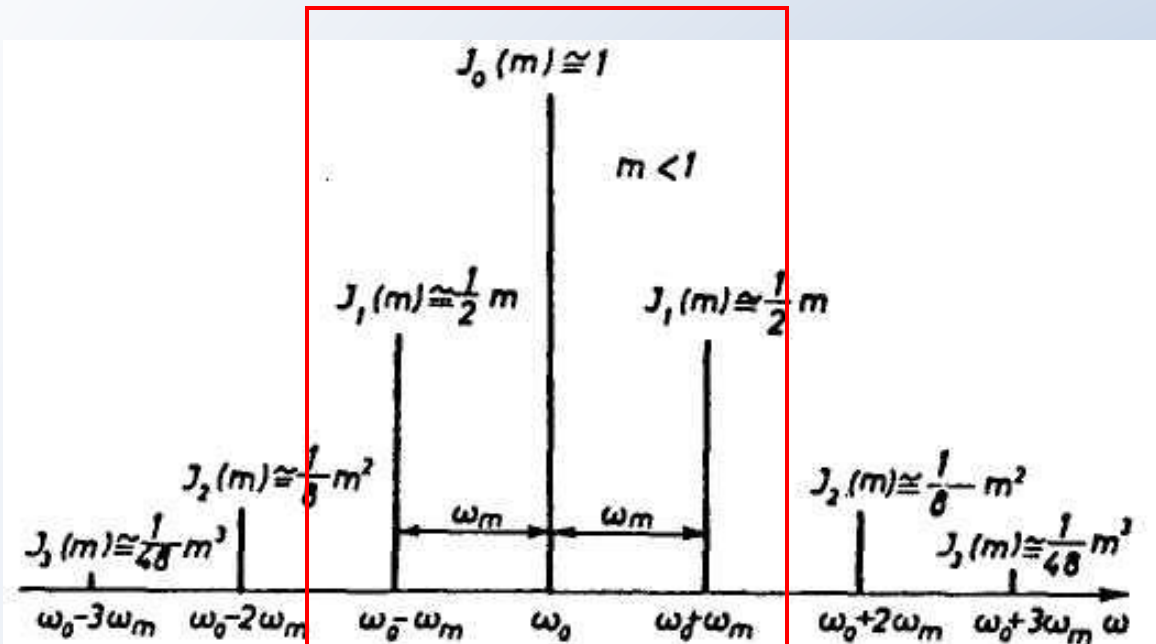
Može se smatrati da je za prenos UM signala potreban onaj opseg učestanosti izvan koga bilo koja od spektralnih komponenata ima snagu manju od 1% snage nosioca.

## Širina spektra UM signala modulisanog sinusoidalnim test tonom

Neka indeks modulacije ima vrijednosti  $m < 1$ . Tada je:

$$J_0(m) \cong 1, J_1(m) \cong \frac{1}{2}m, J_2(m) \cong \frac{1}{8}m^2, J_3(m) \cong \frac{1}{48}m^3, \dots$$

$$J_n(m) \cong \frac{m^n}{2^n n!}$$



*Slika: Dio amplitudskog spektra ugaono modulisanog signala sinusoidalnim test tonom sa indeksom modulacije  $m < 1$*

Na osnovu definicije značajnih komponenti UM signala, može da se pronađe vrijednost indeksa modulacije  $m$  pri kojoj je dovoljno prenositi samo bočne komponente prvog reda.

Nemodulisani nosilac ima relativnu amplitudu  $J_0(m)=1$ . Relativna snaga ove komponente je  $J_0^2(m)=1$ .

Relativna snaga jedne bočne komponente prvog reda treba da zadovolji uslov:

$$J_1^2(m) = \left(\frac{1}{2}m\right)^2 = 0,01$$

odakle je  $m \leq 0.2$ .

U svim slučajevima UM signala u kojima je indeks modulacije  $m \leq 0.2$ , dovoljno je prenositi nosilac i prve bočne komponente. Izraz za takav UM signal moći će se približno napisati u sledećem obliku:

$$u(t) \cong U_0 J_0(m) \cos \omega_0 t + U_0 J_1(m) \cos \left[ (\omega_0 - \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right] + U_0 J_1(m) \cos \left[ (\omega_0 + \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right]$$

Kako je:

$$J_0(m) \cong 1 \text{ i } J_1(m) \cong \frac{1}{2} m,$$

to je:

$$u(t) \cong U_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m U_0 \cos \left[ (\omega_0 - \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{2} m U_0 \cos \left[ (\omega_0 + \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right]$$

Ovaj izraz brojem komponenti i njihovim amplitudama podsjeća na amplitudski modulisan signal KAM tipa. Ali, fazni odnosi se znatno razlikuju.

Izraz za sinusoidalno modulisan signal KAM tipa je:

$$u_{\text{KAM}}(t) = U_0' \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m_0 U_0 \cos (\omega_0 - \omega_m) t + \frac{1}{2} m_0 U_0 \cos (\omega_0 + \omega_m) t$$

Razlika između UM i KAM signala može se najbolje uočiti iz njihove fazorske predstave.

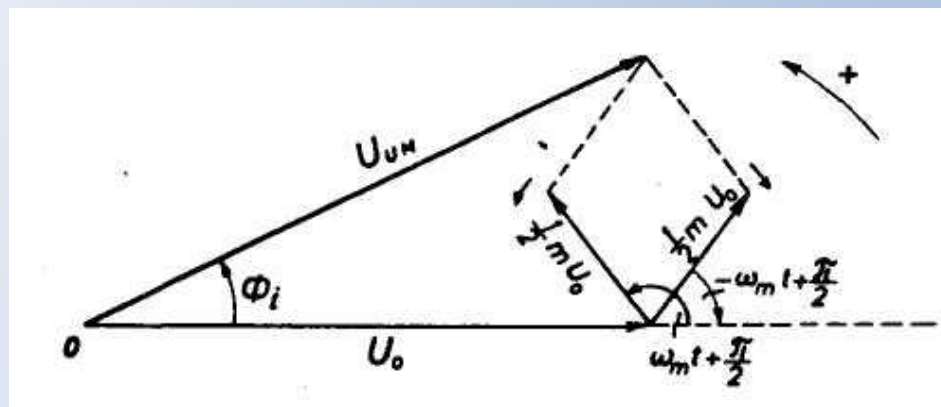
UM signal može da se napiše u obliku:

$$u(t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ U_0 + \frac{1}{2} m U_0 e^{-j(\omega_m t - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2} m U_0 e^{j(\omega_m t + \frac{\pi}{2})} \right] e^{j\omega_0 t} \right\}$$

Izraz u uglastoj zagradi može da se smatra rezultantom tri fazora:

$$U_{\text{UM}} = U_0 + \frac{1}{2} m U_0 e^{-j(\omega_m t - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2} m U_0 e^{j(\omega_m t + \frac{\pi}{2})}$$

Fazorski dijagram je:



*Slika: Fazorska predstava ugaono modulisanog signala sinusoidalnim test tonom pri čemu je indeks modulacije  $m < 0,2$*

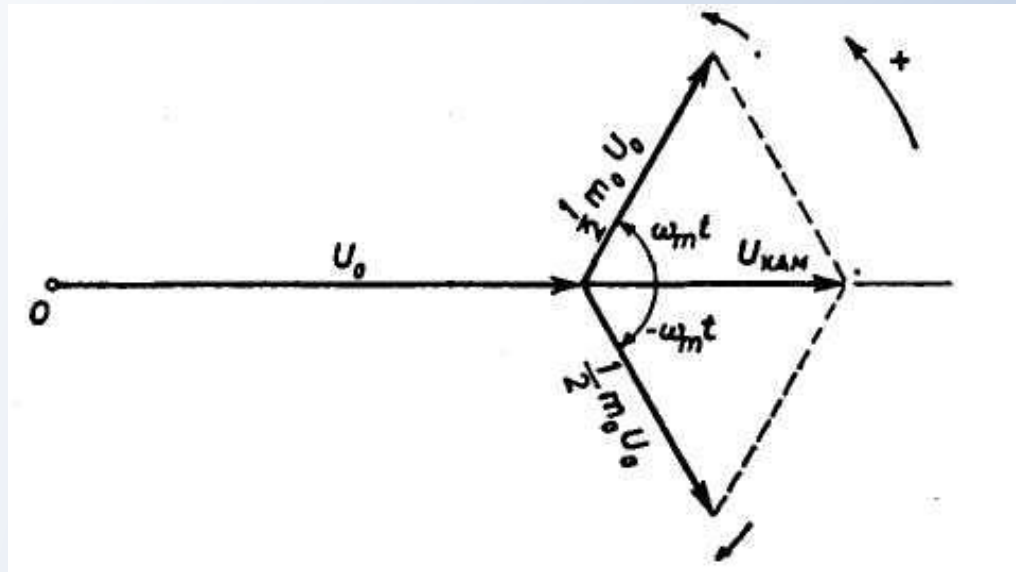


Na sličan način izraz za KAM signal može da se napiše u obliku:

$$u_{\text{KAM}}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ U_0 + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{-j\omega_m t} + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{j\omega_m t} \right] e^{j\omega_0 t} \right\}$$

Izraz u uglastoj zagradi je jedan fazor  $U_{\text{KAM}}$  koji predstavlja rezultantu tri fazora:

$$U_{\text{KAM}} = U_0 + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{-j\omega_m t} + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{j\omega_m t}$$



*Slika: Fazorska predstava amplitudski modulisanog signala tipa KAM sinusoidalnim test tonom.*

U slučaju KAM signala rezultatni fazor je uvijek na realnoj osi, i zavisno od stepena modulacije i vrijednosti  $U_0$  mijenja se samo njegov intenzitet.

To nije slučaj sa ugaonom modulacijom. Kod nje rezultatni fazor treba da se pomjera oko svog centralnog položaja, tako da se ugao  $\Phi_i$  mijenja onako kako diktira modulišući signal. Vrh fazora  $U_{UM}$  treba uvijek da opisuje dio kruga sa centrom u tački O, pošto je amplituda UM signala konstantna. Međutim, realna situacija će biti drugačija. Razlog je što smo zanemarili neke bočne komponente, pa je došlo do parazitne amplitudske modulacije.

### ✓ Zaključak:

U opštem slučaju eliminisanje izvjesnih bočnih komponenti dovodi do parazitne amplitudske modulacije.

U slučaju kada indeks modulacije nije mali, spektar ugaono modulisanog signala sadrži više od dvije značajne bočne komponente.

Kako je:

$$J_{n \geq m+2}(m) < 0.1$$

to će za ovako ugaono modulisane signale biti dovoljno da se sa svake strane nosioca prenese po  $n=m+1$  bočnih komponenti. Potrebna širina opsega za prenos UM signala biće definisana Carson-ovim obrascem:

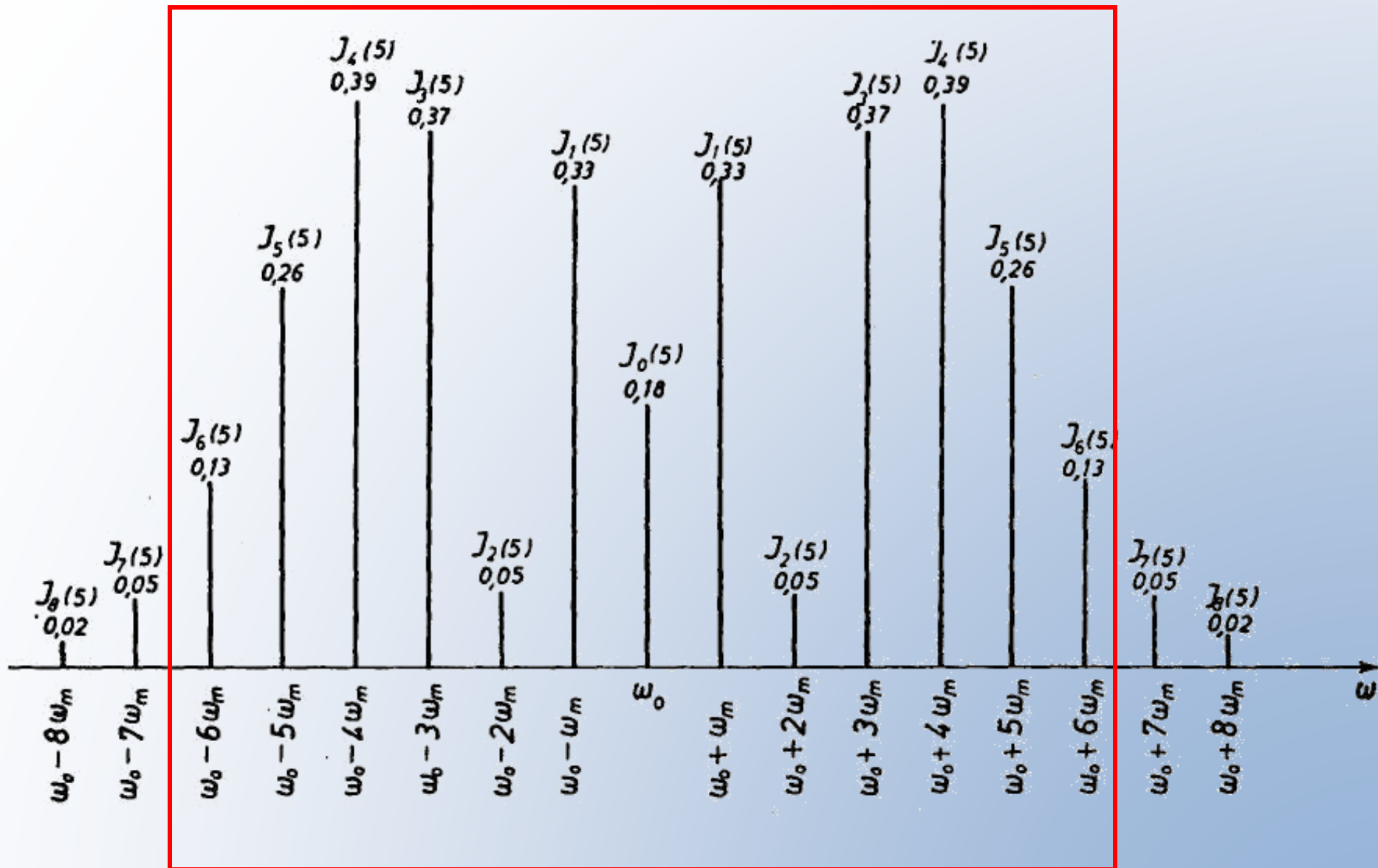
$$B = 2f_m(m+1)$$

Carson-ov obrazac za male vrijednosti indeksa modulacije  $m \ll 1$  postaje:

$$B \cong 2f_m$$

dok je za velike vrijednosti ( $m \gg 1$ ):

$$B \cong 2mf_m$$



Slika: Dio amplitudskog spektra UM signala sinusoidalnim test tonom za  $m=5$

# PRINCIPI IZGRADNJE FAZNIH I FREKVENCIJSKIH MODULATORA

Metode generisanja FM signala mogu da se klasifikuju u dvije grupe:

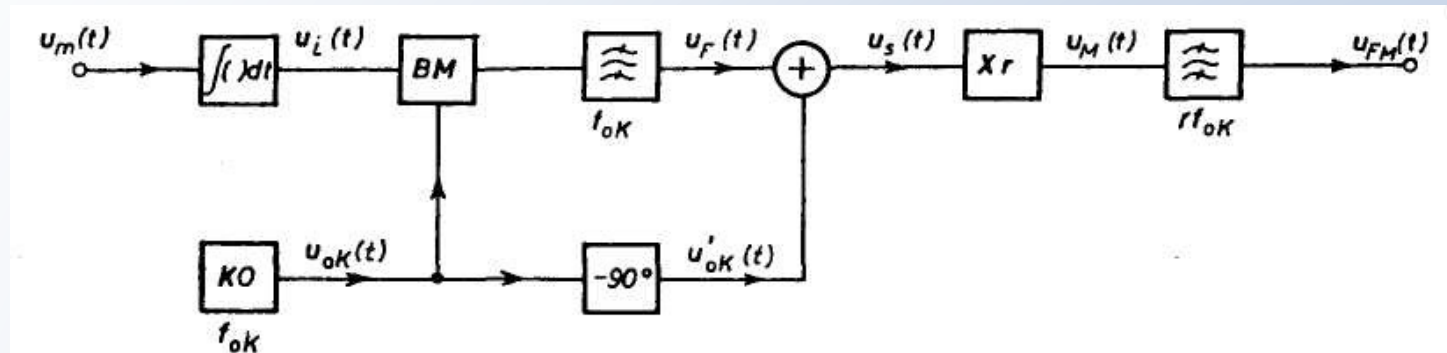
1. indirektne – postupci kojima se FM signali dobijaju pomoću integratora i  $\Phi$ M modulatora
2. direktne – nekim direktnim postupkom se obezbjeđuje da trenutna devijacija učestanosti bude direktno srazmjerna modulišućem signalu.



# 1. INDIREKTNI METODI GENERISANJA FM SIGNALA

## - Armstrongov modulator

Blok šema Armstrongovog modulatora prikazana je na slici:



*Slika: Blok-šema Armstrongovog modulatora*

KO je kvarcni oscilator fiksne učestanosti  $f_{oK}$ . Napon na njegovom izlazu je:

$$u_{oK}(t) = U_{oK} \cos \omega_{oK} t$$

BM je balansni modulator. Neka je modulišući signal oblika:

$$u_m(t) = U_{m1} \cos \omega_m t$$

Kako modulišući signal napaja integrator, na njegovom izlazu (ulazu u BM) je:

$$u_i(t) \cong \frac{1}{RC} \int U_{m1} \cos \omega_m t \cdot dt = \frac{U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t$$

Na izlazu balansnog modulatora, filtrom propusnikom opsega učestanosti izdvaja se signal:

$$u_F(t) = k_U u_i(t) \cdot u_{0K}(t) = k_U \frac{U_m U_{0K}}{\omega_m} \sin \omega_m t \cdot \cos \omega_{0K} t$$

Napon iz KO istovremeno napaja sklop koji unosi fazni pomeraaj od  $-90^\circ$ , pa se na njegovom izlazu dobija:

$$u'_{0K}(t) = U_{0K} \cos \left( \omega_{0K} t - \frac{\pi}{2} \right) = U_{0K} \sin \omega_{0K} t$$

Na izlazu iz kola za sumiranje dobija se napon:

$$u_S(t) = u'_{0K}(t) + u_F(t) = U_{0K} \sin \omega_{0K} t + k_U \frac{U_m U_{0K}}{\omega_m} \sin \omega_m t \cdot \cos \omega_{0K} t$$

Ovaj izraz može da se napiše u obliku:

$$u_S(t) = U_{0K} \left( \sin \omega_{0K} t + \frac{k_U U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t \cdot \cos \omega_{0K} t \right) = U_{0K} \sqrt{1 + \left( \frac{k_U U_m}{\omega_m} \right)^2 \sin^2 \omega_m t} \sin (\omega_{0K} t + \varphi)$$

Uz:  $\tan \varphi = \frac{k_U U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t$

i pretpostavku da je:  $\frac{k_U U_m}{\omega_m} \ll 1$

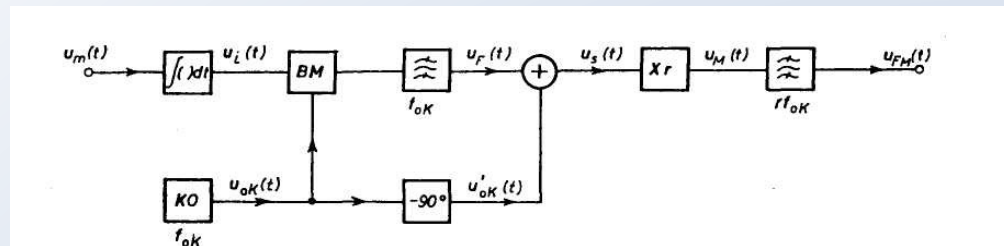
Može se smatrati:

$$\tan \varphi \cong \varphi \quad \text{i} \quad \left( \frac{k_U U_m}{\omega_m} \right)^2 \rightarrow 0$$

pa je:

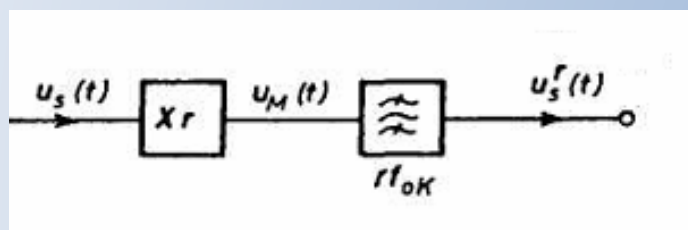
$$u_S(t) \cong U_{0K} \sin \left( \omega_{0K} t + \frac{k_U U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t \right)$$

$$u_S(t) = U_{0K} \sin \left( \omega_{0K} t + k_U \int U_m \cos \omega_m t dt \right)$$



Ovaj izraz predstavlja frekvencijski modulisan signal. Pretpostavljeni sklop vrši funkciju FM modulatora samo ako je indeks modulacije mali ( $m \ll 1$ ). Maksimalni indeks modulacije u ovom slučaju iznosi 0,2 (signal ima nosilac i 2 bočne komponente).

Da bi se povećala devijacija učestanosti, dobijeni signal se dovodi na umnožavač učestanosti ( $X_r$ ) i odgovarajući filter:



Umnožavač je nelinearan sklop čija je karakteristika „izlaz — ulaz“:

$$u_M(t) = a_0 + a_1 u_S(t) + a_2 u_S^2(t) + \dots + a_r u_S^r(t) + \dots$$

Izlaznim filtrom propusnikom opsega učestanosti čija je centralna učestanost  $rf_{0K}$ ,  $r$  je cio broj, se izdvaja  $r$ -ti harmonik signala  $u_S(t)$ , pa je:

$$u_{FM}(t) = U_0 \sin \left( r \omega_0 t + \frac{rk_U U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t \right) = U_0 \sin \left( \omega_0 t + \frac{\Delta \omega_0}{\omega_m} \sin \omega_m t \right)$$

Dobija se FM signal čija je učestanost nosioca:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{r \omega_0 K}{2\pi} = rf_{0K}$$

a devijacija učestanosti:

$$\Delta f_0 = \frac{1}{2\pi} \Delta \omega_0 = \frac{1}{2\pi} rk_U U_m = \frac{1}{2\pi} r \Delta \omega_0 K = r \Delta f_{0K}$$

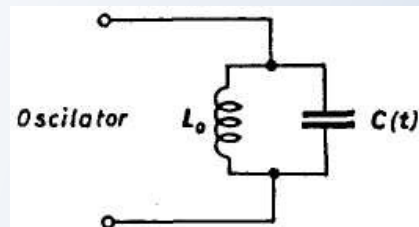
Na ovaj način je povećana maksimalna devijacija učestanosti i indeks modulacije  $r$  puta.

## 2. DIREKTNI METODI GENERISANJA FM SIGNALA

Direktan metod generisanja FM signala podrazumijeva da se učestanost oscilatora direktno mijenja pod uticajem modulišućeg signala. Ovaj princip se po pravilu ostvaruje tako što se neki od parametara oscilatora od koga zavisi učestanost oscilacija  $\omega_0$  mijenja u zavisnosti od modulišućeg signala. Najčešće su to kapacitivnost kondenzatora i induktivnost kalema.

Dobra strana ovih modulatora je u tome što se ***direktno*** postiže dovoljno velika devijacija učestanosti, pa nije potreban veliki broj stepeni umnožavača.

- Generisanje FM signala promjenom C ili L u rezonantnom oscilatornom kolu



Rezonantna učestanost oscilatora je:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Neka je u tom kolu induktivnost  $L_0 = \text{const}$ , a neka se kapacitivnost kondenzatora mijenja ( $C = C(t)$ ):

$$C = C(t) = C_0 + \delta C(t)$$

Trenutna učestanost generisanih oscilacija će biti:

$$\omega_i^2 = \omega^2(t) = \frac{1}{L_0 C(t)}$$

Uvrštavajući izraz za promjenjivu kapacitivnost, trenutna učestanost je:

$$\omega_i^2 = \omega^2(t) = \frac{1}{L_0 [C_0 + \delta C(t)]} = \frac{1}{L_0 C_0} \frac{1}{1 + \frac{\delta C(t)}{C_0}}$$

$$\omega_i = \omega(t) = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta C(t)}{C_0}}}$$

Pretpostavimo da su promjene kapacitivnosti male:

$$\delta C(t) \ll C_0$$

Tada će za trenutnu učestanost važiti približno:

$$\omega_i = \omega(t) \cong \omega_0 \left[ 1 - \frac{\delta C(t)}{2 C_0} \right]$$

$$\omega_i = \omega(t) = \omega_0 + \delta \omega_i$$



Trenutna devijacija učestanosti je:

$$\frac{\delta\omega_i}{\omega_0} \cong -\frac{\delta C(t)}{2 C_0}$$

Znak - znači da povećanju kapacitivnosti  $\delta C(t)$  odgovara smanjenje učestanosti. Pretpostavimo da su promjene kapacitivnosti direktno srazmjerne modulišućem signalu  $u_m(t)$ :

$$\delta C(t) = k_C u_m(t) = k_C U_m m(t) = \Delta C_0 m(t)$$

$$\Delta C_0 = |\delta C(t)|_{\max} = k_C U_m |m(t)|_{\max} = k_C U_m$$

Trenutna devijacija učestanosti će biti:

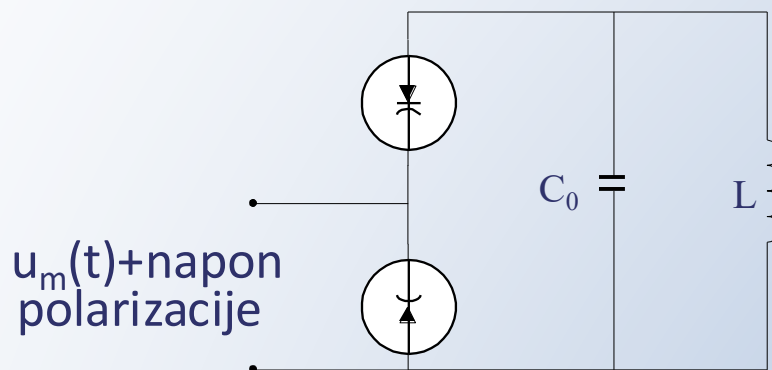
$$\delta\omega_i \cong -\frac{1}{2} \omega_0 \frac{\Delta C_0}{C_0} m(t) = -\Delta\omega_0 m(t)$$

tj. učestanost izlaznog signala:

$$\omega_i = \omega(t) = \omega_0 - \Delta\omega_0 m(t)$$

Pri navedenim uslovima moguće je ostvariti da se trenutna učestanost oscilatora mijenja direktno srazmjerno modulišućem signalu.

- Jedna mogućnost promjene kapacitivnosti je pločasti kondenzator čije se rastojanje između ploča, ili njihova površina, mijenja u skladu sa modulišućim signalom.
- Druga mogućnost je upotreba varikap diode koja je negativno polarisana, a čija kapacitivnost zavisi od napona polarizacije.



$${}^{\text{TM}}C(t) \ll C_0$$

FM signale generalno možemo podijeliti na:

1. Uskopojasne – indeks modulacije je  $m < 0.2$
2. Širokopojasne – indeks modulacije je  $m > 0.2$

Oba navedena tipa modulatora su uskopojasna.