

Nestacionarni signali i sistemi

Predavanje II

Linearne vremensko-frekvencijske reprezentacije

Predmetni nastavnici: prof. dr Ljubiša Stanković, prof. dr Miloš Daković

Nedostaci FT-a – primjer

- Pretpostavimo dva signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$:

$$\begin{aligned}x_1(t) = & \sin\left(122\pi\frac{t}{128}\right) - \cos\left(42\pi\frac{t}{128} - \frac{16}{11}\pi\left(\frac{t-128}{64}\right)^2\right) \\ & - 1.2\cos\left(94\pi\frac{t}{128} - 2\pi\left(\frac{t-128}{64}\right)^2 - \pi\left(\frac{t-120}{64}\right)^3\right) e^{-\left(\frac{t-140}{75}\right)^2} \\ & - 1.6\cos\left(15\pi\frac{t}{128} - 2\pi\left(\frac{t-50}{64}\right)^2\right) e^{-\left(\frac{t-50}{16}\right)^2}\end{aligned}$$

$$x_2(t) = x_1(255 - t).$$

- Iako nisu identični, ova dva signala imaju približno istu apsolutnu vrijednost FT.

Faze FT su različite, ali je teško koristiti informaciju iz njih.

Nedostaci FT-a – ilustracija

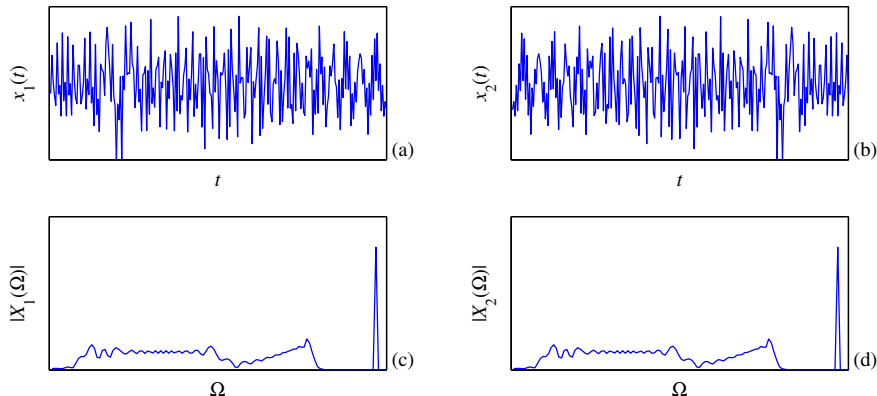


Figure: Dva različita signala $x_1(t) \neq x_2(t)$ sa istim Furijeovim transformacijama, $|X_1(\Omega)| = |X_2(\Omega)|$.

Analiza nestacionarnih signala

- Furijeova transformacija daje jedinstveno mapiranje signala iz vremenskog u frekvencijski domen.
- Međutim, za nestacionarne signal (signale čiji se spektralni sadržaj mijenja tokom vremena), Furijeova transformacija je praktično beskorisna.
- U zavisnosti od oblasti, razne reprezentacije za analizu nestacionarnih signala su predložene i mogu se podijeliti u tri velike grupe:
 - linearne reprezentacije,
 - kvadratne reprezentacije, i
 - reprezentacije višeg reda.

Kratkotrajna Furijeova transformacija (STFT)

- Najpoznatija linearna vremensko-frekvencijska reprezentacija je kratkotrajna Furijeova transformacija (eng. *Short-Time Fourier Transform* – STFT).
- Definiše se na sljedeći način:

$$\text{STFT}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

gdje $w(\tau)$ predstavlja tzv. prozor koji ‘klizi’ duž signala $x(t)$ i računa njegovu FT.

STFT (2) – ilustracija

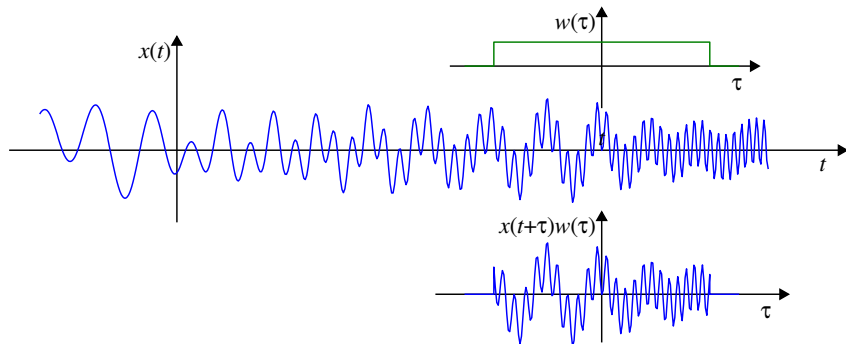


Figure: Ilustracija lokalizacije signala u STFT.

STFT (3)

- Ako označimo da je $x_t(\tau) = x(t + \tau)$, možemo zaključiti da STFT predstavlja FT signala $x_t(\tau)w(\tau)$, tj.

$$\text{STFT}(t, \Omega) = \text{FT}_{\tau}\{x_t(\tau)w(\tau)\}.$$

- Takođe, iz definicije STFT možemo zaključiti da STFT zadovoljava svojstva koja zadovoljava i FT.

Primjer – dužina prozora (1)

- Naći STFT signala $x(t)$ zapisanog u obliku:

$$x(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2) + e^{j\Omega_1 t} + e^{j\Omega_2 t}.$$

- **Odgovor:** STFT signala $x(t)$ biće:

$$\begin{aligned} STFT(t, \Omega) = & w(t_1 - t)e^{-j\Omega(t_1 - t)} + w(t_2 - t)e^{-j\Omega(t_2 - t)} \\ & + W(\Omega - \Omega_1)e^{j\Omega_1 t} + W(\Omega - \Omega_2)e^{j\Omega_2 t}, \end{aligned}$$

gdje $W(\Omega)$ je Furijeova transformacija prozora.

FT pravouganog prozora

Kao primjer posmatrajmo pravougani prozor

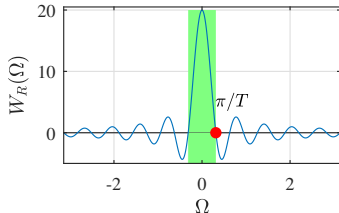
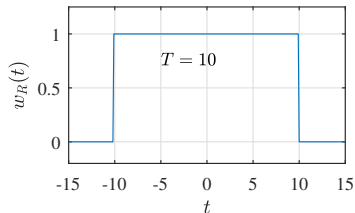
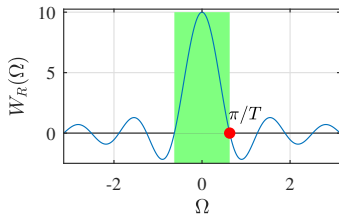
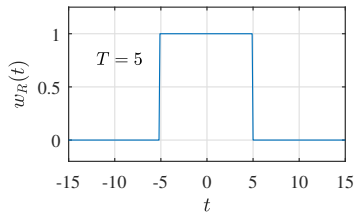
$$w_R(t) = \begin{cases} 1, & \text{za } -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{drugdje} \end{cases}$$

cija je FT

$$W_R(\Omega) = \int_{-T}^T 1 \cdot e^{-j\Omega t} dt = \frac{e^{j\Omega T} - e^{-j\Omega T}}{j\Omega} = 2 \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega}$$

Nule ove funkcije su $\Omega T = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Širina glavne latice je $2\pi/T$.

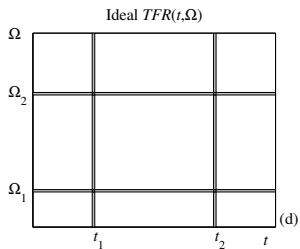
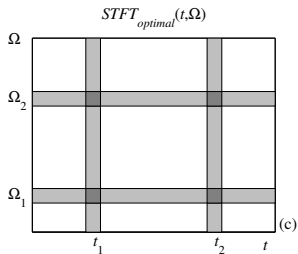
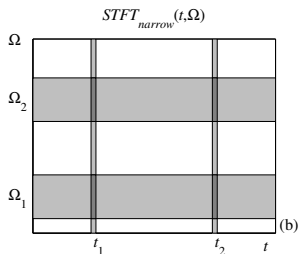
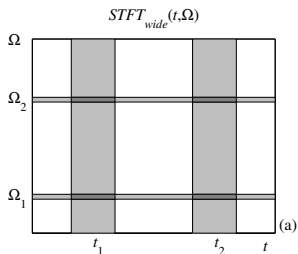
FT pravougaonog prozora (2)



Širina u vremenskom domenu $2T$, širina glavne latice u FT domenu $2\pi/T$.

Proizvod širina u vremenskom domenu i glavne latice u FT domenu $2\pi = const.$

Primjer – dužina prozora (2)



Uticaj širine prozora na analizu LFM signala

- Posmatrajmo signal $x(t) = e^{jat^2}$. Primijenimo STFT sa pravouganim prozorom širine $2T$ sa centrom u neko t .
- Približna analiza STFT koristeći metod stacionarne faze. Trenutna frekvencija, $\Omega_i(t) = 2at$.
- Unutar prozora koji je centriran t imamo frekvencije koje odgovaraju intervalu od $t - T$ do $t + T$, odnosno, širina opsega frekvencija od $2a(t - T)$ do $2a(t + T)$ koji iznosi $4aT$.
- Širina glavne latice pravougaonog prozora je $2\pi/T$, za malo T ona dominantno doprinosi širini FT, pa je širina STFT $4aT + 2\pi/T$ i ne zavisi od t .
- Izvod širine STFT po T izjednačavamo sa 0, da bi dobili T koji daje minimalnu širinu. To je $4a - 2\pi/T^2 = 0$, Optimalna širina prozora, koji daje najmanju širinu STFT, je $T = \sqrt{\pi/2a}$.

Spektrogram

- Spektrogram predstavlja vizuelizaciju spektralnog sadržaja kroz vrijeme.
- Spektrogram se definiše kao energetska vrijednost STFT-a

$$\begin{aligned} SPEC(t, \Omega) &= |STFT(t, \Omega)|^2 \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w^*(\tau - t) e^{-j\Omega\tau} d\tau \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) w^*(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \right|^2. \end{aligned}$$

Spektrogram – ilustracija

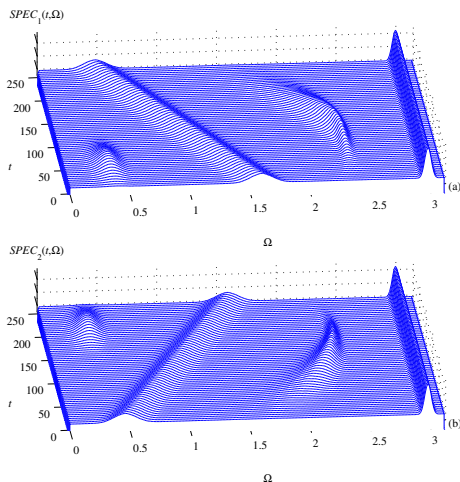


Figure: Spektrogrami prethodnih signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$.

Prozori

- Prozori predstavljaju bitan faktor u lokalizaciji signala u vremensko-frekvencijskoj analizi.
- Najčešće korišćeni prozori su:
 - pravougaoni
 - trougaoni (Bartlett)
 - Hann(ing)
 - Hamming
 - Blackman i Kaiser.

Pravougaoni prozor

- Najjednostavniji prozor je pravougaoni prozor:

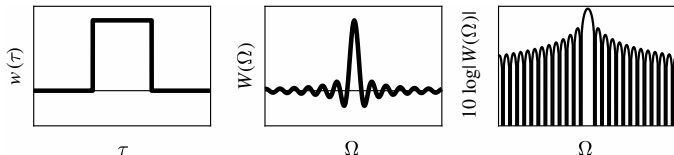
$$w(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\tau| < T \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

ili u diskretnoj formi:

$$w(n) = u(n + N/2) - u(n - N/2).$$

- FT diskretnog prozora je:

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}.$$



Trougaoni (Bartlett) prozor

- Trougani prozor definisan je:

$$w(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau/T| & \text{za } |\tau| < T \\ 0 & \text{drugdje.} \end{cases}$$

- U diskretnoj formi:

$$w(n) = \left[1 - \frac{2|n|}{N} \right] [u(n + N/2) - u(n - N/2)].$$

- Lako je pokazati da se trougani prozor sirine T dobija kao konvolucija dva pravougano prozora sirine $T/2$ ili u diskretnom domenu sirine $N/2$.

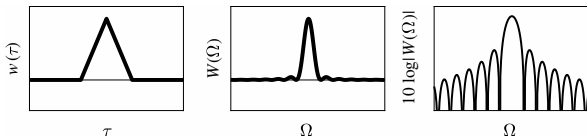
Trougaoni (Bartlett) prozor

- Prema tome FT trouganog prozora je jednaka kvadratu FT duplo uzeg pravouganog prozora
- U analognom domenu

$$W_R(\Omega) = 4 \frac{\sin^2(\Omega T/2)}{\Omega^2}$$

- U diskretnom domenu

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \left[1 - \frac{2|n|}{N} \right] e^{-j\omega n} = \frac{\sin^2(\omega N/4)}{\sin^2(\omega/2)}$$



Hann(ing) prozor

- Hanning prozor definisan je na sljedeći način:

$$w(\tau) = \begin{cases} 0.5(1 + \cos(\pi\tau/T)) = \cos^2(\pi\tau/(2T)), & \text{za } |\tau| < T \\ 0, & \text{drugdje.} \end{cases}$$

- FT Hann-ovog prozora je

$$\begin{aligned} W_H(\Omega) &= \int_{-T}^T 0.5(1 + \cos(\pi\tau/T))e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T}^T 1e^{-j\Omega\tau} d\tau + \frac{1}{4} \int_{-T}^T e^{j\pi\tau/T} e^{-j\Omega\tau} d\tau + \frac{1}{4} \int_{-T}^T e^{-j\pi\tau/T} e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ &= \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega} + \frac{\sin(\Omega T - \pi)}{2(\Omega - \frac{\pi}{T})} + \frac{\sin(\Omega T + \pi)}{2(\Omega + \frac{\pi}{T})} = \frac{(\pi/T)^2 \sin(\Omega T)}{\Omega((\frac{\pi}{T})^2 - \Omega^2)} \end{aligned}$$

Prva nula $W_H(\Omega)$ nije $\Omega T = \pm\pi$, zato što i u imeniocu tada imamo 0, već $\Omega = \pm 2\pi/T$, pa je širina glavne latice $4\pi/T$, dva puta veća nego kod pravougaonog prozora.

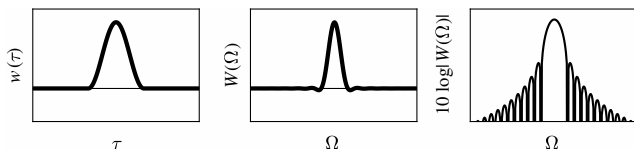
Diskretni Hann(ing) prozor

- Diskretna forma Hanning prozora:

$$w(n) = 0.5 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \right] [u(n + N/2) - u(n - N/2)],$$

sa jednostavnom DFT

$$W(k) = \frac{N}{2} \delta(k) + \frac{N}{4} \delta(k + 1) + \frac{N}{4} \delta(k - 1).$$



Hamming prozor

- Hammingov prozor se definiše slično kao Hannov prozor

$$w(\tau) = \begin{cases} a + b \cos(\pi\tau/T), & \text{za } |\tau| < T \\ 0, & \text{drugdje.} \end{cases}$$

gdje se konstante a i b određuju iz uslova da je $w(0) = 0$, odnosno $a + b = 1$ i uslova da maksimum prve bočne laticice kod Hann-ove forme prozora bude 0. Vidjeli smo da je glavna latica Hann-ovog prozora široka do $\Omega = \pm 2\pi/T$, naredna nula ovog prozora je $\Omega = \pm 3\pi/T$. Maksimum je između njih na $\Omega = \pm 5\pi/(2T)$. Uslov je da taj maksimum ode na 0, odnosno

$$W_H(\Omega) = a \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega} - b \frac{\sin(\Omega T)}{2(\Omega - \frac{\pi}{T})} - b \frac{\sin(\Omega T)}{2(\Omega + \frac{\pi}{T})} = 0$$

za $\Omega = \pm 5\pi/(2T)$. Slijedi $0 = \frac{a}{5\pi/(2T)} - \frac{b}{3\pi/T} - \frac{b}{7\pi/T}$ ili $2a/5 - 10b/21 = 0$, sto uz $a + b = 1$ daje $a = 0.54$ i $b = 0.46$.

Hamming prozor

- Prema tome, Hamming prozor ima formu:

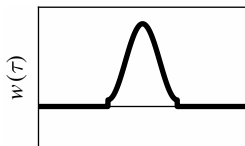
$$w(\tau) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(\pi\tau/T) & \text{za } |\tau| < T \\ 0 & \text{drugdje.} \end{cases}$$

Analogno se definiše i diskretni Hamming prozor:

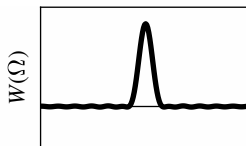
$$w(n) = \left[0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right] [u(n + N/2) - u(n - N/2)]$$

čija je DFT

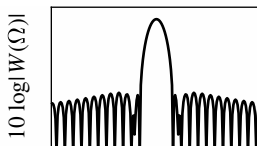
$$W(k) = 0.54N\delta(k) + 0.23N\delta(k + 1) + 0.23N\delta(k - 1).$$



τ



Ω



Ω

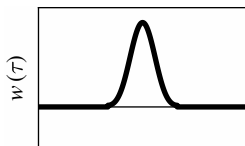
Blackman i Kaiser prozori

- Definicija Blackman prozora:

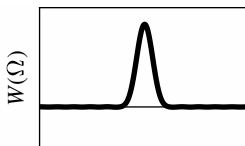
$$w(\tau) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(\pi\tau/T) + 0.08 \cos(2\pi\tau/T) & \text{za } |\tau| < T \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases}$$

se dobija od $a + b \cos(\pi\tau/T) + c \cos(2\pi\tau/T)$ i uslova da je $a + b + c = 1$, kao i da je FT prozora jednaka 0 na maksimumima dvije naredne laticе, odnosno za $\Omega = \pm 5\pi/(2T)$ i $\Omega = \pm 7\pi/(2T)$. Izvođenje je isto kao i za Hammingov prozor.

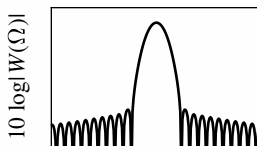
- Koriste se za veće potiskivanje bočnih latica. Za dodatno potiskivanje, koristi se Kaiser prozor.



τ



Ω



Ω

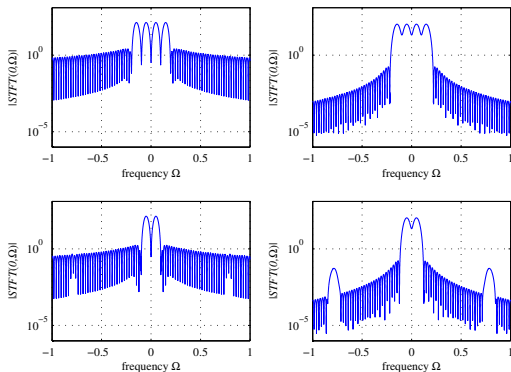
Primjer

- Naći STFT signala:

$$x_1(t) = 2 \cos(4\pi t/T) + 2 \cos(12\pi t/T) \text{ i}$$

$$x_2(t) = 2 \cos(4\pi t/T) + 0.001 \cos(64\pi t/T) \text{ au } t = 0.$$

Koristiti Hamming i Blackman prozore sa $T = 128$.



Disrektna forma i realizacija STFT

- Ključni faktori u numeričkim računanjima i implementaciji STFT su diskretizacija i realizacija.

- Ako signal odabiramo intervalom Δt , dobićemo:

$$STFT(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)w(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau \simeq \sum_{m=-\infty}^{\infty} x((n + m)\Delta t)w(m\Delta t)$$

- Diskretna STFT dobija se kao:

$$STFT(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m)x(n + m)e^{-jm\omega}$$

gdje $x(n) = x(n\Delta t)\Delta t$, i $\omega = \Delta t\Omega$ je normalizovana frekvencija.

- $STFT(n, \omega)$ je periodična sa periodom 2π .

Maksimalna frekvencija u STFT

- Veza između analogne i diskretne STFT

$$STFT(n, \omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} STFT(n\Delta t, \Omega + 2k\Omega_0) \text{ with } \omega = \Delta t\Omega.$$

- Da bismo izbjegli preklapanje u STFT-u (aliasing), korak odabiranja treba uzeti

$$\Delta t = \frac{\pi}{\Omega_0} \leq \frac{\pi}{\Omega_m}$$

gdje je Ω_m maksimalna frekvencija u STFT.

- U praksi, možemo pretpostaviti da je sadržaj spektra $x(t + \tau)w(\tau)$ iznad frekvencije Ω_m , tj. da se $|\Omega| > \Omega_m$, može izostaviti, tj. da spektralni sadržaj iznad Ω_m ne degradira period osnovne frekvencije.

Diskretizacija u frekvencijskom domenu

- Diskretizacija u frekvencijskom domenu izvodi se sa brojem odbiraka jednakim ili većim od dužine prozora N . Ukoliko uzmemo da je broj diskretnih frekvencijskih tačaka jednak N , dobijamo

$$STFT(n, k) = STFT(n, \omega)|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w(m)x(n+m)e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}$$

- Može se izračunati pomoću DFT kao

$$STFT(n, k) = \text{DFT}_m\{w(m)x(n+m)\},$$

za određeno n .

Rekurzivna STFT realizacija

- Rekurzivna implementacija je važna za implementaciju STFT-a (i ostalih vremensko-frekvencijskih reprezentacija) na hardveru.
- Za pravougaoni prozor, STFT se može dobiti rekurzivno na osnovu

$$\begin{aligned}STFT_R(n, k) &= \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} x(n+m)e^{-j2\pi m \frac{k}{N}} \\&= \sum_{m=-N/2-1}^{N/2-2} x(n+m)e^{-j2\pi m \frac{k}{N}} - x(n - \frac{N}{2} - 1)e^{j2\pi(\frac{N}{2}+1)\frac{k}{N}} + x(n + \frac{N}{2} - 1)e^{-j2\pi(\frac{N}{2}-1)\frac{k}{N}} \\&= STFT_R(n-1, k)e^{j2\pi k/N} + [x(n + \frac{N}{2} - 1) - x(n - \frac{N}{2} - 1)](-1)^k e^{j2\pi k/N}.\end{aligned}$$

- Za ostale prozore, STFT se može dobiti preko STFT-a pravougaonog prozora.
- STFT sa Hann(ing)-ovim prozorom:

$$STFT_H(n, k) = \frac{1}{2}STFT_R(n, k) + \frac{1}{4}STFT_R(n, k-1) + \frac{1}{4}STFT_R(n, k+1).$$

Inverzna STFT

- Signal, pomnožen sa prozorom, se može dobiti od STFT u određenom trenutku t , kao njegova inverzna FT,

$$x(t + \tau)w(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(t, \Omega) e^{-j\Omega\tau} d\Omega.$$

- Ako je STFT računat na skupu diskretnih vrijednosti $t = iR$, sa pomjerjem R za svaku sljedeću STFT-a, onda

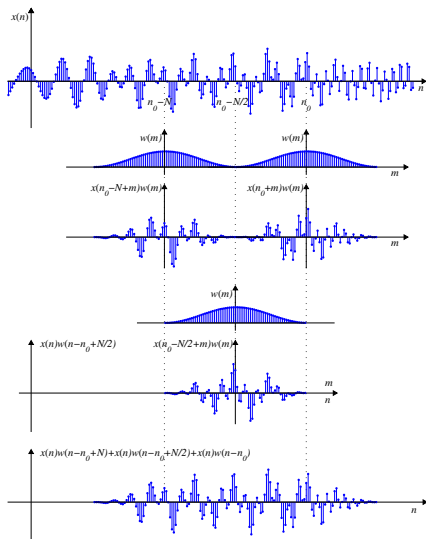
$$x(iR + \tau)w(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} STFT(iR, \Omega) e^{-j\Omega\tau} d\Omega.$$

- Za jedan dati trenutak iR gdje STFT računata, rekonstruisani segment je $x(iR + \tau)w(\tau)$. Pošto je prozor širine $T \leq \tau < T$, signal se teorijski može rekonstruisati u intevalu $iR - T \leq t < iT + T$, dijeljenjem sa $w(\tau)$.

Preklapajući prozori

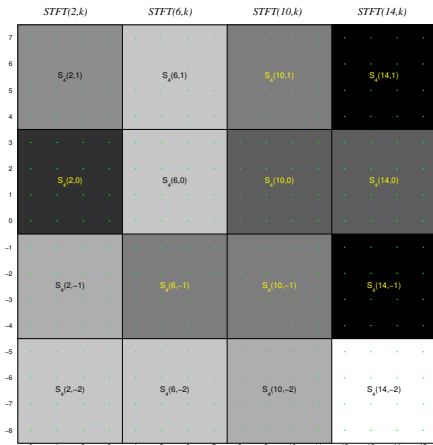
- Nepreklapajući prozori koriste se za jednostavnu i laku analizu zato što drže broj STFT koeficijenata istim kao broj odbiraka.
- Međutim, STFT se uglavnom računa preklapajućim prozorima. Zašto?
- Problem u nepreklapajućim prozorima je (posebno u prozorima koji nisu pravougaoni) to što težine nekih dijelova signala nisu velike, pa se vrijednost signala doja dijeljenjem sa malim brojevima, što je nestabilno i povećava sum, ako postoji u signalu.

Preklapajući prozori (2)



Rekonstrukcija signala

- Rekonstrukcija signala koristeći pravougaoni nepreklapajući prozor



Rekonstrukcija signala (2)

- Rekonstrukcija signala sa provouganim prozorom se vrši računanjem inverzije STFT-a za svaki dio posebno
- Ako je STFT računat na skupu diskretnih vrijednosti $t = iR$, sa pomjerjem $R = 2T$ za svaku sljedeću STFT-a, onda

$$x(iR + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} STFT(iR, \Omega) e^{-j\Omega\tau} d\tau.$$

odnosno

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iR + \tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(iR, \Omega) e^{-j\Omega\tau} d\tau.$$

za $t = iR + \tau$.

Rekonstrukcija signala (3)

- Sličan postupak providimo i sa ne-pravouganim prozorima, pri čemu se računanje STFT-a vrši sa preklapanjem, za $t = iR$, sa pomjerjem $R < 2T$ za svaku sljedeću STFT-a. Dobijamo onda

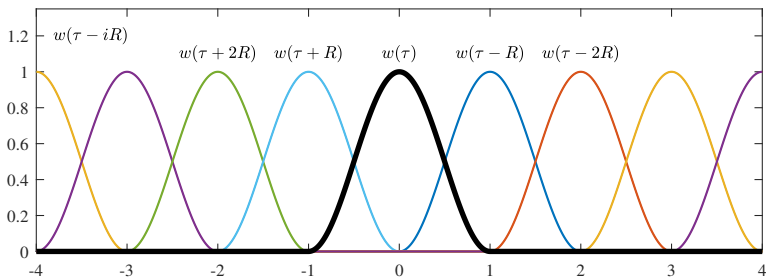
$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iR + \tau)w(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(iR, \Omega) e^{-j\Omega\tau} d\tau.$$

za $t = iR + \tau$. Uvodeći smjenu $t = iR + \tau$ na lijevoj strani dobijamo $\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t)w(t - iR)$. Uslov rekonstrukcije bez dijeljenja sa prozorima je

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} w(t - iR) = 1.$$

Rekonstrukcija signala (4)

- Hanning-ov prozor zadovoljava uslov konstantnog preklapanja prozora za rekonstrukciju (eng. constant overlap-add (COLA)), $\sum_i w(\tau - iR) = 1$, sa $R = T$.



Rekonstrukcija signala (5)

- Ova osobina dolazi iz $w(\tau) + w(\tau \pm T) = \cos^2(\pi\tau/(2T)) + \cos^2(\pi(\tau \pm T)/(2T)) = \cos^2(\pi\tau/(2T)) + \sin^2(\pi\tau/(2T)) = 1$.
- Isti uslov može biti zadovoljen i sa $R = T/2$, $R = T/4$, ..., nakon odgovarajućeg skaliranja amplitude prozora.
- Uslov rekonstrukcije je zadovoljen sa trouglim prozorom, dok ako relaksiramo uslov da je zbir 1 za bilo koju konstantu, onda Hamming i drugi prozori takođe zadovoljavaju uslov rekonstrukcije.