Nestacionarni signali i sistemi
Predavanje III

Efektivna širina prozora i mjere koncentracije
Lokalna polinomijalna Furijeova transformacija
Primjena (audio)

Predmetni nastavnici: prof. dr Ljubiša Stankovć, prof. dr Miloš Daković

Efektivna širina prozora (1)

- U prethodnim primjerima smo kao širinu prozora u vremenskom domenu uzimali interval u kome je prozor $w(\tau)$ različit od nule, a za širinu u frekvencijskom domenu širinu glavne latice FT prozora $W(\Omega)$.

- Drugi pristup je korišćenjem pojma efektivne širine prozora

$$T_e^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 w^2(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} w^2(\tau) d\tau} = \frac{1}{E_w} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 w^2(\tau) d\tau$$

  uz pretpostavku da je težište prozora u $\tau = 0$. Efektivnu širinu možemo računati i ako prozor nije konačnog trajanja.

- Efektivna širina pravouganog prozora širine $2T$ je $T_e^2 = \frac{2T^3}{6T}$.

Efektivna širina prozora (2)

- Slično se definiše i efektivna širina FT prozora

$$W_e^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 |W(\Omega)|^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |W(\Omega)|^2 d\Omega} = \frac{1}{E_w} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 |W(\Omega)|^2 d\Omega$$

  uz pretpostavku da je težište FT prozora u $\Omega = 0$.

- Ako primijenimo Parsevalovu teoremu, za $\mathrm{FT}\{w'(\tau)\} = j\Omega W(\Omega)$ dobijamo

$$W_e^2 = \frac{1}{E_w} \int_{-\infty}^{\infty} (w'(\tau))^2 d\tau$$

Princip neodređenosti

- Proizvod efektivnih širina prozora u vremenu i frekvenciji je uvijek veći ili jednak od $1/4$. Dokaz.
- Za neki prozor $w(\tau)$ proizvod efektivnih širina je

$$T_e^2 W_e^2 = \frac{1}{E_w}\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 w^2(\tau) d\tau \frac{1}{E_w}\int_{-\infty}^{\infty} (w'(\tau))^2 d\tau$$

.

- Primjenom Švarcove nejednakosti imamo

$$\frac{1}{E_w^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \tau w(\tau) \; w'(\tau) d\tau\right|^2 \le T_e^2 W_e^2.$$

Princip neodređenosti

- Jednakost važi kada je prva funkcija proporcionalna drugoj funkciji, odnosno $\tau w(\tau) = \pm c w'(\tau)$. Ovo je diferencijalna jednačina tipa $xy(x) = \pm c \frac{dy(x)}{dx}$ i lako se rješava kad se prepiše u obliku $x dx = \pm c \frac{dy}{y}$ odnosno $\pm x^2 = c \ln(y)$. Opšte rješenje je $y = a e^{-bx^2}$, odnosno Gaussov prozor

$$w(\tau) = e^{-b\tau^2}.$$

gdje je uzeto u obzir da je $w(0) = 1$ i da $w(\tau) \to 0$ kad $\tau \to \infty$.

- Zamjenom $w(\tau) = e^{-b\tau^2}$ u $\frac{1}{E_w^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tau w(\tau) \;\; w'(\tau) d\tau \right|^2$ dobijamo 1/4 najmanju moguću vrijednost proizvoda efektivnih širina za bilo koji prozor. Slijedi $T_e^2 W_e^2 \geq 1/4$ ili $T_e W_e \geq 1/2$ za svaki prozor.
- Međutim, Gasussov prozor (kada je $T_e W_e = 1/2$) nema ograničeno trajanje u vremenu.

Mjerenje koncentracije – Optimizacija

- Cilj vremensko-frekvencijske analize je da dobijemo distribuciju energije signal u vremenu i frekvenciji u najmanjem mogućem regionu, odnosno sa najvećom mogućom koncentracijom.
- Da bi mogli vršiti optimizaciju vremensko-frekvencijskog predstavljanja moramo uvesti koncetraciju vremensko frekvencijske distribucije.
- Idealan slučaj za mjerenje regiona gdje je vremensko-frekvencijska distribucija nenulta bi bila norma-nula

$$\mathscr{M} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |STFT(t,\omega)|^0 d\omega dt.$$

- Pošto je $b^0 = 1$ osim za $a = 0$ kada je $b^0 = 1$ dobijamo da je $\mathscr{M}$ jednako površini regiona gdje je $|STFT(t,\omega)| \neq 0$. Minimizacijom $\mathscr{M}$ dobijamo najbolje koncentrisanu distribuciju.

Mjerenje koncentracije – Optimizacija

- U realnosti ne možemo koristiti stepen 0, odnosno normu 0. Međutim, slične, a u mnogim slučajevima dobijamo i iste rezultate, ako koristimo normu sa $0 \leq p \leq 1$. Za normu-jedan imamo

$$\mathcal{M} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|STFT(t,\omega)|d\omega dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|STFT(t,\omega)|^2 d\omega dt}}$$

  Dodata je i normalizacija sa ukupnim integralom po distribuciji, kako eventualno vrijednost same distribucije ne bi uticala na rezultat, pošto nas interesuje samo region nenultih vrijednosti.

- Za spektrogram $S(t,\omega) = |STFT(t,\omega)|^2$, i ako pretpostavimo jediničnu energiju, mjera koncentracije se svodi na normu-jedan

$$\mathcal{M} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|STFT(t,\omega)|d\omega dt.$$

Mjerenje koncentracije – Optimizacija

- Za signal:

$$x(t) = \cos(50\cos(\pi t) + 10\pi t^2 + 70\pi t)$$
$$+ \cos(25\pi t^2 + 180\pi t)$$

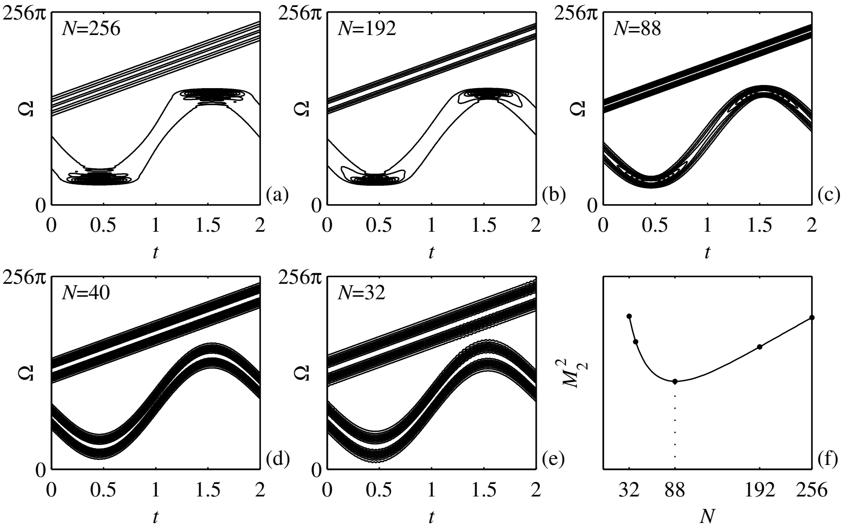
odabiran na $\Delta t = 1/256$, između $-2 \le t < 2$.

- Hann(ing) prozor $w(m)$ sa različitim dužinama se koristi.
- Parametar $p = 1$.
- Optimalna dužina prozora se dobija kada minimuzujemo mjeru koncentracije, tj.

$$N_{opt} = \min_N \{\mathcal{M}[STFT_N(n,k)]\},$$

- Mjera $\mathcal{M}[STFT_N(n,k)]$ je računata za prozore dužine $N = 32$ do $N = 256$.

Mjerenje koncentracije – Optimizacija



Mjerenje koncentracije – Optimizacija

- Primijetimo da za široke prozore, nestacionarnost signala se širi kroz vremensko-frekvencijsku ravan i visoku mjeru.
- Za uske prozore, njegova FT je široka, pa je distribucija velika i visoka mjera koncentracije.
- Očigledno je da se između ova dva ekstrema nalazi prozor koji je prihvatljiv kompromis između nestacionarnosti signala i male dužine prozora.
- Minimalna mjera, tj. najbolja koncentracija, dobijena je kada je prozor veličine $N = 88$.

Polinomijalna Furijeova transformacija (PFT)

- Postoje signali čije varijacije trenutne frekvencije variraju po bekom pravilu, uz određeni skup slobodnih parametara modela.
- Od posebnog značaja su signali koji imaju polinomijalni oblik fazne funkcije (Polynomial-Phase Signals – PPS):

$$x(t) = Ae^{j(\Omega_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \cdots + a_N t^{N+1})}$$

  gdje su $\Omega_0, a_1, a_2, \ldots, a_N$ nepoznati parametri signala.
- Visoka koncentracija se može postići u frekvencijskom domenu primjenom PFT

$$PFT_{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\Omega t + \Omega_1 t^2 + \Omega_2 t^3 + \cdots + \Omega_N t^{N+1})} dt.$$

kada su $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N = a_1, a_2, \ldots, a_N$.

PFT (2)

- Računanje nepoznatih vrijednosti $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ koje se poklapaju sa pravim vrijednostima parametara signala može se izvršiti jednostavnom potragom iz skupa mogućih vrijednosti za $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ i mjerenjem koncetracije PFT.
- Računanje se zaustavlja kada dobijemo najbolje koncentrisanu apsolutnu vrijednost PFT. Za mjeru koncetracije možemo koristiti normu-jedan.
- U idealnom slučaju, dobićemo delta funkcije u prostoru parametara na mjestu određenom kada su svi parametri podešeni na parametre signala $\Omega = \Omega_0$, $\Omega_1 = a_1$, $\Omega_2 = a_2$, ...
- Nedostatak ovog procesa je što je vremenski zahtjevan i trazi visedimensiono pretrazivanje po prostoru parametara.

Lokalna PFT

- Za nestacionarne signale, ovaj pristup se može koristiti ako je signal sa polinomijalnom fazom unutar prozora.
- U tom slučaju se koristi lokalna PFT (LPFT) definisana kao:

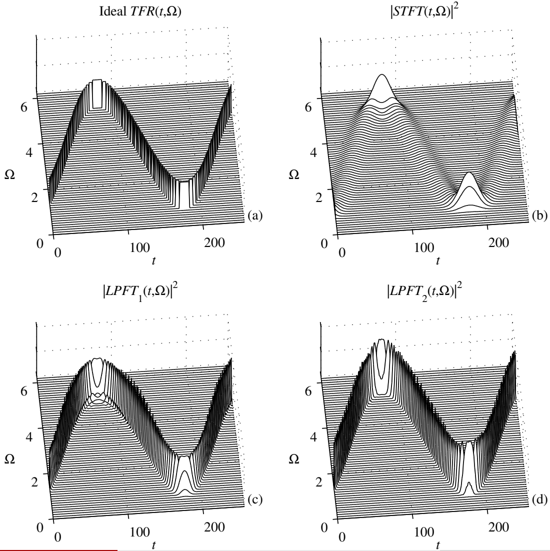
$$LPFT_{\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_N}(t,\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)w(\tau)e^{-j(\Omega\tau+\Omega_1\tau^2+\Omega_2\tau^3+\cdots+\Omega_N\tau^{N+1})}d\tau.$$

- Generalno, parametri $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_N$ mogu biti vremenski zavisni, tj. za svaki vremenski trenutak t, skup optimalnih parametara može biti drugačiji.
- LPFT prvog reda je

$$LPFT_{\Omega_1}(t,\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)w(\tau)e^{-j(\Omega\tau+\Omega_1\tau^2)}d\tau$$

i osim frekvencije Ω ima samo jedan parametar Ω_1.

Lokalna PFT – ilustracija



Lokalna PFT

- LPFT može se gledati kao STFT signala, demodulisanong sa $\exp(-j(\Omega_1\tau^2 + \Omega_2\tau^3 + \cdots + \Omega_N\tau^{N+1}))$.
- Ako smo zainteresovani za filtriranje signala, možemo naći koeficijente $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, demodulisati signal možeći ih sa $\exp(-j(\Omega_1\tau^2 + \Omega_2\tau^3 + \cdots + \Omega_N\tau^{N+1}))$ i korisiti standardni filtar za skoro čistu sinusiodu.
- Ovaj pristup možemo proširiti za bilo koji signal $x(t) = e^{j\phi(t)}$ estimirajući i filtrirajući demodulisani signal $x(t)\exp(-j\widehat{\phi}(t))$ sa niskopropusnim filtrom.
- Rezulutujući signal se dobija kada filtrirani signal vratimo na originalne frekvencije, modulišući ga sa $\exp(j\widehat{\phi}(t))$.

Lokalna PFT

- Filtrirani signal se može onda zapisati kao

$$x_f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B_t(t,\Omega) LPFT(t,\Omega) d\Omega,$$

  gdje je $LPFT(t,\Omega)$ LPFT od $x(t)$, $x_f(t)$ je filtrirani signal $B_t(t,\Omega)$ je funkcija koja se koristi za filtriranje.

- Može se postaviti tako da je izraz jednak 1 za regiju gdje je signal postoji, ostalo 0.