Nestacionarni signali i sistemi
Predavanje I

Uvodno predavanje

Predmetni nastavnici: prof. dr Ljubiša Stankovć, prof. dr Miloš Daković

Osnovne informacije

- **Predmetni nastavnici:**
  - prof. dr Ljubiša Stankovć i prof. dr Miloš Daković
  - e-mail: ljubisa@ucg.ac.me, milos@ucg.ac.me
- **Predmetni saradnik:**
  - dr Isidora Stanković (Laboratorija za obradu signala)
  - e-mail: isidoras@ucg.ac.me
- **Konsultacije**: po dogovoru
- **Fond časova:** 3P + 1V + 0L
- **Literatura:**
  - Lj. Stanković, *Digital Signal Processing with Selected Topics*, CreateSpace Independent Publishing Platform, An Amazon.com Company, 2015.

Ciljevi predmeta

- Upoznavanje sa alatima za analizu nestacionarnih signala koristeći vremensko-frekvencijske reprezentacije (Kratkotrajna Furijeova transformacija, Wavelet transformacija, distribucije energije...).
- Uspješno prepoznavanje i primjenjivanje odgovarajućih metoda za vremensko-frekvencijsku analizu na nestacionarnim signalima iz različitih oblasti.
- Upoznavanje sa softverima i programima koji pomažu u analizi nestacionarnih signala.

Opterećenje i provjera znanja

- 6 ECTS kredita; opterećenje studenata na nedjeljnom nivou: 8 sati
  - 3 časa predavanja
  - 1 čas računskih vježbi
  - Samostalni rad i konsultacije
- Poeni tokom semestra:
  - I kolokvijum – 34 poena
  - II kolokvijum – 33 poena
  - III kolokvijum – 33 poena
- Poeni nakon semestra: Ispit 100 poena.
- Prelazna ocjena se dobija sa 50 ili više poena u ukupnom zbiru.

Struktura kursa (1)

- I nedjelja – Uvodni čas; Furijeova transformacija.
- II nedjelja – Linearne vremensko-frekvencijske reprezentacije, Realizacija STFT;
- III nedjelja – LPFT, STFT visoke rezolucije; Primjena STFT (analiza govora spektrogramom)
- IV nedjelja – **I kolokvijum (24. oktobar)**
- V nedjelja – Wavelet transformacija
- VI nedjelja – Filter banks

Struktura kursa (2)

- VII nedjelja – Primjena Wavelet transformacije (filtriranje signala i kompresija slika)
- VIII nedjelja – **II kolokvijum (21. novembar)**
- IX nedjelja – Kvardatne reprezentacije (Wignerova distribucija i njene variante)
- X nedjelja – Trenutna frekvencija
- XI nedjelja – Primjena kvadratnih reprezentacija (ISAR)
- XII nedjelja – **III kolokvijum (19. decembar)**
- XIII nedjelja – **Popravni kolokvijumi (26. decembar)**

Furijeova transfromacija (FT)

- Furijeova ransformacija $X(\Omega)$ nekog signala $x(t)$ defnisana je: The function $X(\Omega)$, defined by

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt, \tag{1}$$

Dovoljan uslov za postojanje je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty. \tag{2}$$

- Inverzna FT je definisana kao:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega. \tag{3}$$

Osobine Furijeove Transformacije I

- *Linearnost*: Za dva signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$ FT je

$$\mathrm{FT}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega),$$

gdje su $X_1(\Omega)$ i $X_2(\Omega)$ FT signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$.

- *Realnost*: FT je realna, $X^*(\Omega) = X(\Omega)$), ako

$$x^*(-t) = x(t),$$

jer je

$$X^*(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\Omega t} dt \overset{t \to -t}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(-t) e^{-j\Omega t} dt = X(\Omega)$$

if $x^*(-t) = x(t)$.

Osobine Furijeove Transformacije II

- *Modulacija*: FT modulisanog signala je

$$\mathrm{FT}\{x(t)e^{j\Omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\Omega_0 t}e^{-j\Omega t}dt = X(\Omega-\Omega_0)$$

$$\mathrm{FT}\{2x(t)\cos(\Omega_0 t)\} = X(\Omega-\Omega_0)+X(\Omega+\Omega_0).$$

- *Pomjeraj u vremenu*:

$$\mathrm{FT}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j\Omega t}dt = X(\Omega)e^{-jt_0\Omega}.$$

- *Skaliranje po vremenu*:

$$\mathrm{FT}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{|a|}X(\frac{\Omega}{a}).$$

Osobine Furijeove Transformacije III

- *Konvolucija*:

$$\mathrm{FT}\{x(t) *_t h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)e^{-j\Omega t}d\tau dt$$

$$\overset{t-\tau\to u}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(u)e^{-j\Omega(\tau+u)}d\tau du = X(\Omega)H(\Omega).$$

- *Proizvod signala*:

$$\mathrm{FT}\{x(t)h(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\int_{-\infty}^{\infty} H(\theta)e^{j\theta t}d\theta e^{-j\Omega t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\theta)X(\Omega-\theta)d\theta$$

$$= X(\Omega) *_\Omega H(\Omega) = H(\Omega) *_\Omega X(\Omega).$$

Osobine Furijeove Transformacije IV

- *Parsevalova teorema*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)Y^*(\Omega)d\Omega,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega.$$

FT Pravouganog prozora I

Izracunati FT pravouganog prozora

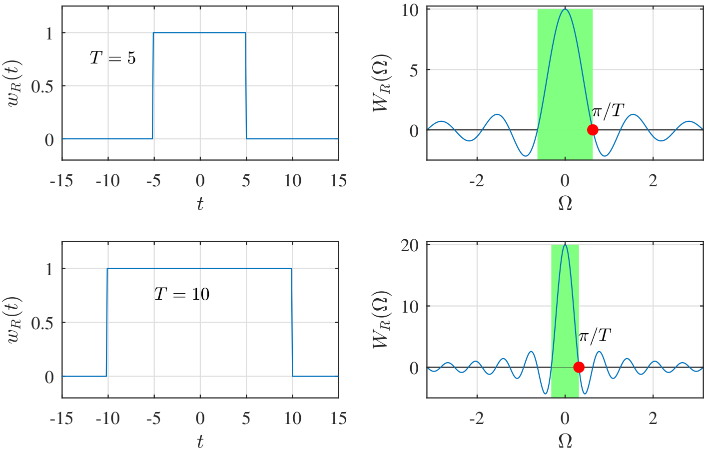
$$w_R(t) = \begin{cases} 1, \text{ za } -T \leq t \leq T \\ 0, \text{drugdje} \end{cases}$$

Po definiciji je

$$W_R(\Omega) = \int_{-T}^{T} 1 \cdot e^{-j\Omega t} dt = \frac{e^{j\Omega T} - e^{-j\Omega T}}{j\Omega} = 2\frac{\sin(\Omega T)}{\Omega}$$

Nule ove funkcije su $\Omega T = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Sirina glavne latice je $2\pi/T$.

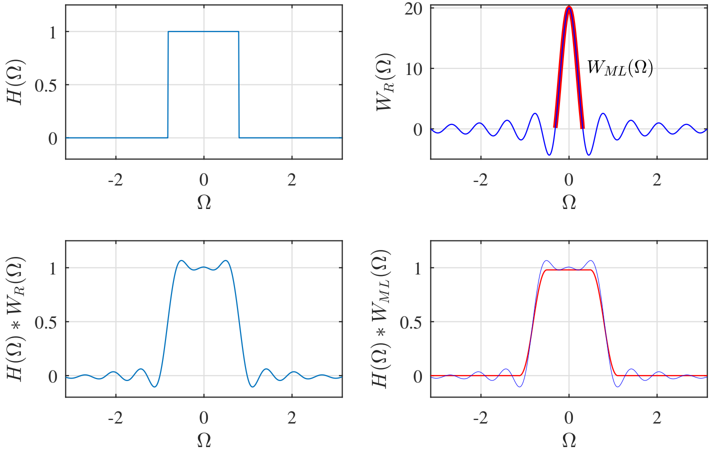
FT Pravouganog prozora II



Sirina u vremenskom domenu $2T$, sirina glavne latice u FT domenu $2\pi/T$.

Proizvod sirina u vremenskom domenu i glavne latice u FT domenu $2\pi = const$.

Mnozenju signala cija je FT $H(j\Omega)$ sa prvouganim prozorom odgovara njihova konvolucija u spectralnom domenu $W_R(\Omega) * H(j\Omega)$



Metod Stacionarne Faze I

Za slozeni signal

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \tag{4}$$

se ne moze dobiti analiticki oblik Furieove transformacije. Metod stacionarne faze glasi da ako je funkcija faze $\phi(t)$ monotona i amplituda $A(t)$ dovoljno glatka, onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{j\phi(t)}e^{-j\Omega t}dt \simeq A(t_0)e^{j\phi(t_0)}e^{-j\Omega t_0}\sqrt{\frac{2\pi j}{|\phi''(t_0)|}}\ , \tag{5}$$

gdje je t_0 rjesenje jednacine

$$\phi'(t_0) = \Omega.$$

Metod Stacionarne Faze II

Najveci doprinos integralu je kada je faza $\phi(t) - \Omega t$ stacionarna, odnosno $(\phi(t) - \Omega t)' = 0$. Vrijednost

$$\Omega_i(t) = \phi'(t)$$

se zove trenutna frekvencija. Oko trenutka stacionarne faze t_0 vazi

$$\frac{d\left(\phi(t) - \Omega t\right)}{dt}_{|t=t_0} = 0$$

$$\phi'(t_0) - \Omega = 0,$$

Metod Stacionarne Faze III

Koristeci Tejlorov red

$$\phi(t) - \Omega t = [\phi(t_0) - \Omega t_0] + [\phi'(t_0) - \Omega] + \frac{1}{2}\phi''(t_0)t^2 + \ldots$$

posto je $\phi'(t_0) - \Omega = 0$ dobijamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{j(\phi(t)-\Omega t)}dt \cong A(t_0)e^{j(\phi(t_0)-\Omega t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{1}{2}\phi''(t_0)t^2}dt,$$

gdje je $A(t) \cong A(t_0)$ korisceno. Sa

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{1}{2}at^2}dt = \sqrt{\frac{2\pi j}{|a|}}$$

Metod Stacionarne Faze IV

metod stacionarne faze slijedi.

Primjer: Naci FT signala

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)} = \exp(-(t^2-1)t^2)\exp(j4\pi t^2 + j10\pi t).$$

Metodom stacionarne faze $\phi'(t_0) - \Omega = 0$, dobijamo

$$8\pi t_0 + 10\pi = \Omega$$
$$t_0 = \frac{\Omega - 10\pi}{8\pi}$$

je

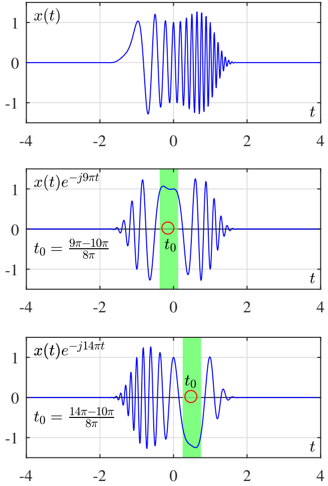
$$\phi''(t_0) = 8\pi. \tag{6}$$

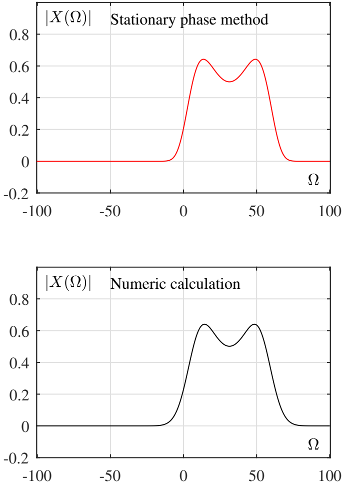
Metod Stacionarne Faze V

Amplituda $X(\Omega)$ je

$$|X(\Omega)| \simeq A(t_0)\left|\sqrt{\frac{2\pi}{\phi''(t_0)}}\right| = \exp(-(t_0^2-1)t_0^2)\sqrt{\frac{2\pi}{8\pi}}$$
$$= \frac{1}{2}\exp\left(-\left[\left(\frac{\Omega-10\pi}{8\pi}\right)^2-1\right]\left(\frac{\Omega-10\pi}{8\pi}\right)^2\right) \tag{7}$$

Metod Stacionarne Faze VI





$t_0 = -1/8$ i $t_0 = 1/2$

FT diskretnog signala I

Definicija:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}.$$

Veza sa FT

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)e^{-j\Omega n\Delta t}\Delta t.$$

Uvodeci oznake

$$x(n\Delta t)\Delta t \longrightarrow x(n) \quad \text{and} \quad \Omega\Delta t \longrightarrow \omega, \tag{8}$$

dobijamo FT diskretnog signala $x(n)$.

FT diskretnog signala II

Inverzna FT diskretnih signala je

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \tag{9}$$

Teorema o odabitanju: Posmatrajmo signal, $x(t)$, cija je FT $X(\Omega)$ razlicita od nule samo unutar $|\Omega| \leq \Omega_m$,

$$X(\Omega) = 0 \text{ for } |\Omega| > \Omega_m.$$

Signal $x(t)$s e za svako t moze rekonstruisati na osnovu odbiraka, $x(n\Delta t)$, uzetih sa intervalom Δt takvim da $\Delta t < \frac{\pi}{\Omega_m} = \frac{1}{2f_m}$, gdje je $\Omega_m = 2\pi f_m$.

Fig_0_PER_EXT_Veca-eps-conver

The Fourier transform of a signal, $X(\Omega)$, such that $X(\Omega) = 0$ for $|\Omega| > \Omega_m$ (top) and its periodically extended version, $X_p(\Omega)$, with the period $2\Omega_0 = 2\frac{\pi}{\Delta t} > 2\Omega_m$.

Diskretna Furijeova transfromacija (DFT)

- DFT nekog signala $x(n)$ defnisana je:

$$\text{DFT}\{x(n)\} = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi kn/N}$$

gdje $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, $\omega = 2\pi/N$, $\Omega = 2\pi/(N\Delta t)$.

- Inverzna DFT je definisana kao:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{2\pi kn/N}$$

gdje $k = 0, 1, 2, \ldots, N$.