

NESTACIONARNI SIGNALI I SISTEMI I računske vježbe

Zadatak 1.

Dati su signali:

a) $x_1(t) = 3 \exp(j64 \sin(\pi t) - j8\pi t)$,

b) $x_2(t) = \exp(j128\pi t^2)$ između $-2 \leq t \leq 2$ i $x(t) = 0$ drugdje.

Izračunati trenutnu frekvenciju ovih signala. Koja je maksimalna frekvencija koja može da se očekuje u Furijeovoj transformaciji, pretpostavljajući metod stacionarne faze? Koji je najmanji interval odabiranja?

Rješenje:

Trenutna frekvencija predstavlja prvi izvod faze signala, tj.

$$\Omega_i(t) = \phi'_i(t). \quad (1)$$

Furijeova transformacija (FT) približno obuhvata sve vrijednosti koje trenutna frekvencija može uzeti u posmatranom vremenskom intervalu.

Trenutna frekvencija signala $x_1(t)$ će biti

$$\Omega_i(t) = \phi'_i(t) = \frac{d(64 \sin(\pi t) - 8\pi t)}{dt} = 64\pi \cos(\pi t) - 8\pi. \quad (2)$$

Ekstremne vrijednosti trenutne frekvencije će biti kada $\cos(\pi t) = \pm 1$, tj.

$$\Omega_i(t) = 64\pi - 8\pi = 56\pi$$

$$\Omega_i(t) = -64\pi - 8\pi = -72\pi.$$

Maksimalna frekvencija koja može da se očekuje u FT signala $x_1(t)$ je maksimalna absolutna vrijednost trenutne frekvencije, tj. $\Omega_m = |\Omega_i(t)| = 72\pi$. Sada možemo izračunati i interval odabiranja:

$$\Delta t < \frac{\pi}{\Omega_m} = \frac{\pi}{72\pi} = \frac{1}{72}. \quad (3)$$

Za signal $x_2(t)$, trenutna frekvencija je:

$$\Omega_i(t) = 256\pi t, \text{ između } -2 \leq t \leq 2. \quad (4)$$

Pošto se signal nalazi u intervalu $-2 \leq t \leq 2$, ekstremna vrijednost koju trenutna frekvencija može da uzme je $\pm 512\pi$, pa je maksimalna vrijednost FT $\Omega_m = |\Omega_i(t)| = 512\pi$ i interval odabiranja:

$$\Delta t < \frac{\pi}{\Omega_m} = \frac{\pi}{512\pi} = \frac{1}{512}. \quad (5)$$

Napomena: Pošto je metod stacionarne faze samo aproksimacija, u praktičnim implementacijama, vrijednosti intervala odabiranja koje su blizu teorijske granice treba izbjevati

Zadatak 2.

Koja je optimalna dužina Hanning-ovog prozora za računanje STFT signala

$$x(t) = 3 \exp(j64\pi t^2 - j8\pi t + j\pi/3)$$

za $-1 \leq t \leq 1$?

Rješenje:

Faza signala $x(t)$ je oblika $jat^2 + jbt + jc$. Koristeći se metodom stacionarne faze, trenutna frekvencija ovog signala iznosi:

$$\Omega_i(t) = \phi'_i(t) = \frac{d(64\pi t^2 + 8\pi t + \pi/3)}{dt} = 128\pi t + 8\pi. \quad (6)$$

Unutar prozora koji je centriran t imamo frekvencije koje odgovaraju intervalu od $t - T$ do $t + T$, odnosno, širina opsega frekvencija će biti:

$$(2a(t + T) + b) - (2a(t - T) + b) = 4aT. \quad (7)$$

Širina glavne latice Hann(ing)-ovog prozora je $4\pi/T$, pa je širina STFT

$$D_0 = 4aT + \frac{4\pi}{T}. \quad (8)$$

Primijetimo da širina ne zavisi od t .

Kako bismo našli minimalnu širinu prozora, treba da nađemo

$$\frac{dD_0}{dT} = 0. \quad (9)$$

Pa će biti:

$$\frac{d(4aT + 4\pi/T)}{dT} = 4a - 4\pi/T^2 = 0, \quad (10)$$

odakle dobijamo da je

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (11)$$

U našem slučaju, $a = 64\pi$, pa dobijamo da je:

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{64\pi}} = \frac{1}{8}. \quad (12)$$

Zadatak 3.

Napisati funkciju koja izračunava STFT. Ulazni argumenti treba da budu: signal u obliku niza x , prozor u obliku niza w i korak T_s . Funkcija treba da vrati STFT kao matricu S . Pretpostaviti da su x i w vektori kolone a da je T_s nenegativna vrijednost.

Rješenje:

Diskretna STFT dobija se:

$$STFT(n, k) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w(m)x(n+m)e^{-j\frac{2\pi mk}{N}} \quad (13)$$

Funkcija kojom ćemo dobiti ovaj rezultat je:

```
function S=STFT_calc(x,w,Ts)

N=length(x);
Nw=length(w);

t=1:Ts:N-Nw;
S=zeros(Nw,length(t));

tau=(0:Nw-1);
% zbog boljeg opisa definicije, moze se definisati i kao tau=-Nw/2:Nw/2-1;

for k=1:length(t)
    S(:,k)=x(t(k)+tau).*w;
end

S=fft(S);

%    S=fftshift(fft(S),1);
```

Zadatak 4.

Koristeći funkciju definisanu Zadatom 4., napisati program koji računa STFT od signala

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \sin\left(122\pi\frac{t}{128}\right) - \cos\left(42\pi\frac{t}{128} - \frac{16}{11}\pi\left(\frac{t-128}{64}\right)^2\right) \\ &\quad - 1.2\cos\left(94\pi\frac{t}{128} - 2\pi\left(\frac{t-128}{64}\right)^2 - \pi\left(\frac{t-120}{64}\right)^3\right)e^{-\left(\frac{t-140}{75}\right)^2} \\ &\quad - 1.6\cos\left(15\pi\frac{t}{128} - 2\pi\left(\frac{t-50}{64}\right)^2\right)e^{-\left(\frac{t-50}{16}\right)^2} \\ x_2(t) &= x_1(255-t).\end{aligned}$$

i crta njihove spektrograme. Dužina signala je $N = 256$. Za računanje STFT koristiti Hamming prozor dužine $N_w = 64$. Za vizuelizaciju podataka koristiti funkcije **waterfall** i **imagesc**. Prokomentarisati rezultat.

Rješenje:

```
close all, clear all, clc
Nw=128;
N=256;

t=(-Nw/2:(N-1+Nw/2))';

x1=sin(122*pi*(t/128))-...
cos(42*pi*(t/128)-(16/11)*pi*((t-128)/64).^2)-...
1.2*cos(94*pi*(t/128)-2*pi*((t-128)/64).^2-pi*((t-120)/64).^3).*exp(-((t-140)/75).^2)-...
1.6*cos(15*pi*(t/128)-2*pi*((t-50)/64).^2).*exp(-((t-50)/16).^2));

S1=STFT_calc(x1,hamming(Nw),1);

SP1=abs(S1).^2;

subplot(121),imagesc(SP1)

subplot(122),mesh(SP1)
colormap hot
```