Projektovanje i implementacija ISAU

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Predavanje 1

Fazi skupovi i osnovne operacije nad fazi skupovima

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Naprave razliku između klasičnih i fazi skupova
- Definišu pojmove fazi skup, funkcija pripadnosti, fazi broj, α-cut (α-rez), itd.
- Izvrše osnovne aritmetičke operacije sa fazi brojevima

Klasična teorija skupova

U klasičnoj teoriji skupova, pripadnost elementa skupu je precizno definisana. To znači da na pitanje da li element pripada nekom skupu, odgovor može biti jedino „da“ ili „ne“. Klasična teorija skupova je primjenjiva i u determinističkim i u stohastičkim slučajevima. Međutim, ona ne podržava parcijalnu pripadnost elementa nekom skupu. To je čini neprikladnom za modelovanje određenih problema iz stvarnog života.

Ovo je dovelo do razvoja fazi (eng. fuzzy) teorije skupova, koja omogućava parcijalnu pripadnost elemenata skupu. U fazi teoriji, element može pripadati skupu sa određenim stepenom istinitosti, vrijednostima između 0 i 1, što omogućava fleksibilnije i intuitivnije modelovanje nepreciznih ili nejasnih informacija. Suštinski, fazi teorija predstavlja generalizaciju klasične teorije skupova.

Prije izlaganja fazi teorije skupova, neophodno je podsjetiti se osnovnih koncepata klasične teorije skupova.

Klasična teorija skupova

Univerzalni skup ili univerzum diskursa X se definiše kao skup koji sadrži sve objekte koji imaju neku zajedničku karakteristiku. Pojedinačni elementi skupa X se označavaju sa x. Svaki element naziva se *članom* skupa X, dok unije tih elemenata predstavljaju *podskupove* skupa X.

Pripadnost elementa skupu zapisuje se na sljedeći način:

$$x \in X.$$

Ukoliko element ne pripada skupu piše se:

$$x \notin X.$$

Da je A podskup univerzalnog skupa (u striktnom smislu) zapisujemo na sljedeći način

$$A \subset X.$$

Ukoliko za podskup A može da važi da je podskup skupa X ili da je jednak skupu X, to se zapisuje na sljedeći način:

$$A \subseteq X.$$

Operacije nad klasičnim skupovima

Neka su A i B dva podskupa. Ukoliko je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, to znači da je A **podskup** B ($A \subset B$). Ukoliko važi da je $A \subset B$ i $B \subset A$, tada su ova dva skupa jednaka ($A = B$).

Razlika podskupova A i B se definiše na sljedeći način:

$$A - B = \{c \mid c \in A \ \ i \ \ c \notin B\}.$$

Komplement nekog podskupa A definiše se kao:

$$\overline{A} = X - A.$$

Unija i **presjek** podskupova A i B su po definiciji:

$$A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ ili } c \in B\}$$

$$A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ i } c \in B\}$$

Za operacije nad skupovima u klasičnoj teoriji važe osobine involucije, komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti, kao i De Morganova pravila.

Operacije nad klasičnim skupovima

Involucija	$\overline{\overline{A}} = A$
Komutativnost	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Asocijativnost	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cap C)$
Distributivnost	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cup A = A$ $A \cap A = A$ $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$ $A \cup X = X$
De Morganova pravila	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Operacije nad klasičnim skupovima

Jedan mogući način da definišemo pripadnost nekog elementa podskupu A je pomoću *funkcije pripadnosti*. Funkcija pripadnosti podskupa A se u klasičnoj teoriji skupova definiše na sljedeći način:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \in A, \\ 0, & \text{za } x \notin A. \end{cases}$$

Pomoću funkcija pripadnosti se mogu definisati sve osnovne operacije nad skupovima. Na primjer, operacije unije i presjeka dva skupa A i B (podskupa univerzalnog skupa X) se definišu na sljedeći način:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$
$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

dok je funkcija pripadnosti komplementa skupa A jednaka:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Fuzzy teorija skupova

Osnovna ideja fazi teorije skupova se najbolje može objasniti na konkretnom primjeru. Pretpostavimo da univerzalni skup X sadrži sva ljudska bića, a da razmatramo podskup ovoga skupa, koji sadrži sve stare osobe:

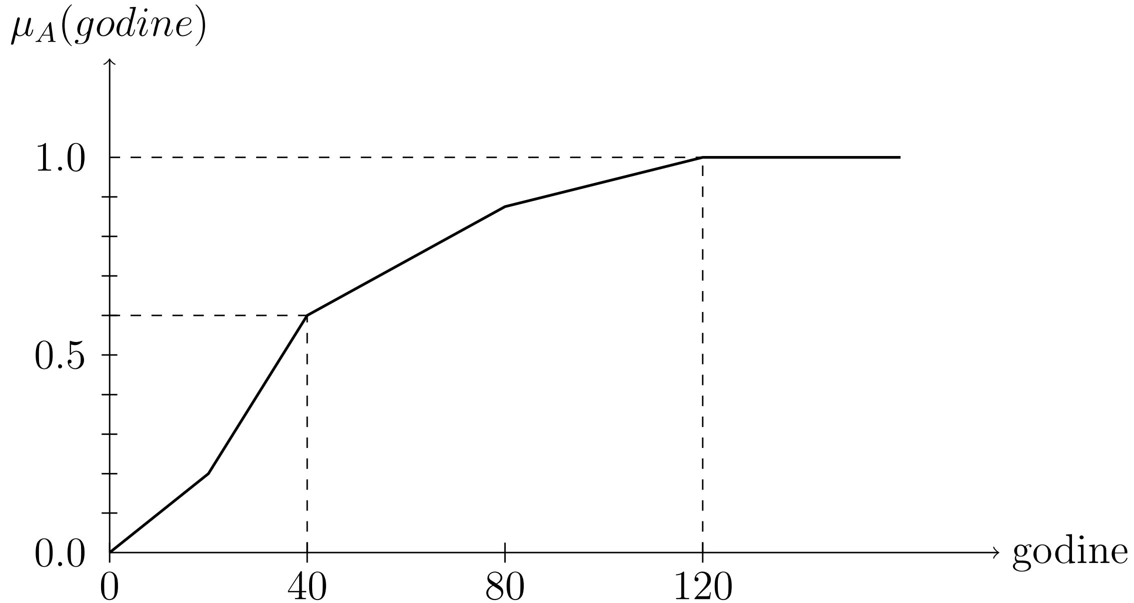
$$A = \{x \in X \mid x \text{ predstavlja staru osobu}\}$$

Atribut „staro" po svojoj prirodi nije jasno definisan. Na primjer, osoba od 40 godina može se smatrati i starom i mladom u zavisnosti od konteksta. U klasičnoj teoriji skupova, granica se može povući na 40 godina, što bi značilo da sve osobe koje imaju 40 ili više godina pripadaju podskupu A. Međutim, osoba koja ima 39 godina ne bi pripadala tom skupu, što je matematički ispravno, ali u praksi djeluje nelogično.

Ovaj problem rješava fazi teorija, koja dozvoljava parcijalnu pripadnost skupu, omogućavajući da elementi, poput osobe od 39 godina, pripadaju skupu A sa određenim stepenom pripadnosti.

Fuzzy teorija skupova

U fazi teoriji za opisivanje atributa star može se koristiti funkcija pripadnosti prikazana na slici:

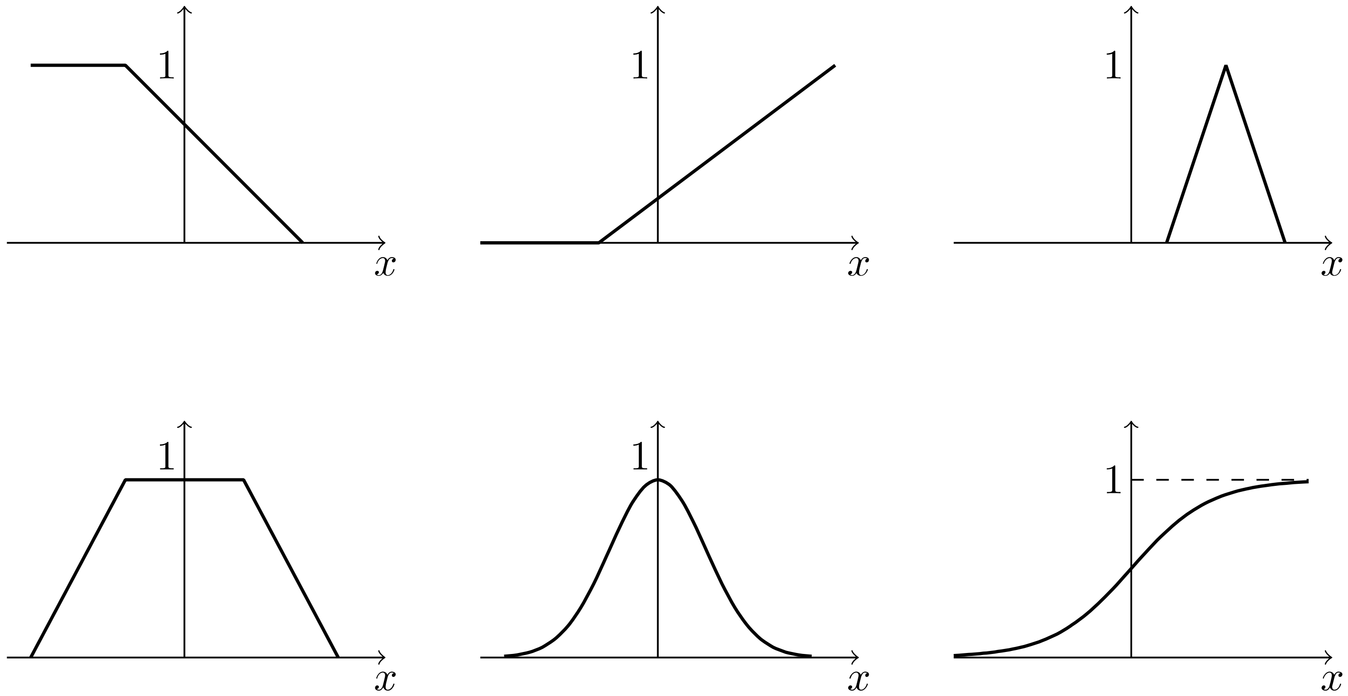


Na ovaj način, samo apsolutno mlade osobe, kao što su novorođenčad (0 godina), imaju vrijednost pripadnosti 0, dok apsolutno stare osobe sa 120 godina imaju vrijednost pripadnosti 1. Sve ostale osobe, čije su godine između 0 i 120, imaju određeni stepen pripadnosti u rasponu od 0 do 1.

Fuzzy teorija skupova

Prethodna funkcija predstavlja primjer funkcije pripadnosti fazi skupu A. Njen oblik zavisi od prirode problema i može varirati u skladu sa specifičnim zahtjevima primjene fazi skupova.

Neki od karakterističnih oblika fazi funkcije pripadnosti su skicirani ispod.



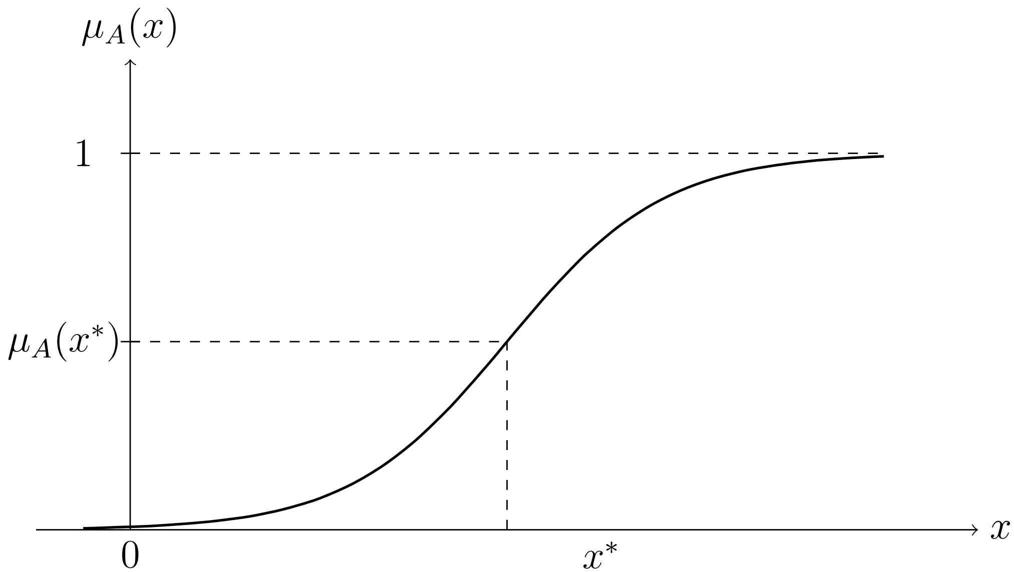
Primjer – skup pozitivnih i velikih brojeva

Neka je X skup realnih brojeva, i neka se skup A sastoji od brojeva iz skupa X koji su veliki i pozitivni:

$$A = \{x \in X \mid x \text{ je pozitivan i veliki broj}\}.$$

Skup A, definisan na ovaj način, nije strogo određen u smislu klasične teorije skupova. Atribut „pozitivan“ je jasno definisan, dok je atribut „veliki broj“ neprecizan. Zbog ove nepreciznosti, skup A zapravo predstavlja fazi skup, te ga je potrebno opisati odgovarajućom funkcijom pripadnosti. Jedan primjer funkcije pripadnosti koja odgovora skupu A je dat na slici ispod.

.



Primjer – skup pozitivnih i velikih brojeva

Funkcija pripadnosti sa prethodnog slajda se matematički može definisati na sljedeći način:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \leq 0, \\ \dfrac{1}{1 + e^{-1.2(x-4)}}, & \text{za } x > 0. \end{cases}$$

Za konkretan primjer odabrana funkcija pripadnosti odlično opisuje oba atributa.

U nekom drugom slučaju, u zavisnosti od konkretne primjene, može se odabrati funkcija drugačijeg oblika od one predstavljene u ovom primjeru. Na primjer, i sljedeća funkcija može dobro opisivati fazi skup A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{za } x > 0. \end{cases}$$

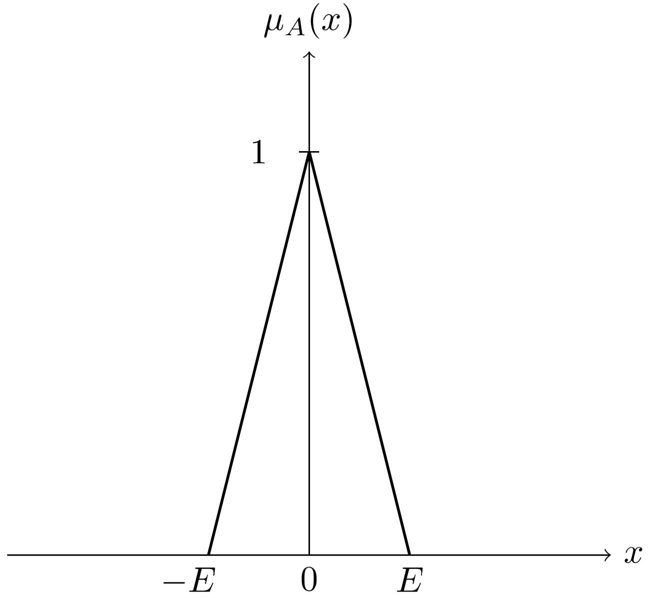
Takođe, u zavisnosti od toga šta se smatra velikim brojem, argument eksponencijalne funkcije može biti preskaliran određenim faktorom.

Primjer – skup malih brojeva

Neka se skup A sastoji od brojeva koji su male vrijednosti:

$$A = \{x \in X \mid x \text{ je broj male vrijednosti}\}.$$

Jedan mogući oblik funkcije pripadnosti skupa A je prikazan na slici ispod. Broj E, koji predstavlja graničnu vrijednost broja se specificira od konkretne primjene.



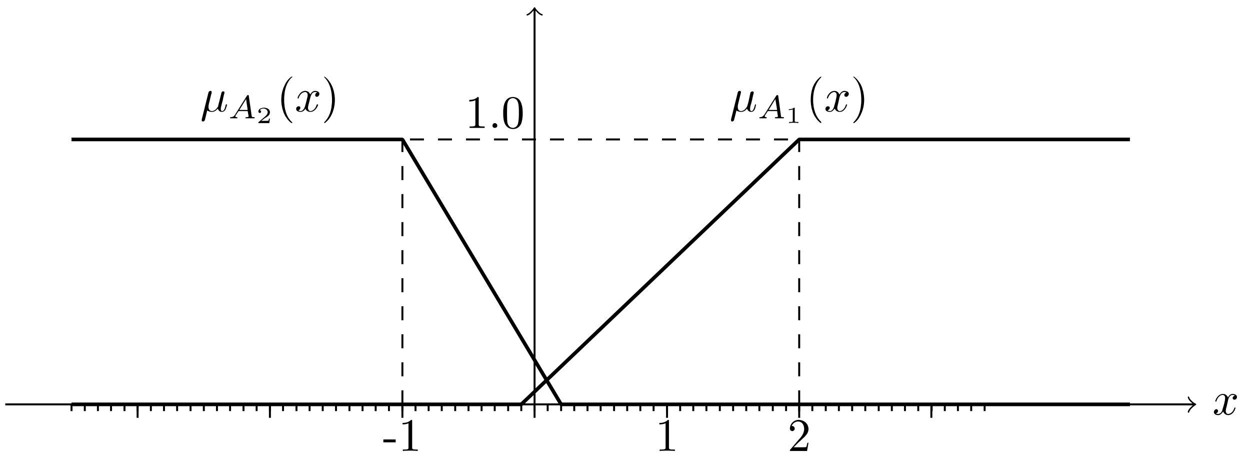
Fuzzy teorija skupova

U nastavku su date neke osnovne karakteristike funkcije pripadnosti:

- Funkcije pripadnosti su najšešće normalizovane, što znači da se njihova vrijednost kreće u opsegu od 0 (0% pripadnosti) do 1 (100% pripadnosti);
- Funkcija pripadnosti ima samo pozitivne vrijednosti i za razliku od funkcije gustine vjerovatnoće njen integral (površina ispod krive) ne mora biti jednaka jedinici (može uzeti vrijednosti od 0 do ∞, uključujući i 0 i ∞);
- Funkcija pripadnosti ne mora biti kontinualna i integrabilna;
- Elementi univerzalnog skupa mogu pripadati različitim fazi skupovima sa različitim stepenima pripadnosti. Na primjer, osoba može istovremeno biti djelimično mlada i djelimično stara, u zavisnosti od funkcija pripadnosti tih skupova. Ovo je dozvoljeno u fazi teoriji skupova, jer on omogućava parcijalnu pripadnost elementa više skupova istovremeno.

Primjer – višestruka pripadnost skupu

Pretpostavimo da imamo dva fazi skupa, brojevi koji su „pozitivni i veliki“ i brojevi koji su „mali i negativni“. Funkcije pripadnosti za oba skupa date su na slici ispod.

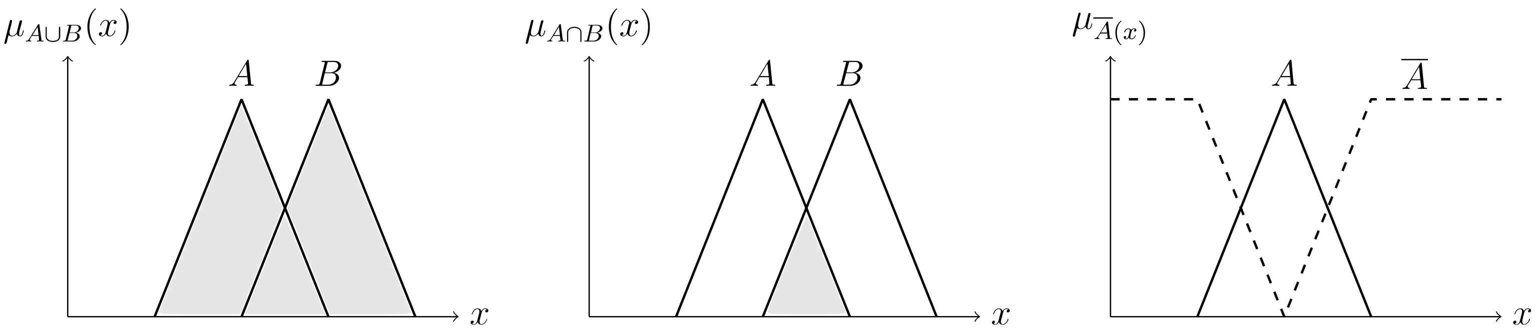


Sa slike se može vidjeti da je broju 0.1 dodijeljen stepen pripadnosti prvom skupu u vrijednosti 0.095, a drugom skupu u vrijednosti 0.08. Ove dvije vrijednosti ne poništavaju jedna drugu niti se sabiraju, već ukazuju na to da broj 0.1 istovremeno može biti i pozitivan i negativan, mali i veliki, sa različitim stepenima pripadnosti za svaki od ovih atributa.

Operacije nad fazi skupovima

Operacije unije, presjeka i komplamenta nad fazi skupovima se definišu na isti način kao kod klasičnih skupova, tj. za svaka dva podskupa A i B, kao i za svaki element $x \in X$, važe sljedeći izrazi:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$
$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$
$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$



Polazeći od gornjih definicija, može se pokazati da sve osobine koje važe za klasične skupove, važe i za fazi skupove (asocijativnost, komutativnost, distrubutivnosti, De Morganova pravila, itd.).

Primjer – operacije nad fazi skupovima

Data su dva diskretna fazi skupa:

$$A = \left\{\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.2}{5}\right\}, \; B = \left\{\frac{0}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.2}{4} + \frac{0.4}{5}\right\}$$

Rezultati elementarnih operacija nad skupovima su dati ispod:

Komplement: $\bar{A} = \left\{\frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{0.8}{5}\right\}, \quad \bar{B} = \left\{\frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.6}{5}\right\}$

Unija: $A \cup B = \left\{\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.4}{5}\right\},$

Presjek: $A \cap B = \left\{\frac{0}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.2}{4} + \frac{0.2}{5}\right\}$

Razlika: $A \,|\, B = A \cap \bar{B} = \left\{\frac{0}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.2}{5}\right\}$

De Morganovi zakon: $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}} = \left\{\frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{0.6}{5}\right\},$

$$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}} = \left\{\frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.8}{5}\right\}$$

Aritmetika intervala

Intervali se mogu definisati kao skupovi specijalnog tipa definisani na realnoj osi.

U nastavku su date neke osnovne osobine intervala koje će kasnije biti potrebne za izvođenje osnovnih aritmetičkih operacija nad fazi brojevima.

- **Jednakost:** dva intervala $[\underline{a},\ \overline{a}]$ i $[\underline{b},\ \overline{b}]$ su jednaka ako i samo ako važi da je: $\underline{a} = \underline{b}$ i $\overline{a} = \overline{b}$.
- **Presjek:** presjek dva intervala $[\underline{a},\ \overline{a}]$ i $[\underline{b},\ \overline{b}]$ je interval definisan na sljedeći način:

$$[\underline{a},\ \overline{a}] \cap [\underline{b},\ \overline{b}] = [\max(\underline{a},\underline{b}), \min(\overline{a},\overline{b})].$$

Napomena: $[\underline{a},\overline{a}] \cap [\underline{b},\overline{b}] = \varnothing$ ako i samo ako je $\underline{a} > \overline{b}$ ili $\underline{b} > \overline{a}$.

Aritmetika intervala

- **Unija:** unija dva intervala se definiše na sljedeći način:

$$\left[\underline{a},\ \overline{a}\right] \cup \left[\underline{b},\ \overline{b}\right] = \left[\min(\underline{a},\underline{b}), \max(\overline{a},\overline{b})\right].$$

Napomena: prethodno važi samo ako je $[\underline{a},\overline{a}] \cap [\underline{b},\overline{b}] = \varnothing$, u suprotnom rezultat unije nije interval.

- **Nejednakost:** interval $\left[\underline{a},\ \overline{a}\right]$ je manji od (odnosno veći od) intervala $\left[\underline{b},\ \overline{b}\right]$ ako i samo ako važi da je $\overline{a} < \underline{b}$ (odnosno $\underline{a} > \overline{b}$), u suprotnom intervali se ne mogu porediti. Odnosi $\leq$ i $\geq$ ne mogu biti definisani za intervale.

- **Inkluzija:** za interval $\left[\underline{a},\ \overline{a}\right]$ se kaže da je uključen unutar intervala $\left[\underline{b},\ \overline{b}\right]$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi $\underline{b} \leq \underline{a}$ i $\overline{a} \leq \overline{b}$. Prethodno se zapisuje sljedećim izrazom:

$$[\underline{a},\overline{a}] \subseteq [\underline{b},\overline{b}].$$

Aritmetika intervala

- **Sabiranje:** $[\underline{a},\overline{a}] + [\underline{b},\overline{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$
- **Oduzimanje:** $[\underline{a},\overline{a}] - [\underline{b},\overline{b}] = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}]$
- **Recipročna vrijednost:**

  Ako $0 \notin [\underline{a},\overline{a}]$ onda je $[\underline{a},\overline{a}]^{-1} = \left[\dfrac{1}{\overline{a}}, \dfrac{1}{\underline{a}}\right]$

  Ako $0 \in [\underline{a},\overline{a}]$ onda je $[\underline{a},\overline{a}]^{-1}$ nedefinisan

- **Dijeljenje:** $[\underline{a},\overline{a}] \div [\underline{b},\overline{b}] = [\underline{a},\overline{a}] \cdot [\underline{b},\overline{b}]^{-1}$
- **Množenje:** $[\underline{a},\overline{a}] \cdot [\underline{b},\overline{b}] = [\underline{p},\overline{p}]$

  gdje je $\underline{p} = \min\{\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}$

  $\overline{p} = \max\{\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}$

- **Maksimum:** $\max\{[\underline{a},\overline{a}],[\underline{b},\overline{b}]\} = \left[\max\{\underline{a},\underline{b}\}, \max\{\overline{a},\overline{b}\}\right]$
- **Minimum:** $\min\{[\underline{a},\overline{a}],[\underline{b},\overline{b}]\} = \left[\min\{\underline{a},\underline{b}\}, \max\{\overline{a},\overline{b}\}\right]$

Aritmetika intervala

Neke osobine intervala:

- Aritmetičke operacije nad intervalima teže da dobiju rezultat koji obuhvata sva moguća rješenja operacije. Na primjer neka je $a-b=[1,2]-[0.1]=[0,2]$, što znači da za definisane intervale a i b njihova razlika je zagarantovana da bude unutar intervala [0,2];
- Prethodna osobina može dovesti do nekih nelogičnosti. Na primjer$[1,2]-[1,2]=[-1,1]$. Ono što je očekivano je da rezultat bude [0,0], međutim shodno pravliu 1 rezultat je interval koji sadrži sva moguća rješenja, uključujući i [0,0];
- Neka je $Z=\left[\underline{z}\,,\,\overline{z}\right]$ interval za koji važi $\underline{z}=\overline{z}$, tada se ovaj interval naziva tačkom.
- Ukoliko je interval $Z=\left[\underline{z}\,,\,\overline{z}\right]$ tačka, tada važi:

$$Z-Z=0 \quad \text{i} \quad Z\,/\,Z=I=[1,1] \quad (0\notin Z).$$

Primjer – aritmetika intervala

Neka su X=[0.2, 0.4] i Y=[0.1,0.5] intervali tako da je $X \subset Y$. Tada važi:

1. $$X^{-1} = \frac{1}{[0.2, 0.4]} = [2.5, 5]$$

   $$Y^{-1} = \frac{1}{[0.1, 0.5]} = [2, 10]$$

   $$X^{-1} \subset Y^{-1}$$

2. $$1 - X = [1,1] - [0.2, 0.4] = [0.6, 0.8]$$

   $$1 - Y = [1,1] - [0.1, 0.5] = [0.5, 0.9]$$

   $$1 - X \subset 1 - Y$$

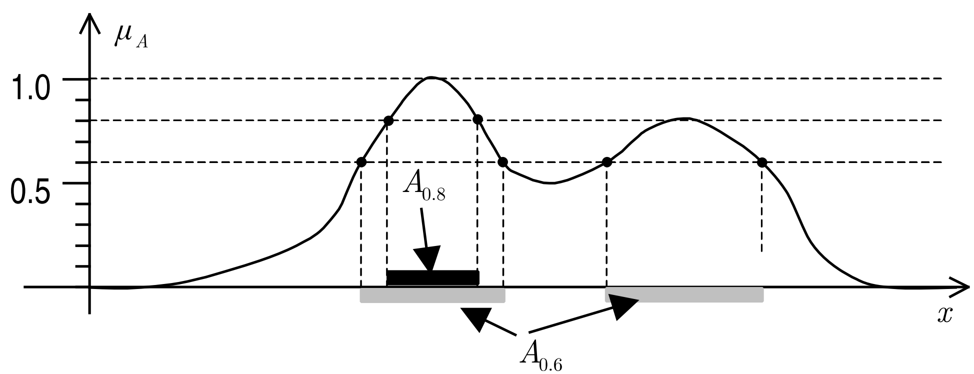
3. $$\frac{1}{1 - X} = \frac{1}{[1,1] - [0.2, 0.4]} = \left[\frac{5}{4}, \frac{5}{3}\right]$$

   $$\frac{1}{1 - Y} = \frac{1}{[1,1] - [0.5, 0.9]} = \left[\frac{10}{9}, 2\right]$$

   $$\frac{1}{1 - X} \subset \frac{1}{1 - Y}$$

Fuzzy brojevi

- Fuzzy skup A se definiše kao skup elemenata zajedno sa odgovarajućom funkcijom pripadnosti $\mu_A(x)$.
- Podskup A_a skupa A definisan kao $A_a = \{ x \in A \mid \mu_A(x) \geq \alpha \}$, za svako $\alpha \in [0,1]$ se naziva α-cut fuzzy skupa.
- Koncept α-reza je ilustrovan na slici ispod. Oba skupa, $A_{0.8}$ i $A_{0.6}$ predstavljaju α-rezove, međutim, $A_{0.6}$ se ne sastoji iz jednog intervala.



- Fazi skup se naziva normalnim ukoliko njegov nosač (support) predstavlja interval, i ukoliko je funkcija pripadnosti konveksna i dostiže vrijednost 1. Drugi naziv za normalne fazi skupove je fazi brojevi.

Fuzzy brojevi

- **Princip ekstenzije**:

Neka su X i Y dva fazi skupa i neka je f funkcija dvije varijable (npr. +, –, *, max, itd.): f: $X \times Y \rightarrow Z$. Dalje, neka su $\mu_X(x)$, $\mu_Y(y)$ i $\mu_Z(z)$ funkcije pripadnosti datih skupova. Tada je:

$$\mu_Z(z) = \bigvee_{f(x,y)=z} \{\mu_X(x) \wedge \mu_Y(y)\},$$

pri čemu su operacije ∧ i ∨ definisane na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_2 &= \max(x_1, x_2), \\ x_1 \wedge x_2 &= \min(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Ukoliko su fazi skupovi normalni, tada za α-rezove skupova Z, X i Y važi sljedeće:

$$\begin{aligned} (Z)_\alpha &= f((X)_\alpha, (Y)_\alpha) \\ &= \{z \in Z \mid z = f(x,y), x \in (X)_\alpha, y \in (Y)_\alpha\}. \end{aligned}$$

Primjer 1 – fazi aritmetika

U tabeli ispod su date funkcije pripadnosti dva diskretna fazi skupa A i B.

	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mu_A(x)$	0.0	0.1	0.6	0.8	0.9	0.7	0.1	0.0
$\mu_B(y)$	0.0	1.0	0.7	0.5	0.2	0.1	0.0	0.0

Ako su x i y cijeli brojevi definisani na skupovima A i B, koristeći princip ekstenzije odrediti fazi skup Z koji se reprezentuje brojevema z definisanim na sljedeći način:

a) $z = 3x - 2$

b) $z = x + y$

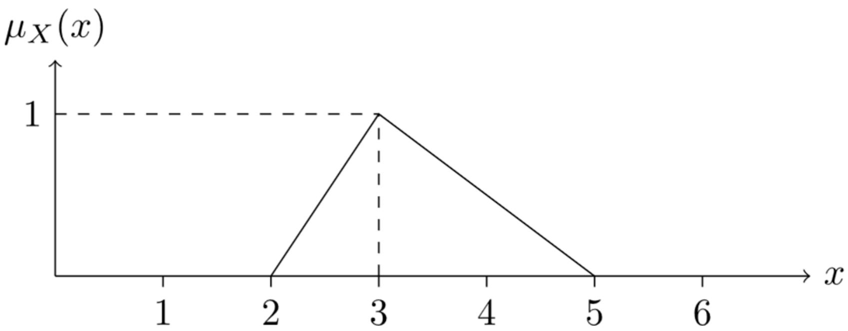
c) $z = x^2 + y^2$

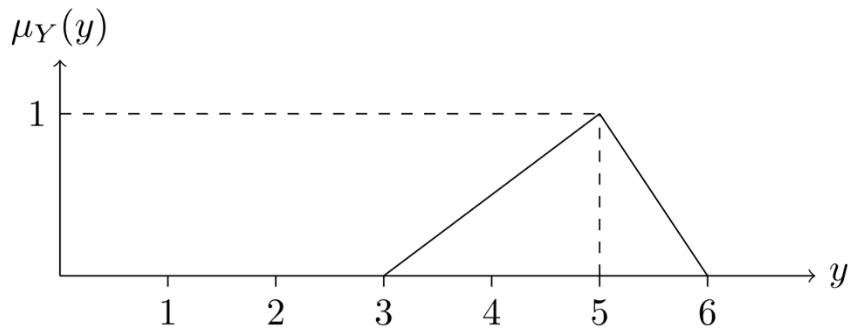
d) $z = x - x$

e) $z = \min(x, y)$

Primjer 2 – fazi aritmetika

Dati su fazi skupovi X i Y i njihove funkcije pripadnosti $\mu_X(x)$ i $\mu_Y(y)$. Odrediti fazi skup $Z=\{z=x+y,\ x \in X,\ y \in Y\}$.





$$\mu_X(x) = \begin{cases} x-2, & \text{za } 2 \le x \le 3, \\ -\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}, & \text{za } 3 \le x \le 5. \end{cases}$$

$$\mu_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{2}-\dfrac{3}{2}, & 3 \le y \le 5, \\ -y+6, & 5 \le y \le 6. \end{cases}$$