Projektovanje i implementacija ISAU

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Predavanje 2

Uvod u fazi logiku

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Razumiju razliku između klasičnih i fazi relacija, kao i razliku između propozicione i fazi logike
- Razumiju razliku između različitih definicija fazi implikacije i potrebu za uvođenjem istih
- Primjene operaciju kompozicije za određivanje izlaznog fazi skupa iz generalizovanog modus ponens pravila

Klasične relacije

Neka su X i Y dva univerzalna skupa. Dekartov ili Kartezijev proizvod skupova X i Y definiše se na sljedeći način:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

odnosno on predstavlja skup svih **uređenih** parova (x, y) za svako $x \in X$ i $y \in Y$.

Primjer: Neka je $X=\{0, 1\}$ i $Y=\{a, b, c\}$. Tada je $X\times Y= =\{(0,a), (0,b), (0, c), (1,a), (1,b), (1, c)\}$, dok je $Y\times X= =\{(a,0), (a,1), (b, 0), (b, 1), (c, 0,), (c, 1)\}$.

Podskup $\boldsymbol{R(X,Y)}$ Dekartovog proizvoda $X\times Y$ se naziva **binarnom relacijom** između elemenata skupova X i Y. Primjer jedne relacije između elemenata skupova X i Y bi bio: $R(X,Y) = \{(0,a), (0,b), (0, c)\}$.

Napomena: Dekartov proizvod n skupova predstavlja skup svih uređenih n-torki, pri čemu svaki element n-torke dolazi iz jednog od n skupova. Podskupovi ovog skupa su n-arne relacije.

Fazi relacije

Klasičnim binarnim relacijama se predstavlja **postojanje ili odsustvo povezanosti ili interkonekcije** između elemenata dva skupa, pa samim tim relacija $R(X,Y)$ se može zapisati i na sljedeći način:

$$R(X,Y) = \Big\{\big((x,y), \mu_R(x,y)\big) \mid (x,y) \in X \times Y\Big\},$$

gdje je $\mu_R(x,y)$ funkcija pripadnosti koja se definiše na sljedeći način:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ako postoji povezanost,} \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Fazi relacija proširuje klasičnu relaciju omogućavajući definisanje **stepena** povezanosti ili interkonekcije između elemenata dva skupa. To znači da funkcija pripadnosti $\mu_R(x,y)$ može imati bilo koju vrijednost između 0 i 1. Relacije se najčešće grafički reprezentuju u vidu relacionih matrica:

$$\mathbf{R}(X,Y) = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline 1 & 0.5 & 0.2 & 1 \\ 2 & 0.8 & 0.5 & 0.1 \end{array}$$

Fazi relacije

Posmatrajmo primjer u kojem želimo da definišemo sljedeći koncept – *vozilo x je blizu vozila y*, pri čemu se oba vozila nalaze na putu dužine 100km. Neka su x i y rastojanja vozila od početka puta. Ako relaciju između vozila želimo da definišemo u klasičnoj logici, tada treba da usvojimo oštru (jasnu) granicu imeđu velike i male razdaljine među vozilima.

Ako za vrijednost te granice usvojimo 30km, tada se klasična relacija može zapisati u matričnom obliku:

$x \backslash y$	$y_1 = 0$	$y_2 = 20$	$y_3 = 40$	$y_4 = 60$	$y_5 = 80$	$y_6 = 100$
$x_1 = 0$	1	1	0	0	0	0
$x_2 = 20$	1	1	1	0	0	0
$x_3 = 40$	0	1	1	1	0	0
$x_4 = 60$	0	0	1	1	1	0
$x_5 = 80$	0	0	0	1	1	1
$x_6 = 100$	0	0	0	0	1	1

U gornjoj tabeli su usvojene razdaljine od početka puta sa korakom 20km, pri čemu je $\mu_R(x,y)$=1, ako je x-y<30km.

Fazi relacije - primjer

Sa druge strane, ako za funkciju pripadnosti usvojimo sljedeću funkciju:

$$\mu_R(x, y) = 1 - \frac{|x - y|}{100},$$

Tada dobijamo binarnu fazi relaciju koja se u matričnom obliku zapisuje na sljedeći način:

$x\backslash y$	$y_1 = 0$	$y_2 = 20$	$y_3 = 40$	$y_4 = 60$	$y_5 = 80$	$y_6 = 100$
$x_1 = 0$	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0
$x_2 = 20$	0.8	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2
$x_3 = 40$	0.6	0.8	1.0	0.8	0.6	0.4
$x_4 = 60$	0.4	0.6	0.8	1.0	0.8	0.6
$x_5 = 80$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.8
$x_6 = 100$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0

Dakle, razlika između klasične i fazi relacije je u tome što kod klasične relacije funkcija pripadnosti može imati vrijednost 0 ili 1.

Na sličan način se definišu klasične/fazi relacije između tri ili više skupova.

Operacije nad fazi relacijama

S obzirom da fazi relacije predstavljaju **skupove** koji su definisani na Dekartovom proizvodu $X \times Y$, sve elementarne operacije definisane nad skupovima važe i za relacije.

Neka su $R(X, Y)$ i $S(X, Y)$ dvije relacije definisane na **istom** skupu $X \times Y$. **Unija** i **presjek** relacija $R(X, Y)$ i $S(X, Y)$ su **relacije** čije se funkcije pripadnosti definišu na sljedeći način:

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)),$$

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)).$$

Primjer:

Razmotrimo isti primjer sa vozilima kao od prije. Neka je $R(X, Y)$ relacija koja opisuje koncept *vozilo x je blizu vozila y*, i neka relacija $S(X, Y)$ opisuje koncept *vozilo x je bliže kraju puta nego vozilo y*.

Operacije nad fazi relacijama

Prva relacija je data matricom u prethodnom primjeru, dok drugu relaciju možemo zapisati na sljedeći način:

$x \backslash y$	$y_1 = 0$	$y_2 = 20$	$y_3 = 40$	$y_4 = 60$	$y_5 = 80$	$y_6 = 100$
$x_1 = 0$	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0
$x_2 = 20$	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$x_3 = 40$	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
$x_4 = 60$	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
$x_5 = 80$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
$x_6 = 100$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5

Relacija *vozilo x je blizu vozila y* ***i*** *vozilo x je bliže kraju puta nego vozilo y* se može dobiti kao presjek relacija R i S, odnosno:

$x \backslash y$	$y_1 = 0$	$y_2 = 20$	$y_3 = 40$	$y_4 = 60$	$y_5 = 80$	$y_6 = 100$
$x_1 = 0$	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0
$x_2 = 20$	0.8	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2
$x_3 = 40$	0.6	0.8	1.0	0.8	0.6	0.4
$x_4 = 60$	0.4	0.6	0.8	1.0	0.8	0.6
$x_5 = 80$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.8
$x_6 = 100$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0

Operacije nad fazi relacijama

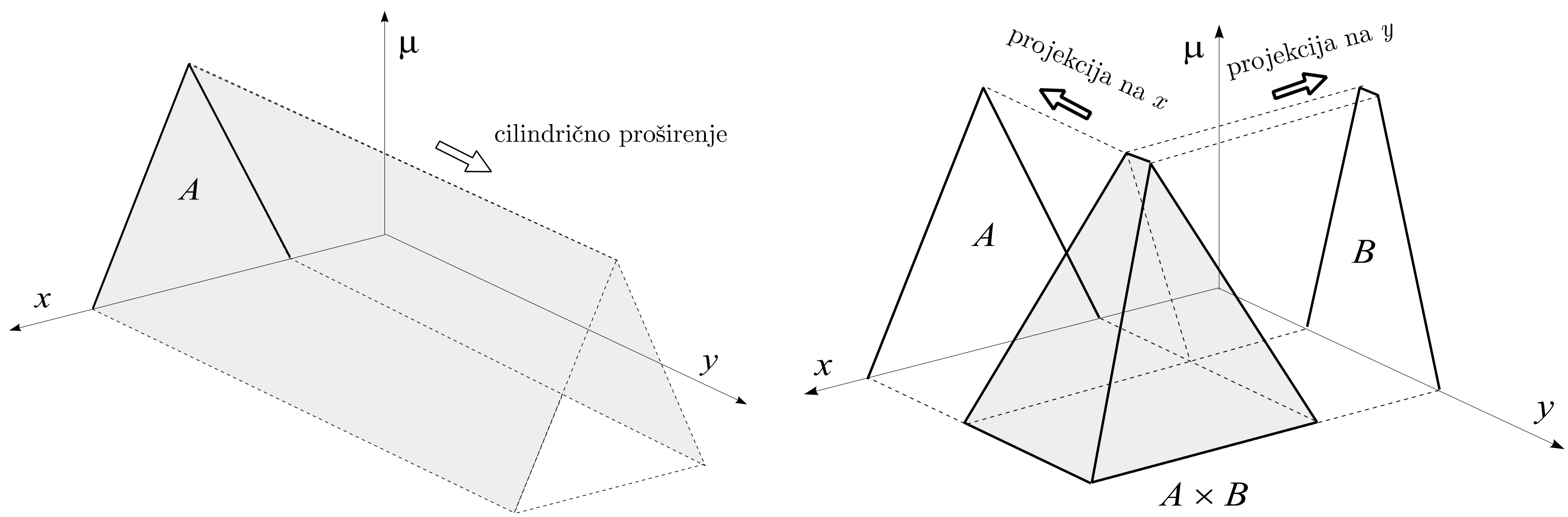
Dvije bitne operacije nad fazi skupovima i relacijama su **cilindrično proširenje** i **projekcija.**

Posmatrajmo fazi skup A čija je funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ definisana na univerzumu X. Cilindrično proširenje skupa A na skup $X \times Y$ je fazi relacija A_E čija je funkcija pripadnosti definisana na sljedeći način:

$$\mu_{A_E}(x,y) = \mu_A(x), \ \forall (x,y) \in X \times Y.$$

Komplamentarna operacija se naziva projekcija skupa $X \times Y$ na Y i ona daje fazi skup A_P sa funkcjom pripadnosti:

$$\mu_{A_P}(x) = \max_{y \in Y} \mu_R(x,y), \forall (x,y) \in X \times Y.$$



Vrijednost funkcije pripadnosti

Može se postaviti pitanje – kako se dolazi do relacija i na koji način se određuju vrijednosti funkcije pripadnosti u relaciji?

Postoji više načina da se odredi relacija, a neki od njih su:

1) Dekartov proizvod dva fazi skupa (biće definisan u nastavku).

2) Funkcije pripadnosti se nekad mogu definisati u zatvorenom obliku ili u formi *look-up* tabela, jednostavnim posmatranjem promjena izlaza procesa od zavisnosti od promjena ulaza.

3) Relacije je nekad moguće definisati u obliku *IF-THEN* pravila na osnovu znanja eksperta o nekom procesu ili pojavi.

4) Razvijene su i brojne matematičke metode koje se koriste za određivanje fazi relacija na osnovu poznavanja ulaznih i izlaznih podataka nekog procesa.

Dekartov proizvod fazi skupova

Kombinovanje više različitih fazi skupova, tj. fazi skupova definisih na različitim univerzumima je jedan način da se dođe do relacije.

Da bi ovo bilo moguće, **fazi skupovi se** najprije **pretvaraju u fazi relacije**, a zatim se određuje presjek (minimum) ili unija (maksimum) dobijenih relacija.

Dekartov proizvod dva fazi skupa A i B definisana na univerzumima X i Y se određuje na sljedeći način:

$$\left(\operatorname{ext} A \text{ na } X \times Y\right) \cap \left(\operatorname{ext} B \text{ na } X \times Y\right).$$

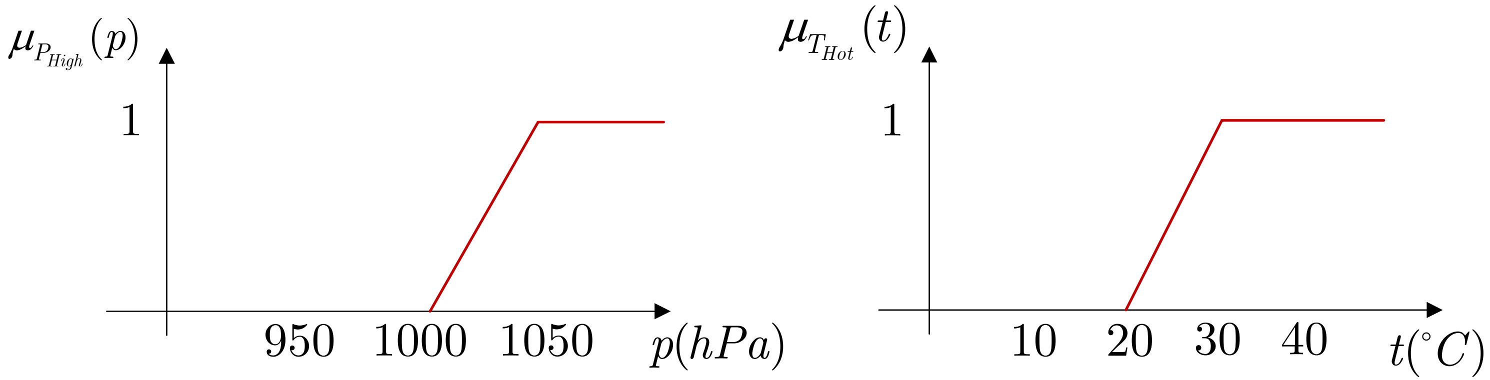
Dakle, prvo se vrši cilindrično proširenje skupova X i Y, a zatim se vrši presjek između dobijenih relacija.

Rezultujuća funkcija pripadnosti se može zapisati na sljedeći način:

$$\mu_{A\times B}(x,y) = \left\{\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \mid \forall x \in X, \forall y \in Y\right\}.$$

Primjer – Dekartov proizvod dva fazi skupa

Posmatrajmo dva fazi skupa: *vazdušni pritisak je visok* i *temperatura vazduha je visoka*. Potrebno je odrediti relaciju *temperatura je velika kada je vadušni pritisak veliki*.



Da bi pojednostavili ovaj primjer diskretizovaćemo fazi skupove sa gornje slike. Pritisak ćemo definisati na opsegu od 925hPa do 1075hPa sa korakom 25, dok ćemo temperaturu definisati na opsegu od 14 do 32 stepena Celzijusova sa korakom 2.

U prvom koraku je potrebno odrediti cilindrična proširenja ova dva skupa, a zatim treba odrediti presjek dobijenih relacija. Rezulate pomenute dvije operacije je prikazan na narednom slajdu.

Primjer – Dekartov proizvod dva fazi skupa

Cilindrična proširenja skupova su data ispod:

press\temp	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
925	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
950	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
975	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1025	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
1050	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1075	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

press\temp	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
925	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0
950	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0
975	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0
1000	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0
1025	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0
1050	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0
1075	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0

Dekartov proizvod se dalje dobija kao presjek gornjih relacija:

press\temp	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
925	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
950	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
975	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1025	0	0	0	0	0.2	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5
1050	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0
1075	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0

Kompozicija relacija

Razmotrimo sada relacije $P(X, Y)$ i $Q(Y,Z)$ koje su definisane na skupovima $X\times Y$ i $Y\times Z$ koji imaju jednu zajedničku dimenziju. Relacija između X i Z se određuje pomoću operacije koja se naziva fazi kompozicija:

$$R(X,Z) = P(X,Y) \circ Q(Y,Z).$$

U klasičnoj teoriji kompozicija se definiše kao relacija na skupu $X\times Z$ za koju važi da je $(x, z) \in R$ jedino ukoliko postoji bar jedno $z \in Z$ takvo da je $(x,y) \in P$ i $(y,z) \in Q$.

U slučaju kada se radi o kompoziciji dvije klasične relacije, gornja definicija se može zapisati na neki od sljedećih načina:

$$\mu_{P\circ Q}(x,z) = \max_{y\in Y}\left[\min(\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z))\right], \forall(x,z) \in X \times Z,$$

$$\mu_{P\circ Q}(x,z) = \max_{y\in Y}\left[\mu_P(x,y)\mu_Q(y,z)\right], \forall(x,z) \in X \times Z.$$

Ove dvije kompozicje se nazivaju max-min i max-prod kompozicija i one nijesu jedini način da se ispravno predstavi $R(X,Z)$.

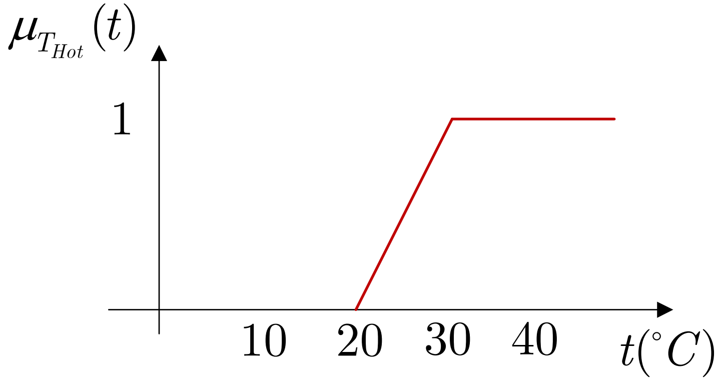
Primjer - kompozicije relacija

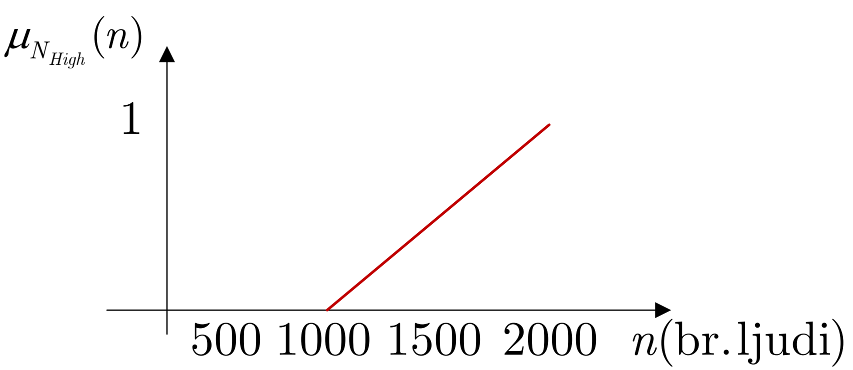
Posmatrajmo fazi relaciju iz prethodnog primjera - *temperatura je visoka kada je vadušni pritisak visok.* Definišimo novu relaciju – *broj ljudi na plaži je obično veliki kada je temperatura visoka.*

Potrebno je odrediti relaciju *broj ljudi na plaži je obično veliki kada je vadušni pritisak visok.*

Prvo je potrebno odrediti relaciju *broj ljudi na plaži je obično veliki kada je temperatura visoka,* a zatim putem kompozicije (max-min ili max-prod) se određuje relacija *broj ljudi na plaži je obično veliki kada je i vadušni pritisak visok.*

Ispod su date funkcije pripadnosti za fazi skupove *temperatura* i *ljudi.*





Primjer - kompozicije relacija

press\temp	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
925	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
950	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
975	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1025	0	0	0	0	0.2	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5
1050	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0
1075	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0

$\circ$

temp\people	0	500	1000	1500	2000
14	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0.2	0.2
22	0	0	0	0.4	0.4
24	0	0	0	0.5	0.6
26	0	0	0	0.5	0.8
28	0	0	0	0.5	1.0
30	0	0	0	0.5	1.0
32	0	0	0	0.5	1.0

$=$

press\people	0	500	1000	1500	2000
925	0	0	0	0	0
950	0	0	0	0	0
975	0	0	0	0	0
1000	0	0	0	0	0
1025	0	0	0	0.5	0.5
1050	0	0	0	0.5	1.0
1075	0	0	0	0.5	1.0

Fazi vs propoziciona logika

Logika proučava metode i principe zaključivanja, gdje se pod zaključivanjem podrazumijeva dobijanje/izvođenje novih propozicija na osnovu postojećih propozicija. U klasičnoj (propozicionoj) logici propozicije su tačne ili netačne, što znači da izvedeni zaključak (nova propozicija) takođe može biti samo tačan ili netačan (0 ili 1).

Fazi logika generalizuje klasičnu bivalentnu logiku tako što dopušta da tačnost propozicije bude neka vrijednost između 0 i 1. Ovakav vid generalizacije nam omogućava da vršimo takozvano **aproksimativno zaključivanje**, tj. da izvodimo neprecizne zaključke (fazi propozicije) na osnovu nepreciznih premisa (fazi propozicija).

U klasičnoj logici zaključci (nove propozicije) se izvode na osnovu logičkih formula koje su nazivaju tautologije. Tautologija predstavlja logičku formulu koja je tačna bez obzira na tačnost njenih pojedinačnih, sastavnih propozicija.

Propoziciona logika

U klasičnoj logici, propozicije su povezane elementarnim logičkim veznicima, poznatim kao konektivi. Osnovni logički konektivi su konjunkcija, disjunkcija, implikacija, ekvivalencija i negacija. Relacije između propozicija obično se predstavljaju pomoću tablica istinitosti, koje pokazuju kako se istinitosne vrijednosti kombinovanih propozicija mijenjaju u zavisnosti od vrijednosti pojedinačnih propozicija. Tablice istinitosti za osnovne konektive su prikazane u tabeli ispod:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\overline{p}$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

Nove propozicije mogu se dobiti primjenom logičkih formula u kojima su postojeće propozicije povezane osnovnim logičkim konektivima. Vrijednost logičke formule može biti istinita (T) ili netačna (F), a ta vrijednost može se odrediti korišćenjem tablica istinitosti datih iznad.

Propoziciona logika

U logici zaključci (nove propozicije) se izvode na osnovu logičkih formula koje su nazivaju tautologije. Vrijednost tautologije je tačna bez obzira na tačnost njenih pojedinačnih, sastavnih propozicija. Primjeri tautologija dati su ispod:

$$(p \to q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q),$$
$$(p \to q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee \overline{p}).$$

Da prethodne formule stvarno predstavljaju tautologije može se jednostavno dokazati pomoću tablica istinitosti.

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$(p \wedge q) \vee \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$	$(p \to q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee \neg p)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Postoje standardne tautologije koje se koristite za izvođenje zaključaka. One se nazivaju **pravila zaključivanja**. Neka od najčešćih pravila zaključivanja su: modus ponens, modus tollens i hipotetički silogizam.

Klasična pravila zaključivanja

Modus ponens: Ovo pravilo kaže da se na osnovu **tačnosti** dvije propozicije p i $p \to q$ može utvrditi tačnost propozicije q. Simbolički ovo se može zapisati na sljedeći način:

$$(p \wedge (p \to q)) \to q.$$

Intuitivnija reprezentacija modus ponens pravila je sljedeća:

Premisa 1: $x\ is\ A$,
Premisa 2: $IF\ \underbrace{x\ is\ A}_{\color{red}{antecedent}}\ THEN\ \overbrace{y\ is\ B}^{\color{red}{konsekvent}}$,
Zaključak: $y\ is\ B$.

Modus tollens: Ovo pravilo kaže da se na osnovu tačnosti dvije propozicije $\overline{p}$ i $p \to q$ može utvrditi tačnost propozicije $\overline{p}$. Simbolički ovo se može zapisati na sljedeći način:

$$(\overline{q} \wedge (p \to q)) \to \overline{p}.$$

Intuitivnija reprezentacija modus tollens pravila je sljedeća

Premisa 1: $y\ is\ not\ B$,
Premisa 2: $IF\ x\ is\ A\ THEN\ y\ is\ B$,
Zaključak: $x\ is\ not\ A$.

Klasična pravila zaključivanja

U prvoj tabeli prikazane su verbalne reprezentacije pravila zaključivanja *modus ponens* i *modus* tollens, kao i odgovarajuće logičke formule. Druga tabela predstavlja tablicu istinitosti za pravilo *modus ponens*, iz koje se može vidjeti da ovo pravilo predstavlja tautologiju.

	Modus Ponens	**Modus Tollens**
Premisa 1 Premisa 2	x is A IF x is A THEN y is B	y is not B IF x is A THEN y is B
Zaključak	y is B	x is not A
Logička formula	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	$((\neg q) \wedge (p \to q)) \to (\neg p)$

Modus Ponens

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Fazi logika

Fazi logika se koristi za donošenje zaključaka na osnovu propozicija koje nijesu u potpunosti tačne ili netačne, tj. čija istinitosna vrijednost može biti bilo koji broj između 0 i 1. Ovakve propozicije nazivamo fazi propozicijama, a primjer takve propozicije je: „Temperatura je velika“.

Postoje dva tipa fazi propozicija: **atomske propozicije** i **složene propozicije**. Atomske propozicije su iskazi sljedećeg tipa:

$$x \ is \ A,$$

gdje x predstavlja lingvističku varijablu (npr. temperatura), dok je A vrijednost varijable x (npr. velika, mala). Drugim riječima A predstavlja **fazi skup** u domenu fizičke varijable. Složene propozicije su sljedećeg tipa:

$$x \ is \ A \text{ and } y \ is \ B.$$

Složene propozicije se mogu interpretirati kao relacije čija se funkcija pripadnosti određuje u zavisnosti od veznika koji povezuje atomske propozicije. Za gornji primjer važi

$$\mu_{A\cap B}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)).$$

Fazi IF-THEN pravila

S obzirom da se propozicije interpretiraju kao relacije, postavlja se pitanje kako interpretirati IF-THEN pravila. U klasičnoj propozicionoj logici IF p THEN q se zapisuje kao $p \rightarrow q$, gdje $\rightarrow$ označava implikaciju.

Tablica istinitosti za klasičnu implikaciju je data ispod.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Lako se može pokazati da je implikacija ekvivalenta sljedećim operacijama:

$$\overline{p} \vee q,$$
$$(p \wedge q) \vee \overline{q},$$

u smislu da gornje logičke operacije i implikacija imaju identičnu tablicu istinitosti.

Fazi IF-THEN pravila

Fazi IF-THEN pravila možemo interpretirati na takav način što ćemo p i q zamijeniti fazi propozicijama, a operatore $^{-}$, $\vee$ i $\wedge$ fazi negacijom, fazi unijom i fazi presjekom. S obzirom da postoji više definicija fazi negacije, fazi unije i fazi presjeka, samim tim postojaće više različitih interpretacija fazi IF-THEN pravila, tj. fazi implikacije.

Pretpostavimo da su FP_1 i FP_2 fazi relacije (propozicije) definisane na univerzumima $X = X_1 \times X_2 \ldots \times X_n$ i $Y = Y_1 \times Y_2 \ldots \times Y_m$ respektivno, i neka su x i y lingvističke varijable (vektori) definisane na X i Y.

Tada pravilo

$$IF\ FP_1\ \ THEN\ \ FP_2.$$

se može interpretirati kao fazi relacija Q na $X \times Y$. Neka definicije fazi implikacije su date u nastavku.

Dienes-Rescher **implikacija**:

$$\mu_{Q_L}(x,y) = \max\left[1 - \mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)\right].$$

Fazi IF-THEN pravila

Do definicije sa prethodnog slajda se dolazi ukoliko se osnovne definicije za fazi negaciju, uniju i presjek primjene na $\overline{p} \vee q$.

Zadehova implikacija:

$$\mu_{Q_Z}(x,y) = \max\left[\min(\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)), 1 - \mu_{FP_1}(x)\right].$$

Do ove definicije se dolazi ukoliko se osnovne definicije za fazi negaciju, uniju i presjek primjene na $(p \wedge q) \vee \overline{q}$.

Pored prethodnih, često se koriste i sljedeće definicije implikacija:

Mamdanijeva implikacija:

$$\mu_{Q_M}(x,y) = \min\left[\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)\right].$$

Larsenova implikacija:

$$\mu_{Q_P}(x,y) = \mu_{FP_1}(x)\mu_{FP_2}(y).$$

Postoje i brojne druge definicije faze implikacije koje su izvedene iz propozicione logike. Međutim, nijedna od definicija potpuno ne odgovara svakoj primjeni, pa se iz tog razloga i koristi više njih.

Fazi pravila zaključivanja

U fazi logici propozicije su zapravo fazi propozicije koje se reprezentuju fazi skupovima. Glavni cilj fazi logike je da omogući donošenje aproksimativnih zaključaka na osnovu nepreciznih propozicija, koristeći teoriju fazi skupova kao osnovni alat.

Osnovno pravilo zaključivanja u fazi logici se naziva **generalizovani modus ponens** i ono ima sljedeći oblik:

Premisa 1: $x\ is\ A'$,
Premisa 2: $IF\ x\ is\ A\ THEN\ y\ is\ B$,
Zaključak: $y\ is\ B'$.

Ovo pravilo kaže da se na osnovu tačnosti dvije propozicije *x is A'* i *IF x is A THEN y is B* može izvesti nova fazi propozicija *y is B'*. Intuitivno, generalizovano modus ponens pravilo bi trebalo da bude takvo da što je *A*' bliže *A*, tada zaključak *B*' treba da bude bliži *B*.

Postavlja se pitanje kako odrediti *B*'?

Fazi pravila zaključivanja

Ispod su dati neki intuitivni kriterijumi koje bi trebalo da zadovolji generalizovno modus ponens pravilo.

	x je A' (Premisa 1)	y je B' (Zaključak)
kriterijum p_1	x je A	y je B
kriterijum p_2	x je vrlo A	y je vrlo B
kriterijum p_3	x je vrlo A	y je B
kriterijum p_4	x je manje-više A	y je manje-više B
kriterijum p_5	x je manje-više A	y je B
kriterijum p_6	x nije A	y je nepoznato
kriterijum p_7	x nije A	y nije B

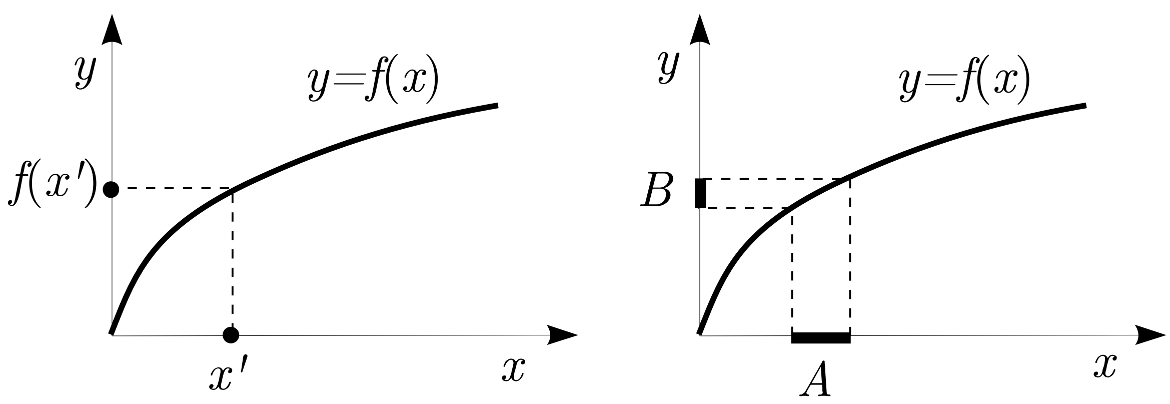
Naravno, nije moguće istovremeno zadovoljiti svaki kriterijum, a zaključak prevashodno zavisi od interpretacije implikacije. Na primjer, ako je kauzalna veza između antecedenta „x is A“ i konsekventa „y is B“ u premisi 2 (IF-THEN pravilu) slaba, onda se mogu koristiti kriterijumi p3 i p5. Sa druge strane ako je ta veza jaka, onda je opravdano koristi kriterijum p7, koji inače nije dozvoljen u klasičnoj logici.

Kompoziciono pravilo zaključivanja

Kompoziciono pravilo zaključivanja predstavlja generalizaciju procedure opisane u nastavku. Pretpostavimo da su x i y promjenljive koje uzimaju vrijednosti iz skupova X i Y, i neka su ove promjenljive povezane funkcijom y=f(x) za svako $x \in X$ i $y \in Y$. Tada, za zadato $x = x$' možemo zaključiti da je y=f(x').

Slično, ako pretpostavimo da je vrijednost x-a pripada skupu (intervalu) A, može se zaključiti da vrijednost y-a pripada skupu B, prikazanom na slici ispod. Odnosno

$$B = \left\{ y \in Y \mid f(x) = y, x \in A \right\}.$$



Kompoziciono pravilo zaključivanja

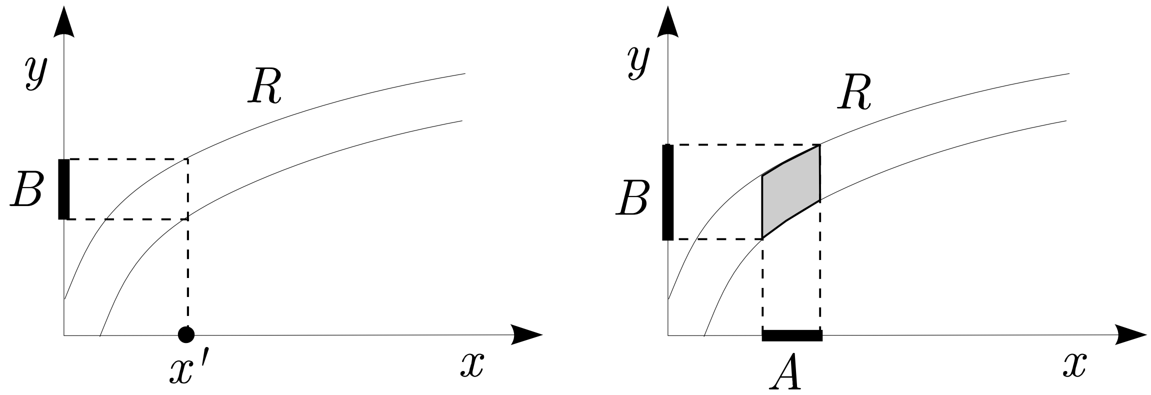
Pretpostavimo sada da su varijable x i y povezane nekom proizvoljnom relacijom $R(X,Y)$ na skupu $X\times Y$, a ne funkcijom $y=f(x)$. Za zadato $x'=u$ može se zaključiti da važi $y \in B$ ukoliko važi $(u,y) \in R$:

$$B = \{y \in Y \mid (u,y) \in R\}.$$

Dalje, pretpostavimo da x može da uzme bilo koju vrijednost iz skupa A. Tada, y pripada skupu B ukoliko postoji bar jedno $x \in A$, takvo da važi $(x,y) \in R$:

$$B = \{y \in Y \mid (x,y) \in R, x \in A\}.$$

Ova operacija zapravo predstavlja operaciju kompozicije.



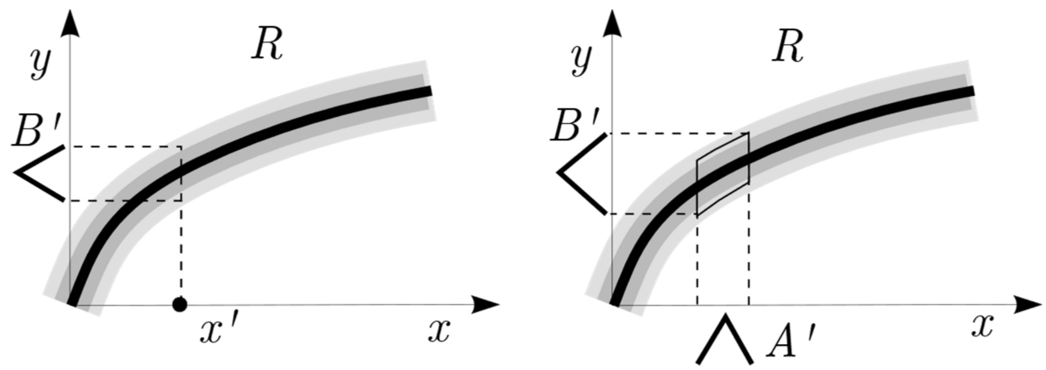
Kompoziciono pravilo zaključivanja

U sljedećem koraku generalizacije, pretpostavimo da je A' fazi skup na univerzumu X i da je $R(X, Y)$ fazi relacija na $X \times Y$ (*IF-THEN* pravilo). Tada se rezultujući fazi skup B' se može odrediti kompozicijom skupa A' i relacije R:

Preciznije, za zadate funkcije pripadnosti $\mu_{A'}(x)$ i $\mu_R(x,y)$, imamo:

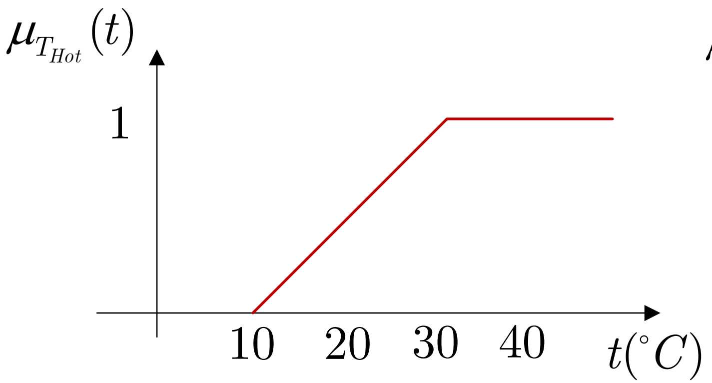
$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \mu_{A'}(x) \star \mu_R(x, y) = A' \circ R,$$

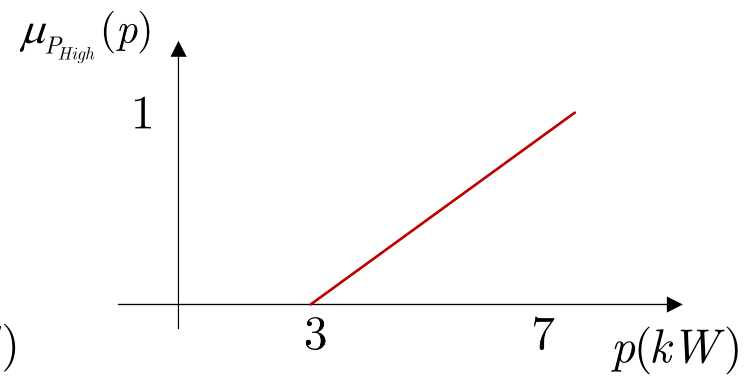
gdje $\star$ predstavlja operaciju min ili prod.



Primjer – aproksimativno zaključivanje

Zamislimo da želimo da regulišemo temperaturu u prostoriji i jedno od fazi pravila glasi: *ako je temperatura visoka, tada zahtjevana snaga treba da bude velika*. Na slici ispod su date lingvističke varijable temperatura i snaga, odnosno njihove definicije preko fazi skupova.





Koristićemo sljedeću propozicionu implikaciju

$$\mu_{T_{Hot}\to P_{High}}(t,p) = 1 - \min\left[\mu_{T_{Hot}}(t), 1 - \mu_{P_{High}}(p)\right],$$

i Mamdanijevu fazi implikaciju

$$\mu_{T_{Hot}\to P_{High}}(t,p) = \min\left[\mu_{T_{Hot}}(t), \mu_{P_{High}}(p)\right].$$

Cilj primjera je poređenje ove dvije implikacije u fazi zaključivanju.

Primjer – aproksimativno zaključivanje

Kako rezultat prethodno definisane dvije implikacije dobijemo sljedeće relacije:

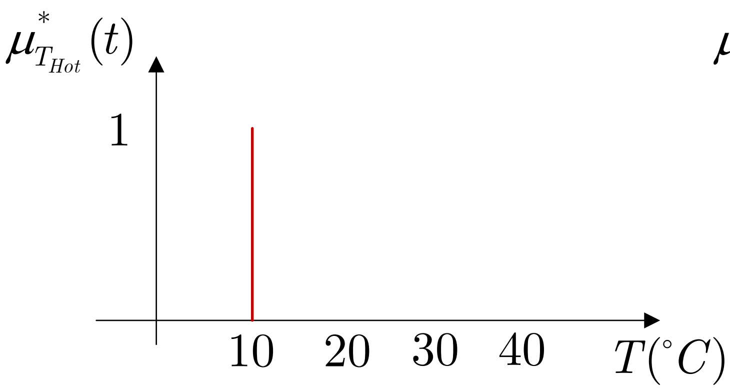
$$
\begin{array}{c|cccccccc}
snaga \,/\, temp. & 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
4 & 1 & 1 & 1 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\
5 & 1 & 1 & 1 & 0.25 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50 \\
6 & 1 & 1 & 1 & 0.25 & 0.50 & 0.75 & 0.75 & 0.75 \\
7 & 1 & 1 & 1 & 0.25 & 0.50 & 0.75 & 1 & 1
\end{array}
$$

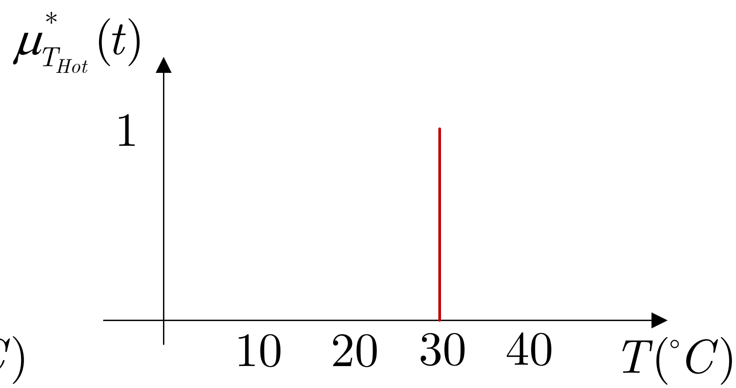
$$
\begin{array}{c|cccccccc}
snaga \,/\, temp. & 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.50 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 0.75 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Primjer – aproksimativno zaključivanje

Posmatrajući prethodne dvije matrice može se uočiti da propoziciona implikacija ne ispunjava zahtjev „uzrok-posljedica“, za razliku od Mamdanijeve implikacije koja ima male vrijednosti funkcije pripadnosti kada su i temperatura i snaga male.

Razmotrimo sada dva različita ulazna faza skupa, čije su funkcije pripadnosti prikazane ispod.





Gornji skupovi se mogu zapisati u diskretnoj formi:

$$\mu_{T^*} = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{0}{5} + \frac{1}{10} + \frac{0}{15} + \frac{0}{20} + \frac{0}{25} + \frac{0}{30} + \frac{0}{35} \right\}$$

$$\mu_{T^*} = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{0}{5} + \frac{0}{10} + \frac{0}{15} + \frac{0}{20} + \frac{0}{25} + \frac{1}{30} + \frac{0}{35} \right\}$$

Primjer – aproksimativno zaključivanje

Sada, primjenom fazi kompozicije može se odrediti izlazni fazi skup.

U prvom slučaju to je:

$$\mu_{P^*} = \left\{ \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right\} \text{ Propoziciona implikacija}$$

$$\mu_{P^*} = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0}{6} + \frac{0}{7} \right\} \text{ Fazi implikacija}$$

dok se u drugom slučaju dobija:

$$\mu_{P^*} = \left\{ \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.25}{4} + \frac{0.5}{5} + \frac{0.75}{6} + \frac{1}{7} \right\} \text{ Propoziciona implikacija}$$

$$\mu_{P^*} = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0.25}{4} + \frac{0.5}{5} + \frac{0.75}{6} + \frac{1}{7} \right\} \text{ Fazi implikacija}$$

Treba napomenuti da sistemi upravljanja na ulazu zahtijevaju broj, a ne fazi skup. Postupak pretvaranja fazi skupa u broj se naziva defazifikacija i biće obrađen na narednim predavanjima.