Projektovanje i implementacija ISAU

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Predavanje 3

Fazi sistemi

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

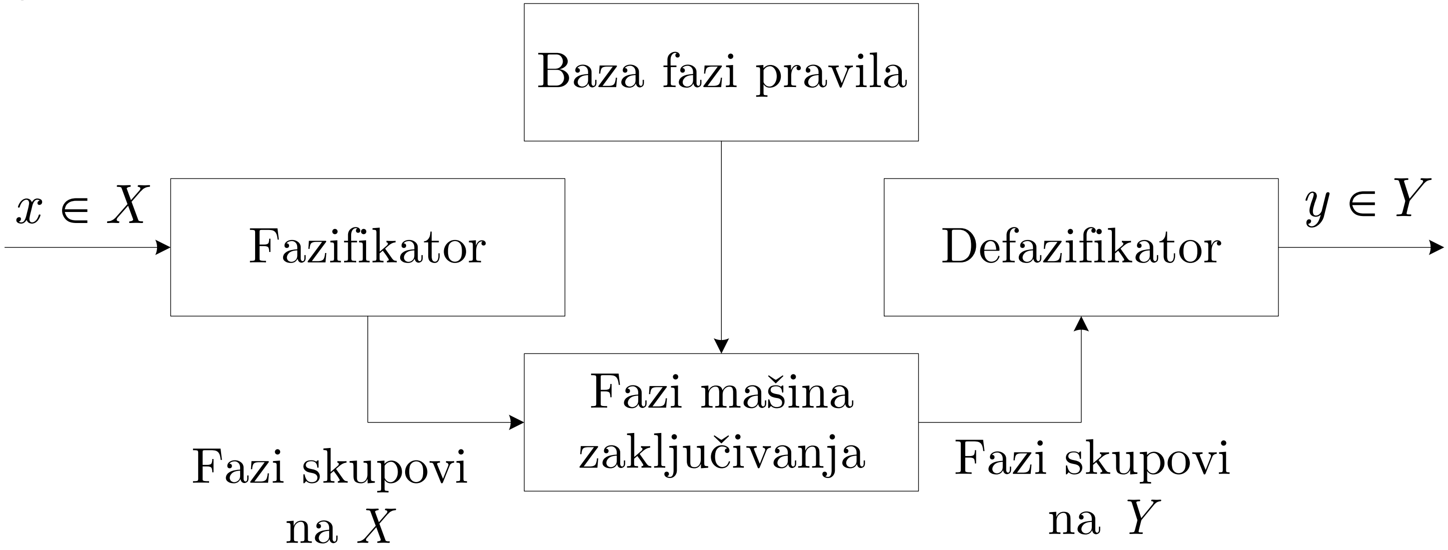
- Definišu od kojih komponenti se sastoje fazi sistemi i razumiju ulogu svake komponente
- Izračunaju izlaz iz fazi sistema primjenom različitih definicija implikacije, kao i različitih metoda kombinovanja fazi pravila
- Odrede izlaz iz fazi sistema za zadati ulaz primjenom neke od grafičkih metoda

Fazi sistemi

Fazi sistemi se sastoje od baze fazi pravila, fazi mašine za zaključivanje, fazifikatora i defazifikatora.

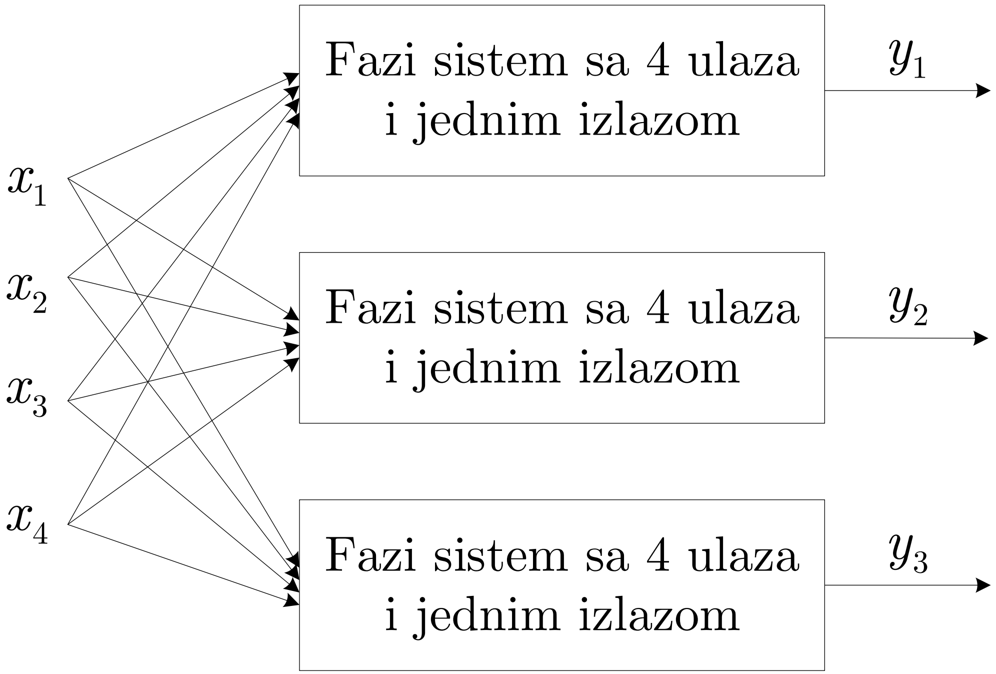
Fazi mašina zaključivanja je zadužena sa izvršavanje fazi pravila. Fazifikatori i defazifikatori predstavljaju interfejse između fazi mašine i okruženja. Fazifikatori „čiste“ brojeve pretvaraju u fazi skupove, dok defazifikatori rade inverznu operaciju.

U okviru ovog predavanja biće objašnjena svaka komponenta fazi sistema.



Fazi sistemi

Fazi sistemi u opštem slučaju mogu da imaju više ulaza i više izlaza. Međutim, mi ćemo razmatrati samo sisteme sa više ulaza i jednim izlazom. Ukoliko je potrebno dizajnirati fazi sistem sa više ulaza i više izlaza, moguće je prvo odvojeno dizajnirati sistem sa više ulaza i jednim izlazom, a zatim isti postupak ponoviti za preostale izlaze. Na kraju sve podsisteme treba integrisati u jedan sistem, kao što je prikazano na slici ispod.



Baza fazi pravila

Baza fazi pravila se sastoji od fazi IF-THEN pravila. Ona predstavlja srce fazi sistema u smislu da sve ostale komponente fazi sistema služe za efikasnu implementaciju ovih pravila.

Konkretno, baza se sastoji od IF-THEN fazi pravila definisanih na sljedeći način:

$$Ru^{(l)} : IF\ x_1\ is\ A_1^l \text{ and } x_2\ is\ A_2^l \ldots x_n\ is\ A_n^l \text{ THEN } y^{(l)} = B^l,$$

gdje su A_i^l i B^l fazi skupovi definisani na $X_i \subset R$ i $Y \subset R$, dok su x_i i y ulazne i izlazne (lingvističke) varijable sistema. U opštem slučaju baza se sastoji od M pravila koja ćemo označavati sa $Ru^{(l)}$, l=1, 2, ..., M.

Pravila zapisana na gornji način se nazivaju **kanonična** fazi IF-THEN pravila iz razloga što ona kao specijalni slučaj sadrže i neka druga IF-THEN pravila.

Primjeri specijalnih IF-THEN pravila su dati u nastavku.

Baza fazi pravila

a) **Parcijalna pravila**

$$IF\ x_1\ is\ A_1^l \text{ and } x_2\ is\ A_2^l\ \dots\ x_m\ is\ A_m^l \text{ THEN } y^{(l)} = B^l,$$

gdje je $m<n$.

Dokaz: Prethodno pravilo je ekvivalentno pravilu

IF $x_1\ is\ A_1^l$ and $x_2\ is\ A_2^l\ \dots\ x_m\ is\ A_m^l$ and x_{m+1} is $I\ \dots$ and $x_n\ is\ I$ THEN $y^{(l)} = B^l$,

gdje je I fazi skup definisan na skupu R za koji važi $\mu_I(x)=1,\ \forall x \in R$.

b) **OR pravila**

$$IF\ x_1\ is\ A_1^l \text{ and } x_2\ is\ A_2^l\ \dots\ x_m\ is\ A_m^l \text{ OR } x_{m+1}\ is\ A_{m+1}^l \dots \text{and}\ x_n\ is\ A_n^l \text{ THEN } y^{(l)} = B^l.$$

Na osnovu intuitivnog tumačenja veznika OR prethodno pravilo je ekvivalentno sljedećem setu pravila:

$$IF\ x_1\ is\ A_1^l \text{ and } x_2\ is\ A_2^l\ \dots\ x_m\ is\ A_m^l \text{ THEN } y^{(l)} = B^l.$$

$$IF\ x_{m+1}\ is\ A_{m+1}^l \dots \text{and}\ x_n\ is\ A_n^l \text{ THEN } y^{(l)} = B^l.$$

Dalje, na osnovu a) zaključujemo da su prethodna pravila specijalni slučaj kanoničnog IF-THEN pravila.

Baza fazi pravila

c) „**Graduelna pravila**“, na primjer:

The smaller the x*, the bigger the* y*.*

Moguće je definisati fazi skupove A i B koji reprezentujuju atribute „manje“ i „veće“. Na primjer, $\mu_A(x) = 1/(1 + \exp(5(x + 2)))$ i $\mu_B(x) = 1/(1 + \exp(-5(y - 2)))$. Tada, pravilo c) je ekvivalentno sljedećem:

$$IF\ \ x\, is\, A \text{ THEN } y = B.$$

d) **Konvencionalna** „ne-fazi“ pravila.

U slučaju kada funkcije pripadnosti imaju samo vrijednost 0 ili 1, fazi pravila postaju konvencionalna IF-THEN pravila.

e) Pravila sljedećeg tipa

$$y = B.$$

Ovo pravilo je ekvivalentno pravilu

$$IF\ x_1\ is\ I \text{ and } x_2\ is\ I\ \ldots\ x_n\ is\ I \text{ THEN } y^{(l)} = B^l,$$

Bazu fazi pravila, tj. znanje eksperata treba uvijek definisati u obliku IF-THEN pravila.

Osobine baze fazi pravila

S obzirom na to da se baza fazi pravila sastoji od skupa pravila, nameće nekoliko se nekoliko važnih pitanja o njihovim međusobnim odnosima. Na primjer, da li pravila pokrivaju sve moguće situacije s kojima se fazi sistem može susresti? Takođe, može li doći do konflikta između pravila.

Definicija: Bazu fazi pravila nazivamo kompletnom ukoliko za svako $\mathbf{x} \epsilon X$ postoji najmanje jedno pravilo u bazi, recimo Ru^l, takvo da važi

$$\mu_{A_i^l}(x_i) \neq 0, \forall i = 1, \ldots, n.$$

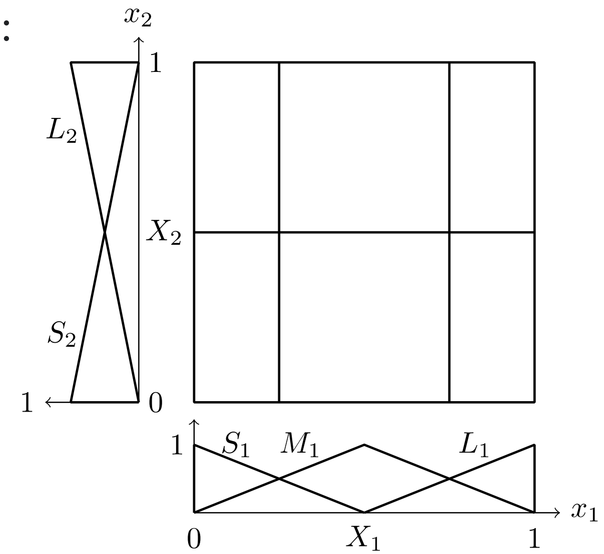
Intuitivno, kompletnost baze fazi pravila znači da za bilo koju kombinaciju ulaznih podataka treba da postoji bar jedno pravilo u bazi koje se aktivira, tj. da funkcija pripadnosti IF dijela nije jednaka 0.

Definicija: Skup IF-THEN pravila je konzistentan ukoliko ne postoje pravila sa istim IF dijelom, a različitim THEN djelovima.

Kasnije će biti pokazano da konzistentnost baze pravila nije kritična, tj. ukoliko postoje konfliktna pravila, tada fazi mašina na izlazu vraća usrednjeni izlaz.

Primjer – kompletnost baze fazi pravila

Posmatrajmo fazi sistem sa 2 ulaza i jednim izlazom gdje je $X=X_1\times X_2=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ i $Y=[0,\ 1]$. Definišimo tri skupa na X_1: S_1, M_1 i L_1, i dva skupa na X_2: S_2 i L_2 (funkcije pripadnosti su prikazane na slici ispod). Da bi baza fazi pravila bila kompletna, ona mora da sadrži sljedećih šest pravila, čiji IF djelovi sadrže sve moguće kombinacije skupova S_1, M_1, L_1, U_1 i S_2, U_2:



IF x_1 is S_1 and x_2 is S_2, THEN y is B^1
IF x_1 is S_1 and x_2 is L_2, THEN y is B^2
IF x_1 is M_1 and x_2 is S_2, THEN y is B^3
IF x_1 is M_1 and x_2 is L_2, THEN y is B^4
IF x_1 is L_1 and x_2 is S_2, THEN y is B^5
IF x_1 is L_1 and x_2 is L_2, THEN y is B^6

gdje su B^l (l=1,2,3,..6) fazi skupovi definisani na Y.

Ukoliko bi jedno pravilo nedostajalo, onda bi mogli naći tačku $\mathbf{x}^*\in X$ za koju bi vrijednost funkcije pripadnosti IF dijela bila jednaka nuli.

Na primjer, ukoliko ne bi postojalo drugo pravilo, primjer takve tačke bi bio $\mathbf{x}^*=(0,1)$. Zašto?

Fazi mašine zaključivanja

Zadatak fazi mašine zaključivanja je da primjenom pravila fazi logike iskombinuje pravila u bazi i da za ulazni fazi skup $A' \in X$ generiše izlazni fazi skup $B' \in Y$.

Na prethodnim predavanjima smo rekli da se IF-THEN pravila mogu interpretirati kao relacije definisane na produktnom prostoru $X \times Y$, pri čemu je bilo dato više definicija implikacije. Ukoliko se baza sastoji od jednog IF-THEN pravila, tada se za donošenje zaključka (generisanje izlaza B' na osnovu A') koristi generalizovano modus ponens pravilo. Generalizovano modus ponens pravilo se „izvršava“ tako što se primjenjuje operacija kompozicije između ulaznog fazi skupa A' i IF-THEN relacije:

$$B' = A' \circ (IF - THEN).$$

S obzirom na to da se baza najčešće sastoji od više pravila, postavlja se pitanje kako u tom slučaju odrediti B'. Postoje dva pristupa za zaključivanja na osnovu više pravila: **zaključivanje zasnovano na kompoziciji** i **zaključivanje zasnovano na individualnim pravilima**.

Zaključivanje zasnovano na kompoziciji

Kod zaključivanja zasnovanog na kompoziciji, sva IF-THEN pravila se kombinuju u jednu relaciju definisanu na $X \times Y$, koja se može interpretirati kao rezultujuće IF-THEN pravilo. Postavlja se pitanje na koji način treba izvršiti kombinovanje pravila. Potrebno je najprije razumjeti šta IF-THEN pravila znače, a nakon toga koristiti odgovarajuće logičke operatore za njihovo kombinovanje.

Postoje dva opozitna tumačanja značenja IF-THEN pravila. Jedni smatraju da IF-THEN pravila treba posmatrati kao **nezavisne** uslovne iskaze. Tada, više IF-THEN pravila bi trebalo kombinovati pomoću operatora **unije**.

Drugi smatraju da su IF-THEN pravila međusobno povezana, odnosno da sva pravila u nekoj mjeri treba da budu zadovoljena da bi imala uticaj na izlaz. U ovoj varijanti je razumno za kombinaciju više pravila koristiti operaciju **presjeka**.

Drugi pristup možda zvuči čudno, ali njega ima više smisla koristiti za neke definicije implikacije (npr. Godel-ova).

Zaključivanje zasnovano na kompoziciji

Neka je Ru^l fazi relacija na $X\times Y$, koja reprezentuje jedno kanonično IF-THEN pravilo, odnosno, $Ru^l = A_1{}^l \wedge \ldots \wedge A_n{}^l \rightarrow B^l$. S obzirom na to da su antecedenti u IF-THEN pravilu povezani veznikom **AND**, $A_1{}^l \times\ldots \times A_n{}^l$ predstavlja fazi relaciju definisanu na X, pri čemu je funkcija pripadnosti jednaka:

$$\mu_{A_1^l\times\ldots\times A_n^l}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_{A_1^l}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{A_n^l}(x_n).$$

Rezultujuća funkcija pripadnosti IF-THEN pravila, u oznaci $\mu_{Ru(l)}(\mathbf{x},y)$, zavisi od toga koja se definicija implikacije koristi.

Ukoliko prihvatimo prvo tumačenje pojedinačnog fazi pravila, onda se M pojedinačanih fazi pravila može interpretirati kao jedna relacija Q_M na $X\times Y$ definisana na sljedeći način:

$$Q_M = \bigcup_{l=1}^{M} Ru^{(l)}.$$

Odnosno, funkcija pripadnosti je jednaka:

$$\mu_{Q_M}(\mathbf{x}, y) = \mu_{Ru^1}(\mathbf{x}, y) \vee \ldots \vee \mu_{Ru^M}(\mathbf{x}, y).$$

Zaključivanje zasnovano na kompoziciji

Sa druge strane, ukoliko prihvatimo drugo tumačenje pojedinačnog fazi pravila, onda se M pojedinačanih fazi pravila može interpretirati kao relacija Q_G na $X \times Y$ definisana na sljedeći način:

$$Q_G = \bigcap_{l=1}^{M} Ru^{(l)}.$$

Odnosno, funkcija pripadnosti je jednaka:

$$\mu_{Q_G}(\mathbf{x}, y) = \mu_{Ru^1}(\mathbf{x}, y) \wedge \ldots \wedge \mu_{Ru^M}(\mathbf{x}, y).$$

Prvi pristup se naziva Mamdanijeva kombinacija (ili agregacija) pravila, dok se drugi pristup zove Godel-ova kombinacija.

Konačno, neka je A' fazi skup koji predstavlja ulaz u fazi mašinu zaključivanja i neka su Q_M i Q_G relacije koje se mogu interpretirati kao jedinstveno IF-THEN pravilo. Tada, na osnovu generalizovanog modus ponensa, izlaz iz fazi sistema je fazi skup B' čija je funkcija pripadnosti:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{A'}(\mathbf{x}) \star \mu_{R_M}(\mathbf{x}, y) \text{ ili } \mu_{B'}(y) = \mu_{A'}(\mathbf{x}) \star \mu_{R_G}(\mathbf{x}, y),$$

u zavisnosti od toga koja definicija kombinacije je korišćena, pri čemu $\star$ predstavlja operaciju kompozicije.

Zaključivanje zasnovano na kompoziciji

Računska procedura zaključivanja zasnovanog na kompoziciji je sumarizovana ispod.

- **Korak 1**: Za M fazi IF-THEN pravila odrediti funkciju pripadnosti rezultujućeg antecedenta:

$$\mu_{A_1^l \times \ldots \times A_n^l}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_{A_1^l}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{A_n^l}(x_n),\ l = 1, \ldots, M.$$

- **Korak 2:** Za M fazi IF-THEN pravila odrediti relacije

$$\mu_{Ru^l}(\mathbf{x}, y) = \mu_{A_1^l \times \ldots \times A_n^l \to B^l}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y),\ l = 1, \ldots, M.$$

Koristiti neku od definicija implikacije definisanu na prošlom času.

- **Korak 3:** Odrediti $\mu_{Q_M}(\mathbf{x}, y)$ ili $\mu_{Q_G}(\mathbf{x}, y)$:

$$\mu_{Q_M}(\mathbf{x}, y) = \mu_{Ru^1}(\mathbf{x}, y) \vee \ldots \vee \mu_{Ru^M}(\mathbf{x}, y).$$
$$\mu_{Q_G}(\mathbf{x}, y) = \mu_{Ru^1}(\mathbf{x}, y) \wedge \ldots \wedge \mu_{Ru^M}(\mathbf{x}, y).$$

- **Korak 4:** Odrediti izlazni fazi skup primjenom fazi kompozicije:

$$B' = A' \circ Q_M \;\; ili \;\; B' = A' \circ Q_G.$$

Zaključivanje zasnovano na ind. pravilima

Kod zaključivanja zasnovanog na individualnim pravilima svako pravilo u bazi utiče na izlaz. Izlaz iz fazi mašine zaključivanja se računa kao kombinacija (unija ili presjek) izlaza iz M pojedinačnih pravila.

Računarska procedura ovog prustupa je data ispod.

- **Koraci 1 i 2**: Prva dva koraka su ista kao kod zaključivanja zasnovanog na kompoziciji. Tj. u prva dva koraka se određuju relacije $Ru^{(l)}$ koje odgovaraju pojednačnim IF-THEN pravilima.
- **Korak 3**: Za zadati ulazni fazi skup A', primjenom generalizovnog modus ponens pravila odrediti izlaz iz svakog IF-THEN pravila

$$B^{(l)'} = A' \circ Ru^{(l)}.$$

- **Korak 4:** Izlaz iz fazi mašine zaključivanja predstavlja kombinaciju fazi skupova $B^{(1)}$, ..., $B^{(M)}$ koja se dobija operacijom unije ili presjeka:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B^{(1)'}}(y) \vee \ldots \vee \mu_{B^{(M)'}}(y), \text{ ili}$$
$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B^{(1)'}}(y) \wedge \ldots \wedge \mu_{B^{(M)'}}(y).$$

Fazifikatori

Fazi mašina za zaključivanje kao ulazne podatke ima fazi skupove, a kao izlaz ona vraća fazi skup. U većini primjena ulazi i izlazi fazi sistema su brojevi, što znači da je potrebno obezbijediti interfejse između fazi mašine za zaključivanje i okruženja. Ovi interfejsi se nazivaju fazifikatori i defazifikatori.

Fazifikator obavlja funkciju mapiranja realnog broja $\mathbf{x}^*\epsilon X\subset R$ u fazi skup A'ϵX. Prilikom dizajna fazifikatora treba voditi računa o nekoliko stvari:

- S obzirom da $\mathbf{x}^*$ predstavlja ulazni podatak, rezultujući fazi skup A' bi trebalo da ima najveću vrijednost funkcije pripadnosti u tački $\mathbf{x}^*$.
- Ako su ulazno podaci podložni šumu (npr. mjerenja), fazifikator bi trebalo dizajnirati tako da pomaže u suzbijaju šuma.
- Fazifikator bi trebalo da bude takav da se pojednostavi računska kompleknost fazi mašine za odlučivanje. Na primjer, najzahtjevnija operacija fazi mašine je računanje supremuma, pa bi fazifikator trebalo dizajnirati tako da se pojednostavi ova računska operacija.

Fazifikatori

Sljedeći fazifikatori se najčešće koriste:

- **Singleton fazifikator**: Ovaj fazifikator mapira broj $\mathbf{x}^*$ u fazi skup A' tako što funkciji pripadnosti dodjeljuje vrijednost 1 u tački $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, dok u ostalim tačakama funkcija pripadnosti ima vrijednost 0:

$$\mu_{A'}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \\ 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^* \end{cases}$$

- **Gausov fazifikator**: Gausov fazifikator mapira $\mathbf{x}^*$ u fazi skup A' na sljedeći način:

$$\mu_{A'}(\mathbf{x}) = e^{-\left(\frac{x_1 - x_1^*}{\sigma_1}\right)^2} \star e^{-\left(\frac{x_2 - x_2^*}{\sigma_2}\right)^2} \star \ldots \star e^{-\left(\frac{x_n - x_n^*}{\sigma_n}\right)^2},$$

gdje predstavlja proizvod ili min operator.

- **Trougaoni fazifikator**: Gausov fazifikator mapira $\mathbf{x}^*$ u fazi skup A' na sljedeći način:

$$\mu_{A'}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1 - \frac{|x_1 - x_1^*|}{b_1}) \star (1 - \frac{|x_2 - x_2^*|}{b_2}) \star \ldots \star (1 - \frac{|x_n - x_n^*|}{b_n}), \text{ ako je } |x_i - x_i^*| < b_i \\ 0, \text{ u ostalim tačkama.} \end{cases}$$

Fazifikatori

Neke karakteristike datih fazifikatora su sljedeće:

- Može se uočiti da sva tri fazifikatora imaju jediničnu vrijednost funkcije pripadnosti u tački $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$.
- Singleton fazifiktor značajno pojednostavljuje izvršavanje fazi mašine zaključivanja, bez obzira na to koji oblik funkcije pripadnosti se koristi u IF-THEN pravilima.
- Gausov i trougani fazifikator takođe pojednostavljuju računsku kompleksnost fazi mašine ukoliko su funkcije pripadnosti u IF-THEN pravilima istog oblika (Guasove ili trougaone). Ova osobina nije očigledna (dokaz je izostavljen iz prezentacije).
- Guasov i trougaoni fazifikator imaju sposobnost da redukuju uticaj šuma u ulaznim podacima, dok singleton fazifikator nema ovu karakteristiku.

Defazifikatori

Defazifikatori obavljaju operaciju inverznu fazifikatorima. Oni kao ulazni podatak uzimaju fazi skup B' definisan na $Y \subset R$ (izlaz iz fazi mašine za odlučivanje) i pretvaraju ga u realan broj $y^* \in Y$. Konceptualno, zadatak defazifikatora je određivanje tačke iz skupa Y koja najbolje reprezentuje zadati fazi skup B'. Ova operacija je slična pronalaženju srednje vrijednosti slučajnog broja. Međutim, kako postoji više načina za određivanje B', tako i postoji više različitih defazifikatora.

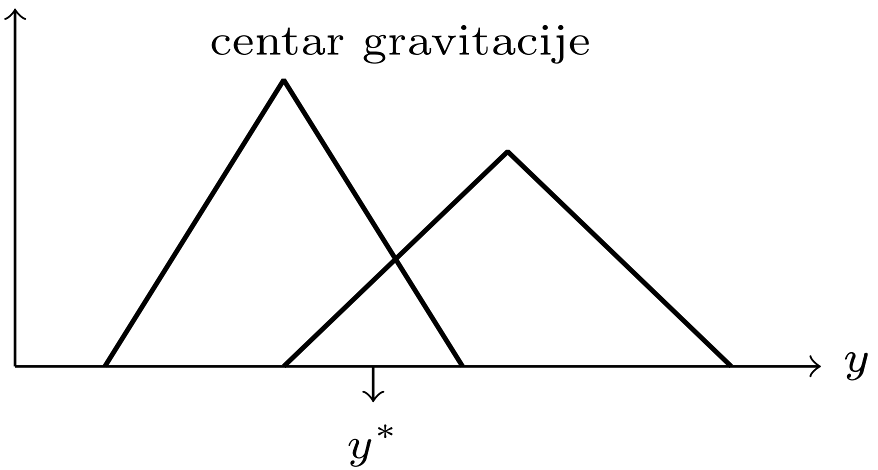
Prilikom dizajna fazifikatora treba voditi računa o nekoliko stvari:

- Vjerodostojnost: Izbor tačke y^* koja će predstavljati fazi skup B' treba da bude intuitivno jasan. Na primjer, tačaka u kojoj funkcija pripadnosti ima najveću vrijednost.
- Računska jednostavnost: Proces defazifikacije treba da bude računski jednostavan.
- Kontinuitet: Mala promjena u fazi skupu B' ne bi trebala da dovede do velikih promjena u vrijednosti y^*.

Defazifikatori – centar gravitacije (COG)

Kod ovog metoda tačka y^* predstavlja centar površine ispod funkcije pripadnosti fazi skupa B'. Odnosno

$$y^* = \frac{\int_Y y\mu_{B'}(y)dy}{\int_Y \mu_{B'}(y)dy}.$$

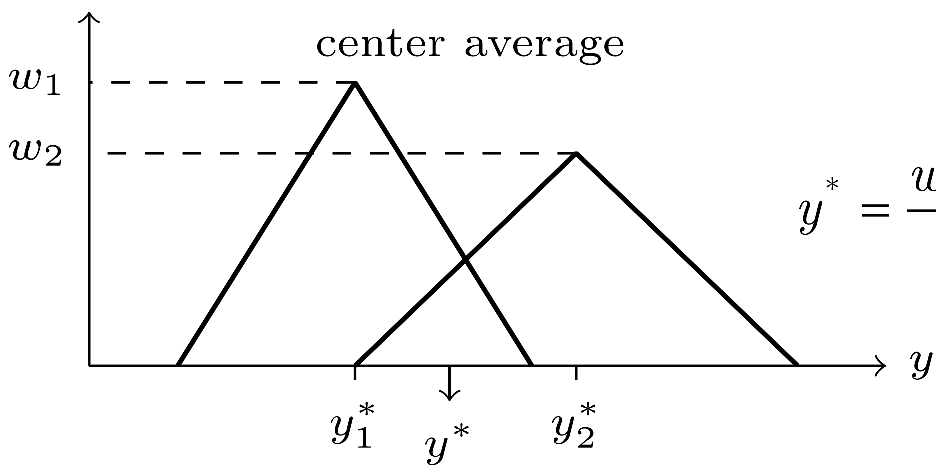


Ukoliko bi $\mu_{B'}(y)$ predstavljala gustinu raspodjele promjenljive y, tada bi y^* bila srednja vrijednost promjenljive y. Nedostatak ovog metoda je računska kompleknost.

Defazifikatori – „centar average“ metod

S obzirom na to da je B' unija ili presjek M fazi skupova, dobra aproksimacija COG metoda je ponderisana srednja vrijednost centara M fazi skupova, pri čemu su težinski koeficijenti jednaki visinama odgovarajućih fazi skupova. Ako sa y_i^* označimo centar l-tog fazi skupa, a sa w_i njegovu visinu, tada je y^*

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^{M} w_i y_i^*}{\sum_{i=1}^{M} w_i}.$$



$$y^* = \frac{w_1 y_1^* + w_2 y_2^*}{w_1 + w_2}.$$

„Centar average“ je najšešće korišćeni defazifikator.

Defazifikatori – „maximum“ defazifikator

„Maximum“ defazifikator kao izlaz vraća tačku u kojoj funkcija pripadnosti fazi skupa B' ima najveću vrijednost. Definišimo skup

$$hgt(B') = \left\{ y \in Y \mid \mu_{B'}(y) = \sup_{y \in Y} \mu_{B'}(y) \right\},$$

odnosno $hgt(B')$ predstavlja skup svih tačaka u kojima funkcija pripadnosti dostiže maksimalnu vrijednost. Izlaz iz „maximum“ defazifikatora predstavlja bilo koja tačka skupa $hgt(B')$:

$$y^* = \text{bilo koja tačka skupa } hgt(B').$$

Ukoliko $hgt(B')$ sadrži jednu tačku, tada je y^* jednoznačno definisano. Ukoliko $hgt(B')$ sadrži više tačaka da se primjenjuje neki od sljedećih metoda:

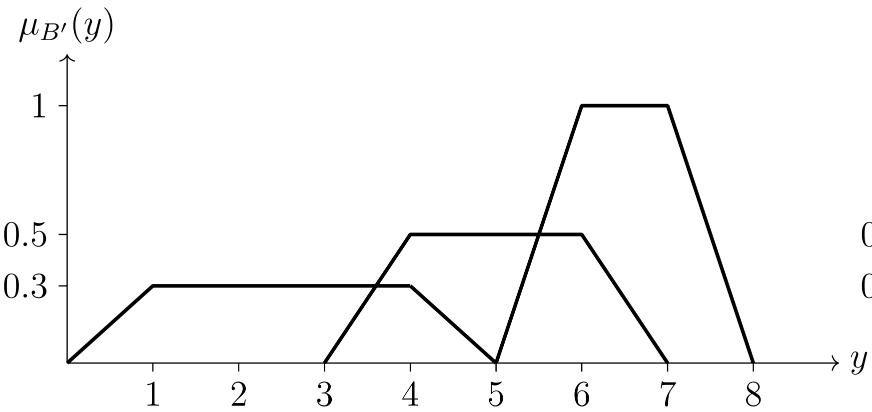
$$y^* = \inf\{y \in hgt(B')\} - \text{najmanji maksimum (SOM)},$$

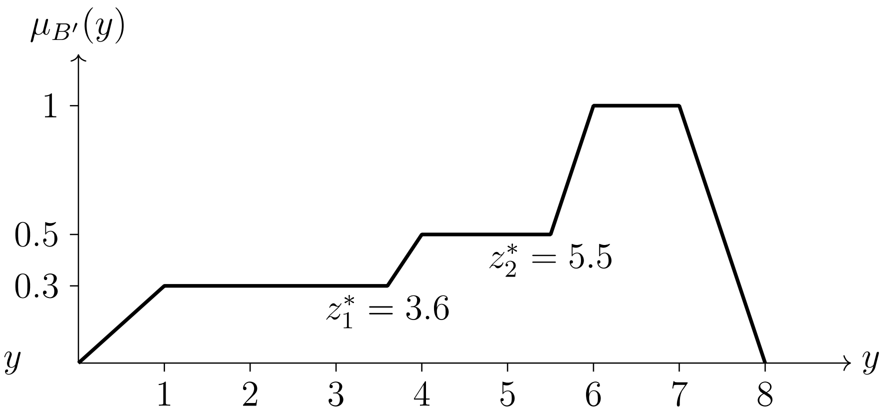
$$y^* = \sup\{y \in hgt(B')\} - \text{najveći maksimum (LOM)},$$

$$y^* = \frac{\int_{hgt(B')} y\,dy}{\int_{hgt(B')} dy} - \text{srednja vrijednost maksimuma (MOM)}.$$

Primjer – defazifikacija fazi skupa

Izvršiti defazifikaciju fazi skupa prikazanog na slici ispod.





COG metod: $y^* = \dfrac{0.3\int_0^1 y^2 dy + 0.3\int_1^{3.6} ydy + 0.5\int_{3.6}^4 (y-3)ydy}{0.3\int_0^1 ydy + 0.3\int_1^{3.6} dy + 0.5\int_{3.6}^4 (y-3)dy}$

$$\frac{+0.5\int_4^{5.5} ydy + 0.5\int_{5.5}^6 (y-5)ydy + \int_6^7 ydy - \int_7^8 (y-8)ydy}{+0.5\int_4^{5.5} dy + 0.5\int_{5.5}^6 (y-5)dy + \int_6^7 dy - \int_7^8 (y-8)dy} = 4.91.$$

Metod srednjih centara: $y^* = \dfrac{0.3 * 2.5 + 0.5 * 5 + 1 * 6.5}{0.3 + 0.5 + 1} = 5.14.$

SOM: y^*=6; MOM: y^*=6.5; LOM: y^*=7.

Formule za neke klase fazi sistema

Kao što smo već pokazali, postoji veliki broj definicija implikacija, kao i više različitih metoda zaključivanja. Međutim, najčešće korišćeni fazi sistemi se zasnivaju na Mamdanijevoj i Larsenovoj implikaciji, pri čemu se koristi zaključivanje na bazi individualnih pravila, dok se rezultujući fazi skup određuje operacijom unije.

Ako pretpostavimo da se fazi sistem sastoji M fazi IF-THEN pravila, u slučaju kada se koristi Mamdanijeva implikacija i *min* operator za presjek skupova, funkcija pripadnosti rezultujućeg fazi skupa se može zapisati na sljedeći način:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^{M}\left[\sup_{\mathbf{x}\in X}\min(\mu_{A'}(\mathbf{x}), \mu_{A_1^l}(x_1), ..., \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y)\right].$$

dok je funkcija pripadnosti rezultujućeg fazi skupa u slučaju kada se koriste Larsenova implikacija i *prod* operator jednaka:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^{M}\left[\sup_{\mathbf{x}\in X}\left(\mu_{A'}(\mathbf{x})\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}(x_i)\mu_{B^l}(y)\right)\right].$$

Formule za neke klase fazi sistema

Računanje izlaznog fazi skupa se pojednostavljuje u slučaju kada je ulazni fazi skup opisan singleton funkcijom pripadnosti:

$$\mu_{A'}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \\ 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^* \end{cases}$$

gdje $\mathbf{x}^*$ predstavlja neku tačku iz skupa X.

Tada, funkcija rezulutujućeg fazi skupa u slučaju korišćenja Mamdanijeve implikacije ima sljedeći oblik:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^{M} \left[\min(\mu_{A_1^l}(x_1^*), \ldots, \mu_{A_n^l}(x_n^*), \mu_{B^l}(y) \right].$$

dok je funkcija pripadnosti rezultujućeg fazi skupa u slučaju Larsenove implikacije

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^{M} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i^*) \mu_{B_i^l}(y) \right].$$

Mamdanijeve fazi mašine

Postoji više tipova fazi mašina. Fazi mašine koje smo već opisali se nazivaju Mamdanijeve fazi mašine ili fazi mašine Mamdani tipa. Kod Mamdanijevih fazi mašina proces zaključivanja se sastoji iz nekoliko koraka:

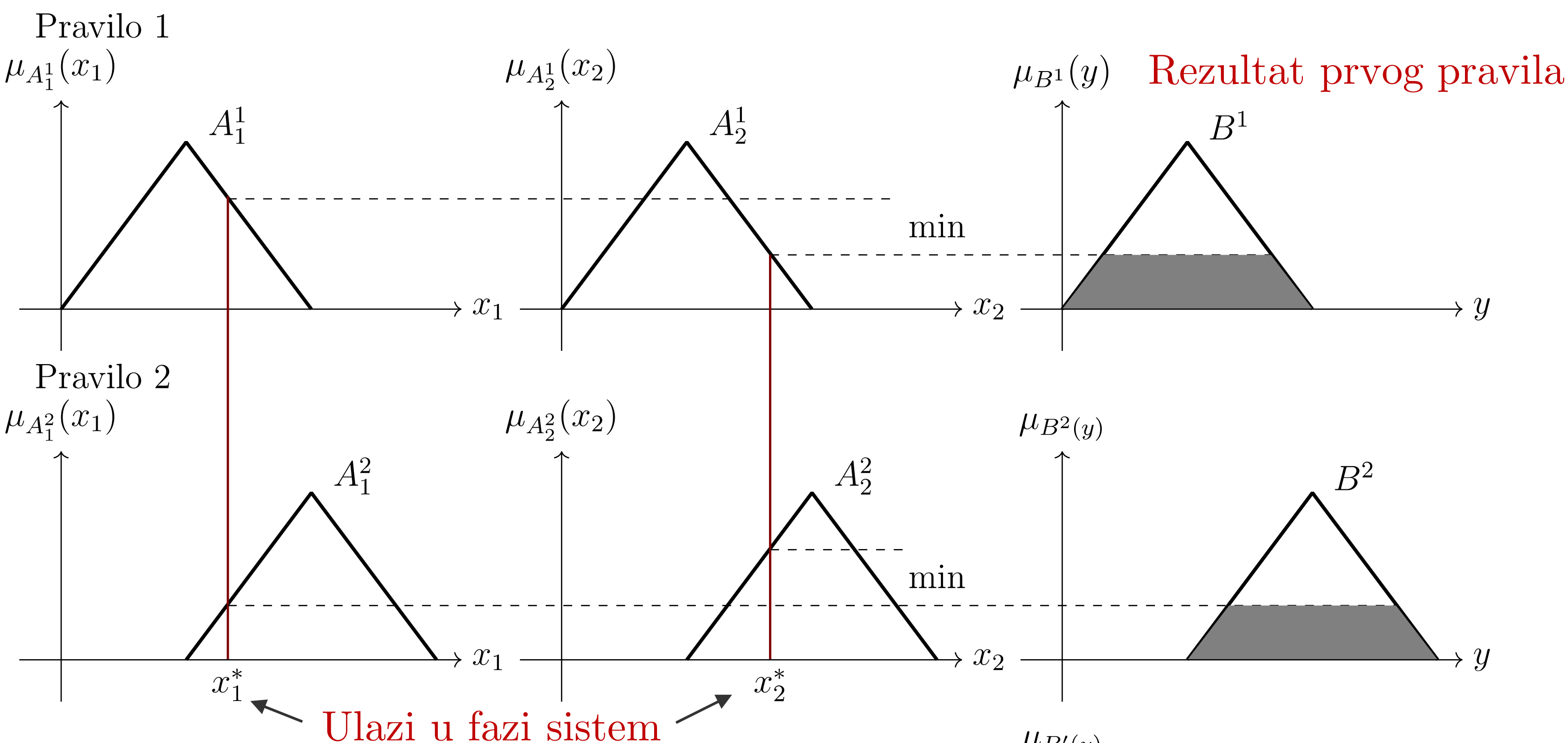
1) Fazifikacija ulaznih podataka,
2) Računanje izlaza svakog *IF-THEN* pravila,
3) Agregacija izlaza fazi pravila, tj. računanje izlaznog fazi skupa,
4) Defazifikacija fazi skupa.

Kod Mamdanijevih mašina najčešće se koristi Mamdanijeva ili Larsenova implikacija, dok se agregacija vrši pomoću operatora unije.

Kao što je ranije pomenuto, u slučaju kada se za fazifikaciju koristi *singleton* funkcija, proces računanja kompozicije se značajno može pojednostaviti. Naime, tada se koraci 1)-4) mogu ilustrovati i odrediti grafičkim putem, što je prikazano na narednim slajdovima.

Grafički metod zaključivanja

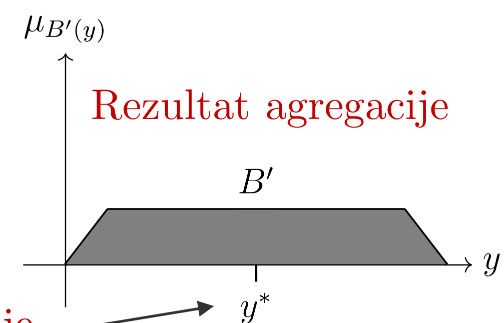
Mamdanijeva implikacija + min operator



Fazi sistem ima dva pravila:

IF x_1 is A_1^1 and x_2 is A_2^1, THEN y is B^1

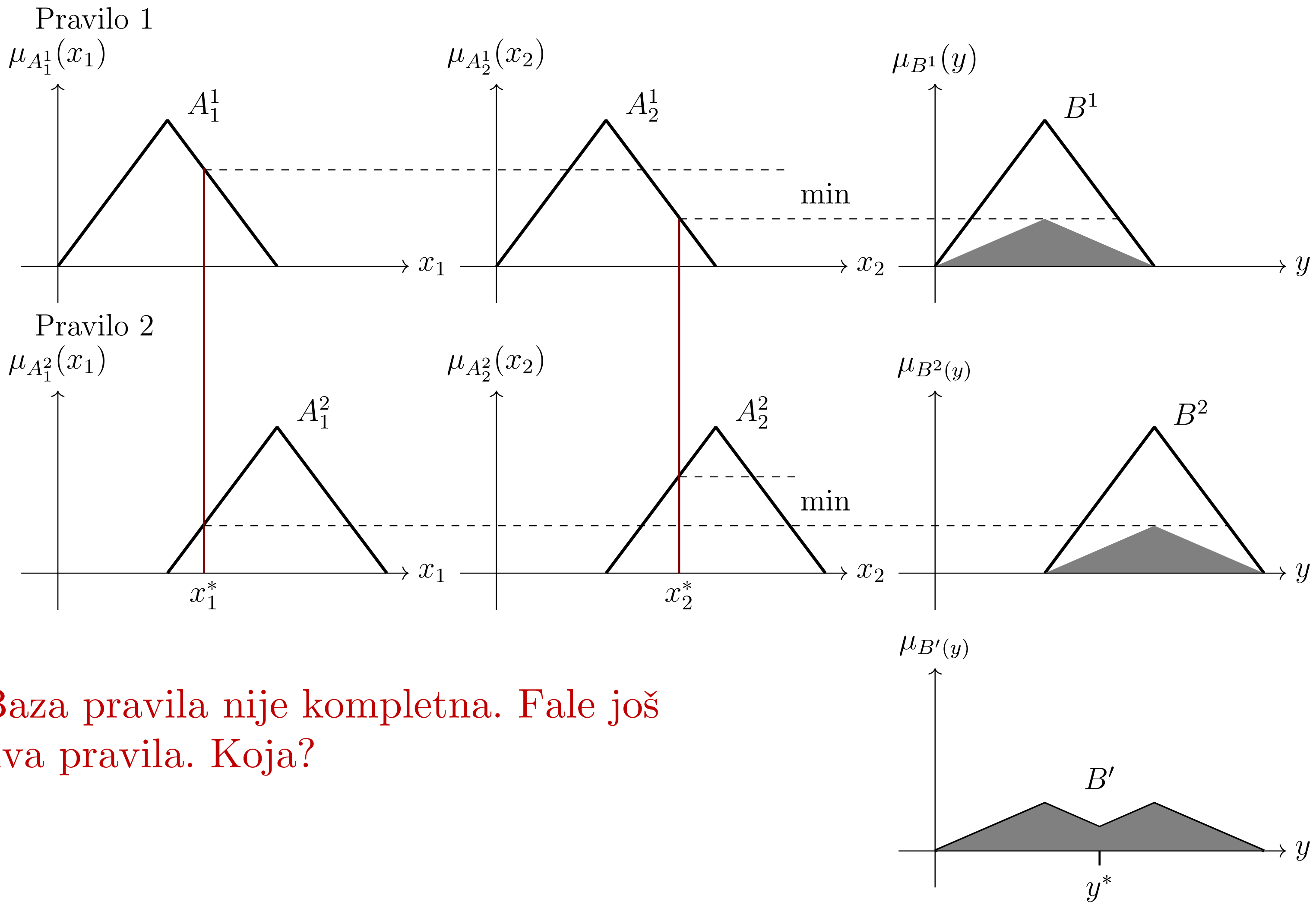
IF x_1 is A_1^2 and x_2 is A_2^2, THEN y is B^2



Rezultat defazifikacije

Grafički metod zaključivanja

Larsenova implikacija + min operator



Baza pravila nije kompletna. Fale još dva pravila. Koja?

Sugeno fazi mašine

Da bi pojednostavio proces izvršavanja fazi mašina, Sugeno je predložio generalizaciju Mamdanijevih mašina. Osnovna razlika između fazi mašina Mamdani i Sugeno tipa je u definiciji *if-then* pravila, dok se proces zaključivanja izvršava na isti način.

Kod Sugeno mašina *if-then* pravilo ima sljedeću formu:

$$\text{if } x_1 \text{ is } A_1 \text{ and } x_2 \text{ is } A_2 \text{ and } \dots \text{ then } y = f_1(x_1, x_2, \dots).$$

Može se uočiti da izlaz iz fazi pravila više nije fazi skup, već funkcija f_1 koja je najčešće polinom prvog reda koji zavisi od ulaznih varijabli ili čak samo konstanta. U opštem slučaju fazi sistem ima r fazi pravila:

$$Ru^{(1)}: \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^1 \text{ and/or } x_2 \text{ is } A_2^1 \cdots \text{THEN } y \text{ is } f_1(x_1, x_2, \cdots)$$

$$Ru^{(2)}: \text{IF } x_1 \text{ is } A_2^2 \text{ and/or } x_2 \text{ is } A_2^2 \cdots \text{THEN } y \text{ is } f_2(x_1, x_2, \cdots)$$

$$\vdots$$

$$Ru^{(M)}: \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^M \text{ and/or } x_2 \text{ is } A_2^M \cdots \text{THEN } y \text{ is } f_M(x_1, x_2, \cdots)$$

Sugeno fazi mašine

Kod Sugeno fazi mašina, defazifikacija se vrši korišćenjem *weighted-average* metoda prema sljedećoj formuli:

$$y = \frac{w_1(x_1, x_2, \cdots)f_1(x_1, x_2, \cdots) + w_2(x_1, x_2, \cdots)f_2(x_1, x_2, \cdots) + \cdots + w_M(x_1, x_2, \cdots)f_M(x_1, x_2, \cdots)}{w_1(x_1, x_2, \cdots) + w_2(x_1, x_2, \cdots) + \cdots + w_M(x_1, x_2, \cdots)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{M} w_i(x_1, x_2, \cdots)f_i(x_1, x_2, \cdots)}{\sum_{i=1}^{M} w_i(x_1, x_2, \cdots)}$$

gdje w_i predstavlja stepen zadovoljenja i-tog *IF-THEN* pravila, odnosno

$$w_i(x_1, x_2, \ldots) = \mu_{A_1^i \cap A_2^i \ldots}(x_1, x_2, \ldots) = \min(\mu_{A_1^i}(x_1), \mu_{A_2^i}(x_2), \ldots.), i = 1\ldots, M,$$

ili

$$w_i(x_1, x_2, \ldots) = \mu_{A_1^i \cap A_2^i \ldots}(x_1, x_2, \ldots) = \mu_{A_1^i}(x_1) \times \mu_{A_2^i}(x_2) \times \ldots, i = 1\ldots, M,$$

u zavisnosti od definicije *and* operatora.

Sugeno fazi mašine

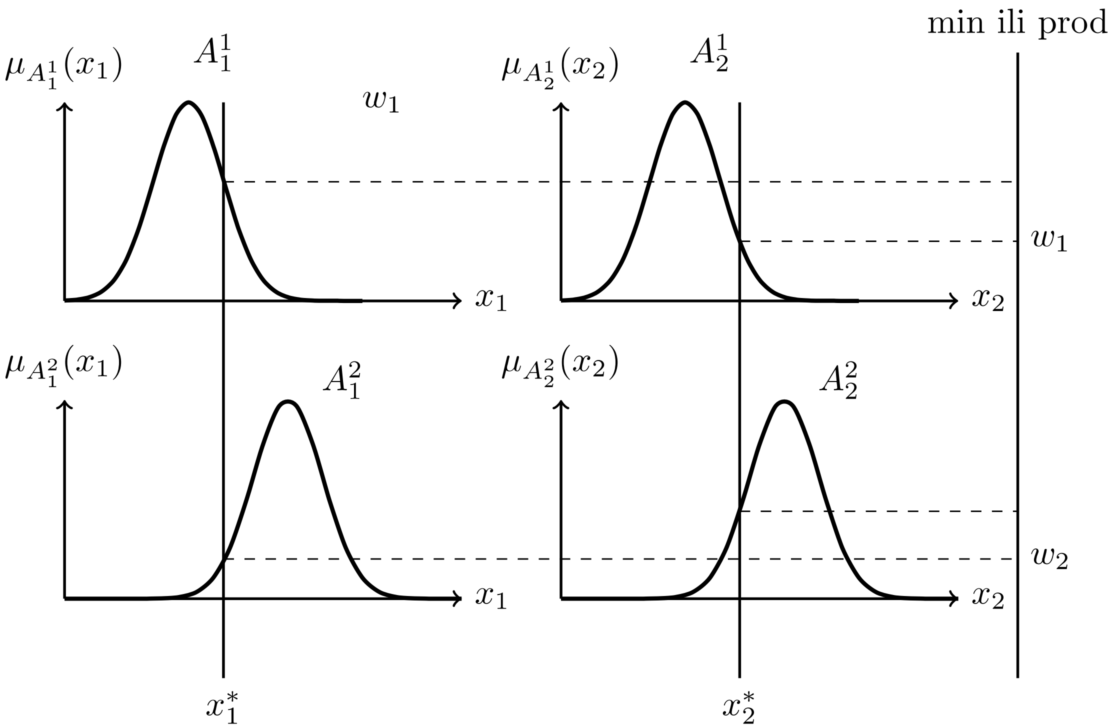
Grafički postupak računanja izlaza iz Sugeno mašine je ilustrovan na slici ispod.

$Ru^{(1)}$: IF x_1 is A_1^1 and/or x_2 is $A_2^1 \cdots$ THEN y is $f_1(x_1, x_2, \cdots)$

$Ru^{(2)}$: IF x_1 is A_1^2 and/or x_2 is $A_2^2 \cdots$ THEN y is $f_2(x_1, x_2, \cdots)$

Bazu bi trebalo dopuniti sa još dva pravila da bi bila kompletna. Kojim?

Rezultujući izlaz je linearna kombinacija izlaza pojedinačnih pravila. Za koje vrijednosti x i y je rezultujući izlaz jednak 0, a za koje vrijednosti x i y izlaz zavisi samo od jednog pravila?



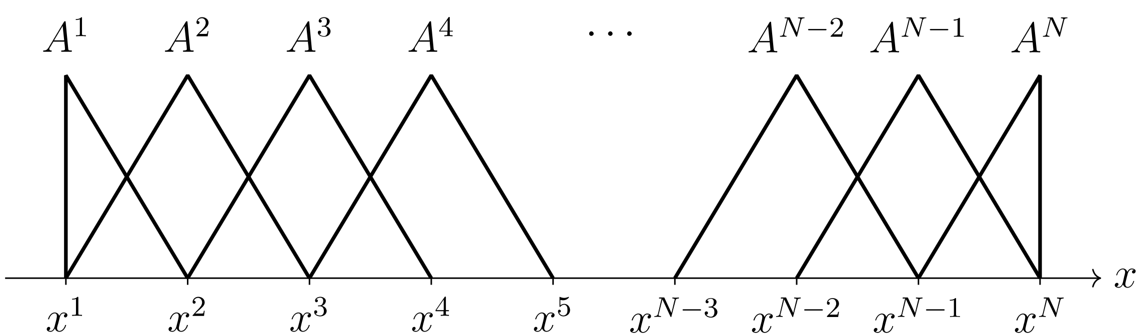
$$w_1 = \min(\mu_{A_1^1}(x_1^*), \mu_{A_2^1}(x_2^*))$$

$$w_2 = \min(\mu_{A_1^2}(x_1^*), \mu_{A_2^2}(x_2^*))$$

$$y = \frac{w_1 f_1 + w_2 f_2}{w_1 + w_2}$$

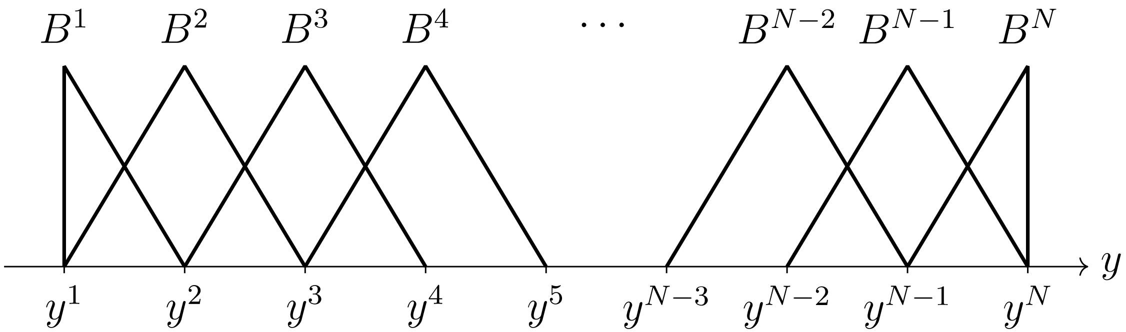
Fazi sistemi kao univerzalni aproksimatori

Može se pokazati da fazi sistemi predstavljaju univerzalne aproksimatore, tj. da mogu aproksimiraju bilo koju funkciju sa proizvoljnom tačnošću. Ne gubeći na opštosti, razmotrimo jednodimenzionalnu funkciju $f(x)$. Pretpostavimo da su poznate vrijednosti ove funkcije u N tačaka: x^1, x^2, ..., x^N i da one iznose y^1, y^2, ... y^N. Tada se ova funkcija može aproksimovati sa fazi sistemom koji se sastoji od N IF-THEN pravila oblika: IF x is A^i THEN y is B^i. Funkciju pripadnosti i-tog fazi skupa ($\mu_{A_i}(x)$) je potrebno definisati na takav način da ona ima vrijednost 1 u tački x^i i vrijednost 0 u tačkama x^{i-1} i x^{i+1}. Na slici ispod su prikazane ove funkcije, u slučaju kada se koriste trougaone funkcije pripadnosti.



Fazi sistemi kao univerzalni aproksimatori

Izlazni fazi skupovi se definišu na sličan način. Naime, funkcija pripadnosti skupa B^i se definiše tako da ona ima vrijednost 1 u tački y^i i vrijednost 0 u tačkama y^{i-1} i y^{i+1}. Ispod su prikazani fazi skupovi B^i, i=1,...,N, u slučaju kada se koriste trougaone funkcije pripadnosti.



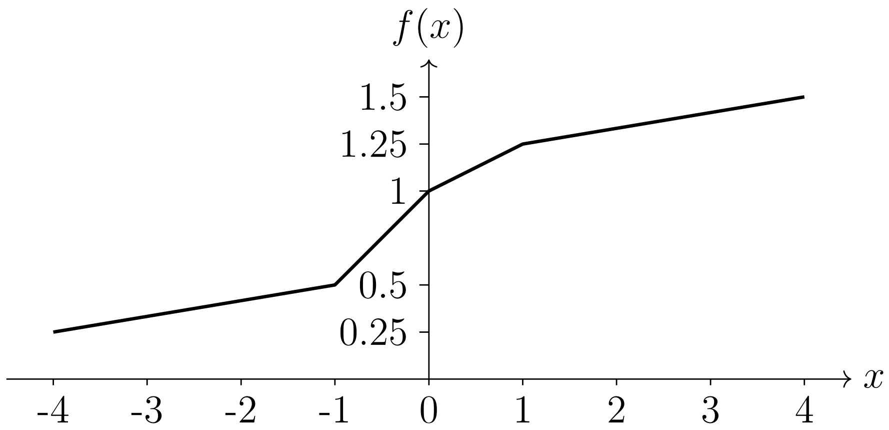
U slučaju kada se koristi *centar average* defazifikator, izlaz iz ovakvog fazi sistema se može zapisati u analitičkom obliku kao:

$$z(x) = \sum_{i=1}^{N} y^i \mu_{A^i}(x),$$

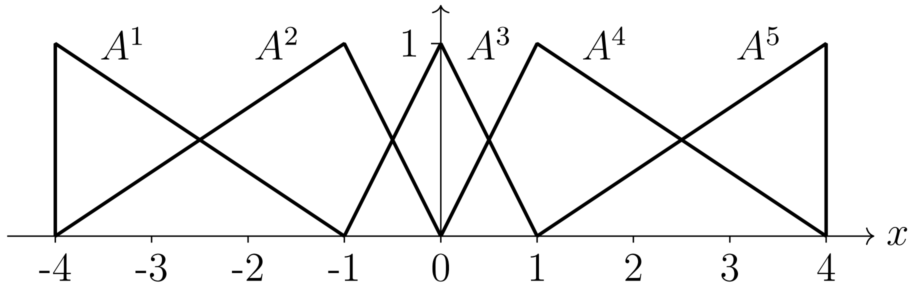
što zapravo predstavlja aproksimaciju funkcije $y(x)$. Ovaj pristup se može generalizovati na funkcije sa više promjenljivih kao i na druge oblike funkcija pripadnosti.

Primjer 1 – projektovanje fazi sistema

Projektovati Mamdani fazi sistem koji aproksimira funkciju $f(x)$ sa slike.



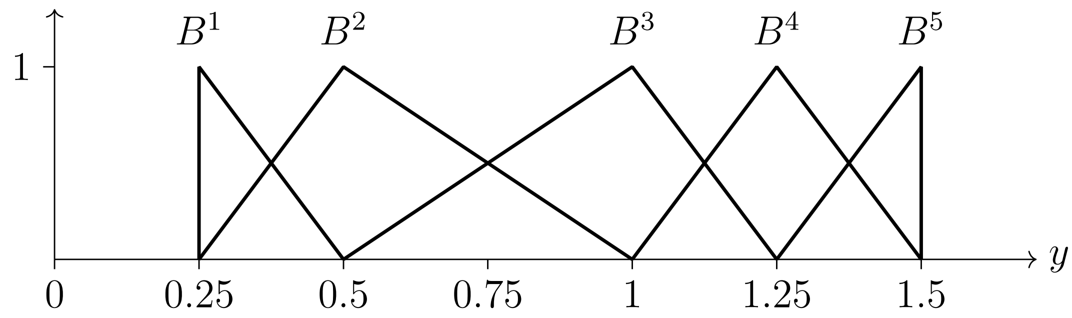
Na osnovu funkcije sa slike, možemo definisati sljedećih 5 fazi skupova:



Primijetimo da funkcije pripadnosti fazi skupova dostižu maksimum u tačkama koje odgovaraju x-koordinatama prelomnih tačaka funkcije $f(x)$.

Primjer 1 – projektovanje fazi sistema

Izlazni fazi skupovi definišu se na sličan način, pri čemu treba voditi računa da njihove funkcije pripadnosti dostižu maksimum u tačkama koje odgovaraju y-koordinatama prelomnih tačaka funkcije $f(x)$.



Konačno, na osnovu definisanih fazi skupova, možemo definisati sljedećih pet fazi pravila:

IF x is A^1 THEN y is B^1
IF x is A^2 THEN y is B^2
IF x is A^3 THEN y is B^3
IF x is A^4 THEN y is B^4
IF x is A^5 THEN y is B^5

```
close all
x=[-4:0.1:4];
plot(x,0.25*trimf(x,[-4 -4 -1]) ...
    +0.5*trimf(x,[-4 -1 0]) ...
    +1*trimf(x,[-1 0 1]) ...
    +1.25*trimf(x,[0 1 4])+ ...
    +1.5*trimf(x,[1 4 4]))
```

Primjer 2 – projektovanje fazi sistema

Projektovati Mamdani fazi sistem koji će upravljati izborom stepena prenosa (brzine) automatskog mjenjača vozila na osnovu: *brzine vozila* (u km/h), *položaja papučice gasa* (u procentima) i *opterećenje motora* (u procentima).

Poznato je sljedeće:

- Brzina vozila kreće se u opsegu od 0 km/h do 200 km/h i treba je predstaviti sa tri fazi skupa: „mala“, „srednja“ i „velika“.
- Položaj papučice gasa se izražava u procentima (od 0% do 100%) i treba ga predstaviti sa tri fazi skupa: “malo pritisnuta“, „srednje pritisnuta“ i „potpuno pritisnuta“.
- Opterećenje motora se izražava u procentima i treba ga predstaviti sa tri fuzi skupa: “malo“, „srednje“ i „veliko“.
- Stepen prenosa se kreće od 1 do 6. Proizvoljno odabrati izlazne fazi skupove.

Potrebno je:

- Definisati sve fazi skupove,
- Definisati bar pet *IF-THEN* pravila,
- Odrediti izlaz iz bar jednog pravila u scenariju kada je brzina vozila 50 km/h, položaj papučice gasa 80% i opterećenje motora 50%.