Projektovanje i implementacija ISAU

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Predavanje 6

Takagi-Sugeno fazi modeli sistema

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Modeluju nelinearni sistem T-S fazi modelom sistema koristeći metode sektorske nelinearnosti i lokalne aproksimacije funkcija
- Ispitaju globalnu stabilnost T-S fazi sistema
- Primjenom linearnih matričnih nejednačina izvrše sintezu fazi kontrolera za T-S fazi sisteme
- Simuliraju upravljački sistem zasnovan na T-S fazi kontroleru

Takagi-Sugeno fazi modeli

Na jednom od prethodnih predavanja smo rekli da postoje dvije vrste fazi mašina: Mamdanijeve i Sugeno mašine. Kod Mamdanijevih mašina IF-THEN pravila imaju oblik:

$$\textbf{IF } x_1(t) \text{ is } A_1^i \text{ and } \ldots \text{ and } x_p(t) \text{ is } A_p^i, \textbf{ THEN } y = B^i,$$

odnosno, kod njih i antecedent i konsekvent IF-THEN pravila predstavljaju fazi skupove.

Sa druge strane, kod Sugeno mašina konsekvent nije fazi skup, već neka matematička funkcija:

$$\textbf{IF } x_1(t) \text{ is } A_1^i \text{ and } \ldots \text{ and } x_p(t) \text{ is } A_p^i, \textbf{ THEN } y_i = f(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

Ovaj pristup se može dodatno proširiti tako što će se za konsekvent usvojiti diferencijalna jednačina $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i u,$ što je posebno zgodno za modelovanje dinamičkih sistema. Modeli dinamičkih sistema predstavljani ovakvim skupom pravila se nazivaju Takagi-Sugeno (T-S) fazi modeli (oba naučnika su radila na razvoju dinamičkih fazi sistema).

Takagi-Sugeno fazi modeli

T-S fazi model kontinualnog sistema ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{IF}\, z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{ip},$$

$$\mathbf{THEN} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

dok se T-S fazi model diskretnog sistema zapisuje na sljedeći način:

$$\mathbf{IF}\, z_1(n) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(n) \text{ is } M_{ip},$$

$$\mathbf{THEN} \begin{cases} \mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(n) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(n), \\ \mathbf{y}(n) = \mathbf{C}_i x(n), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

gdje je M_{ij} fazi skup, r predstavlja broj pravila, $\mathbf{x}$ je vektor stanja, $\mathbf{u}$ je upravljački signal, dok su z_1, z_2, ..., z_p uslovne varijable (premise) koje mogu biti funkcije stanja, poremećaja, itd. Varijable z_1, z_2, ..., z_p se u kompaktnom obliku mogu predstaviti vektorom $\mathbf{z}$.

Takagi-Sugeno fazi modeli

Za zadato $\mathbf{x}$ i $\mathbf{u}$, rezultujući izlazi iz fazi sistema su jednaki:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(t))\{\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(t))} = \sum_{i=1}^{r} h_i(\mathbf{z}(t))\{\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t)\},$$

$$\mathbf{y}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{C}_i\mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(t))} = \sum_{i=1}^{r} h_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{C}_i\mathbf{x}(t),$$

$$\mathbf{x}(n+1) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(n))\{\mathbf{A}_i\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(n)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(n))} = \sum_{i=1}^{r} h_i(\mathbf{z}(n))\{\mathbf{A}_i\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(n)\},$$

$$\mathbf{y}(n) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(n))\mathbf{C}_i\mathbf{x}(n)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(n))} = \sum_{i=1}^{r} h_i(\mathbf{z}(n))\mathbf{C}_i\mathbf{x}(n),$$

gdje je:

$$w_i(\mathbf{z}(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}(z_j(t)), \quad h_i(\mathbf{z}(t)) = \frac{w_i(\mathbf{z}(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(t))}.$$

Produktna implikacija
\+ WA defazifikacija

Konstrukcija T-S fazi modela

T-S fazi modeli sistema se mogu odrediti na dva načina:

- primjenom tehnika za identifikaciju sistema,
- analitičkim izvođenjem polazeći od nelinearnog modela sistema.

Prvi pristup se zasniva na korišćenju ulazno-izlaznih podataka sistema, a koristi se kada je model kompleksan i kada ga je teško reprezentovati nelinearnim diferencijalnim jednačinama.

Drugi pristup se koristi u scenarijima kada je nelinearni sistem moguće reprezentovati diferencijalnim jednačinama, primjenom fizičkih zakona. Mehanički sistemi su primjeri takvih sistema.

Polazeći od nelinearnog modela, postoje dva metoda za konstrukciju T-S fazi modela:

- metod „sektorske nelinearnosti“,
- metod „lokalne aproksimacije“.

Metod sektorske nelinearnosti

Razmotrimo nelinearnu funkciju $z = f(x(t))$, pri čemu je $f(0)=0$. Cilj je pronaći globalni sektor $[a_1x,\ a_2x]$ takav da važi $f(x(t)) \in [a_1 \;\; a_2]x(t)$, kao što je prikazano na slici ispod. Ako se uvedu funkcije pripadnosti

$$h_1(x(t)) = \frac{f(x(t)) - a_2x(t)}{(a_1 - a_2)x(t)} \;\text{ i }\; h_2(x(t)) = \frac{a_1x(t) - f(x(t))}{(a_1 - a_2)x(t)},$$

lako se može pokazati da važi:

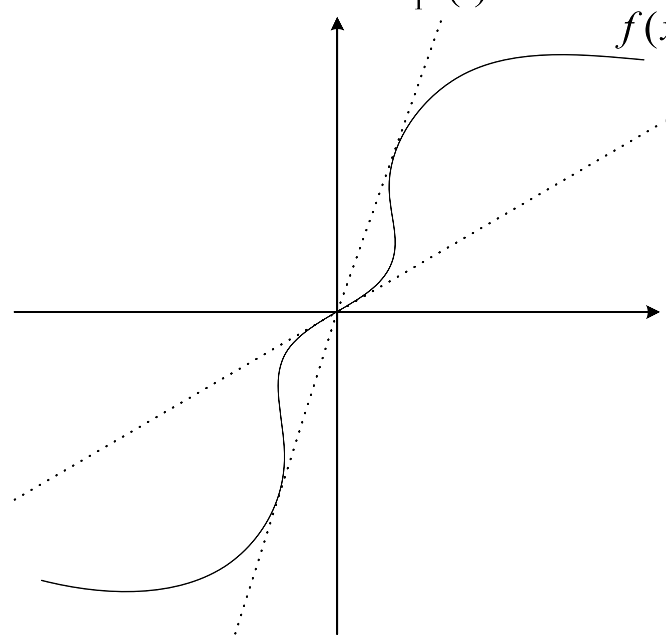
$h_1(x(t)) \geq 0$ i $h_2(x(t)) \geq 0$,

i $h_1(x(t)) + h_2(x(t)) = 1$.

Koristeći gornje funkcije, $f(x(t))$ se može zapisati na sljedeći način:

$$z = f(x(t)) = h_1(x(t)a_1x + h_2(x(t))a_2x$$

$$= \sum_{i=1}^{2} h_i(x(t))a_ix.$$



Metod sektorske nelinearnosti

Naravno, najčešće je teško (ili nemoguće) pronaći globalni sektor za opšte nelinearne funkcije, pa se često koriste lokalni sektori unutar kojih se funkcija $z=f(x)$ može ograničiti na nekom opsegu $-d<x<d$. Pretpostavimo da je unutar ovoga opsega funkcija z ograničena vrijednostima $z_{\max}$ i $z_{\min}$. Tada možemo uvesti funkcije pripadnosti

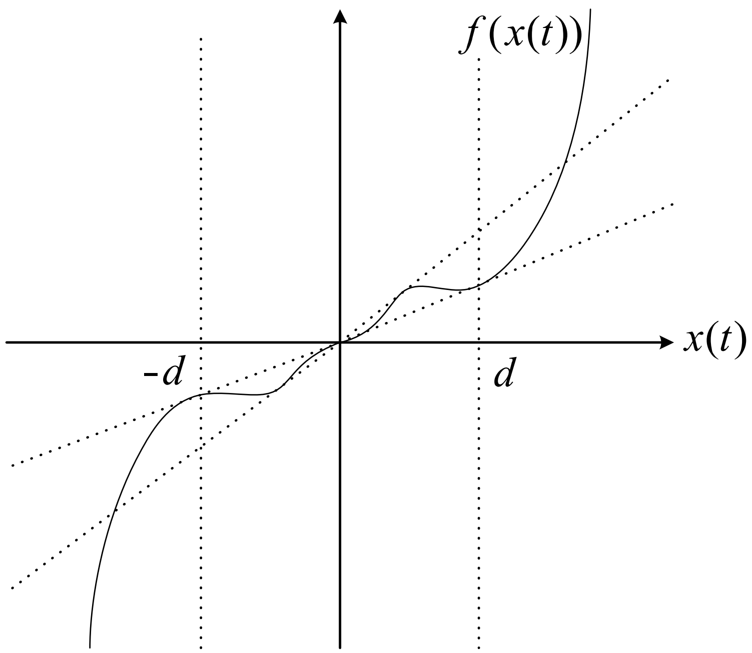
$$h_1(z) = \frac{z - z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}} \quad \text{i} \quad h_2(z) = \frac{z_{\max} - z}{z_{\max} - z_{\min}},$$

za koje se takođe može lako pokazati da zadovoljavaju uslove:

$$h_1(z) \geq 0, \; h_2(z) \geq 0 \;\text{ i }\; h_1(z) + h_2(z) = 1.$$

Koristeći definisane funkcije pripadnosti, funkcija z se na opsegu $[-d, d]$ egzaktno može predstaviti na sljedeći način:

$$z = f(x(t)) = h_1(z) z_{\max} + h_2(z) z_{\min}.$$



Metod sektorske nelinearnosti

Konstrukciju T-S fazi modela primjenom metoda sektorske nelinearnosti je najjednostavnije objasniti na primjeru. Posmatrajmo nelinearni sistem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 + u. \end{cases}$$

Radi jednostavnosti pretpostavimo da važi $x_1 \in$ [-2, 3] i $x_2 \in [-2, 4]$. Zadati sistem je nelinearan po promjenljivima x_1 i x_2, pa se mogu uvesti uslovne varijable (premise) $z_1 = x_1$ i $z_2 = x_2$.

Dalje, zadati sistem se može zapisati u sljedećem obliku:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$

gdje je $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$.

Metod sektorske nelinearnosti

U narednom koraku je potrebno definisati funkcije pripadnosti za z_1 i z_2. Prije toga, pod pretpostavkom da je $x_1 \in$ [-2, 3] i $x_2 \in$ [−2, 4], treba odrediti minimalnu i maksimalnu vrijednost promjenljivih z_1 i z_2:

$$\max z_1(t) = 3, \quad \min z_1(t) = -2,$$

$$\max z_2(t) = 4, \quad \min z_2(t) = -2.$$

Označimo sa $M_1(z_1(t))$, $M_2(z_1(t))$, $N_1(z_2(t))$ i $N_2(z_2(t))$ funkcije pripadnosti za promjenljive z_1 i z_2. One se mogu zapisati na sljedeći način:

$$M_1(z_1(t)) = \frac{z_1(t)+2}{5}, M_2(z_1(t)) = \frac{3-z_1(t)}{5}, N_1(z_2(t)) = \frac{z_2(t)+2}{6}, N_2(z_2(t)) = \frac{4-z_2(t)}{6}.$$

Primijetimo da važi

$$M_1(z_1(t)) + M_2(z_1(t)) = 1, \; N_1(z_2(t)) + N_2(z_2(t)) = 1,$$

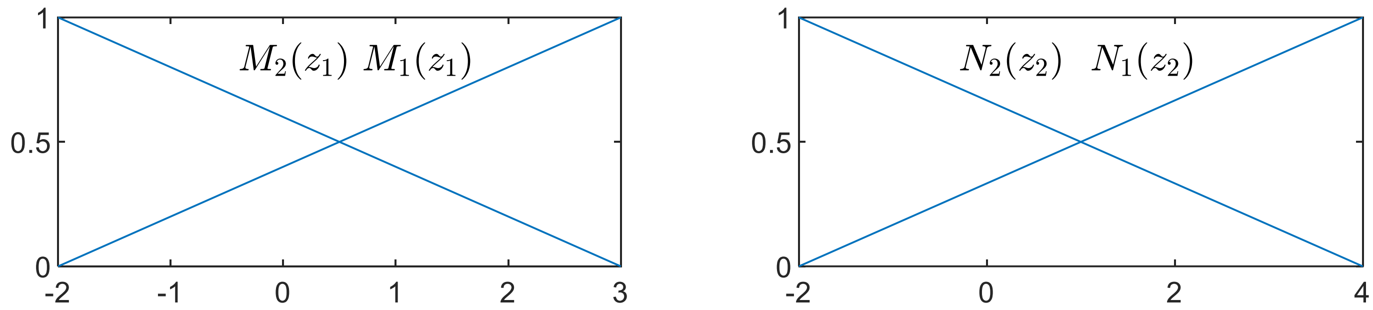
što znači promjenljive z_1 i z_2 se mogu predstaviti na sljedeći način:

$$z_1(t) = x_1(t) = M_1(z_1(t)) \cdot 3 + M_2(z_1(t)) \cdot (-2),$$

$$z_2(t) = x_2(t) = N_1(z_2(t)) \cdot 4 + N_2(z_2(t)) \cdot (-2).$$

Metod sektorske nelinearnosti

Na slici ispod su prikazane funkcije pripadnosti $M_1(z_1(t))$, $M_2(z_1(t))$, $N_1(z_2(t))$, $N_2(z_2(t))$ koje zadovoljavaju zadate uslove.



S obzirom da su za promjenljive z_1 i z_2 definisana po dva fazi skupa, potrebno je definisati 4 fazi pravila sljedećeg oblika:

$$\mathbf{R1}: \quad \text{IF } z_1(t) \text{ is } M_1 \text{ and } z_2(t) \text{ is } N_1, \text{ THEN } \dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}_1 u,$$

$$\mathbf{R2}: \quad \text{IF } z_1(t) \text{ is } M_1 \text{ and } z_2(t) \text{ is } N_2, \text{ THEN } \dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}_2 u.$$

$$\mathbf{R3}: \quad \text{IF } z_1(t) \text{ is } M_2 \text{ and } z_2(t) \text{ is } N_1, \text{ THEN } \dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}_3\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}_3 u.$$

$$\mathbf{R4}: \quad \text{IF } z_1(t) \text{ is } M_2 \text{ and } z_2(t) \text{ is } N_2, \text{ THEN } \dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}_4\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}_4 u.$$

Metod sektorske nelinearnosti

Matrice $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ i $\mathbf{A}_4$ se određuju na sljedeći način:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \max\limits_{z_1 \in M_1} z_1 & \max\limits_{z_2 \in N_1} z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \max\limits_{z_1 \in M_1} z_1 & \max\limits_{z_2 \in N_2} z_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \max\limits_{z_1 \in M_2} z_1 & \max\limits_{z_2 \in N_1} z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \max\limits_{z_1 \in M_2} z_1 & \max\limits_{z_2 \in N_2} z_2 \end{bmatrix}.$$

odakle se dalje dobijaju sljedeće matrice stanja:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da je posmatrani sistem linearan po ulazu, matrice $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ i $\mathbf{B}_4$ su identične i jednake $[0 \;\; 1]^{\mathrm{T}}$.

Metod sektorske nelinearnosti

Na kraju, izlaz iz fazi sistema se određuje primjenom „weighted average“ metoda defazifikacije:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = h_1(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + h_2(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) + h_3(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_3\mathbf{x}(t) + h_4(\mathbf{z}(t))\mathbf{A}_4\mathbf{x}(t),$$

gdje je:

$$h_1(z(t)) = M_1(z_1(t)) \times N_1(z_2(t)),$$
$$h_2(z(t)) = M_1(z_1(t)) \times N_2(z_2(t)),$$
$$h_3(z(t)) = M_2(z_1(t)) \times N_1(z_2(t)),$$
$$h_4(z(t)) = M_2(z_1(t)) \times N_2(z_2(t)).$$

Pokažite da je

$$\sum_{i=1}^{4} h_i(\mathbf{z}_i(t))\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix},$$

odnosno

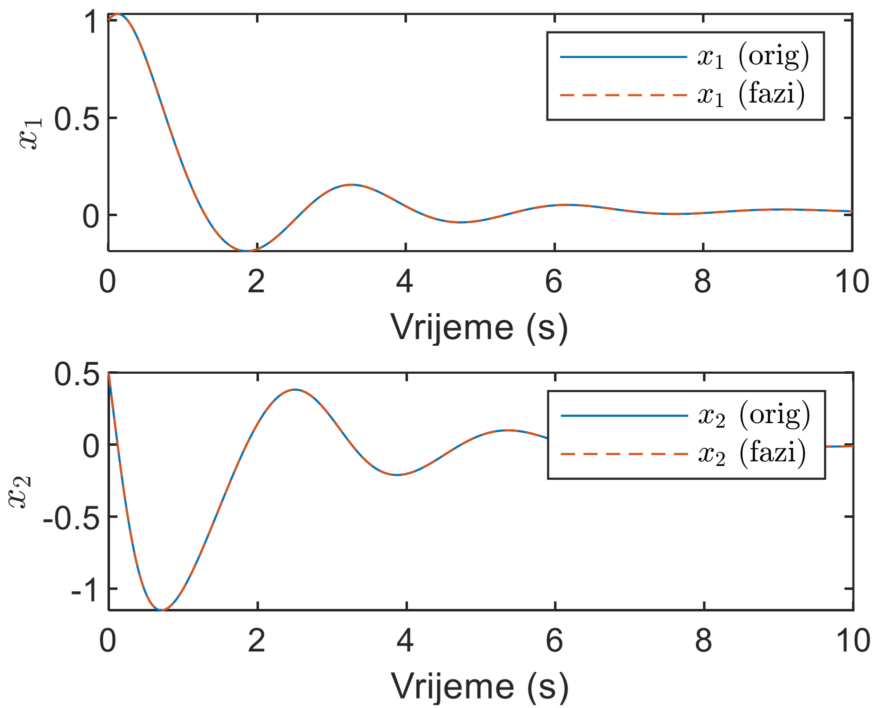
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{4} h_i(\mathbf{z}_i(t))\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t).$$

Napomena:

Za usvojene funkcije pripadnosti važi $w_1(\mathbf{z})+w_2(\mathbf{z})+w_3(z)+w_4(\mathbf{z})=1$, pa se, iz tog razloga, izrazi za h_1, h_2, h_3 i h_4 sa slajda 5 se svode na izraze prikazane iznad.

Primjer 1 – Metod sektorske nelinearnosti

Simulirati odziv nelinearnog sistema i T-S fazi sistema iz prethodnog primjera. Početno stanje sistema je $\mathbf{x}_0 = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$, dok je upravljački signal jednak $u(t) = 0.1$. Korak diskretizacije iznosi 0.01s.



Sa slika iznad se može uočiti da T-S fazi sistem egzaktno aproksimira nelinearni sistem.

Matlab kod

Primjer 2 – Metod sektorske nelinearnosti

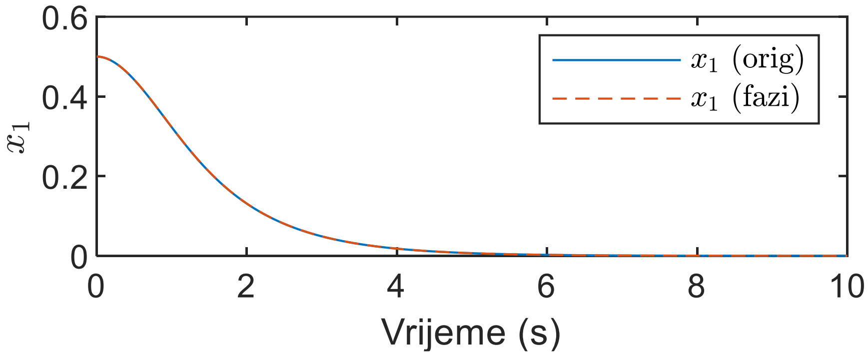
Razmotrimo nelinearni sistem opisan jednačinama:

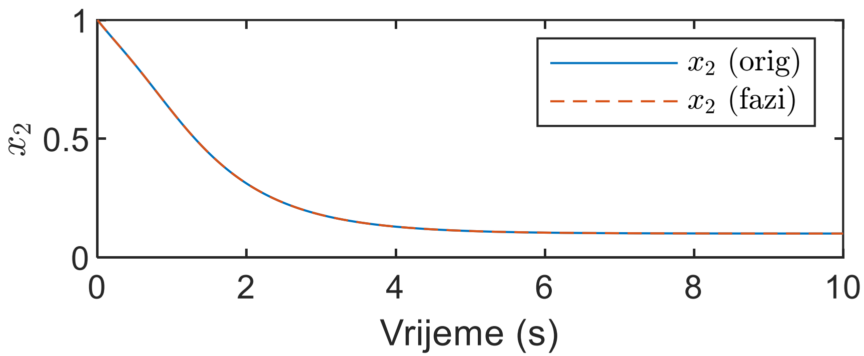
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1(t) + x_1(t)x_2^3(t) \\ -x_2(t) + \big(3 + x_2(t)\big)\, x_1^3(t) \end{bmatrix}.$$

Pod pretpostavkom da za promjenljive stanja važe ograničenja

$$x_1 \in [-1,1] \quad \text{i} \quad x_2 \in [-1,1],$$

primjenom metoda sektorske nelinearnosti odrediti T-S fazi model sistema. Simulirati u uporediti odzive nelinearnog i T-S fazi sistema.





Matlab kod

Metod lokalne aproksimacije

Drugi pristup za dobijanje T-S fazi modela je tzv. lokalna aproksimacija u fazi prostorima particija. Suština ovog pristupa je u aproksimaciji nelinearnih članova pažljivo odabranim linearnim članovima. Ovaj postupak dovodi do smanjenja broja pravila modela i biće objašnjen na primjeru inverznog klatna na kolicima čiji je nelinearni model:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{-(J+ml^2)bx_2 + m^2gl^2\sin(x_3)\cos(x_3) - (J+ml^2)mlx_4^2\sin(x_3)}{p} \\ x_4 \\ \dfrac{-mlbx_2\cos(x_3) + mgl(M+m)\sin(x_3) - m^2l^2x_4^2\sin(x_3)\cos(x_3)}{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{J+ml^2}{p} \\ 0 \\ \dfrac{ml\cos(x_3)}{p} \end{bmatrix} F,$$

pri čemu je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T,$$

$$p = J(M+m) + Mml^2 + m^2l^2(1-\cos^2 x_3).$$

Metod lokalne aproksimacije

Aproksimaciju modela ćemo izvršiti u okolini uglova $\theta \approx 0°$ (uspravan položaj klatna) i $\theta \approx \pm 90°$.

Kada je $\theta \approx 0°$, važi $\sin(\theta) \approx \theta$. Sa druge možemo usvojiti $\dot{\theta}^2 \approx 0$ i $\cos(\theta) \approx 1$, pa dobija sljedeći linearni model klatna:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-(J+ml^2)b}{p} & \dfrac{m^2gl^2}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-mlb}{p} & \dfrac{mgl(m+M)}{p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{J+ml^2}{p} \\ 0 \\ \dfrac{ml}{p} \end{bmatrix} F,$$

Sa druge strane, kada je $\theta \approx \pm 90°$, mogu se usvojiti sljedeće aproksimacije:

$$\sin(\theta) \approx \frac{2}{\pi}\theta, \quad \cos(\theta) \approx \cos(88^\circ) \ \text{ i } \ \dot{\theta}^2 = 0.$$

Prilično netačno

Ovaj izraz se svodi na ± 1 za $\theta \approx \pm 90°$

Model postaje nekontrolabilan ako se usvoji $\cos(90°)$

Metod lokalne aproksimacije

Koristeći prethodne aproksimacije dobija se sljedeći model inverznog klatna u prostoru stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-(J+ml^2)b}{p} & \dfrac{2m^2gl^2}{\pi p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-mlb\cos(88^\circ)}{p} & \dfrac{2mgl(m+M)}{\pi p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{J+ml^2}{p} \\ 0 \\ \dfrac{ml\cos(88^\circ)}{p} \end{bmatrix} F.$$

Rezultujući T-S fazi sistem se zapisuje na sljedeći način:

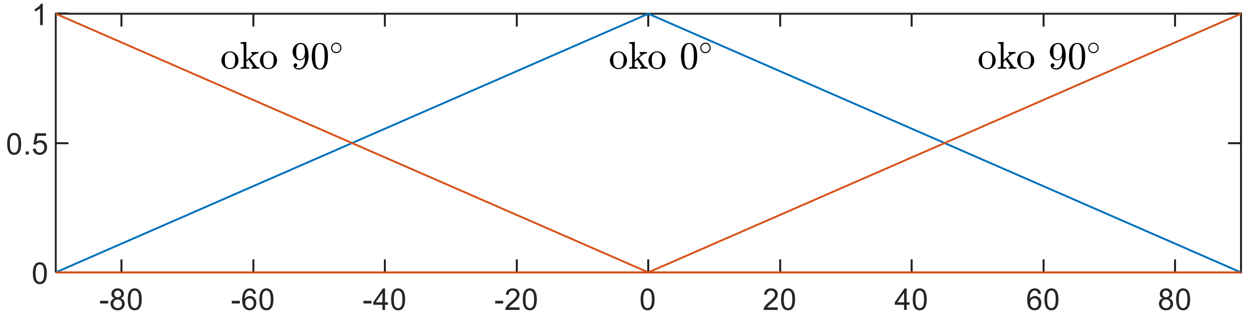
$$\mathbf{R1}: \quad \text{IF } x_3(t) \text{ is "oko } 0^\circ\text{", THEN } \dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}_1 u,$$

$$\mathbf{R2}: \quad \text{IF } x_3(t) \text{ is "oko } \pm 90^\circ\text{", THEN } \dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}_2 u,$$

pri čemu treba primijetiti da se matrice stanja razlikuju za gornja dva modela, dok su matrice ulaza iste.

Metod lokalne aproksimacije

Funkcije pripadnosti „oko 0°" i „oko 90°" se mogu dizajnirati kao na slici ispod.



Napomena: Funkcije pripadnosti se mogu dizajnirati i na drugačiji način ako želimo da postignemo glatkiji prelaz između lokalnih modela. Npr. dobar izbor bi bile Gausove funkcije. Treba napomenuti da je lokalni model u okolini ugla $\theta \approx \pm\, 90^\circ$ dosta neprecizan, jer ugaona brzina klatna u tom položaju nikad nije jednaka nuli. Čitav fazi model bi se mogao poboljšati uvođenjem funkcija pripadnosti za ugaonu brzinu, čime bi se povećao broj fazi pravila. Međutim, kasnije će biti pokazano da i ovakav model može obezbijediti robusnije upravljanje u odnosu na slučaj kada se samo koristi linearizovani model u okolini ugla $\theta \approx 0^\circ$.

Primjer 1 – Metod lokalne aproksimacije

Razmatra se DC motor čija dinamika uključuje nelinearno trenje. Sistem je opisan sljedećim diferencijalnim jednačinama:

$$J\ddot{\theta}(t) + b(\dot{\theta}(t))\dot{\theta}(t) + k_e\dot{\theta}(t) = k_t i(t),$$

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) - k_b\dot{\theta}(t).$$

Nelinearno trenje zavisi od ugaone brzine na sljedeći način:

$$b(\dot{\theta}) = b_0 + b_1 \,|\, \dot{\theta}(t) \,|,$$

gdje su b_0 i b_1 pozitivne konstante.

Parametri motora su: J=0.01 kg·m2, b_0=0.1 N·m·s/rad, b_1=0.05 N·m·s^2/rad^2, k_e=0.5 V·s/rad, k_t=0.5 N·m/A, R=1Ω, L=0.1H.

a) Odrediti T-S fazi model DC motora. Lokalnu aproksimaciju izvršiti za brzine 0 rad/s i 10 rad/s. Skicirati funkcije pripadnosti.
b) Simulirati i uporediti odzive nelinearnog i T-S fazi modela. Razmotriti različite vrijednosti ulaznog napona.

Uslovi stabilnosti za T-S fazi sisteme

U nastavku su date dvije teoreme koje se odnose na stabilnost kontinualnih i diskretnih T-S fazi sistema.

Teorema 1: Ekvilibrijum kontinualnog T-S fazi sistema je globalno asimptotski stabilan ukoliko postoji zajednička pozitivno definitna matrica **P** koja zadovoljava sljedeći set linearnih matričnih nejednačina:

$$\mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Teorema 1': Ekvilibrijum diskretnog T-S fazi sistema je globalno asimptotski stabilan ukoliko postoji zajednička pozitivno definitna matrica **P** koja zadovoljava sljedeći set linearnih matričnih nejednačina:

$$\mathbf{A}_i^T\mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{P} < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Napomena: gornje teoreme važe za linearne sisteme, tj. za slučaj kada je r=1, i one su direktna posljedica Ljapunove teoreme stabilnosti. Treba voditi računa da stabilnost pojedinačnih podsistema ne implicira stabilnost cjelokupnog T-S fazi sistema. Drugim riječima, matrica **P** mora biti zajednička za sve podsisteme da bi se garantovala stabilnost cjelokupnog T-S fazi sistema.

Uslovi stabilnosti za T-S fazi sisteme

Razmotrimo problem stabilizacije sistema (bez referentnog signala) i sljedeći T-S fazi kontroler:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{K}_i\mathbf{x}(t).$$

Ukoliko se signal $u(t)$ primijeni na kontinualni T-S fazi sistem, dobija se sljedeći model spregnutog sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t))\{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{K}_j\}\mathbf{x}(t).$$

Primjenom teoreme 1 na gornji sistem, dobija se sljedeći uslov stabilnosti.

Teorema 2: Ekvilibrijum kontinualnog T-S fazi sistema je globalno asimptotski stabilan ukoliko postoji zajednička pozitivno definitna matrica $\mathbf{P}$ koja zadovoljava sljedeći set matričnih nejednačina:

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{K}_j)^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{K}_j) < 0,$$

za $h_i(\mathbf{z}(t)) \cdot h_j(\mathbf{z}(t)) \neq 0, \forall t, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r.$

Uslovi stabilnosti za T-S fazi sisteme

Spregnuti T-S fazi sistem se može zapisati i na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\sum_{i=1}^{r} h_i(\mathbf{z}(t)) h_i(\mathbf{z}(t)) \{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i\} \mathbf{x}(t) \right] + 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{i<j} h_i(\mathbf{z}(t)) h_j(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ij} \mathbf{x}(t),$$

gdje je

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{\{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j\} + \{\mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{K}_i\}}{2}, \quad i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j \neq \emptyset.$$

Teorema 3: Ekvilibrijum kontinualnog T-S fazi sistema je globalno asimptotski stabilan ukoliko postoji zajednička pozitivno definitna matrica $\mathbf{P}$ koja zadovoljava sljedeća dva seta matričnih nejednačina:

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i) < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

$$\mathbf{G}_{ij}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ij} < 0, \quad i < j \leq r \text{ s.t. } h_i \cap h_j \neq \emptyset.$$

Ovaj rezultat direktno slijedi iz teoreme 1 i osobine da je zbir dvije pozitivno definitne matrice pozitivno definitna matrica

Drugi (donji) uslov ima smisla razmatrati samo ako je proizvod $h_i(\mathbf{z}(t)) \times h_j(\mathbf{z}(\mathrm{t})) \approx 0$ za neko t.

Uslovi stabilnosti za T-S fazi sisteme

Teorema 3 se može dodatno pojednostaviti u slučaju kada je sistem linearan po ulazu, tj. kada su matrice $\mathbf{B}_i$ identične i jednake $\mathbf{B}$.

Teorema 4: Kada je $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}$, $i = 1, ..., r$, ekvilibrijum kontinualnog fazi sistema je asimptotski stabilan ukoliko postoji zajednička pozitivno definitna matrica $\mathbf{P}$ koja zadovoljava sljedeći set nejednačina:

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i) < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

Na osnovu teoreme 1', analogno se mogu izvesti teoreme za diskretne T-S fazi sisteme. Na primjer, formulacija teoreme 3 za diskretne sisteme je data u nastavku.

Teorema 3': Ekvilibrijum diskretnog T-S fazi sistema je globalno asimptotski stabilan ukoliko postoji zajednička pozitivno definitna matrica $\mathbf{P}$ koja zadovoljava sljedeća dva seta matričnih nejednačina:

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{K}_i)^T \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{K}_i) - \mathbf{P} < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

$$\mathbf{G}_{ij}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ij} - \mathbf{P} < 0, \quad i < j \le r \text{ s.t. } h_i \cap h_j \ne \varnothing.$$

Linearne matrične nejednačine

Uslovi stabilnosti koji su prezentovani su predstavljeni u obliku matričnih nejednačina. LMI pripadaju klasi konveksnih optimizacionih problema za koje postoje softverski alati koji mogu da ih riješe.

Npr, nejednačina $\mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i < 0$ je linearna po $\mathbf{P}$, pri čemu se $\mathbf{P}$ koje je zadovoljava može jednostavno odrediti pomoću odgovarajućeg solvera.

Sa druge strane, matrična nejednačina

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i)^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i) < 0$$

nije linearna, jer sadrži proizvod nepoznatih matrica $\mathbf{F}_i$ i $\mathbf{P}$.

Međutim, ako se gornja nejednačina pomnoži sa lijeve i desne strane sa $\mathbf{X}=\mathbf{P}^{-1}$ i uvede smjena $\mathbf{M}_i=\mathbf{F}_i\mathbf{X}$, dolazi se do sljedeće nejednačine:

$$\mathbf{X}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1})^T\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1})\mathbf{X} < 0,$$

$$\boxed{(\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{M}_i)^T + (\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{M}_i) < 0.}$$

Nakon što se na osnovu gornje nejednačine odrede $\mathbf{X}$ i $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{K}_i$ se računa na osnovu izraza $\mathbf{K}_i=\mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1}$.

Linearne matrične nejednačine

Kod diskretnih sistema se pojavljuje nejednačina

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i)^T \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i) - \mathbf{P} < 0,$$

koja je takođe nelinearna. Ako se gornja nejednačina pomnoži sa lijeve i desne strane sa $\mathbf{X}=\mathbf{P}^{-1}$ i uvede smjena $\mathbf{M}_i=\mathbf{F}_i\mathbf{X}$, dolazi se do sljedeće nejednačine:

$$\mathbf{X}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1})^T \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1})\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} < 0,$$

$$(\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i)^T \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i) - \mathbf{X} < 0,$$

odnosno:

$$\mathbf{X} - (\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i)^T \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i) > 0.$$

Primjenom osobine Šurovog komplementa prethodna jednačina se može transformisati u linearni ekvivalent:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{X} & (\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i)^T \\ \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0.}$$

Sinteza T-S fazi kontrolera

Prethodno opisani postupak za određivanje pojačanja $\mathbf{K}_i$ se može uopštiti na T-S fazi sisteme. U nastavku je opisana procedura za određivanje pojačanja $\mathbf{K}_i$, i=1,...,r, kod kontinualnih T-S fazi kontrolera.

1. Riješiti sljedeće LMI:

$$(\mathbf{A}_i\mathbf{X}-\mathbf{B}_i\mathbf{M}_i)^T+(\mathbf{A}_i\mathbf{X}-\mathbf{B}_i\mathbf{M}_i)<0, i=1,\dots r$$

$$-\mathbf{X}\mathbf{A}_i^T-\mathbf{A}_i\mathbf{X}-\mathbf{X}\mathbf{A}_j^T-\mathbf{A}_j\mathbf{X}$$

$$+\mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_i^T+\mathbf{B}_i\mathbf{M}_j+\mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_j^T+\mathbf{B}_j\mathbf{M}_i>0,\ \ i<j \text{ s.t. } h_i\cap h_j\neq\varnothing.$$

2. Nakon određivanja $\mathbf{X}$ i $\mathbf{M}_i$, odrediti vektor $\mathbf{K}_i$ na sljedeći način:

$$\mathbf{K}_i=\mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1}.$$

Napomena: Za r=2, ukupno je potrebno riješiti 3 LMI. Moguće se svaki podsistem posmatrati zasebno i za njega izvršiti sintezu linearnog kontrolera. Međutim, u tom slučaju nema garancija da će rezultujući spregnuti T-S fazi sistem biti stabilan.

Sinteza T-S fazi kontrolera

Na sličan način se može generalizovati postupak za sintezu fazi kontrolera za diskretne fazi sisteme.

1. Riješiti sljedeće LMI:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & (\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i)^T \\ \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0, \;\; i = 1, \ldots r.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \dfrac{\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i}{2} \\ \left(\dfrac{\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i}{2}\right)^T & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0,$$

$i < j \leq r$ s.t. $h_i \cap h_j \neq \varnothing$.

2. Nakon određivanja $\mathbf{X}$ i $\mathbf{M}_i$, odrediti vektor $\mathbf{K}_i$ na sljedeći način:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1}.$$

Primjer 1 – Sinteza T-S fazi kontrolera

Razmatra se T-S fazi sistem inverznog klatna linearizovanog u okolini uglova $\theta \approx 0°$ i $\theta \approx \pm 90°$:

$$\mathbf{R1}: \quad \text{IF } x_3(t) \text{ is "oko } 0°\text{"}, \text{ THEN } \dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}_1 u,$$

$$\mathbf{R2}: \quad \text{IF } x_3(t) \text{ is "oko } \pm 90°\text{"}, \text{ THEN } \dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}_2 u,$$

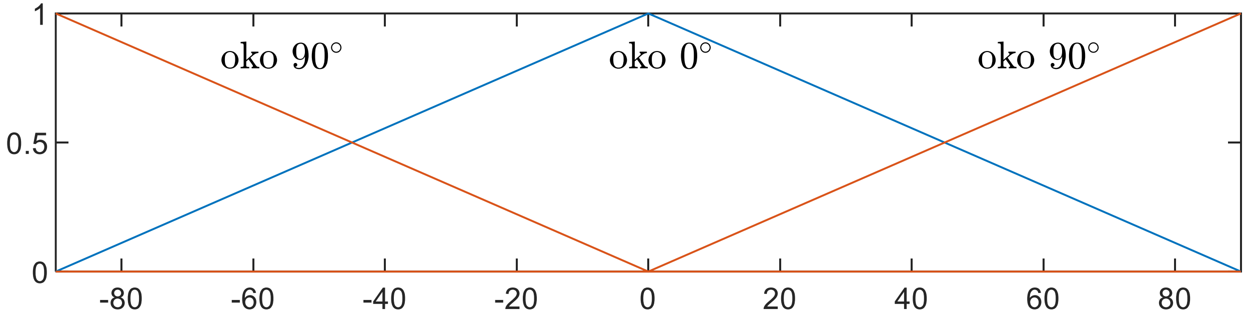
gdje su matrice $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ jednake:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-(J+ml^2)b}{p} & \dfrac{m^2gl^2}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-mlb}{p} & \dfrac{mgl(m+M)}{p} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{J+ml^2}{p} \\ 0 \\ \dfrac{ml}{p} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-(J+ml^2)b}{p} & \dfrac{2m^2gl^2}{\pi p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-mlb\cos(88^\circ)}{p} & \dfrac{2mgl(m+M)}{\pi p} & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{J+ml^2}{p} \\ 0 \\ \dfrac{ml\cos(88^\circ)}{p} \end{bmatrix}.$$

Primjer 1 – Sinteza T-S fazi kontrolera

Funkcije pripadnosti „oko 0°“ i „oko 90°“ su prikazane na slici ispod.



Parametri sistema su: M=0.5 kg, m=0.1 kg, J=0.006 kgm2, k=0.1 N/m/sec, l=0.3 m. Izvršiti sintezu fazi kontrolera oblika:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(x_3(t))\mathbf{K}_i\mathbf{x}(t).$$

Rješenje:

Da bi odredili $\mathbf{K}_1$ i $\mathbf{K}_2$, potrebno je riješiti LMI:

$$(\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i)^T + (\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i) < 0,\ \ i = 1,2.$$

$$-\mathbf{X}\mathbf{A}_1^T - \mathbf{A}_1\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{A}_2^T - \mathbf{A}_2\mathbf{X}$$

$$+\mathbf{M}_2^T\mathbf{B}_1^T + \mathbf{B}_1\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1^T\mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_2\mathbf{M}_1 > 0.$$

Primjer 1 – Sinteza T-S fazi kontrolera

Rješenje prethodnih LMI su matrice:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5.48 & -0.59 & 0.02 & -0.06 \\ -0.59 & 0.33 & 0.01 & -0.02 \\ 0.02 & 0.01 & 0.01 & -0.04 \\ -0.06 & -0.02 & -0.04 & 0.15 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \begin{bmatrix} 0.15 & 0.06 & 0.06 & -0.15 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}_2 &= \begin{bmatrix} 0.16 & 0.08 & 0.06 & -0.19 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

odakle se dobija:

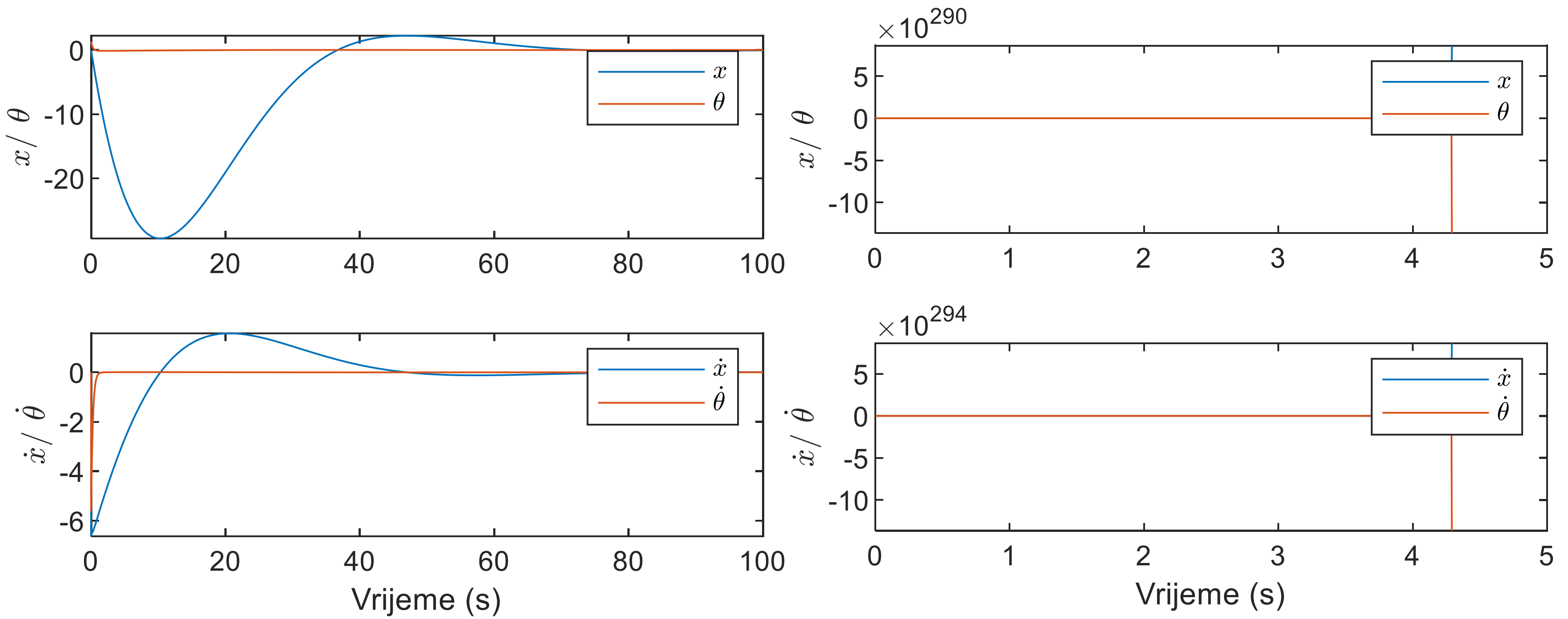
$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -11.90 & -104.50 & 5294.90 & 1329.90 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -9.20 & -80.70 & 4095.60 & 1028.20 \end{bmatrix}.$$

Može se uočiti da su rezultujuća pojačanja velika. Razlog za to je što se dinamika lokalnih modela značajno razlikuje.

Manje vrijednosti pojačanja bi dobili ukoliko bi za svaki podsistem zasebno odredili pojačanja $\mathbf{K}_1$ i $\mathbf{K}_2$, međutim u tom slučaju nema garancija da će rezultujući sistem biti stabilan (provjeriti simulacijom). Sa druge strane, sistem se može linearizovati i u okolini uglova koji su međusobno bliži.

Primjer 1 – Sinteza T-S fazi kontrolera



Na slici lijevo su prikazane promjenljive sistema u slučaju kada se koristi T-S fazi kontroler. Početni ugaoni pomjeraj klatna iznosi 75°. Sa slike se vidi da je sistem stabilan, tj. da θ konvergira ka nuli. Zbog velikog pojačanja (i upravljačkog signala) kolica se pomjeraju i do 30m u odnosu na koordinatni početak. Na slici desno su prikazane promjenljive sistema u slučaju kada se koristi klasični linearni kontroler. Može se zaključiti da ovakav kontroler ne može stabilizovati sistem, jer je početni ugaoni pomjeraj klatna veliki.

kod 1, kod 2